Scritto di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2019/20 17/02/2020

NOME: COGNOME:
È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da $f(x) = \left(\frac{x}{x^2-2}\right)^{11} - \left(\frac{x}{3x^2-6}\right)^6$.
b) Determinare, se esiste, al variare di $a \in \mathbf{R}$, il limite $\lim_{x\to+\infty} x^a f(x)$.
c) Provare che se $r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione continua in 8, esiste $\delta > 0$ tale che se $x, x' \in [8-\delta, 8+\delta]$ allora $|r(x) - r(x')| < \frac{1}{1000}$.
d) Provare che se g è una funzione da $[2,3]$ in $\mathbf{R}$ tale che vale il seguente fatto

$$\forall\, x_0 \in [2,3]\ \exists\, \delta > 0\ \exists M \in \mathbf{R} : g(x) < M\ \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap [2,3]$$

allora g è superiormente limitata (NOTA: non supponiamo g necessariamente continua).

2) Dire per quali numeri reali $a > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(a^2+1+\frac{2}{n}\right)^n n^{39}}{(n^2+1)^{20} 8^n + 1}.$$

3) Calcolare, al variare dei numeri reali a e b, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{\ln(1+bx) + \frac{x}{x^2+1} + 1 - e^x} + \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\sin(x)\big(\ln(x)\big)^{10}.$$

4) a) Calcolare, per opportuni numeri reali a e b l'integrale definito $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + ax^b}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[4]{x}}\, dx$.

b) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \left(D\left(x\cos(x)\big(\sin(x)+5\big)^{e\pi}\right)\ln(x)\right) dx$, ove D indica la derivata della funzione.

Scritto di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2019/20 17/02/2020

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da $f(x) = \left(\frac{x}{4x^2-8}\right)^7 - \left(\frac{x}{x^2-2}\right)^{13}$.

b) Determinare, se esiste, al variare di $a \in \mathbf{R}$, il limite $\lim_{x\to+\infty} x^a f(x)$.

c) Provare che se $r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione continua in 5, esiste $\delta > 0$ tale che se $x, x' \in [5-\delta, 5+\delta]$ allora $|r(x) - r(x')| < \frac{\pi}{4000}$.

d) Provare che se g è una funzione da $[5,7]$ in $\mathbf{R}$ tale che vale il seguente fatto

$$\forall\, x_0 \in [5,7]\ \exists\, \delta > 0\ \exists M \in \mathbf{R} : g(x) < M\ \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap [5,7]$$

allora g è superiormente limitata (NOTA: non supponiamo g necessariamente continua).

2) Dire per quali numeri reali $a > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(a^3+7+\frac{5}{n}\right)^n n^{45}}{(n^2+1)^{24} 11^n + 1}.$$

3) Calcolare, al variare dei numeri reali a e b, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{\ln(1+bx) - \frac{x}{x^2+1} + 3 - 3e^x} + \left(\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \sin(x)\big(\ln(x)\big)^{13}.$$

4) a) Calcolare, per opportuni numeri reali a e b l'integrale definito $\displaystyle\int_1^8 \frac{\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{x} + ax^b}{\sqrt[10]{x} + \sqrt[8]{x}}\, dx$.

b) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \left(D\left(x\sin(x)\big(\cos(x)+3\big)^{e\pi}\right)\ln(x)\right) dx$, ove D indica la derivata della funzione.

Scritto di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2019/20 03/02/2020

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da $f(x) = e^{\frac{1}{2x+3}} - 5e^{\frac{2}{2x+3}}$.

b) Calcolare il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ al variare di $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$.

c) Provare che se g è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ limitata tale che non esiste $\lim_{x\to+\infty} g(x)$, allora esiste una successione $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tale che non esiste limite $\lim_{n\to+\infty} g(x_n)$.

2) a) Dire per quali numeri reali $a > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n+1}}{\frac{n^{10}}{n^a+1}} + \frac{n^{10}\big((a-2)^n + n\big)}{(n+4)!} \right).$$

b) Sia data una successione $a_n > 0$ illimitata. Provare che esiste un indice n tale che $\frac{1}{a_n} < \sqrt{123456789} - \sqrt{123456788}$.

3) a) Calcolare, se esiste, al variare di $a, b \in \mathbf{R}$, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left((x^2+3)^b - 1\right)\left(e^{\frac{x^a}{x^2+1}} - 1\right)$$

b) Calcolare, al variare dei numeri reali a e b, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{(1+x^2)^3 - e^{bx^2} - x^{\frac{3}{2}} \sin(\sqrt{x})}.$$

4) Calcolare, per un opportuno $a > 0$, l'integrale indefinito

$$\int \left(\frac{(7x+2)^{40} - 1}{(14x+4)^{20} + a} + x^3(x^2+1)^\pi \right) dx.$$

Scritto di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2019/20 03/02/2020

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da $f(x) = 10e^{\frac{2}{2x+3}} - 2e^{\frac{1}{2x+3}}$.
b) Calcolare il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ al variare di $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$.
c) Provare che se g è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ limitata tale che non esiste $\lim_{x\to+\infty} g(x)$, allora esiste una successione $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tale che non esiste limite $\lim_{n\to+\infty} g(x_n)$.

2) a) Dire per quali numeri reali $a > 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt[4]{n}+\sqrt[3]{n+1}}{\frac{n^7}{n^a+1}}+\frac{n^{10}\big((a-3)^n+n\big)}{(n+6)!}\right).$$

b) Sia data una successione $a_n > 0$ illimitata. Provare che esiste un indice n tale che $\frac{1}{a_n} < \sqrt{123456789} - \sqrt{123456788}$.

3) a) Calcolare, se esiste, al variare di $a, b \in \mathbf{R}$, il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left((x^2+3)^b-1\right)\left(e^{\frac{x^a}{x^2+1}}-1\right)$$

b) Calcolare, al variare dei numeri reali a e b, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^a}{(1+x^2)^3-e^{bx^2}-x^{\frac{3}{2}}\sin(\sqrt{x})}.$$

4) Calcolare, per un opportuno $a > 0$, l'integrale indefinito

$$\int\left(\frac{(8x+1)^{40}-1}{(24x+3)^{20}+a}+x^3(x^2+3)^e\right)dx.$$

Terzo Esonero di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2019/20 25/01/2020

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto __________________________

1) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da $f(x) = \sqrt[4]{e^{2x^2} - 6e^{x^2} + 5}$.

b) Provare che se u è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $u(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, allora l'equazione $\sin\big(u(x)\big) = 0$ ha infinite soluzioni. (Provare almeno che ha almeno una soluzione).

c) Provare che se g è una funzione derivabile da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, allora l'equazione $g'(x)\sin(x) + g(x)\cos(x) = 0$ ha infinite soluzioni.

2) Calcolare, se esiste, al variare di $a \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^a \ln\big(1+\sin(x^2)\big)}{x^2\sin(x) - 2xe^{x^2} + 2x}$$

3) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Big(\frac{(2x+3)^{\sqrt{2}}}{(4x+6)^{\sqrt{3}}} + \frac{e^{3x}}{e^{2x}+9}\Big)\,dx.$$

Terzo Esonero di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2019/20 25/01/2020

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto __________________________

1) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da $f(x) = 5\sqrt[6]{e^{2x^2} - 6e^{x^2} + 5}$.

b) Provare che se u è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ e $u(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, allora l'equazione $\sin\big(u(x)\big) = 0$ ha infinite soluzioni. (Provare almeno che ha almeno una soluzione).

c) Provare che se g è una funzione derivabile da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, allora l'equazione $g'(x)\sin(x) + g(x)\cos(x) = 0$ ha infinite soluzioni.

2) Calcolare, se esiste, al variare di $a \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a \ln\big(1+\sin(x^2)\big)}{x^3\sin(x) - 2x^2e^{x^2} + 2x^2}$$

3) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Big(\frac{(5x+2)^{\sqrt{5}}}{(10x+4)^{\sqrt{7}}} + \frac{e^{3x}}{e^{2x}+16}\Big)\, dx.$$

Secondo Esonero di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2019/20 10/12/2019

NOME: COGNOME:
È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1}\Big(\cos(3x+1)+(x-1)^{-10}\ e^{-\frac{1}{(x-1)^4}}\Big)$$

b) Sia g una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $g(0)=a$ e sia $v_{a,b}$ la funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ definita da

$$v_{a,b}(x)=\begin{cases}\ln(5+x^2) & \text{se } x>0,\\[4pt] \dfrac{e^{x\sin(x)g(x)}-1}{x^2} & \text{se } x<0,\\ b & \text{se } x=0.\end{cases}$$

Dire per quali numeri reali a e b $v_{a,b}$ è continua in $\mathbf{R}$.

2) a) Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2\ln\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n+1)^7+2}}$ converge.

b) Dire per quali numeri reali a e x la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\big(\ln(x+5)\big)^n}{7^n n^a+n^2+2}$ converge.

c) Sia f una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Provare che se $f(0)\neq 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f\big(\frac{1}{n}\big)$ diverge.

d) Sia f una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e supponiamo f derivabile in 0 con $f'(0)\neq 0$. Provare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f\big(\frac{1}{n}\big)$ diverge.

Secondo Esonero di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2019/20 10/12/2019

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 2}\Big(\ln(x^2+1)+(x-2)^{-6}\ e^{-\frac{1}{(x-2)^4}}\Big)$$

b) Sia g una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $g(0)=a$ e sia $v_{a,b}$ la funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ definita da

$$v_{a,b}(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\sin(x)g(x)}-1}{x} & \text{se } x>0,\\ 2\cos(x) & \text{se } x<0,\\ b & \text{se } x=0.\end{cases}$$

Dire per quali numeri reali a e b $v_{a,b}$ è continua in $\mathbf{R}$.

2) a) Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{\ln\left(2-\frac{1}{3n}\right)\sqrt[3]{(8n+1)^{11}+4}}$ converge.

b) Dire per quali numeri reali a e x la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\big(\ln(10-a)\big)^n}{9^n n^x+3n^5+1}$ converge.

c) Sia f una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Provare che se $f(0)\neq 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f\Big(\frac{1}{n}\Big)$ diverge.

d) Sia f una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e supponiamo f derivabile in 0 con $f'(0)\neq 0$. Provare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f\Big(\frac{1}{n}\Big)$ diverge.

Esonero di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2019/20 16/11/2019

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Sia $g(x) = (8-3x)(x-2)\Big(\big((x-2)^4-1\big)^3-5\Big)$.

a) Risolvere la disequazione $g(x) < 0$.

b) Provare che se u è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e $\bar{x}$ è soluzione della disequazione

$$u(x)g(x)+1>0, \qquad (D)$$

allora esiste $\delta > 0$ tale che ogni $x \in \,]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[$ è soluzione di (D).

2) a) Calcolare, se esiste, il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\big((3\sqrt[7]{n}+1)^5+1\big)^9+n^2}{2^n+n}$.

b) Provare che se (a_n) è una successione, $a_n > 0$ per ogni n e b_n è una successione tale che $2 \leq b_n \leq 5$ per ogni n, e inoltre la successione $a_n b_n$ è superiormente illimitata, allora anche la successione a_n è superiormente illimitata.

c) Provare che se (a_n) è una successione limitata senza massimo, allora esiste un numero reale a diverso da tutti gli a_n tale che la successione $\dfrac{1}{a-a_n}$ è superiormente illimitata.

3) a) Calcolare, al variare di $a > 0$, se esiste, il limite di funzione, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3^{ae^x}}{e^x 8^{e^x}+x}$.

b) Calcolare, al variare di $a > 0$, se esiste, il limite di funzione

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^a}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[7]{x}\ e^x}$.

c) Calcolare, al variare di $a > 0$ e $b \in \mathbf{R}$ (in particolare per $b = 1$), se esiste, il limite di funzione $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^a}{b-\cos(xe^{2x})}$.

NOTA. La parte c) dell'esercizio 2) è la parte piú difficile del compito, ed è in piú, ossia si prende 30 senza farla.

Esonero di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2019/20 16/11/2019

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Sia $g(x) = (5x-4)(3-x)\Big(\big(7-(x+3)^6\big)^3 - 1\Big)$.

a) Risolvere la disequazione $g(x) < 0$.

b) Provare che se u è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e $\bar{x}$ è soluzione della disequazione

$$u(x) + xg(x) > 0, \qquad (D)$$

allora esiste $\delta > 0$ tale che ogni $x \in]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[$ è soluzione di (D).

2) a) Calcolare, se esiste, il limite di successione $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3^n + n}{\big(4(9\sqrt[3]{n}+1)^8+4\big)^6 + n^3}$.

b) Provare che se (a_n) è una successione, $a_n > 0$ per ogni n e b_n è una successione tale che $4 \le b_n \le 8$ per ogni n, e inoltre la successione $a_n b_n$ è superiormente illimitata, allora anche la successione a_n è superiormente illimitata.

c) Provare che se (a_n) è una successione limitata senza minimo, allora esiste un numero reale a diverso da tutti gli a_n tale che la successione $\dfrac{1}{a_n - a}$ è superiormente illimitata.

3) a) Calcolare, al variare di $a > 0$, se esiste, il limite di funzione, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x 7^{e^x} + x^2}{2^{ae^x}}$.

b) Calcolare, al variare di $a > 0$, se esiste, il limite di funzione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2a}}{\sqrt{x}\sqrt[5]{x^3+2} + \sqrt[5]{x}\,\sqrt[67]{x}\ \cos(x)}.$$

c) Calcolare, al variare di $a > 0$ e $b \in \mathbf{R}$ (in particolare per $b = 1$), se esiste, il limite di funzione $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^a}{e^{x\cos(2x)} - b}$.

NOTA. La parte c) dell'esercizio 2) è la parte piú difficile del compito, ed è in piú, ossia si prende 30 senza farla.