Scritto di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2018/19 19/09/2019

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Determinare un numero reale c tale che l'espressione $(2^x+1)(2^{x+c}-8)$ sia della forma $\alpha 4^x+\beta$ per opportuni numeri reali α e β.

2) a) Sia f la funzione definita da $f(x)=7(3x^2+1)^{11}-x^2$. Studiare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f.
b) Dire quante soluzioni ha l'equazione $f(x)=a$ al variare di $a\in\mathbf{R}$.
c) Risolvere la disequazione $f'(x)(3^{x^5}-2)<0$.
d) Provare che se u è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ superiormente illimitata allora la funzione v definita da $v(x)=e^{u(x)}$ è superiormente illimitata.
e) Provare che se w è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e esistono $\lim_{x\to 0^+} w(x):=l_+$ e $\lim_{x\to 0^-} w(x):=l_-$, e l_+ e l_- sono numeri reali diversi tra loro, allora esistono $\delta>0$, $x_1,x_2\in]-\delta,\delta[$ e $y\in\mathbf{R}$ tali che $w(x_1)<y<w(x_2)$ ma $w(x)\neq y$ per ogni $x\in]-\delta,\delta[$.

3) Dire per quali numeri reali b converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(bn+1)^n}{n(3^n n^n+1)}$.

4) a) Calcolare, se esiste, al variare di $a>0$, il limite $\lim_{x\to-\infty}\big(-1+\sqrt{2}\big)^{3x}-a^{x+1}$.
b) Calcolare, se esiste, al variare dei numeri reali a e b, il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^a}{(x^2+x)\ln(1+5x)-bx^2+1-\cos(x).}$$

Scritto di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2018/19   02/09/2019

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Determinare dei numeri reali a e b in modo che l'espressione

$$\left(\sqrt[4]{x^2+1}-3\right)\left(\sqrt[4]{x^2+1}+3\right)\left(\sqrt{ax^2+b}+18\right)$$

sia uguale ad un polinomio.

2) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione u definita da $u(x) = \big(\ln(x)-7\big)^7 - 2\big(\ln(x)-7\big)^4 + \ln(x)$.
b) Risolvere la disequazione

$$\Bigg(\ln\Big(\ln\big(\ln(x)\big)\Big) - 2\Bigg)(x-2)(x-5) < 0.$$

3) a) Dire per quali numeri reali a la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, ove

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n^a \sqrt[3]{n^5+1}}{\big((n+2)^3 - n^3\big)\sqrt{n^{\sqrt{2}}+1}} & \text{se } n > 11746 \\ \dfrac{n^3}{n^{a^2}+2} & \text{se } n \leq 11746. \end{cases}$$

b) Provare che se (b_n) è una successione di numeri reali e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge e g è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, allora la successione $g(b_n)$ è convergente.
c) Provare con un esempio che se in b) la funzione g è supposta invece continua in tutti i punti tranne uno, allora la successione $g(b_n)$ può non avere limite.

4) a) Calcolare, se esiste, al variare di $a > 0$, il limite $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{a^2+2}\right)^x - 5^{9x}\ln(x)$.
b) Calcolare, se esiste, al variare di $a > 0$ e $b \in \mathbf{R}$, il limite $\lim_{x\to-\infty} e^{\left(\cos(e^x)-b\right)a^x}$.
c) Calcolare, se esiste, al variare dei numeri reali a e b, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{x(e^{\pi x}-1) - b\sin(x^2) + e^{x^8} - 1}.$$

Scritto di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2018/19 16/07/2019

NOME: COGNOME:
È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Determinare un polinomio P tale che $\big(P(x)\big)^2$ abbia la forma x^4+11x^2+c con $c \in \mathbf{R}$.

2) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione u definita da $u(x)=(x^2-1)^{11}-5(x^2-1)^6+2x^2$.
b) Determinare il dominio della funzione v definita da $v(x)=\ln\big(-(x-2)\ln(x)\big)$.
c) Provare che se f è una funzione illimitata da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ allora esiste una successione a_n di numeri reali tale che $|f(a_n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
d) Provare che nelle ipotesi di c), se inoltre f è continua allora ogni successione a_n come in c) soddisfa $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3) Dire per quali numeri reali a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, ove

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{a^{3n+2}}{n\big((\sqrt{10}-2)^n+n^2\big)} & \text{se } n>128 \\[2mm] \dfrac{1}{3n+2} & \text{se } n \le 128. \end{cases}$$

4) a) Sia r la funzione definita da

$$r(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{5x}-1}{x}-7^{ax}-a\,200^{\sqrt{x}} & \text{se } x>0 \\ 3x-2 & \text{se } x\le 0. \end{cases}$$

Determinare, se esiste $\lim\limits_{x\to 0} r(x)$ al variare di $a\in\mathbf{R}$.
b) Determinare, se esiste, $\lim\limits_{x\to+\infty} r(x)$ al variare di $a\in\mathbf{R}$.
c) Calcolare, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{\ln(1-5x^2)+x\sin(bx)+2-2\cos(bx)}$ al variare dei numeri reali a e b, e in particolare se $b=0$.

Scritto di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2018/19 21/06/2019

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Determinare un numero reale $a \neq 1$ tale che l'espressione $\dfrac{e^{ax} - e^{x}}{e^{a^2 x} + e^{x}}$ si possa scrivere nella forma $e^{bx} + c$ con b e c numeri reali.

2) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione u definita da $u(x) = \dfrac{e^{2\sqrt{x}} - 2}{e^{\sqrt{x}} + 3}$.
b) Posto $v(x) = u(x)(x-4)\big((5x-1)^6 - 2\big)$, risolvere la disequazione $v(x) < 0$.

3) a) Dire per quali numeri reali a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n^a+1)^{\sqrt{2}}}{n^{13}+8}$ converge.
b) Dire per quali numeri reali a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n^a+1)^{\sqrt{2}}}{(n^4+1)^{\pi} - n^{4\pi}}$ converge.
c) Sia (a_n) una successione di numeri reali illimitata. Provare che la disuguaglianza $|a_n| > 10^{80}$ vale per infiniti n.
d) Provare che se $a_n > 0$ e la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(e^{a_n} - 1\big)$ converge.

4) a) Calcolare, se esiste, al variare di $a > 0$, il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{e^{3x} - x^2 a^x}$.
b) Calcolare, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} \frac{(x-5)^a \cos(3x)}{\sin(2x-10) + b(3x-15)}$ al variare dei numeri reali a e b, e in particolare se $b = 0$.

Scritto di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2018/19 21/06/2019

NOME: COGNOME:
È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Determinare un numero reale $a \neq 1$ tale che l'espressione $\dfrac{e^{ax} - e^x}{e^{a^2 x} + e^x}$ si possa scrivere nella forma $e^{bx} + c$ con b e c numeri reali.

2) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione u definita da $u(x) = \dfrac{e^{2\sqrt{x}} - 4}{e^{\sqrt{x}} + 7}$.
b) Posto $v(x) = u(x)(x-4)\big((5x-1)^6 - 2\big)$, risolvere la disequazione $v(x) < 0$.

3) a) Dire per quali numeri reali a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(n^a+1)^{\sqrt{5}}}{n^{15}+12}$ converge.
b) Dire per quali numeri reali a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(n^a+1)^{\sqrt{5}}}{(n^6+1)^{\pi} - n^{6\pi}}$ converge.
c) Sia (a_n) una successione di numeri reali illimitata. Provare che la disuguaglianza $|a_n| > 10^{80}$ vale per infiniti n.
d) Provare che se $a_n > 0$ e la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(e^{a_n} - 1\big)$ converge.

4) a) Calcolare, se esiste, al variare di $a > 0$, il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{e^{6x} - x^5 a^x}$.
b) Calcolare, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} \frac{(x-5)^a \cos(3x)}{\sin(2x-10) + b(3x-15)}$ al variare dei numeri reali a e b, e in particolare se $b = 0$.

Scritto di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2018/19 20/02/2019

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Determinare un numero reale c tale che l'espressione $e^{4\ln(x)} - 5x^2 + c$ coincida col quadrato di un polinomio per ogni $x > 0$.

2) a) Risolvere la disequazione $\big(4^{5^x} - 7\big)(x-5)\big((x^4-1)^3 - 2\big) < 0$.

b) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione u definita da $u(x) = \dfrac{3^{x^2-2}}{x-1}$.

c) Determinare $a \in \mathbf{R}$ tale che esista finito il limite $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{3^{x^2-2} - a}{x-1}$

d) Sia $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e tale che $u(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 1$. Supponiamo che esistano numeri reali $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$ tali che

$$\frac{u(x)}{(x-1)^{\beta_1}} \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{u(x)}{(x-1)^{\beta_2}} \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

Supponiamo inoltre che per ogni $\beta \in \mathbf{R}$ esiste

$$\lim_{x\to1^+} \frac{u(x)}{(x-1)^{\beta}} \in \overline{\mathbf{R}}$$

Provare che esiste un numero reale $\bar\beta$ tale che

$$\frac{u(x)}{(x-1)^{\beta}} \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} +\infty \quad \forall\,\beta > \bar\beta, \qquad \frac{u(x)}{(x-1)^{\beta}} \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\,\beta < \bar\beta.$$

3) Dire per quali numeri reali a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(7(n+1)^{\sqrt{2}} - 1\big)^{\pi} + n}{n^a + 13}$ converge.

4) a) Calcolare, se esiste, al variare di $a > 0$, il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Big((2x^2+1)^8 - x^{4\pi}\Big) \sin\big(\frac{1}{x^a}\big)$.

b) Calcolare, se esiste, al variare di $a \in \mathbf{R}$, il limite $\displaystyle\lim_{x\to2^+} \frac{(x^2-4)^a}{\cos\big(\sin(x-2)\big) - 1}$.

c) Calcolare, se esiste, al variare di $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, il limite $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x^a \ln\big(\ln(x+1)+1\big)}{\ln\big(e^{3x} + 12x + 2x^9 - \sin(bx)\big)}$.

Scritto di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2018/19 20/02/2019

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Determinare un numero reale c tale che l'espressione $e^{6\ln(x)} - 7x^3 + c$ coincida col quadrato di un polinomio per ogni $x > 0$.

2) a) Risolvere la disequazione $\big(8^{2^x} - 9\big)(3-x)\big((x^4-1)^3 - 2\big) < 0$.

b) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione u definita da $u(x) = \dfrac{3^{x^2-2}}{x-1}$.

c) Determinare $a \in \mathbf{R}$ tale che esista finito il limite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3^{x^2-2} - a}{x-1}$

d) Sia $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e tale che $u(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 1$. Supponiamo che esistano numeri reali $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$ tali che

$$\frac{u(x)}{(x-1)^{\beta_1}} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{u(x)}{(x-1)^{\beta_2}} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

Supponiamo inoltre che per ogni $\beta \in \mathbf{R}$ esiste

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{u(x)}{(x-1)^{\beta}} \in \overline{\mathbf{R}}$$

Provare che esiste un numero reale $\bar\beta$ tale che

$$\frac{u(x)}{(x-1)^{\beta}} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty \quad \forall\, \beta > \bar\beta, \qquad \frac{u(x)}{(x-1)^{\beta}} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, \beta < \bar\beta.$$

3) Dire per quali numeri reali a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(7(n+1)^{\sqrt{2}} - 1\big)^{\pi} + n}{n^a + 13}$ converge.

4) a) Calcolare, se esiste, al variare di $a > 0$, il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Big((2x^2+1)^8 - x^{4\pi}\Big)\sin\big(\frac{1}{x^a}\big)$.

b) Calcolare, se esiste, al variare di $a \in \mathbf{R}$, il limite $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{(x^2-4)^a}{\cos\big(\sin(x-2)\big) - 1}$.

c) Calcolare, se esiste, al variare di $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a \ln\big(\ln(x+1)+1\big)}{\ln\big(e^{3x} + 12x + 2x^9 - \sin(bx)\big)}$.

Scritto di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2018/19 30/01/2019

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Provare che l'espressione $(4-\sqrt{15})^{2x}\big((4+\sqrt{15})^2\big)^{x+7}$ è costante e determinare tale costante.

2) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da $f(x)=e^{3x}\Big(\dfrac{1}{2x+5}-\dfrac{1}{(2x+5)^2}\Big)$.

b) Provare che se $u:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ è una funzione continua e positiva (ossia $u(x)>0$ per ogni $x\in\mathbf{R}$) allora dati numeri reali c,d con $c<d$, esiste $a<0$ tale che la funzione u_a definita da $u_a(x)=e^{ax}u(x)$ non è crescente nell'intervallo $]c,d[$.

c) Risolvere la disequazione

$$\big(3^{(2x-1)^6}-27\big)(x^5-2)\Big(\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}-5\Big)<0.$$

3) a) Dire per quali numeri reali a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^a}{n^2(3n+1)^{\sqrt{3}}+n^3}$ converge.

b) Sia data una successione $a_n>0$ tale che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ non è divergente. Provare che esiste un indice n tale che $a_n<\dfrac{1}{10^{18}}$.

4) a) Calcolare, se esiste, al variare di $a\in\mathbf{R}$, il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\Big(\frac{x^a+1}{x^3+(3x+1)^2}\Big)$.

b) Calcolare, se esiste, al variare di $a,b\in\mathbf{R}$, il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^b}{x^2+x}-x\Big)\ln\Big(1+\frac{x^a}{x^2+x}\Big)$$

c) Calcolare, al variare dei numeri reali a e b, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+0^+}\frac{x^a}{x\sin(3x)-b\big(1-\cos(x)\big)}\ln\big(1+\frac{x^2}{2x+5}\big).$$

Scritto di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2018/19 30/01/2019

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Provare che l'espressione $(5-\sqrt{24})^{3x}\big((5+\sqrt{24})^3\big)^{x+6}$ è costante e determinare tale costante.

2) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da $f(x) = e^{3x}\Big(\dfrac{1}{2x+5} - \dfrac{1}{(2x+5)^2}\Big)$.
b) Provare che se $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione continua e positiva (ossia $u(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$) allora dati numeri reali c, d con $c < d$, esiste $a < 0$ tale che la funzione u_a definita da $u_a(x) = e^{ax}u(x)$ non è crescente nell'intervallo $]c, d[$.
c) Risolvere la disequazione

$$\big(2^{(5x-1)^4} - 16\big)(x^5 - 2)\Big(\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} - 5\Big) < 0.$$

3) a) Dire per quali numeri reali a la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a}{n^4(5n+2)^{\sqrt{5}} + n^5}$ converge.
b) Sia data una successione $a_n > 0$ tale che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ non è divergente. Provare che esiste un indice n tale che $a_n < \dfrac{1}{10^{18}}$.

4) a) Calcolare, se esiste, al variare di $a \in \mathbf{R}$, il limite
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\Big(\frac{x^a+1}{x^3+(3x+1)^2}\Big)$.
b) Calcolare, se esiste, al variare di $a, b \in \mathbf{R}$, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(\frac{x^b}{x^2+x} - x\Big) \ln\Big(1 + \frac{x^a}{x^2+x}\Big)$$

c) Calcolare, al variare dei numeri reali a e b, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+0^+} \frac{x^a}{x\sin(3x) - b\big(1-\cos(x)\big)} \ln\big(1 + \frac{x^2}{2x+5}\big).$$

Terzo Esonero di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2018/19 22/01/2019

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ____________________________

1) a) Sia $f(x) = \arctan(xe^{2x})$. Determinare eventuali punti di massimo relativo e di minimo relativo di f e dire se sono anche punti di massimo assoluto o di minimo assoluto.
b) Calcolare se esistono, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
c) Sia w la funzione definita da $w(x) = \ln\big(5 - \ln(4-x)\big) + \sqrt{\dfrac{x-3}{x^4-2}}$. Determinare il dominio di w.
d) Sia $v(x) = 2x - \arctan(x)$ e sia $u(x) = \ln\big(v(x)\big)$. Determinare il dominio di u. Si consiglia di notare che $v(0) = 0$.
e) Provare che per ogni $b \in \mathbf{R}$ il dominio della funzione u_b definita da

$$u_b(x) = \ln\big(2x - \arctan(x) + b\big)$$

ha la forma $]c, +\infty[$ ove c è un opportuno numero reale (dipendente da b).

2) a)Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^\alpha}{\sin(3x) - 3x + bx^3} \ln(2 + x^7).$$

b) Dire per quali $a > 0$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\ln\big(1 + \frac{1}{n^a}\big) - \frac{1}{n^a}\Big)$.

Terzo Esonero di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2018/19 22/01/2019

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto ____________________________

1) a) Sia $f(x) = \arctan(xe^{3x})$. Determinare eventuali punti di massimo relativo e di minimo relativo di f e dire se sono anche punti di massimo assoluto o di minimo assoluto.
b) Calcolare se esistono, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
c) Sia w la funzione definita da $w(x) = \ln\big(7 - \ln(3-x)\big) + \sqrt{\dfrac{2x-5}{x^6-3}}$. Determinare il dominio di w.
d) Sia $v(x) = 3x - \arctan(x)$ e sia $u(x) = \ln\big(v(x)\big)$. Determinare il dominio di u. Si consiglia di notare che $v(0) = 0$.
e) Provare che per ogni $b \in \mathbf{R}$ il dominio della funzione u_b definita da

$$u_b(x) = \ln\big(3x - \arctan(x) + b\big)$$

ha la forma $]c, +\infty[$ ove c è un opportuno numero reale (dipendente da b).

2) a) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{\sin(2x) - 2x + bx^3}\cos(x^2+1).$$

b) Dire per quali $a > 0$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\ln\big(1+\frac{1}{n^a}\big) - \frac{1}{n^a}\Big)$.

Secondo Esonero di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2018/19 17/12/2018

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Calcolare, al variare di $a \in \mathbf{R}$, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^a}{\ln\big(1 + \sin(x^2)\big) - \sqrt{x^3 \sqrt[4]{x^2 + x}}}.$$

b) Sia

$$f_a(x) = \begin{cases} ax & \text{se } x \leq 7, \\ x\, 2^{\frac{1}{7-x}} + 3 & \text{se } x > 7. \end{cases}$$

Determinare, se esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che f_a è continua in $\mathbf{R}$.

c) Sia $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 2, \\ 1 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Sia v definita da $v(x) = u(e^x)$. Determinare un punto $\bar{x}$ ove v è discontinua.

2) a) Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \sqrt[5]{n} \ln(n)}{7^{2n} - n}$ converge.

b) Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2 - 3)^n (n^2 + 1)^x}{(2n + 3)! - 4}$ converge.

c) Chiamiamo $\zeta(\alpha)$ la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ per $\alpha > 1$ (ricordo che tale serie converge proprio se $\alpha > 1$). Provare che $\zeta(\alpha) \underset{\alpha \to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$.

NOTA. La parte c) dell'esercizio 2) è la parte piú difficile del compito, ed è in piú, ossia si prende 30 senza farla.

Secondo Esonero di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2018/19 17/12/2018

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Calcolare, al variare di $a \in \mathbf{R}$, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^a}{\ln\big(1+\sin(x^3)\big) - \sqrt{x^5 \sqrt[3]{x^5 + x^4}}}.$$

b) Sia

$$f_a(x) = \begin{cases} ax & \text{se } x \leq 8, \\ 3x\, 4^{\frac{1}{8-x}} + 5 & \text{se } x > 8. \end{cases}$$

Determinare, se esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che f_a è continua in $\mathbf{R}$.

c) Sia $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 4, \\ 2 & \text{se } x > 4. \end{cases}$$

Sia v definita da $v(x) = u(e^x)$. Determinare un punto $\bar{x}$ ove v è discontinua.

2) a) Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \sqrt[7]{n}\, \ln(n)}{6^{3n} - n}$ converge.

b) Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^4-2)^n (n^3+1)^x}{(2n+5)! - 3}$ converge.

c) Chiamiamo $\zeta(\alpha)$ la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ per $\alpha > 1$ (ricordo che tale serie converge proprio se $\alpha > 1$). Provare che $\zeta(\alpha) \underset{\alpha \to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$.

NOTA. La parte c) dell'esercizio 2) è la parte piú difficile del compito, ed è in piú, ossia si prende 30 senza farla.

Esonero di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2018/19 26/11/2018

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Sia $g(x) = \dfrac{8 - (x^5 - 2)^{12}}{(4x-5)(7-x)}$.

a) Risolvere la disequazione $g(x) < 0$.

2) a) Calcolare, se esiste, il limite di successione $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(4^n + n)^7\, 7^n}{\big(n^\pi + n + 1\big)^{1200}}$.

b) Calcolare, al variare di $a > 0$, se esiste, il limite di successione
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2}}\right)^9 \sqrt[4]{n^3\,\sqrt{n}} - (n^a + 2)^5$.

c) Provare che se (a_n) è una successione e $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{17}$, allora esiste $n > 1$ tale che $\big|a_n - a_{7n+1}\big| < \frac{1}{3\cdot 10^6}$.

d) Provare che se (a_n) è una successione tale che esiste $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n = 1, 2, 3, ...\}$, allora esiste un indice ν tale che $a_n \le a_\nu$ per ogni $n > \nu$.

3) a) Calcolare, al variare di $a > 1$, se esiste, il limite di funzione, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{25^x \ln(3^x + 1)}{(a^x + 7)^2 + (7a)^x}$.

b) Calcolare, al variare di $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, se esiste, il limite di funzione
$\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x^6}{(3x)^a + x^9}\Big(\sin\big(x^2 e^x\big) + b\Big)$.

c) Provare che qualunque sia la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, la funzione α definita da $\alpha(x) = f\big((x-2)(x-8)\big)$ non è strettamente monotona.

NOTA. La parte d) dell'esercizio 2) è la parte piú difficile del compito, ed è in piú, ossia si prende 30 senza farla.

Esonero di Analisi Matematica I per STM

Anno Accademico 2018/19 26/11/2018

NOME: COGNOME:

È FORTEMENTE OBBLIGATORIO!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Sia $g(x) = \dfrac{10-(x^3-2)^{16}}{(x-1)(12-3x)}$.

a) Risolvere la disequazione $g(x) < 0$.

2) a) Calcolare, se esiste, il limite di successione $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n^{\sqrt{7}}+n+1)^{1000}}{(2^n+1)^5\, 5^n}$.

b) Calcolare, al variare di $a > 0$, se esiste, il limite di successione

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n^a+1)^7 - \Big(\dfrac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\Big)^{13} \sqrt[5]{n^2\,\sqrt{n}}.$

c) Provare che se (a_n) è una successione e $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi$, allora esiste $n > 1$ tale che $\big|a_n - a_{n^2}\big| < \frac{1}{10^7}$.

d) Provare che se (a_n) è una successione tale che esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n = 1, 2, 3, ...\}$, allora esiste un indice ν tale che $a_n \geq a_\nu$ per ogni $n > \nu$.

3) a) Calcolare, al variare di $a > 1$, se esiste, il limite di funzione, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{16^x \ln(2^x+1)}{(a^x+3)^2+(5a)^x}$.

b) Calcolare, al variare di $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, se esiste, il limite di funzione

$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^5}{(2x)^a+x^7}\Big(\sin\big(x\cos(x)\big)+b\Big).$

c) Provare che qualunque sia la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, la funzione α definita da $\alpha(x) = f\big((x-3)(x-5)\big)$ non è strettamente monotona.

NOTA. La parte d) dell'esercizio 2) è la parte piú difficile del compito, ed è in piú, ossia si prende 30 senza farla.