Scritto di Matematica per Ingegneria, canale PI-SE

Anno Accademico 2014/15 22/09/2015

NOME: COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Determinare un polinomio P tale che l'espressione $(x^2+x)^2+P(x)(x+1)3^x+9^x$ risulti il quadrato di un binomio.
b) Trovare i numeri complessi z che soddisfano

$$z^4-|z|^2=\big(z^2+|z|\big)\big(z+i-|z|\big).$$

2) a) Risolvere la disequazione

$$\ln\big(\sin(x)+7\big)\big(|9^x-5\cdot 3^{x-1}|-4\big)\big(\sqrt{5x-1}-x\big)<0.$$

b) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione α definita da $\alpha(x):=xe^{\frac{1}{3x-1}}$.
c) Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)-x$ ove α è come in b).

3) a) Calcolare, se esiste, il limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^7}{(n^2+n+1)^a}$, al variare di $a\in\mathbf{R}$.
b) Calcolare, se esiste, il limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^a}{e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{2n}}+bn\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$, al variare dei numeri reali a e b.

4) a) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int\left(\frac{x^2\cos(x)+2x\sin(x)}{x^4\sin^2(x)-5}+\frac{8}{x^2+5x+16}\right)dx$.

b) Provare che $\displaystyle\int_n^{n^a}\frac{1}{t^b+ct}\,dt\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, se $a=2$, $b=2\pi$, $c=1$, e se possibile per ogni $a>1$, $b>1$, $c=1$, o ancora meglio, per ogni $a>1$, $b>1$, $c=\pm1$.

5) a) Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funzione continua e strettamente crescente tale che

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty,\quad f(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty.$$

Sia u definita da $u(x)=f\big(f^{-1}(x)+x^2\big)$. Provare che $u(x)>0$ per ogni $x>1$.
b) Provare che se inoltre f è di classe C^1, e $f'(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$, allora l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{u(x)-x}\,dx$ è convergente.

Scritto di Matematica per Ingegneria, canale PI-SE

Anno Accademico 2014/15 22/09/2015

NOME: COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Determinare un polinomio P tale che l'espressione $(x^3+x^2)^2+P(x)(x+1)5^x+25^x$ risulti il quadrato di un binomio.
b) Trovare i numeri complessi z che soddisfano

$$z^4-|z|^2=\big(z^2+|z|\big)\big(z+i-|z|\big).$$

2) a) Risolvere la disequazione

$$\ln\big(\sin(x)+7\big)\big(|9^x-5\cdot 3^{x-1}|-4\big)\big(\sqrt{5x-1}-x\big)<0.$$

b) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione α definita da $\alpha(x):=xe^{\frac{1}{3x-1}}$.
c) Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)-x$ ove α è come in b).

3) a) Calcolare, se esiste, il limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^7}{(n^2+n+1)^a}$, al variare di $a\in\mathbf{R}$.
b) Calcolare, se esiste, il limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^a}{e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{2n}}+bn\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$, al variare dei numeri reali a e b.

4) a) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int\Big(\frac{x^2\cos(x)+2x\sin(x)}{x^4\sin^2(x)+6}+\frac{8}{x^2-15x+50}\Big)\,dx$.
b) Provare che $\displaystyle\int_n^{n^a}\frac{1}{t^b+ct}\,dt\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, se $a=2$, $b=2\pi$, $c=1$, e se possibile per ogni $a>1$, $b>1$, $c=1$, o ancora meglio, per ogni $a>1$, $b>1$, $c=\pm1$.

5) a) Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funzione continua e strettamente crescente tale che

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty,\quad f(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty.$$

Sia u definita da $u(x)=f\big(f^{-1}(x)+x^2\big)$. Provare che $u(x)>0$ per ogni $x>1$.
b) Provare che se inoltre f è di classe C^1, e $f'(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$, allora l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{u(x)-x}\,dx$ è convergente.

Scritto di Matematica per Ingegneria, canale PI-SE

Anno Accademico 2014/15 07/09/2015

NOME: COGNOME:
È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Semplificare le espressioni $\dfrac{(3x^2-2)^\pi}{x-a}$, $\dfrac{(3x^4-2)^\pi}{x-b}$ per opportuni $a, b \in \mathbf{R}$ da determinare.
b) Trovare i numeri complessi z che soddisfano

$$z^2 - 2zIm(z) + \big(Im(z)\big)^2 = \big(z - Im(z)\big)\big(2Re(z) + i|z| + 2\big).$$

2) a) Risolvere la disequazione

$$\Big(\ln\big(\ln(x)\big) + 10\Big)|x^2 - 5| < x\Big(\ln\big(\ln(x)\big) + 10\Big).$$

b) Sia $f_a(x) = ax + \ln(e^{2x} - 5e^x + 6)$. Calcolare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f_2.
c) Determinare, al variare di $a \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x f_a(x)$.

3) a) Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^a}{1-e^{7x}}$ al variare di $a \in \mathbf{R}$, e in particolare per $a = 0$.
b) Data la funzione $g(x) = \exp\big(\dfrac{1}{1-e^{7x}}\big)$ (ove per comodità di lettura scriviamo $\exp(y) = e^y$), dire se esiste una funzione h continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che coincide con g su $]0, +\infty[$, e se esiste una funzione h continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che coincide con g su $]-\infty, 0[$.

4) a) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \left(\frac{x+1}{x^2-10} + \frac{\ln(x)}{x\Big(\big(\ln(x)\big)^2 + 10\Big)}\right)dx$.
b) Sia $u(x) = e^x - x - 1$. Provare che $u(x) > 0$ per ogni $x \in]0, 1[$.
c) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a}{e^x - x - 1}\,dx$.

5) Sia $w : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e strettamente crescente, e definiamo una successione a_n in questo modo: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = w(a_n)$. Ad esempio $a_1 = w(0)$, $a_2 = w(w(0))$, $a_3 = w(w(w(0)))$, etc.
a) Provare che se $w(x) = \dfrac{x^3+x+1}{3}$, allora la successione (a_n) non tende a $+\infty$ (si consiglia di usare il fatto che $w(1) = 1$).
b) Provare che se inoltre $w(x) > x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, allora $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Scritto di Matematica per Ingegneria, canale PI-SE

Anno Accademico 2014/15 07/09/2015

NOME: COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Semplificare le espressioni $\frac{x-a}{(5x^2-3)^e}$, $\frac{x-b}{(5x^4-3)^e}$ per opportuni $a, b \in \mathbf{R}$ da determinare.

b) Trovare i numeri complessi z che soddisfano

$$z^2 - 2zIm(z) + \big(Im(z)\big)^2 = \big(z - Im(z)\big)(2Re(z) + i|z| + 2).$$

2) a) Risolvere la disequazione

$$\Big(\ln\big(\ln(x)\big) + 10\Big)|x^2 - 5| < x\Big(\ln\big(\ln(x)\big) + 10\Big).$$

b) Sia $f_a(x) = ax + \ln(e^{2x} - 5e^x + 6)$. Calcolare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f_2.

c) Determinare, al variare di $a \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to+\infty} e^x f_a(x)$.

3) a) Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{1-e^{7x}}$ al variare di $a \in \mathbf{R}$, e in particolare per $a = 0$.

b) Data la funzione $g(x) = \exp\big(\frac{1}{1-e^{7x}}\big)$ (ove per comodità di lettura scriviamo $\exp(y) = e^y$), dire se esiste una funzione h continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che coincide con g su $]0, +\infty[$, e se esiste una funzione h continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che coincide con g su $]-\infty, 0[$.

4) a) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \left(\frac{x-71}{x^2+5} + \frac{\ln(x)}{x\Big(\big(\ln(x)\big)^2 - 8\Big)}\right)dx.$

b) Sia $u(x) = e^x - x - 1$. Provare che $u(x) > 0$ per ogni $x \in]0, 1[$.

c) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a}{e^x - x - 1}\,dx.$

5) Sia $w : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e strettamente crescente, e definiamo una successione a_n in questo modo: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = w(a_n)$. Ad esempio $a_1 = w(0)$, $a_2 = w(w(0))$, $a_3 = w(w(w(0)))$, etc.

a) Provare che se $w(x) = \frac{x^3+x+1}{3}$, allora la successione (a_n) non tende a $+\infty$ (si consiglia di usare il fatto che $w(1) = 1$).

b) Provare che se inoltre $w(x) > x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, allora $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Scritto di Matematica per Ingegneria, canale PI-SE

Anno Accademico 2014/15 17/07/2015

NOME: COGNOME:
È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Risolvere l'equazione $\dfrac{(1-\frac{1}{x})^{\sqrt{8}}}{(1-\frac{1}{x^2})^{\sqrt{2}}} = 7.$

b) Trovare i numeri complessi z che soddisfano $z^4(|z| - 2z + i) = 6z - 3i - 3|z|$.

2) Siano
$f_1(x) = \ln\Big(\big(1 - \dfrac{1}{x}\big)\ln\big(|x^2-3| - 5\big)\Big)$, $f_2(x) = \ln\big(1-\dfrac{1}{x}\big) + \ln\Big(\ln\big(|x^2-3|-5\big)\Big)$,
$f_3(x) = \ln\big(1-\dfrac{1}{x}\big) + \ln\big(1-\dfrac{3}{x}\big)$.
a) Determinare il dominio di f_1 e quello di f_2.
b) Studiare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f_3.
c) Sia g_a definita da $g_a(x) = \ln(x^7 + ax^3 - 15)$. Provare che per ogni $a \in \mathbf{R}$, la funzione g_a è inferiormente illimitata nel suo insieme di definizione.

3) a) Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(n^2\ln(n)+1\big)^{\pi} - n^a$ al variare di $a \in \mathbf{R}$.
b) Calcolare, se esistono, al variare dei numeri reali a e b,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{e^x + x^b - 1}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|^a}{e^x + |x|^b - 1}.$$

4) a) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $f'(x) = e^{x^2}$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, e $f(1) = 0$. Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ si ha $f(a) > 0$. NOTA. Si consiglia di NON calcolare f.
b) Calcolare gli integrali definiti

$$\int_0^1 f(t)\,dt, \quad \int_0^1 t^2 f(t)\,dt.$$

c) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{1}{(x+6\sqrt{x}+5)\sqrt{x}}\,dx.$

5) a) Sia data una funzione $v : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ continua e tale che esistono due successioni a_n e b_n di numeri reali positivi tali che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $v(a_n) = a_n$, $v(b_n) = -b_n$.
Provare che per ogni numero reale a l'equazione $v(x) = a$ ha almeno una soluzione.

b) Provare che se w è una funzione continua da $[0,+\infty[$ in $\mathbf{R}$ e per ogni numero reale a l'equazione $w(x) = a$ ha almeno una soluzione, allora per ogni numero reale a l'equazione $w(x) = a$ ha infinite soluzioni.

Scritto di Matematica per Ingegneria, canale PI-SE

Anno Accademico 2014/15 17/07/2015

NOME: COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Risolvere l'equazione $\dfrac{(1-\frac{1}{x^2})^{\sqrt{5}}}{(1-\frac{1}{x})^{\sqrt{20}}} = 12.$

b) Trovare i numeri complessi z che soddisfano $z^4(|z| - 2z + i) = 6z - 3i - 3|z|$.

2) Siano

$f_1(x) = \ln\Big((1 - \dfrac{1}{x})\ln\big(|x^2-3|-5\big)\Big)$, $f_2(x) = \ln\big(1-\dfrac{1}{x}\big) + \ln\Big(\ln\big(|x^2-3|-5\big)\Big)$,

$f_3(x) = \ln\big(1-\dfrac{1}{x}\big) + \ln\big(1-\dfrac{3}{x}\big)$.

a) Determinare il dominio di f_1 e quello di f_2.

b) Studiare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f_3.

c) Sia g_a definita da $g_a(x) = \ln(x^7 + ax^3 - 15)$. Provare che per ogni $a \in \mathbf{R}$, la funzione g_a è inferiormente illimitata nel suo insieme di definizione.

3) a) Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(n^2\ln(n)+1\big)^{\pi} - n^a$ al variare di $a \in \mathbf{R}$.

b) Calcolare, se esistono, al variare dei numeri reali a e b,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{e^x + x^b - 1}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|^a}{e^x + |x|^b - 1}.$$

4) a) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $f'(x) = e^{x^2}$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, e $f(1) = 0$. Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ si ha $f(a) < 0$. NOTA. Si consiglia di NON calcolare f.

b) Calcolare gli integrali definiti

$$\int_0^1 f(t)\,dt, \quad \int_0^1 t^2 f(t)\,dt.$$

c) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{1}{(x+6\sqrt{x}+5)\sqrt{x}}\,dx.$

5) a) Sia data una funzione $v : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ continua e tale che esistono due successioni a_n e b_n di numeri reali positivi tali che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $v(a_n) = a_n$, $v(b_n) = -b_n$. Provare che per ogni numero reale a l'equazione $v(x) = a$ ha almeno una soluzione.

b) Provare che se w è una funzione continua da $[0,+\infty[$ in $\mathbf{R}$ e per ogni numero reale a l'equazione $w(x) = a$ ha almeno una soluzione, allora per ogni numero reale a l'equazione $w(x) = a$ ha infinite soluzioni.

Scritto di Matematica per Ingegneria, canale PI-SE

Anno Accademico 2014/15 07/07/2015

NOME: COGNOME:
È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Determinare i numeri reali $x > 0$ tali che valga $\sqrt{x^{\sqrt{x}}}\, x^{\sqrt[4]{x}} = x^3$.
b) Trovare i numeri complessi z che soddisfano $(z+1)^2 = z|z| + |z|$.

2) a) Sia $f(x) = \frac{1}{100}\big(x + \frac{1}{x}\big)^4 - x - \frac{1}{x}$. Determinare gli intervalli di crescenza e di decrescenza di f.
b) Sia $\widetilde{f}_a(x) = \big(x + \frac{1}{x}\big)^{10} + a\big(x + \frac{1}{x}\big)^8 + \big(x + \frac{1}{x}\big)^3$ se a è un numero reale. Quanto vale $\widetilde{f}_a(x) - \widetilde{f}_a\big(\frac{1}{x}\big)$? (qui ovviamente $x \neq 0$).
c) Provare che se $y \in \mathbf{R}$ è tale che $y \neq \widetilde{f}_a(1)$, $y \neq \widetilde{f}_a(-1)$, allora l'equazione $\widetilde{f}_a(x) = y$ non può avere un numero dispari di soluzioni.

3) a) Calcolare, se esistono, al variare di $a \in \mathbf{R}$ i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \big(x^3 - (x^2+3)^a\big), \qquad \lim_{x\to-\infty} \big(x^3 + (x^2+3)^a\big).$$

b) Calcolare, se esiste, al variare di $a \in \mathbf{R}$ il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^a \Bigg(\Big(\arctan\big(\frac{1}{n}\big)\Big)^{\frac{5}{2}} + \cos^2\big(\frac{1}{n}\big) - 1\Bigg)$$

4) a) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \Big(\frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2}\ln(x-5) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)+8}\Big)\, dx$.

b) Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^{2a}x^6}{x^{3a}-1}\, dx$ converge.

5) a) Trovare una successione (a_n) di numeri reali tale che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\sin(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\sin(a_n) \neq 0$ per ogni intero positivo n.
b) Trovare una successione (b_n) di numeri reali che sia limitata, non convergente, e tale che $b_{n+1} - b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Scritto di Matematica per Ingegneria, canale PI-SE

Anno Accademico 2014/15 07/07/2015

NOME: COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Determinare i numeri reali $x > 0$ tali che valga $\sqrt{x^{\sqrt[6]{x}}\, x^{\sqrt[3]{x}}} = x^5$.
b) Trovare i numeri complessi z che soddisfano $(z-2)^2 = z|z| - 2|z|$.

2) a) Sia $f(x) = \frac{1}{100}\big(x + \frac{1}{x}\big)^4 - x - \frac{1}{x}$. Determinare gli intervalli di crescenza e di decrescenza di f.
b) Sia $\widetilde{f}_a(x) = \big(x + \frac{1}{x}\big)^{10} + a\big(x + \frac{1}{x}\big)^8 + \big(x + \frac{1}{x}\big)^3$ se a è un numero reale. Quanto vale $\widetilde{f}_a(x) - \widetilde{f}_a\big(\frac{1}{x}\big)$? (qui ovviamente $x \neq 0$).
c) Provare che se $y \in \mathbf{R}$ è tale che $y \neq \widetilde{f}_a(1)$, $y \neq \widetilde{f}_a(-1)$, allora l'equazione $\widetilde{f}_a(x) = y$ non può avere un numero dispari di soluzioni.

3) a) Calcolare, se esistono, al variare di $a \in \mathbf{R}$ i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \big(x^3 - (x^2+3)^a\big), \quad \lim_{x\to-\infty} \big(x^3 + (x^2+3)^a\big).$$

b) Calcolare, se esiste, al variare di $a \in \mathbf{R}$ il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^a \left(\left(\arctan\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)^{\frac{5}{2}} + \cos^2\Big(\frac{1}{n}\Big) - 1 \right)$$

4) a) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \Big(\frac{6x+3}{(x^2+x+1)^2} \ln(x-5) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)+3} \Big)\, dx$.
b) Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^{2a}x^6}{x^{3a}-1}\, dx$ converge.

5) a) Trovare una successione (a_n) di numeri reali tale che $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $\sin(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\sin(a_n) \neq 0$ per ogni intero positivo n.
b) Trovare una successione (b_n) di numeri reali che sia limitata, non convergente, e tale che $b_{n+1} - b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Scritto di Matematica per Ingegneria, canale PI-SE

Anno Accademico 2014/15 19/02/2015

NOME: COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Determinare un numero reale a in modo che l'espressione $\dfrac{x+\frac{1}{x}+2}{x+a}$ si possa semplificare come $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ove P è un polinomio e Q è un polinomio di primo grado.

b) Trovare i numeri complessi z che soddisfano $z^2 = Re(z) - Im(z) + i|z|^2$.

2) a) Sia $\alpha(x) = x^3 - x^2 + x^5 \ln(x^2 \sin^2(x) + 1)$. Determinare una funzione $\beta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che α è crescente negli intervalli dove β è positiva, e α è decrescente negli intervalli dove β è negativa.

b) Risolvere la disequazione $xR(x) < 4R(x)$ ove

$R(x) = (|2x-5|-1)\Big(\big(\ln(x+3)\big)^2 - 5\ln(2x+6)\Big)$.

3) Calcolare, al variare di $a > 0$ e $b \in \mathbf{R}$, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n}}{a^n + (n+5)^{80} + bn!}$$

studiando esplicitamente il caso $b = 0$.

4) a) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \arctan(e^x)e^{-2x}\,dx$.

b) Dire per quali $\alpha > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha \cos(x)}{\sqrt{\sin(\pi x)}\ln(1+7x)}\,dx$ converge.

c) Provare che se v è una funzione derivabile da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $v(0) = 0$ e $v'(0) = 2$, e $v(x) > 0$ per ogni $x > 0$, allora l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{v(x)}\,dx$ non converge.

5) a) Provare che se f è una funzione derivabile da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $\frac{1}{x^2} < f'(x) < \frac{5}{x^2}$ per ogni $x > 1$, allora esiste un numero reale l tale che $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

b) Provare che se g è una funzione derivabile da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $g'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, allora l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\big(g(t)\big)\,dt$ non può essere convergente.

Scritto di Matematica per Ingegneria, canale PI-SE

Anno Accademico 2014/15 19/02/2015

NOME: COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Determinare un numero reale a in modo che l'espressione $\dfrac{x+a}{x-\frac{3}{x}}$ si possa semplificare come $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ove P è un polinomio di primo grado e Q è un polinomio.

b) Trovare i numeri complessi z che soddisfano $z^2 = Re(z) + Im(z) + i\big(Re(z) + 2Im(z)\big)$.

2) a) Sia $\alpha(x) = (x+3)^5 + \cos(e^{x^2})\sin\left(\frac{x}{x^4+3}\right)$. Determinare una funzione $\beta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che α è crescente negli intervalli dove β è positiva, e α è decrescente negli intervalli dove β è negativa.

b) Risolvere la disequazione $xR(x) < 8R(x)$ ove
$R(x) = (|x^2-1|-3)\Big(\big(\ln(10-x)\big)^2 - 5\ln(30-3x)\Big)$.

3) Calcolare, al variare di $a > 0$ e $b \in \mathbf{R}$, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6^n + bn!}{a^{2n} + (n-35)^{69}}$$

studiando esplicitamente il caso $b = 0$.

4) a) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \ln(e^x+7)e^{-x}\,dx$.

b) Dire per quali $\alpha > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)\big(e^{x^2}-1\big)}{x^\alpha\sqrt{1-x}\,e^x}dx$ converge.

c) Provare che se v è una funzione derivabile da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $v(0) = 0$ e $v'(0) = 8$, e $v(x) > 0$ per ogni $x > 0$, allora l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{v(x)}\,dx$ non converge.

5) a) Provare che se f è una funzione derivabile da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $\frac{1}{x^6} < f'(x) < \frac{7}{x^6}$ per ogni $x > 1$, allora esiste un numero reale l tale che $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

b) Provare che se g è una funzione derivabile da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $g'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, allora l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\big(g(t)\big)\,dt$ non può essere convergente.

Scritto di Matematica per Ingegneria, canale PI-SE

Anno Accademico 2014/15 06/02/2015

NOME: COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Trovare un polinomio P tale che valga $\left(\frac{2^{x^2-9}}{8^{P(x)}}\right)^{\frac{1}{x}} = 2^{P(x)}$ per ogni $x \neq 0$.
b) Determinare i numeri complessi z che soddisfano $izIm(z) = (Rez)^4 + 2iz$.
c) Determinare un numero complesso c tale che l'equazione $z^{600} - 5z^{300} + c = 0$ abbia meno di 600 soluzioni complesse distinte.

2) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da

$$f(x) = \arctan(e^{3x}) + \ln(5 - e^{3x}).$$

b) Provare che se a è un numero reale tale che l'intervallo $[a, a+1]$ è contenuto nel dominio di f, allora esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) > 2x + c$ per ogni $x \in [a, a+1]$.

3) a) Calcolare, al variare di $a \in \mathbf{R}$, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+1)^{\sqrt{6}} - n^6}{n^a}.$$

b) Calcolare, al variare di $a, b \in]0, +\infty[$, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^a \Big(\sin\big(\frac{1}{n}\big) e^{\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n^b} \Big).$$

4) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Big(\frac{x^\pi}{\sqrt{x}\big(x^{2\pi+1} - 3\big)} + \frac{x}{(x^2-2)^2+1} \Big)\, dx.$$

5) Sia g una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ continua e periodica di periodo 1 (ossia tale che $g(x+1) = g(x)$ per ogni numero reale x).
a) Supponiamo $g(0) = 0$, $g(\frac{1}{2}) = 8$. Provare che l'equazione $g(x) = \arctan(x)$ ha infinite soluzioni.
b) Provare che l'insieme D delle soluzioni dell'equazione $g(x) = \frac{1}{10}x$ è un insieme limitato.
c) Provare che se g è di classe C^∞ e D è infinito allora esiste un punto $\bar{x} \in \mathbf{R}$ tale che $g^{(n)}(\bar{x}) = 0$ per ogni intero $n > 1$.

Scritto di Matematica per Ingegneria, canale PI-SE

Anno Accademico 2014/15 06/02/2015

NOME: COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Trovare un polinomio P tale che valga $\left(3^{x^2+9}\, 27^{P(x)}\right)^{\frac{1}{x}} = 3^6\, 3^{P(x)}$ per ogni $x \neq 0$.
b) Determinare i numeri complessi z che soddisfano $z^2 - z = 3Im(z)$.
c) Determinare un numero complesso b tale che l'equazione $z^{200} - bz^{300} + 3 = 0$ abbia meno di 200 soluzioni complesse distinte.

2) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da

$$f(x) = \ln(7 - x^6) + \arctan(x^6).$$

b) Provare che se a è un numero reale tale che l'intervallo $[a, a+1]$ è contenuto nel dominio di f, allora esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) < c - 5x$ per ogni $x \in [a, a+1]$.

3) a) Calcolare, al variare di $a \in \mathbf{R}$, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{n(n^2+n)^{\sqrt{3}} - n^6}.$$

b) Calcolare, al variare di $a, b \in]0, +\infty[$, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^a \Big(\sin\big(\frac{n^2}{n^4+1}\big) - \frac{1}{n^b} \Big).$$

4) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Big(\frac{\sqrt{x}\, x^{e+1}}{x^{2e+5}+1} + \frac{1}{x\big((\ln x)^2 - 7\big)} \Big)\, dx.$$

5) Sia g una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ continua e periodica di periodo 1 (ossia tale che $g(x+1) = g(x)$ per ogni numero reale x).
a) Supponiamo $g(0) = 0$, $g(\frac{1}{2}) = 12$. Provare che l'equazione $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ ha infinite soluzioni.
b) Provare che l'insieme D delle soluzioni dell'equazione $g(x) = \frac{1}{8}x$ è un insieme limitato.
c) Provare che se g è di classe C^∞ e D è infinito allora esiste un punto $\bar{x} \in \mathbf{R}$ tale che $g^{(n)}(\bar{x}) = 0$ per ogni intero $n > 1$.

Scritto di Matematica per Ingegneria, canale PI-SE

Anno Accademico 2014/15 06/02/2015

NOME: COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Trovare un polinomio P tale che valga $\left(\frac{3^{x^2-4}}{9^{P(x)}}\right)^{\frac{1}{x}} = 3^{P(x)}$ per ogni $x \neq 0$.

b) Determinare i numeri complessi z che soddisfano $zRe(z) = (Imz)^3 + 2z$.

c) Determinare un numero complesso c tale che l'equazione $z^{480} - 7z^{240} + c = 0$ abbia meno di 480 soluzioni complesse distinte.

2) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 8) - \arctan(e^{2x}).$$

b) Provare che se a è un numero reale tale che l'intervallo $[a, a+1]$ è contenuto nel dominio di f, allora esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) > c - x$ per ogni $x \in [a, a+1]$.

3) a) Calcolare, al variare di $a \in \mathbf{R}$, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^3+1)^{\sqrt{3}} - n^6}{n^a}.$$

b) Calcolare, al variare di $a, b \in]0, +\infty[$, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^a \Big(\sin\big(\frac{1}{n}\big)\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n^b}\Big).$$

4) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Big(\frac{x^{\pi-1}}{\sqrt{x}\big(x^{2\pi-1} - 5\big)} + \frac{x^2}{(x^3-2)^2+1}\Big)\, dx.$$

5) Sia g una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ continua e periodica di periodo 1 (ossia tale che $g(x+1) = g(x)$ per ogni numero reale x).

a) Supponiamo $g(0) = 0$, $g(\frac{1}{2}) = 8$. Provare che l'equazione $g(x) = \arctan(x)$ ha infinite soluzioni.

b) Provare che l'insieme D delle soluzioni dell'equazione $g(x) = \frac{1}{10}x$ è un insieme limitato.

c) Provare che se g è di classe C^∞ e D è infinito allora esiste un punto $\bar{x} \in \mathbf{R}$ tale che $g^{(n)}(\bar{x}) = 0$ per ogni intero $n > 1$.

Scritto di Matematica per Ingegneria, canale PI-SE

Anno Accademico 2014/15 06/02/2015

NOME: COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Trovare un polinomio P tale che valga $\left(5^{x^2+4}\,25^{P(x)}\right)^{\frac{1}{x}} = 5^4\,5^{P(x)}$ per ogni $x \neq 0$.
b) Determinare i numeri complessi z che soddisfano $z^2 + 4z = Re(iz)$.
c) Determinare un numero complesso b tale che l'equazione $z^{320} - bz^{160} + 7 = 0$ abbia meno di 320 soluzioni complesse distinte.

2) a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da

$$f(x) = \ln(5 - x^4) + \arctan(x^4).$$

b) Provare che se a è un numero reale tale che l'intervallo $[a, a+1]$ è contenuto nel dominio di f, allora esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che $f(x) < c + 4x$ per ogni $x \in [a, a+1]$.

3) a) Calcolare, al variare di $a \in \mathbf{R}$, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{n(n^4+n)^{\sqrt{2}} - n^5}.$$

b) Calcolare, al variare di $a, b \in]0, +\infty[$, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^a \Big(\sin\big(\frac{n^3}{n^3+5}\big) - \frac{1}{n^b} \Big).$$

4) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \Big(\frac{\sqrt{x}\,x^e}{x^{2e+3}+1} + \frac{1}{x\big((\ln x)^2 - 2\big)} \Big)\,dx.$$

5) Sia g una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ continua e periodica di periodo 1 (ossia tale che $g(x+1) = g(x)$ per ogni numero reale x).
a) Supponiamo $g(0) = 0$, $g(\frac{1}{2}) = 12$. Provare che l'equazione $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ ha infinite soluzioni.
b) Provare che l'insieme D delle soluzioni dell'equazione $g(x) = \frac{1}{8}x$ è un insieme limitato.
c) Provare che se g è di classe C^∞ e D è infinito allora esiste un punto $\bar{x} \in \mathbf{R}$ tale che $g^{(n)}(\bar{x}) = 0$ per ogni intero $n > 1$.