Programma (dettagliato) del corso di Analisi Matematica II per Ingegneria Gestionale. Anno Accad. 2015/16

1. Sommatorie e serie numeriche. Sommatorie: definizione e semplici proprietà. Esempi notevoli di sommatorie, in particolare somma dei primi n numeri interi positivi e somma di una progressione geometrica. Serie: somma di una serie, somme parziali, serie convergenti, divergenti e indeterminate. Serie a termini non negativi, e loro proprietà di essere convergenti o divergenti. Serie geometrica, serie armonica e serie armonica generalizzata. Relazione tra convergenza di una serie e convergenza a 0 del termine generale della serie. Effetto del cambiamento dei primi termini su una serie. Spezzamento di una serie in una somma di un numero finito di termini e di un'altra serie. Linearità della somma di una serie. Criteri del confronto, del confronto asintotico, del rapporto, della radice, di condensazione e (facoltativo) criterio integrale, per serie a termini non negativi o positivi. Criterio di Cauchy per le serie. Serie a termini di segno variabile. Relazione tra convergenza assoluta di una serie e convergenza (semplice) della serie stessa. Criterio di Leibniz. Criteri del rapporto e della radice per serie a termini di segno variabile. Serie telescopiche. Cenno a relazione tra serie e sviluppo decimale di un numero. Cenno ai riordinamenti di una serie.

2. Successioni e serie di funzioni. Convergenza puntuale e uniforme di successioni e serie di funzioni, e loro relazione con continuità, derivata e integrale. Criterio di Cauchy uniforme. Convergenza totale e relazione tra convergenza uniforme di una serie di funzioni e convergenza uniforme a 0 della successione associata. Serie di potenze: insieme di convergenza, raggio di convergenza, integrazione termine a termine e derivazione termine a termine. Il raggio di convergenza di una serie di potenze è lo stesso di quello della serie delle derivate, convergenza uniforme in intervalli chiusi dentro il cerchio di convergenza. Serie di Taylor. Condizioni perché una funzione sia sviluppabile in serie di Taylor. Serie di Taylor delle principali funzioni (dimostrazione della convergenza della serie alla funzione stessa solo accennata). Esempio di una funzione la cui serie di Taylor converge ma non alla funzione stessa (cenno). Ogni serie di potenze è una serie di Taylor; concetto di funzione analitica.

3. Limiti e continuità in $\mathbf{R^n}$. Norma (euclidea) in $\mathbf{R^n}$. Basi e prodotto scalare in $\mathbf{R^n}$. Disuguaglianza di Schwarz. Palle, insiemi aperti e insiemi chiusi. Interno, parte esterna, frontiera e chiusura di un insieme, insiemi limitati, e relative proprietà. Punti di accumulazione e isolati. Successioni e loro limiti in $\mathbf{R^n}$. Caratterizzazione della chiusura di un insieme e di un insieme chiuso mediante successioni in $\mathbf{R^n}$. Limiti di successioni in $\mathbf{R^n}$ in relazione al limite delle loro proiezioni. Limiti di funzioni e funzioni continue in $\mathbf{R^n}$. Continuità di somma, prodotto, differenza e quoziente di funzioni continue a valori reali, della composizione di funzioni continue e delle funzioni costanti, e delle proiezioni e delle funzioni lineari in $\mathbf{R^n}$. Elemento infinito in $\mathbf{R^n}$ (cenno). Limiti e continuità di funzioni a valori in $\mathbf{R^n}$ si riducono alla proprietrà analoghe delle componenti. Successioni di Cauchy, convergenti, limitate; le successioni convergenti sono limitate, e le successioni limitate hanno un'estratta convergente. Insiemi compatti (per successioni) e caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti di $\mathbf{R^n}$ come insiemi chiusi e limitati. Funzioni uniformemente continue. Teoremi sulle funzioni continue sui compatti. Teorema ponte. Cambio di variabile nei limiti, proprietà dei limiti. Insiemi connessi e (senza dimostrazione) caratterizzazioni degli aperti connessi mediante poligonali o curve continue. **NOTA:** Alcune dimostrazioni di questo capitolo sono state solo accennate o a volte saltate in quanto o già viste in Analisi I, o analoghe a dimostrazioni ben note nel caso $n = 1$.

4. Calcolo differenziale in $\mathbf{R^n}$. Derivate parziali e direzionali e differenziabilità e relazione di tali nozioni con la continuità. Differenziabilità implica derivate direzionali, e scrittura di queste in base al gradiente. Teorema del differenziale totale (senza dimostrazione), funzioni C^1. **NOTA:** Alcune dimostrazioni di questa prima parte di capitolo sono state solo accennate o a volte saltate in quanto già viste in Analisi I.
Piano tangente. Insiemi convessi. Derivate di ordine superiore e funzioni C^k. Teorema di Schwarz. Punti di massimo e di minimo (assoluto e relativo); condizioni del primo ordine e punti stazionari, cenno ai punti di sella. Metodo per la ricerca di estremi assoluti per funzioni di piú variabili. Calcolo differenziale e continuità per funzioni a valori vettoriali, in particolare derivate parziali, differenziale. Matrice Jacobiana e suo uso per scrivere il differenziale, relazioni tra differenziabilità e continuità, e tra derivate prime continue e differenziabilità (teorema del differenziale totale, senza dimostrazione). Regola della catena e applicazioni. Funzioni di classe C^k. Teoremi dell'inversione locale e delle funzioni implicite con casi particolari (senza dimostrazione). Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (dimostrazione facoltativa).

5. Curve e integrali curvilinei, forme differenziali. Curve, curve semplici, piane, chiuse, di Jordan. Teorema delle curve di Jordan (enunciato), orientazione di una curva di Jordan. Curve C^1, regolari, C^1 a tratti, regolari a tratti. Vettore tangente a una curva, vettore velocità. Cambiamento di parametro in una curva. Integrali di funzioni a valori vettoriali, semplici proprietà, in particolare la norma dell'integrale è minore o uguale dell'integrale della norma. Lunghezza di una curva e formula per la lunghezza di una curva con integrale della norma della derivata. Curve rettificabili. Integrale curvilineo di prima specie, e invarianza della lunghezza e dell'integrale curvilineo per cambio di parametrizzazione. Parametrizzazione per lunghezza d'arco (dimostrazione accennata). Integrale curvilineo di seconda specie e sua formulazione in termini di integrale di una forma differenziale. Invarianza (a meno del segno) di tale integrale per cambio di parametrizzazione (dimostrazione accennata). Forme differenziali esatte (o campi conservativi) e formulazione equivalenti: esistenza di una primitiva, integrali lungo cammini; costruzione di una primitiva (o potenziale). Forme differenziali chiuse (o campi irrotazionali), definizione di rotore per funzioni da $\mathbf{R^3}$ in $\mathbf{R^3}$. Ogni forma esatta è chiusa, ma non vale il viceversa. Definizione di curve omotope e di insieme semplicemente connesso. I convessi sono semplicemente connessi. L'integrale di una forma chiusa è invariante per omotopia (senza dimostrazione), in particolare sui semplicemente connessi ogni forma chiusa è esatta.

6. Integrali doppi e formula di Green. Integrali doppi: definizione di integrale e di integrabilità su un rettangolo, ogni funzione continua su un rettangolo è integrabile, integrale delle funzioni costanti. Principali proprietà delle funzioni Riemann-integrabili e degli integrali di Riemann su un rettangolo. Formula di riduzione per integrali di Riemann su un rettangolo. Definizione di integrale di Riemann di funzioni su un insieme limitato. Insiemi misurabili e insiemi di misura nulla e loro proprietà, in particolare un insieme è misurabile se e solo se la sua frontiera ha misura nulla (dimostrazione facoltativa). Proprietà delle funzioni integrabili su insiemi limitati. Domini normali (o semplici) e formula di riduzione degli integrali doppi su domini normali. Integrali su unioni quasi disgiunte di domini semplici. Formula del cambio di variabile in integrali doppi (senza dimostrazione). Coordinate polari. Integrali (in una variabile) dipendenti da un parametro: continuità e derivata della funzione integrale (dimostrazioni facoltative). Formule di Green nel piano: dimostrazione per domini normali rispetto ad entrambi gli assi, e spiegazione in casi concreti di come la formula si estende in domini piú generali. Teorema della divergenza nel piano.

7. Integrali tripli e superficiali e collegamenti tra di loro. Integrali tripli, visti in analogia con gli integrali doppi: Definizioni e principali proprietà analoghe a quelle degli integrali doppi, incluse definizioni e proprietà di insiemi misurabili, di misura di un insieme e di insiemi di misura nulla. Formule di riduzione per integrali tripli sia su prodotti di intervalli, sia su domini normali, integrazione per fili e per strati, volumi di insiemi. Area dell'immagine di un insieme tramite omotetia. Formula di cambio di variabile negli integrali tripli (senza dimostrazione), coordinate cilindriche e coordinate sferiche. Superfici e parametrizzazione di superfici, superfici regolari, punti interni e punti di bordo di una superficie. Piano tangente e normale ad una superficie regolare in un punto. Area di una superficie. Integrali superficiali. Versori normali ad una superficie regolare. Orientazioni di superfici e superfici orientabili, orientazione del bordo di una superficie. Superfici "composte" e loro orientazione. Flusso lungo una superficie e teorema della divergenza nello spazio. Teorema di Stokes e considerazioni collegate.

8. Equazioni differenziali. Equazioni differenziali. Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine. Equazioni e sistemi in forma normale. Un'equazione differenziale di ordine n in forma normale si riconduce a un sistema del primo ordine di n equazioni in n incognite. Problema di Cauchy per equazioni (anche di ordine n) e per sistemi del primo ordine. Si intende che sia equazioni sia sistemi devono essere in forma normale. Teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy per equazioni del primo ordine in forma normale (dimostrazione appena accennata) e per sistemi del primo ordine in forma normale o per equazioni di qualunque ordine in forma normale (senza dimostrazione). Equazioni differenziali lineari in forma normale di ordine n e sistemi differenziali lineari del primo ordine di n equazioni in n incognite; entrambi quando sono omogenei hanno come insieme di soluzioni uno spazio vettoriale di dimensione n. Equazioni lineari del primo ordine (sia omogenee sia non omogenee). Equazioni lineari di ordine qualunque a coefficienti costanti, sia omogenee, sia non omogenee trattate col metodo della variazione delle costanti. Il metro della variazione delle costanti è stato visto veramente solo per equazioni del primo e del secondo ordine. Nota: non c'è stato tempo per metodi alternativi alla variazione delle costanti, come il metodo degli annichilatori, per equazioni lineari di ordine n non omogenee, ma lo studente se vuole può usarli liberamente (resta inteso che non sono richiesti e quindi *non ci saranno esercizi negli scritti che non si possono fare che con tali metodi alternativi*). Equazioni a variabili separabili.

Nota: in genere non è considerato importante *ricordare* le dimostrazioni ma avere afferrato i concetti, per cui le dimostrazioni piú semplici vengono spontanee, e non è importante ricordare quelle piú complicate.

Per gli argomenti si può fare riferimento al libro adottato che, ricordo, è
Autori: Michiel Bertsch, Roberta Dal Passo, Lorenzo Giacomelli;
Titolo: ANALISI MATEMATICA;
Casa Editrice McGraw-Hill.; ISBN 978-88-336-6281-2.