Proviamo per induzione che

$$n! > 3^n \tag{P_n}$$

per ogni $n \geq 7$.
Che cosa dobbiamo provare? Dobbiamo mostrare che vale P_7 e che
$P_n \Rightarrow P_{n+1}$ per ogni $n \geq 7$.
Intanto P_7 afferma $7! > 3^7$. Siccome $7! = 5040$ e $3^7 = 2187$ questo è chiaramente vero.
Ora proviamo che $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ per ogni $n \geq 7$. Questo vuol dire: Sia dato $n \geq 7$ e supponiamo vera
P_n ossia $n! > 3^n$.
Proviamo che allora vale
P_{n+1} ossia $(n+1)! > 3^{n+1}$.
Proviamo a vedere se questo succede. Si ha:

$$\begin{aligned}
&(n+1)! = (n+1)n! && \text{per una nota uguaglianza.}\\
&> (n+1)3^n && \text{moltiplicando per } n+1 \text{ la disuguaglianza in } \mathrm{P_n}.\\
&> 3 \cdot 3^n && \text{dato che } n+1 > 3 \text{ (abbiamo supposto } n \geq 7)\\
&= 3^{n+1}
\end{aligned}$$

e P_{n+1} è provata.
Osserviamo che noi abbiamo provato **NON** che P_{n+1} vale in sé, ma che vale *supponendo vera* P_n. Questa è la logica dell'induzione: Provare un'affermazione deducendo un passo dal precedente. In altri termini, noi abbiamo visto prima che vale per 7 (senza questa osservazione preliminare non potremmo fare il ragionamento), poi che se vale per un numero ≥ 7 vale per il successivo. Quindi dal fatto che vale per 7 vale per 8; ora sappiamo che vale per 8 e quindi vale per 9, e quindi vale per 10 e quindi per 11 ecc. Non sarebbe così facile invece dedurre P_{n+1} senza sapere preliminarmente che vale P_n. A volte si chiama *passo induttivo* l'implicazione $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, e in tale implicazione si chiama *ipotesi induttiva* P_n.

Facciamo un altro esempio. Proviamo la formula

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2. \tag{P'_n}$$

per ogni n intero positivo, ossia $n = 1, 2, 3, ...$ Notando che, come noto $\dfrac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$, si potrebbe esprimere (P'_n) anche nella forma "simpatica"

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \big(1 + 2 + 3 + ... + n\big)^2.$$

Come già detto a lezione, provare che una sommatoria vale un certo valore per induzione, in molti casi è in un certo senso innaturale, dato che bisogna conoscere prima la formula

della sommatoria (non si sa come) e poi verificarla. Quindi è meglio in genere cercare un modo per ottenere la formula. Nel caso specifico però, non è innaturale farlo per induzione dato che la formula è suggerita dai primi casi.
$1^3 = 1 = 1^2$, $1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1+2+3)^2$,
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = (1+2+3+4)^2$.
Ora proviamo P'_n per induzione. Dato che dobbiamo provare che vale per gli interi da 1 in poi dobbiamo provare
1) P'_1 vale
2) $P'_n \Rightarrow P'_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$.
Verifichiamo che P'_1 vale, cosa che in reltà implicitamente abbiamo già visto. Si ha

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1 = \Big(\frac{1(1+1)}{2}\Big)^2$$

e P'_1 vale.
Ora proviamo 2), ossia, dato n intero, $n \geq 1$, *Supponiamo vera* P'_n e proviamo P'_{n+1}, ossia

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \Big(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\Big)^2.$$

Si ha

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \Big(\sum_{i=1}^{n} i^3\Big) + (n+1)^3$$

per definizione di sommatoria. Ora per P'_n si ha

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{i=1}^{n} i^3\Big) + (n+1)^3 &= \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{1}{4}\Big(n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3\Big) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4) = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \\
&= \Big(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\Big)^2.
\end{aligned}$$

Quindi il passo induttivo, ossia $P'_n \Rightarrow P'_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$, è provato, e P'_n vale per ogni n intero positivo, ossia $n = 1, 2, 3, \ldots..$
Notiamo che per provare il passo induttivo, in questo tipo di ragionamento, conviene scrivere la formula al passo $n+1$ in base a quella al passo n per potere usare l'ipotesi induttiva. Ad esempio qui il "trucco" sta nello scrivere $\sum_{i=1}^{n+1} i^3$ usando $\sum_{i=1}^{n} i^3$, e poi usare P'_n.