Scritto di Analisi Matematica 4 per Matematica

Anno Accademico 2017/18

11/02/2019

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio!!!!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Sia $f_n(x) = \begin{cases} \arctan\left(\left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n\right) & \text{se } x < n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

a) Dire se la successione f_n converge puntualmente su $[0, +\infty[$, e nel caso determinarne il limite puntuale.

b) Dire se la convergenza è uniforme su $[0, +\infty[$ e se è uniforme sui suoi sottoinsiemi compatti.

c) Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

d) Provare che se g_n sono funzioni da $[0, 1]$ in $\mathbf{R}$ di classe C^1 tali che $\max_{[0,1]} g_n = 1$, $\max_{[0,1]} |g'_n| = 1$, allora esiste un'estratta di g_n che non tende puntualmente a 0 su $[0, 1]$.

2) a) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $y^{iv}(t) - 7y''(t) + 6y(t) = t + e^{2t}$.

b) Dire per quali numeri reali a, b, c tutte le soluzioni y dell'equazione differenziale $y^{iv}(t) + ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ sono tali che anche la funzione z definita da $z(t) = y(-t)$ soddisfa la stessa equazione.

c) Sia v una funzione di classe C^1 ad $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 2$, e consideriamo l'equazione differenziale $y'(t) = y(t)(y(t) - 1)v(y(t) + t)$. Dire se questa equazione ha soluzioni non costanti globali.

d) La equazione in c) ha necessariamente soluzioni non globali?

3) a) Sia $A = [-2, 2] \times [-2, 2]$. Determinare, se esistono $\max_A u$, $\min_A u$ ove

$$u(x, y) = xy(x^2 - 4)(y^2 - 4).$$

b) Dire se u ha massimo e se u ha minimo su $[-2, 2] \times \mathbf{R}$.

Scritto di Analisi Matematica 4 per Matematica

Anno Accademico 2017/18

24/01/2019

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio!!!!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Sia data la successione di funzioni $f_n^{(a,b)}(x) = \begin{cases} \frac{n^b}{n+1} & \text{se } x \in \left[\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n^a}\right] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

a) Dire per quali numeri reali a e b la successione $f_n^{(a,b)}$ converge puntualmente su $\mathbf{R}$ e per quali numeri reali a e b tale convergenza è uniforme su $\mathbf{R}$.

b) per $a = 1$, dire su quali intervalli aperti la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(a,b)}$ converge puntualmente per ogni $b \in \mathbf{R}$ e su quali intervalli aperti la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(a,b)}$ converge uniformemente per ogni $b \in \mathbf{R}$.

2) a) Risolvere, al variare di $k \in \mathbf{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{(e^{y(t)} + 1)^2}{e^{y(t)}} t^4 \\ y(0) = k \end{cases}$$

b) Per $b > 0$ sia (E_b) l'equazione differenziale $y'(t) = \sin\left(\frac{by^4(t)}{y^4(t)+1}\right) y(t)$. Provare che ogni soluzione di (E_b) è globale.

c) Provare che se $b = 1$, per ogni $k > 0$ la soluzione di (E_b) che soddisfa $y(0) = k$, in $[0, +\infty[$ è positiva e assume tutti i valori reali maggiori di k .

d) Per quali $b > 0$ (E_b) ha la stessa proprietà che in c) ha (E_1) ?

e) Verificare che per ogni $k \in \mathbf{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(y(t))^n}{(n^2)!} \\ y(0) = k \end{cases}$$

ha un'unica soluzione in un opportuno intorno di 0.

3) a) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10, xy \geq \frac{1}{10^{100}}\}$. Determinare, se esistono $\max_A u, \min_A u$ ove $u(x, y) = xy - 3x^\pi - 4y^e$.

b) Determinare i sottoinsiemi connessi (di tipo insieme normale) di B ove $B =$

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1000 \leq x \leq 1000, (x-3)(\ln(x-2) + \ln(7-x)) \leq y \leq 6x - 18\}.$$

Scritto di Analisi Matematica 4 per Matematica

Anno Accademico 2017/18

25/09/2018

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio!!!!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Sia data a successione di funzioni f_n da $[0, 1]$ in $\mathbf{R}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x - \frac{1}{n}| \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dire dove f_n converge puntualmente e se converge uniformemente sull'insieme di convergenza puntuale.

b) Dire lo stesso per la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

c) Sia g_n da $[0, 1]$ in $\mathbf{R}$ definita da $g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \frac{k}{n!}, k \in \mathbf{N}. \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$ Determinare, se

esiste, il limite puntuale di g_n .

d) Dire se esiste una successione u_n di elementi di $]0, 1[$, tutti diversi tra loro e tale che per ogni successione $\alpha_n > 0$ la successione di funzioni h_n definita da

$$h_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x - u_n| \leq \alpha_n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

non tende puntualmente a 0.

2) a) Risolvere, al variare di $k \in \mathbf{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = t^3 \left((y(t))^2 - y(t) \right) \\ y(0) = k \end{cases}$$

b) Determinare per quali $d \in \mathbf{R}$ l'equazione differenziale $y'(t) = y^{1000}(t) - dy^{500}(t) + 30$ non ha soluzioni costanti.

c) Possiamo dire che se invece d è tale che l'equazione in b) ha soluzioni costanti, allora esistono soluzioni dell'equazione in b) non costanti definite in tutto $\mathbf{R}$?

3) Sia

$$C_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y, a \leq x^2 + y^2 \leq b\}.$$

e sia $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2 - 3x$.

a) Determinare, se esistono, massimo e minimo di f su $C_{1,30}$.

b) Dire per quali a e b con $0 < a < b$ la funzione f ha o massimo o minimo su $C_{a,b}$ interno a $C_{a,b}$.

4) Sia $C =$

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -20 \leq x \leq 1000, x(x^4 - 3)(\ln(x + 2) - 7)) \leq y \leq (2x^4 - 6)(\ln(x + 2) - 7)\}.$$

a) Determinare i sottoinsiemi connessi (di tipo insieme normale) di B .

b) Scelto un sottoinsieme non vuoto, connesso e compatto C di B , e posto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in C, z = x^{\frac{3}{2}} + 2y\},$$

determinare l'area di S .

Scritto di Analisi Matematica 4 per Matematica

Anno Accademico 2017/18

07/09/2018

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Sia data la successione di funzioni $f_{n,a}(x) = \frac{1}{n^a x - 1}$ ove definiamo $f_{n,a}$

da $B_a :=]0, 1[\setminus \{ \frac{1}{n^a}, n = 1, 2, 3, \dots \}$ in $\mathbf{R}$.

a) Studiare, al variare di $a \in \mathbf{R}$, la convergenza puntuale della successione $f_{n,a}$.

b) Studiare, al variare di $a \in \mathbf{R}$, la convergenza puntuale della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{n,a}$.

c) Dire se su B_a la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{n,a}$ si può derivare termine a termine.

d) Supponiamo che $g_n :]0, 1[\rightarrow \mathbf{R}$ siano funzioni di classe C^1 , che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ converga puntualmente e che valga la seguente proprietà:

Fissato $x \in]0, 1[$, $g_n(x) = 0$ definitivamente.

Si può dedurre che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ è derivabile in $]0, 1[$?

2) a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y^{iv}(t) + y''(t) + 6y(t) = 1$.

b) Provare che l'equazione differenziale $y'(t) = \frac{\alpha(t)}{\cos(y(t))}$ non ha soluzioni su tutto $\mathbf{R}$ se α

è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $\alpha(t) \geq \frac{1}{4}$ per ogni $t \in \mathbf{R}$.

c) Vale lo stesso se invece α è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $\alpha(t) \geq \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^{\frac{\pi}{70}}$ per ogni $t \in \mathbf{R}$?

3) Sia

$$C_a = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq (1 + x^2)^a\}.$$

a) Determinare massimo e minimo della funzione u definita da $u(x, y) = \frac{y}{x+1}$ su C_π .

b) Se v è una funzione continua da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$, dire se la funzione W definita su $]0, +\infty[$ da $W(a) = \min_{C_a} v$ è monotona.

4) Sia h il prolungamento 2π -periodico su $\mathbf{R}$ della funzione $\bar{h}$ definita su $[-\pi, \pi[$ da $\bar{h}(x) = 1 + x^2$. Determinare l'area della superficie S definita da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq h(x), z = x^2 + y\}.$$

Scritto di Analisi Matematica 4 per Matematica

Anno Accademico 2017/18

17/07/2018

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio!!!!!!! consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = \begin{cases} \alpha(x) & \text{se } x \in [\frac{n}{3^n}, \frac{n}{2^n}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. ove α è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$.

a) Determinare la convergenza puntuale e uniforme di f_n su $\mathbf{R}$ se $\alpha(x) = x^2$.

b) Determinare una funzione α come sopra continua, e strettamente positiva su $]0, +\infty[$ con $\alpha(0) = 0$ tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converga uniformemente su $\mathbf{R}$ e dire se questo vale per ogni α come sopra di classe C^1 e tale che $\alpha(0) = 0$.

c) Se $h : [0, 1] \times [0, 1]$ è una funzione continua, posto $f_n(x) = h(x, \frac{1}{n+1})$, provare che la successione f_n converge puntualmente su $[0, 1]$, e dire se la convergenza è sempre uniforme.

2) a) Risolvere, al variare di $k \in \mathbf{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (t^2 + 2)y'(t) + 2ty(t) = (2t^2 + 4)(y(t))^2 \\ y(0) = k \end{cases}$$

in un opportuno intorno di 0, precisando per quali k tale problema ha soluzione. Non si richiede di determinare l'intervallo massimale.

b) Provare che se $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ è di classe C^1 e strettamente positiva allora il problema di Cauchy

$$e^{y'(t)} = f(t, y(t)), \quad y(2) = k$$

ha un'unica soluzione in un opportuno intorno di 2 per ogni $k \in \mathbf{R}$.

c) Provare che il problema di Cauchy

$$y'(t) + e^{y'(t)} = f(t, y(t)), \quad y(2) = k$$

ha un'unica soluzione in un opportuno intorno di 2 per ogni $k \in \mathbf{R}$. Qui f è come in b), non necessariamente positiva.

3) a) Sia β una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $\beta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Provare che l'insieme

$A_\beta := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 2, y \geq 3, y \leq \beta(x)\}$ è compatto.

b) Sia $\beta(x) = \frac{10}{|x|+1}$, Determinare se esistono, $\max_{A_\beta} u$ e $\min_{A_\beta} u$ ove $u(x, y) = x - 2y$.

4) Sia

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{\sqrt{x+2} - 5}{\sqrt{7-x} - 2} (x - 8) \leq y \leq 0 \right\}.$$

a) Determinare i sottoinsiemi connessi (di tipo insieme normale) di B .

b) Scelto un sottoinsieme non vuoto, connesso e compatto C di B , e posto

$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in C, z = 4x + 2y\}$,

determinare l'area di S .

Scritto di Analisi Matematica 4 per Matematica

Anno Accademico 2017/18

25/06/2018

NOME:

COGNOME:

- 1) Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = \begin{cases} \sin(x - n) & \text{se } x \in [n - u_n, n + u_n] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.
- a) Se $u_n = \delta > 0$, determinare la convergenza puntuale e uniforme di f_n su $\mathbf{R}$.
- b) Se $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, dire per quali $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge totalmente su $\mathbf{R}$.
- c) Provare che se w è una funzione di classe C^2 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $w(0) = 0$, allora esiste $s \in \mathbf{R}$ tale che posto $u_n = |w(\frac{1}{n}) - \frac{s}{n}|$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente su $\mathbf{R}$.
- 2) a) Risolvere l'equazione differenziale $y^{iii}(t) - 5y^{iv}(t) + 6y'(t) = 0$.
- b) Sia data l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{\sin(y(t)) - 1}{y(t) - \phi(t)}, \quad (E_\phi)$$

ove ϕ è una funzione di classe C^1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Se $\phi(t) = t^3$ trovare le soluzioni costanti di E_ϕ e dire se ci sono soluzioni non costanti di E_ϕ in tutto $\mathbf{R}$.

c) Provare che se ϕ è limitata allora ci sono soluzioni non costanti di E_ϕ in tutto $\mathbf{R}$.

3) Al variare di $\alpha > 0$, sia dato l'insieme

$$A_\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \alpha y^2 + 2 \leq x \leq |y|\}.$$

- a) Per $\alpha = \frac{1}{10}$, determinare, se esistono, $\max_{A_\alpha} u$ e $\min_{A_\alpha} u$ ove $u(x, y) = x - y^2$.
- b) Determinare per quali $\alpha > 0$ l'insieme A_α è non vuoto e compatto.

4) Sia

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{(x+2)^3} + \sqrt{x^6 - 2} \leq y \leq 4 + \sqrt{x^6 - 2}\}.$$

- a) Determinare i sottoinsiemi connessi (di tipo insieme normale) di B .
- b) Scelto un sottoinsieme non vuoto, connesso e compatto C di B , e posto $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in C, z = x^2 + y\}$, determinare una base del piano tangente a S in un generico punto di S .

Scritto di Analisi Matematica 4 per Matematica

Anno Accademico 2017/18

25/06/2018

NOME:

COGNOME:

- 1) Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = \begin{cases} \sin(x - n) & \text{se } x \in [n - u_n, n + u_n] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.
- a) Se $u_n = \delta > 0$, determinare la convergenza puntuale e uniforme di f_n su $\mathbf{R}$.
- b) Se $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, dire per quali $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge totalmente su $\mathbf{R}$.
- c) Provare che se w è una funzione di classe C^2 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $w(0) = 0$, allora esiste $s \in \mathbf{R}$ tale che posto $u_n = |w(\frac{1}{n}) - \frac{s}{n}|$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente su $\mathbf{R}$.
- 2) a) Risolvere l'equazione differenziale $y^{vii}(t) - 10y^{iv}(t) + 21y'(t) = 0$.
- b) Sia data l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{\sin(y(t)) - 1}{y(t) - \phi(t)}, \quad (E_\phi)$$

ove ϕ è una funzione di classe C^1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Se $\phi(t) = t^3$ trovare le soluzioni costanti di E_ϕ e dire se ci sono soluzioni non costanti di E_ϕ in tutto $\mathbf{R}$.

c) Provare che se ϕ è limitata allora ci sono soluzioni non costanti di E_ϕ in tutto $\mathbf{R}$.

3) Al variare di $\alpha > 0$, sia dato l'insieme

$$A_\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \alpha y^2 + 2 \leq x \leq |y|\}.$$

- a) Per $\alpha = \frac{1}{10}$, determinare, se esistono, $\max_{A_\alpha} u$ e $\min_{A_\alpha} u$ ove $u(x, y) = x - y^2$.
- b) Determinare per quali $\alpha > 0$ l'insieme A_α è non vuoto e compatto.

4) Sia

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{(x+2)^3} + \sqrt{x^6 - 2} \leq y \leq 4 + \sqrt{x^6 - 2}\}.$$

- a) Determinare i sottoinsiemi connessi (di tipo insieme normale) di B .
- b) Scelto un sottoinsieme non vuoto, connesso e compatto C di B , e posto $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in C, z = xy + e^x\}$, determinare una base del piano tangente a S in un generico punto di S .

Secondo Esonero di Analisi Matematica 4 per Matematica

Anno Accademico 2017/18

08/06/2018

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo esonero firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo esonero _____

1) Siano $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $D =]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}[\times] - \frac{1}{10}, \frac{1}{10}[$. Sia $u(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$.

a) Determinare, se esistono, $\max_{A \setminus D} u$ e $\min_{A \setminus D} u$.

b) Siano $B_n := B_{r_n}(P_n)$ ove P_n sono punti di $\mathbf{R}^2$ e $r_n > 0$. Qui $B_r(P)$ indica la palla (aperta) di centro P e raggio r (rispetto alla metrica euclidea). Supponiamo $B_n \subseteq A$ e

poniamo $D_n = A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n B_k \right)$ e supponiamo D_n non vuoto per ogni n . Provare che se v è una funzione continua da A in $\mathbf{R}$, allora esiste $\max_{D_n} v$.

c) Con le notazioni di b) provare che la successione $\max_{D_n} v$ converge per $n \rightarrow +\infty$.

2) Sia

$$S_a = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \in [-a, a], (x^4 - 2)^2(2x^4 - 6) \leq y \leq (x^4 - 2)(x^4 - 3)^2, z = y^2 e^x \right\}.$$

Determinare per quali $a > 0$ S_a definisce una superficie e per tali a scrivere, in forma di integrale iterato, l'area di S_a .

3) a) Sia data una successione f_n di funzioni continue da $[0, 3]$ in $[1, 2]$. Supponiamo che f_n non abbia alcuna estratta che converge uniformemente. Provare che esistono

$\varepsilon > 0$, $x_n, x'_n \in [0, 3]$ e indici $m(n)$ tali che $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ e $|f_{m(n)}(x_n) - f_{m(n)}(x'_n)| \geq \varepsilon$.

b) Provare che se f_n è una successione di funzioni equilimitate e equicontinue da $[0, 3]$ in $\mathbf{R}$, allora esistono un'estratta f_{n_k} di f_n e una funzione continua f da $[0, 3]$ in $\mathbf{R}$ tali che la

serie di funzioni $\sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_k} - f)$ converge uniformemente.

Secondo Esonero di Analisi Matematica 4 per Matematica

Anno Accademico 2017/18

08/06/2018

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo esonero firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo esonero _____

1) Siano $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$, $D =] -\frac{1}{7}, \frac{1}{7}[\times]\frac{1}{5}, \frac{1}{4}[$. Sia $u(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$.

a) Determinare, se esistono, $\max_{A \setminus D} u$ e $\min_{A \setminus D} u$.

b) Siano $B_n :=]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[$ ove $a_n < b_n$ e $c_n < d_n$. Supponiamo $B_n \subseteq A$ e poniamo

$D_n = A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n B_k \right)$ e supponiamo D_n non vuoto per ogni n . Provare che se v è una funzione continua da A in $\mathbf{R}$, allora esiste $\max_{D_n} v$.

c) Con le notazioni di b) provare che la successione $\max_{D_n} v$ converge per $n \rightarrow +\infty$.

2) Sia

$$S_a = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \in [-a, a], (x^4 - 2)^2(2x^4 - 6) \leq y \leq (x^4 - 2)(x^4 - 3)^2, z = \frac{x}{y^2 + 7} \right\}.$$

Determinare per quali $a > 0$ S_a definisce una superficie e per tali a scrivere, in forma di integrale iterato, l'area di S_a .

3) a) Sia data una successione f_n di funzioni continue da $[0, 2]$ in $[4, 6]$. Supponiamo che f_n non abbia alcuna estratta che converge uniformemente. Provare che esistono

$\varepsilon > 0$, $x_n, x'_n \in [0, 2]$ e indici $m(n)$ tali che

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \text{ e } |f_{m(n)}(x_n) - f_{m(n)}(x'_n)| \geq \varepsilon.$$

b) Provare che se f_n è una successione di funzioni equilimitate e equicontinue da $[0, 2]$ in $\mathbf{R}$, allora esistono un'estratta f_{n_k} di f_n e una funzione continua f da $[0, 2]$ in $\mathbf{R}$ tali che la

serie di funzioni $\sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_k} - f)$ converge uniformemente.

Esonero di Analisi Matematica 4 per Matematica

Anno Accademico 2017/18

02/05/2018

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = \begin{cases} 2^n x^n & \text{se } x \in [-\frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, ove $a > 0$.

Determinare al variare di $a > 0$ l'insieme di convergenza puntuale della successione f_n e dire se su tale insieme la successione f_n converge uniformemente.

b) Dire, per la successione f_n in a), per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente in $\mathbf{R}$.

c) Dire se, quando f_n è una successione di funzioni da $[0, 1[$ in $\mathbf{R}$ tale che valgono i) e ii) qui sotto

i) f_n converge uniformemente su tutti i compatti contenuti in $[0, 1[$,

ii) per ogni $x_n \in [0, 1[$ tale che $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ la successione $f_n(x_n)$ è convergente a 0, allora f_n converge uniformemente su $[0, 1[$.

2) a) Risolvere, al variare di $k \in \mathbf{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{te^{-t}}{y(t)^{11} + y(t)^5} \\ y(0) = k \end{cases}$$

in un opportuno intorno di 0, precisando per quali k tale problema ha soluzione. Non si richiede di determinare l'intervallo massimale.

b) Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{te^{-t}}{y(t)^n + y(t)^2 + 1} \\ y(0) = k \end{cases}$$

con n intero, $n > 2$. Dire per quali n tale problema di Cauchy ha soluzione per ogni $k \in \mathbf{R}$.

c) Provare che se $n = 5$ il problema di Cauchy in b) non ha soluzioni che assumono tutti i valori reali nel suo intervallo massimale.

Esonero di Analisi Matematica 4 per Matematica

Anno Accademico 2017/18

02/05/2018

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) a) Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = \begin{cases} 5^n x^n & \text{se } x \in [-\frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, ove $a > 0$.

Determinare al variare di $a > 0$ l'insieme di convergenza puntuale della successione f_n e dire se su tale insieme la successione f_n converge uniformemente.

b) Dire, per la successione f_n in a), per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente in $\mathbf{R}$.

c) Dire se, quando f_n è una successione di funzioni da $]0, 1]$ in $\mathbf{R}$ tale che valgono i) e ii) qui sotto

i) f_n converge uniformemente su tutti i compatti contenuti in $]0, 1]$,

ii) per ogni $x_n \in]0, 1]$ tale che $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ la successione $f_n(x_n)$ è convergente a 0, allora f_n converge uniformemente su $]0, 1]$.

2) a) Risolvere, al variare di $k \in \mathbf{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{t \cos(t^2)}{y(t)^7 + y(t)^3} \\ y(0) = k \end{cases}$$

in un opportuno intorno di 0, precisando per quali k tale problema ha soluzione. Non si richiede di determinare l'intervallo massimale.

b) Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{te^{-t}}{y(t)^n + y(t)^4 + 1} \\ y(0) = k \end{cases}$$

con n intero, $n > 4$. Dire per quali n tale problema di Cauchy ha soluzione per ogni $k \in \mathbf{R}$.

c) Provare che se $n = 5$ il problema di Cauchy in b) non ha soluzioni che assumono tutti i valori reali nel suo intervallo massimale.