

Scritto di Analisi Matematica IV per Matematica

Anno Accademico 2016/17

15/02/2018

NOME:

COGNOME:

1) a) Sia $f_n(x) = nx + \sin(nx)$, e sia $g_{a,n}(x) = \frac{f_n(x)}{n^a}$, $a > 0$. Dire, al variare di $a > 0$ se la successione $g_{n,a}$ converge puntualmente per $n \rightarrow +\infty$, e se il limite è uniforme.

b) Dire se la successione di funzioni α_n definita da $\alpha_n(x) = \frac{[nx]}{n}$ converge puntualmente su $\mathbf{R}$ e se converge uniformemente su $\mathbf{R}$.

c) Sia (f_n) una successione di funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che vale la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 : |f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \notin [-K, K] \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Provare che se la successione f_n converge uniformemente sui compatti, allora la successione f_n converge uniformemente su tutto $\mathbf{R}$.

2) a) Sia $\alpha(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Risolvere, al variare di $k \in \mathbf{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha(y(t)) \\ y(0) = k \end{cases}.$$

b) Siano P e Q polinomi non costanti con coefficiente direttivo 1 e tali che $\partial P \geq 1$ e $\partial Q \geq 1$ (ove ∂ indica il grado del polinomio). Supponiamo inoltre che Q non si annulli mai in $\mathbf{R}$. Provare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{P(y(t))}{Q(y(t))} \\ y(0) = k \end{cases}$$

ha soluzione globale su $\mathbf{R}$ per ogni $k \in \mathbf{R}$ se $\partial P \leq \partial Q$.

c) Nella situazione di b) si può trarre la stessa conclusione se $\partial P = \partial Q + 1$?

3) a) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$. Determinare, se esistono, $\max_A v$, $\min_A v$, ove $v(x, y) = (x-3)(5y-1)$.

b) Dire per quali $c > 0$, posto $D_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq cx - 5\}$, $D_c \cap A$ è un sottoinsieme proprio ma non vuoto di A .

Scritto di Analisi Matematica IV per Matematica

Anno Accademico 2016/17

18/09/2017

NOME:

COGNOME:

1) a) Sia $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f_n(x) = \begin{cases} n^2 & \text{se } x \in]\frac{5n}{2n+1}, \frac{5n}{2n-1}[\\ x + \frac{1}{n} & \text{altrimenti.} \end{cases}$. Determinare

l'insieme di convergenza puntuale della successione di funzioni f_n e dire in quali intervalli $[a, b]$ con $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ la convergenza di f_n è uniforme.

b) Provare che se α è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ di classe C^1 , allora la serie di funzioni

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(x + \frac{1}{n})}{n^2 + 1}$ si può derivare termine a termine in $\mathbf{R}$.

c) Provare che se f_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ sono funzioni continue da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e vale

$$|x - y| \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{1}{4^n}$$

e se inoltre la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente in $\mathbf{R}$, allora la funzione s definita da $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è continua.

2) a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(t) - 6y'(t) + by(t) = e^{2t}$$

al variare di $b \in \mathbf{R}$.

b) Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{3(y^2(t) + 1)^\gamma}{ty(t) - 1} \\ y(0) = k \end{cases}$$

con $\gamma > 0$. Dire per quali $k \in \mathbf{R}$ tale problema di Cauchy ha un'unica soluzione in un opportuno intorno di 0, e per tali k dire se tale soluzione è monotona nel suo intervallo massimale.

c) Provare che per ogni $\gamma > 0$ e per ogni k il problema di Cauchy in **b)** non ha soluzioni globali positive.

3) a) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - 2| \leq y \leq 10 - (x - 2)^2\}$. Determinare, se esistono $\max_A u$ e $\min_A u$, ove $u(x, y) = (y - 3)(x - 2)$.

b) Dire se per ogni funzione continua $v : A \rightarrow \mathbf{R}$ esiste una costante H reale tale che la funzione $v + H$ sia positiva su A .

c) Sia

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - 2| \leq 10 - (x - 2)^2, (5x - 11)|x - 2| \leq y \leq (5x - 11)(10 - (x - 2)^2)\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in C, z = 5x + 3y - 2\}.$$

Calcolare l'area della superficie B .

Scritto di Analisi Matematica IV per Matematica

Anno Accademico 2016/17

24/07/2017

NOME:

COGNOME:

1) a) Sia $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f_n(x) = \begin{cases} nx^2 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n^a}] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$. Dire, al variare di $a > 0$,

se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge su $\mathbf{R}$ puntualmente, totalmente, uniformemente.

b) Sia data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ con raggio di convergenza finito ma strettamente positivo. Provare che esistono $x \in \mathbf{R}$ e $\varepsilon > 0$ tale che la serie data converge nell'intervallo $[x, x + \varepsilon]$, ma non converge in $x + 2\varepsilon$.

c) Sia $g_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una successione di funzioni tale che esiste $x_n \in \mathbf{R}$ per cui $g_n(x_n + \frac{k}{n!}) = 0$ per ogni intero k , e inoltre g_n sono Lipschitziane di costante 1. Provare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ converge uniformemente su $\mathbf{R}$.

d) Sia $g_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una successione di funzioni tale che esiste $x_n \in \mathbf{R}$ per cui $g_n(x_n + \frac{k}{n!}) = 0$ per ogni intero k , e inoltre g_n sono Lipschitziane di costante 1 nell'intervallo $[x_n + \frac{k}{n!} - \frac{1}{20n!}, x_n + \frac{k}{n!} + \frac{1}{20n!}]$. Provare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ converge in almeno un punto.

2) a) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (y'(t))^2 + y(t)y''(t) = t \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = k \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$.

b) Determinare le soluzioni costanti dell'equazione differenziale $y'(t) = \sin(e^{y(t)})$.

c) Provare che se $k > 100$ la soluzione y dell'equazione in b) soddisfacente $y(0) = k$ è globale.

3) a) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 20 - y^2\}$. Determinare, se esistono $\max_A u$ e $\min_A u$, ove $u(x, y) = (y - 1)x^2$.

b) Dire se, data la funzione $\sigma : A \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da

$$\sigma(u, v) = (u + v, u^2 + v^2, 7uv)$$

$\sigma : A \rightarrow \mathbf{R}^3$ rappresenta una superficie regolare.

Scritto di Analisi Matematica IV per Matematica

Anno Accademico 2016/17

24/07/2017

NOME:

COGNOME:

1) a) Sia $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f_n(x) = \begin{cases} nx^2 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n^{5a}}] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$. Dire, al variare di $a >$

0, se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge su $\mathbf{R}$ puntualmente, totalmente, uniformemente.

b) Sia data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ con raggio di convergenza finito ma strettamente positivo. Provare che esistono $x \in \mathbf{R}$ e $\varepsilon > 0$ tale che la serie data converge nell'intervallo $[x, x + \varepsilon]$, ma non converge in $x + 2\varepsilon$.

c) Sia $g_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una successione di funzioni tale che esiste $x_n \in \mathbf{R}$ per cui $g_n(x_n + \frac{k}{n!}) = 0$ per ogni intero k , e inoltre g_n sono Lipschitziane di costante 1. Provare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ converge uniformemente su $\mathbf{R}$.

d) Sia $g_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una successione di funzioni tale che esiste $x_n \in \mathbf{R}$ per cui $g_n(x_n + \frac{k}{n!}) = 0$ per ogni intero k , e inoltre g_n sono Lipschitziane di costante 1 nell'intervallo $[x_n + \frac{k}{n!} - \frac{1}{20n!}, x_n + \frac{k}{n!} + \frac{1}{20n!}]$. Provare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ converge in almeno un punto.

2) a) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (y'(t))^2 + y(t)y''(t) = t \\ y(0) = -6 \\ y'(0) = k \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$.

b) Determinare le soluzioni costanti dell'equazione differenziale $y'(t) = \sin(e^{y(t)})$.

c) Provare che se $k > 100$ la soluzione y dell'equazione in **b)** soddisfacente $y(0) = k$ è globale.

3) a) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 18 - y^2\}$. Determinare, se esistono $\max_A u$ e $\min_A u$, ove $u(x, y) = (y - 1)x^2$.

b) Dire se, data la funzione $\sigma : A \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da

$$\sigma(u, v) = (u + v, u^2 + v^2, 7uv)$$

$\sigma : A \rightarrow \mathbf{R}^3$ rappresenta una superficie regolare.

Scritto di Analisi Matematica IV per Matematica

Anno Accademico 2016/17

28/06/2017

NOME:

COGNOME:

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo esonero firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo esonero _____

1) a) Sia $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f_n(x) = \begin{cases} n^a & \text{se } x = \frac{1}{n} \\ x^3 & \text{altrimenti.} \end{cases}$. Determinare, al variare di

$a > 0$, l'insieme di convergenza puntuale della successione $\frac{f_n}{n}$ e dire se in tale insieme la convergenza è uniforme.

b) Provare che se f_n è una successione di funzioni da $[0,1]$ in $\mathbf{R}$ e esistono $x_n, y_n \in [0,1]$ tali che $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $f_n(x_n) - f_n(y_n) = 1$, allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ non converge uniformemente su $[0,1]$.

c) Provare che se f_n è una successione di funzioni da $[0,1]$ in $\mathbf{R}$ e esistono $x_n, y_n \in [0,1]$ tali che $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $f_n(x_n) - f_n(y_n) = 1$, allora la successione f_n non può tendere uniformemente su $[0,1]$ a una funzione continua.

2) a) Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{(5e^{y(t)} - 3)^2}{e^{y(t)}} \\ y(1) = k \end{cases}$$

Dire per quali $k \in \mathbf{R}$ tale problema ha soluzione in un opportuno intorno di 1, e per tali k trovare tale soluzione.

b) Provare che il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) = e^{y(t)^2} - 6 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ ha soluzione globale

c) Determinare gli intervalli di convessità della soluzione del problema in b).

3) a) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 2(1 - |x - 1|)\}$. Determinare, se esistono $\max_A u$ e $\min_A u$, ove $u(x, y) = (7x - 1)(4y - 1)$.

b) Sia $v(x, y) = u(x, y)(e^{x^2 y^2} - \arctan(x^7 + xy + y^4))$, e sia $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = \frac{1}{7}\}$. Provare che v ha massimo e minimo su $A \cup B$.

4) Sia

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \in [0, 2], (2x - 2)(6e^x - 10) \leq y \leq (x - 1)e^{2x}, z = x^2 + 6y\}.$$

Scrivere, in forma di integrale doppio (come integrali semplici iterati) l'area di S .

Scritto di Analisi Matematica IV per Matematica

Anno Accademico 2016/17

28/06/2017

NOME:

COGNOME:

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo esonero firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo esonero _____

1) a) Sia $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f_n(x) = \begin{cases} n^{2a} & \text{se } x = \frac{1}{3n} \\ x^3 & \text{altrimenti.} \end{cases}$. Determinare, al variare di

$a > 0$, l'insieme di convergenza puntuale della successione $\frac{f_n}{n}$ e dire se in tale insieme la convergenza è uniforme.

b) Provare che se f_n è una successione di funzioni da $[0,1]$ in $\mathbf{R}$ e esistono $x_n, y_n \in [0,1]$ tali che $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $f_n(x_n) - f_n(y_n) = 1$, allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ non converge uniformemente su $[0,1]$.

c) Provare che se f_n è una successione di funzioni da $[0,1]$ in $\mathbf{R}$ e esistono $x_n, y_n \in [0,1]$ tali che $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $f_n(x_n) - f_n(y_n) = 1$, allora la successione f_n non può tendere uniformemente su $[0,1]$ a una funzione continua.

2) a) Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{(3e^{y(t)} - 1)^2}{e^{y(t)}} \\ y(2) = k \end{cases}$$

Dire per quali $k \in \mathbf{R}$ tale problema ha soluzione in un opportuno intorno di 2, e per tali k trovare tale soluzione.

b) Provare che il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) = e^{y(t)^8} - 6 \\ y(2) = 0 \end{cases}$ ha soluzione globale

c) Determinare gli intervalli di convessità della soluzione del problema in b).

3) a) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 2(1 - |x - 1|)\}$. Determinare, se esistono $\max_A u$ e $\min_A u$, ove $u(x, y) = (7x - 1)(4y - 1)$.

b) Sia $v(x, y) = u(x, y)(e^{x^2 y^2} - \arctan(x^5 + 3xy + y^8))$, e sia $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = \frac{1}{7}\}$. Provare che v ha massimo e minimo su $A \cup B$.

4) Sia

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \in [0, 2], (2x - 2)(6e^x - 10) \leq y \leq (x - 1)e^{2x}, z = xy + y\}.$$

Scrivere, in forma di integrale doppio (come integrali semplici iterati) l'area di S .

Secondo Esonero di Analisi Matematica IV per Matematica

Anno Accademico 2016/17

09/06/2017

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo esonero firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo esonero _____

1) Sia $u(x, y) = xy - 3y$.

a) Determinare, se esistono, $\max_A u$ e $\min_A u$ ove $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 5\}$.

b) Provare che se B è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ contenente $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = |x|\}$, allora u non ha né massimo né minimo su B .

c) Provare che se C è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}^2$ tale che u ha minimo su C , allora esiste D contenente un aperto che contiene C tale che u ha minimo su D .

2) Sia

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \in [2, 4], (x-1)(4x-12) \leq y \leq (x-3)(x^2-2x+1), z = xy + 8 \right\}.$$

a) Scrivere, in forma di integrale doppio (come integrali semplici iterati) l'integrale superficiale $\int_S x^2 z \, d\sigma$.

b) Provare che ogni soluzione del sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = 0, \\ y'(t) = 0, \\ z'(t) = f(t, z(t)) \end{cases}$$

ove f è una funzione di classe C^1 da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ con $f(t, y) > 0$ per ogni $(t, y) \in \mathbf{R}^2$, interseca S in al massimo un punto.

3) Dire se, data una successione di funzioni $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ che converge puntualmente ad f per $n \rightarrow +\infty$, e non è vero che f è crescente, si può dedurre il seguente fatto:

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbf{R} \text{ con } x_1 < x_2, \nu \in \mathbf{N} : f_n(x_1) > f_n(x_2) \, \forall n > \nu.$$

Ricordo che una funzione $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è crescente se

$$c, d \in \mathbf{R}, c < d \Rightarrow \alpha(c) \leq \alpha(d).$$

Secondo Esonero di Analisi Matematica IV per Matematica

Anno Accademico 2016/17

09/06/2017

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo esonero firmi la riga seguente

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo esonero _____

1) Sia $u(x, y) = 6y - 2xy$.

a) Determinare, se esistono, $\max_A u$ e $\min_A u$ ove $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 6\}$.

b) Provare che se B è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ contenente $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = |x|\}$, allora u non ha né massimo né minimo su B .

c) Provare che se C è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}^2$ tale che u ha massimo su C , allora esiste D contenente un aperto che contiene C tale che u ha massimo su D .

2) Sia

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \in [2, 4], (x-1)(4x-12) \leq y \leq (x-3)(x^2-2x+1), z = x^2 + 2y \right\}.$$

a) Scrivere, in forma di integrale doppio (come integrali semplici iterati) l'integrale superficiale $\int_S x^2 z \, d\sigma$.

b) Provare che ogni soluzione del sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) = 0, \\ y'(t) = 0, \\ z'(t) = f(t, z(t)) \end{cases}$$

ove f è una funzione di classe C^1 da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ con $f(t, y) < 0$ per ogni $(t, y) \in \mathbf{R}^2$, interseca S in al massimo un punto.

3) Dire se, data una successione di funzioni $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ che converge puntualmente ad f per $n \rightarrow +\infty$, e non è vero che f è crescente, si può dedurre il seguente fatto:

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbf{R} \text{ con } x_1 < x_2, \nu \in \mathbf{N} : f_n(x_1) > f_n(x_2) \, \forall n > \nu.$$

Ricordo che una funzione $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è crescente se

$$c, d \in \mathbf{R}, c < d \Rightarrow \alpha(c) \leq \alpha(d).$$

Esonero di Analisi Matematica IV per Matematica

Anno Accademico 2016/17

03/05/2017

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = \begin{cases} a + \frac{1}{n} & \text{se } x \in [-n, 3 - \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, ove a è un numero reale.

a) Al variare di $a \in \mathbf{R}$, dire se la successione f_n converge puntualmente su $\mathbf{R}$, e nel caso se la convergenza è uniforme su $\mathbf{R}$.

b) per $a = 0$, dire per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge.

c) Supponiamo data una successione g_n di funzioni da $[0, +\infty[$ in $[0, +\infty[$ tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ converge uniformemente su $[0, +\infty[$. Sia α una funzione di classe C^1 su $\mathbf{R}$ che

manda $[0, +\infty[$ in $[0, +\infty[$ tale che $\alpha(0) = 0$. Provare che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \circ g_n$ converge uniformemente su $[0, +\infty[$.

d) Supponiamo data una successione g_n di funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ converge uniformemente su $\mathbf{R}$. Sia α una funzione di classe C^1 su $\mathbf{R}$ tale che $\alpha(0) = 0$. È vero che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \circ g_n$ converge uniformemente su $\mathbf{R}$?

2) a) Risolvere, per un numero reale a scelto a piacere, l'equazione differenziale

$$y^{(iv)}(t) + 6y''(t) - 7y(t) = e^{at}.$$

b) Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = u(y(t)) \\ y(0) = k \end{cases}$$

over $u(x) = (x-1)(x^{26}-4)(x+3)$. Determinare, se esiste $k \in \mathbf{R}$ in modo che tale problema di Cauchy non abbia soluzione globale.

c) Determinare $w : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^∞ tale che w si annulla esattamente nei punti 1, 2, 6 e il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = w(y(t)) \\ y(0) = k \end{cases}$$

ha soluzioni globali per ogni $k \in \mathbf{R}$.

Esonero di Analisi Matematica IV per Matematica

Anno Accademico 2016/17

03/05/2017

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = \begin{cases} a + \frac{1}{n} & \text{se } x \in [5 + \frac{1}{n}, 8 + n] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, ove a è un numero reale.

a) Al variare di $a \in \mathbf{R}$, dire se la successione f_n converge puntualmente su $\mathbf{R}$, e nel caso se la convergenza è uniforme su $\mathbf{R}$.

b) per $a = 0$, dire per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge.

c) Supponiamo data una successione g_n di funzioni da $[0, +\infty[$ in $[0, +\infty[$ tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ converge uniformemente su $[0, +\infty[$. Sia α una funzione di classe C^1 su $\mathbf{R}$ che

manda $[0, +\infty[$ in $[0, +\infty[$ tale che $\alpha(0) = 0$. Provare che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \circ g_n$ converge uniformemente su $[0, +\infty[$.

d) Supponiamo data una successione g_n di funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ converge uniformemente su $\mathbf{R}$. Sia α una funzione di classe C^1 su $\mathbf{R}$ tale che $\alpha(0) = 0$. È vero che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \circ g_n$ converge uniformemente su $\mathbf{R}$?

2) a) Risolvere, per un numero reale a scelto a piacere, l'equazione differenziale

$$y^{(iv)}(t) - \frac{1}{2}y''(t) - \frac{1}{2}y(t) = e^{at}.$$

b) Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = u(y(t)) \\ y(0) = k \end{cases}$$

over $u(x) = (x + 13)(x^{38} - 24)(x - 31)$. Determinare, se esiste $k \in \mathbf{R}$ in modo che tale problema di Cauchy non abbia soluzione globale.

c) Determinare $w : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^∞ tale che w si annulla esattamente nei punti 3, 4, 5 e il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = w(y(t)) \\ y(0) = k \end{cases}$$

ha soluzioni globali per ogni $k \in \mathbf{R}$.