

Scritto di Analisi Matematica IV per Matematica
Anno Accademico 2015/16 13/09/2016

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Sia $\bar{f}(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Sia $f_n(x) = \bar{f}(x + a_n)$ ove a_n è una successione.

a) Provare che se $a_n = n$ allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente in $\mathbf{R}$.

b) Si può dire lo stesso che in a) se (a_n) è una qualunque successione tale che $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$?

c) Provare che se (a_n) è una successione limitata, allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ NON converge puntualmente in $\mathbf{R}$.

d) Provare che se $\bar{f}$ è una qualunque funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ continua e non costante, esiste una successione (a_n) di numeri reali tale che, posto $f_n(x) = \bar{f}(x + a_n)$, la successione di funzioni f_n non converge puntualmente in alcun punto, ossia per ogni $x \in \mathbf{R}$ non esiste il limite finito $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ (si cerchi almeno di provare questo quando $\bar{f}$ è quella definita sopra).

2) a) Determinare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{e^{y^2(t)}}{y(t)} t \\ y(1) = k \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$, trovando anche l'intervallo massimale della soluzione.

b) Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = e^{y^6(t)}(y^6(t) - 4), \\ y(1) = k. \end{cases}$$

Provare che per ogni $k \in \mathbf{R}$ la soluzione di tale problema è monotona nel suo intervallo massimale.

c) Dire per quali $k \in \mathbf{R}$ la soluzione del problema di Cauchy in b) è limitata nel suo intervallo massimale.

3) a) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (y - 3)^4 \leq x \leq 8\}$. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo su A della funzione u definita da $u(x, y) = x - y$.

b) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ l'insieme $\{(x, y) \in A : (x^2 - 2)(x - 3)(x - a) \leq 0\}$ è connesso.

3) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^4 - 4 \leq y \leq 3x^3 + 6x\}$. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo delle funzioni u_1 e u_2 su A ove $u_1(x, y) = x$, $u_2(x, y) = y$.

Scritto di Analisi Matematica IV per Matematica
Anno Accademico 2015/16 13/06/2016

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Sia data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2n+1}}{n^a}$.

a) Dire per quali $a > 0$ tale serie è convergente puntualmente su $\mathbf{R}$.

b) Dire per quali $a > 0$ tale serie converge uniformemente sui compatti.

c) Sia f una funzione di classe C^1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ con derivata limitata, e sia $a > 1$. Provare che se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^a}$ converge, allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x+n)}{n^a}$ converge uniformemente sui compatti.

2) a) Risolvere l'equazione differenziale $y'(t) = \frac{e^{2y(t)} + b}{e^{y(t)}}$ per $b > 0$.

b) Provare che le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(t) = \frac{e^{y(t)} + b}{e^{\sqrt{2}y(t)} + 1}$ per $b > 0$, sono globali.

3) a) Determinare, se esistono,

$$\max_{(x,y) \in A} v(x,y), \quad \min_{(x,y) \in A} v(x,y),$$

ove $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$. $v(x,y) = x(x^2 + y^2 - 1)$.

b) Dire se v ammette massimo e se v ammette minimo su $\mathbf{R}^2$.

4) Determinare, se esistono, numeri reali a e b con $a < b$ tali che la funzione $\phi : E \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $\phi(u,v) = (2u, 5v, u^2 + v^2)$ determini una superficie regolare, ove

$$E = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : u \in [a,b], u^{151}(u+1) - u^{11}(2u+2) \leq v \leq 0\}.$$

Scritto di Analisi Matematica IV per Matematica
Anno Accademico 2015/16 13/06/2016

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Sia data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2n+1}}{n^a}$.

a) Dire per quali $a > 0$ tale serie è convergente puntualmente.

b) Dire per quali $a > 0$ tale serie converge uniformemente sui compatti.

c) Sia f una funzione di classe C^1 da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ con derivata limitata, e sia $a > 1$. Provare che se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^a}$ converge, allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x+n)}{n^a}$ converge uniformemente sui compatti.

2) a) Risolvere l'equazione differenziale $y'(t) = \frac{e^{2y(t)} + b}{e^{y(t)}}$ per $b > 0$.

b) Provare che le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(t) = \frac{e^{y(t)} + b}{e^{\sqrt{2}y(t)} + 1}$ per $b > 0$, sono globali.

3) a) Determinare, se esistono,

$$\max_{(x,y) \in A} v(x,y), \quad \min_{(x,y) \in A} v(x,y),$$

ove $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$. $v(x,y) = y(1 - x^2 - y^2)$.

b) Dire se v ammette massimo e se v ammette minimo su $\mathbf{R}^2$.

4) Determinare, se esistono, numeri reali a e b con $a < b$ tali che la funzione $\phi : E \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da $\phi(u,v) = (2u, 5v, u^2 + v^2)$ determini una superficie regolare, ove

$$E = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : u \in [a,b], u^{151}(u+1) - u^{11}(2u+2) \leq v \leq 0\}.$$

Secondo Esonero di Analisi Matematica IV per Matematica

Anno Accademico 2015/16

01/06/2016

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto **firmi la riga seguente**

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto _____

1) Sia dato l'insieme A_b definito da

$$A_b = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq b(1 - |x|)\}.$$

a) Determinare un $b > 0$ e una funzione continua f da A_b in $\mathbf{R}$ che non soddisfa il teorema dei valori intermedi, ossia tale che è falso che se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono elementi di A_b e z è un numero reale tale che $f(x_1, y_1) < z < f(x_2, y_2)$, allora esiste $(\bar{x}, \bar{y}) \in A_b$ tale che $f(\bar{x}, \bar{y}) = z$.

b) Determinare, per $b = \frac{1}{3}$ massimo e minimo sull'insieme A_b della funzione f_1 definita da

$$f_1(x, y) = (1 - x^2 - y^2)(y - b(1 - |x|)).$$

2) Sia dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x(t)x'(t) = (y(t))^2 + \cos^2(e^{y(t)}) \\ y(t)y'(t) = (x(t))^2 + \sin^2(e^{y(t)}) \end{cases}.$$

Sia $(\bar{x}, \bar{y})$ la soluzione di tale sistema soddisfacente la condizione $\bar{x}(0) = 1, \bar{y}(0) = 2$. Sia $u(t) = ||(\bar{x}(t), \bar{y}(t))||$. Determinare u in un intervallo contenente 0. Si suggerisce di sommare le due equazioni.

3) a) Sia data la superficie Σ definita da

$$z = 3xy^2 + e^{x^2}, x \in [-20, 20], (x - 3)(x - 7)((x^7 - 4)^{464} - 5) \leq y \leq 0.$$

Calcolare l'area di Σ . Si intende semplicemente scrivere l'integrale da calcolare senza calcolarlo effettivamente.

b) Diciamo che una funzione $v : [-20, 20] \rightarrow \mathbf{R}$ è di tipo H se v è di classe C^2 , $v(0) < 0$, $v(-20) > 0$, $v(20) > 0$, $v'' > 0$ su $[-20, 20]$. Sia $A(v)$ l'area della superficie data da

$$z = 3x - 7y, x \in [-20, 20], v(x) \leq y \leq 0.$$

Provare che se v_n, v sono di tipo H e $v_n \rightarrow v$ uniformemente su $[-20, 20]$, allora

$$A(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A(v).$$

Eventualmente aggiungere la condizione $v'(0) = 0$ nella definizione di tipo H.

Secondo Esonero di Analisi Matematica IV per Matematica

Anno Accademico 2015/16

01/06/2016

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

Chi accetta di mettere in rete il risultato di questo scritto **firmi la riga seguente**

Autorizzo a mettere in rete il risultato di questo scritto _____

1) Sia dato l'insieme A_b definito da

$$A_b = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 3b(1 - |x|)\}.$$

a) Determinare un $b > 0$ e una funzione continua f da A_b in $\mathbf{R}$ che non soddisfa il teorema dei valori intermedi, ossia tale che è falso che se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono elementi di A_b e z è un numero reale tale che $f(x_1, y_1) < z < f(x_2, y_2)$, allora esiste $(\bar{x}, \bar{y}) \in A_b$ tale che $f(\bar{x}, \bar{y}) = z$.

b) Determinare, per $b = \frac{1}{8}$ massimo e minimo sull'insieme A_b della funzione f_1 definita da

$$f_1(x, y) = (1 - x^2 - y^2)(y - 3b(1 - |x|)).$$

2) Sia dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x(t)x'(t) = (y(t))^2 - \cos^2(e^{x(t)}) \\ y(t)y'(t) = (x(t))^2 - \sin^2(e^{x(t)}) \end{cases}.$$

Sia $(\bar{x}, \bar{y})$ la soluzione di tale sistema soddisfacente la condizione $\bar{x}(0) = 1, \bar{y}(0) = 2$. Sia $u(t) = ||(\bar{x}(t), \bar{y}(t))||$. Determinare u in un intervallo contenente 0. Si suggerisce di sommare le due equazioni.

3) a) Sia data la superficie Σ definita da

$$z = 5xy + e^{xy^3}, x \in [-20, 20], (x - 3)(x - 7)(4(x^9 - 1)^{440} - 2) \leq y \leq 0.$$

Calcolare l'area di Σ . Si intende semplicemente scrivere l'integrale da calcolare senza calcolarlo effettivamente.

b) Diciamo che una funzione $v : [-20, 20] \rightarrow \mathbf{R}$ è di tipo H se v è di classe C^2 , $v(0) < 0$, $v(-20) > 0$, $v(20) > 0$, $v'' > 0$ su $[-20, 20]$. Sia $A(v)$ l'area della superficie data da

$$z = 3x - 7y, x \in [-20, 20], v(x) \leq y \leq 0.$$

Provare che se v_n, v sono di tipo H e $v_n \rightarrow v$ uniformemente su $[-20, 20]$, allora

$$A(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A(v).$$

Eventualmente aggiungere la condizione $v'(0) = 0$ nella definizione di tipo H.

Esonero di Analisi Matematica IV per Matematica

Anno Accademico 2015/16

29/04/2016

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Sia data la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{nx}}{n+7}$.

a) Dire per quali x tale serie è convergente.

b) Dire se tale serie si può derivare termine a termine nell'interno dell'insieme di convergenza.

2) a) Determinare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{(y(t))^4 - 3}{(y(t))^3} \\ y(0) = k \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$, precisando per quali k tale problema ha soluzione e precisando l'intervallo massimale delle soluzioni.

b) Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{(y(t))^{460} - 3}{(y(t))^{476}} \\ y(0) = k \end{cases}$$

Dire per quali $k \in \mathbf{R}$ tale problema ha soluzione, precisando se per qualche $k \in \mathbf{R}$ tale problema di Cauchy ha soluzione non costante, ma definita in tutto $\mathbf{R}$.

3)

a) Trovare una successione di funzioni $f_n : A \rightarrow \mathbf{R}$, con $A = [0, 2] \times [0, 3]$, tali che

i) $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ per ogni $x \in A$ e per ogni $n = 1, 2, 3, \dots$

ii) $\max_A f_n = 1$ e $\min_A f_n = 0$ per ogni $n = 1, 2, 3, \dots$

iii) Posto $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, si ha $f(x) < 1$ per ogni $x \in A$.

b) Provare che se si aggiunge l'ipotesi che se $n = 1, 2, 3, \dots$, $x \in A$, $f_n(x) < 1$ allora f_n è continua in x , una successione di funzioni come in a) non esiste.

Esonero di Analisi Matematica IV per Matematica

Anno Accademico 2015/16

28/04/2016

NOME:

COGNOME:

È obbligatorio consegnare il presente testo del compito con segnati nome e cognome (IN STAMPATELLO).

1) Sia data la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^{nx}}{3n+1}$.

a) Dire per quali x tale serie è convergente.

b) Dire se tale serie si può derivare termine a termine nell'interno dell'insieme di convergenza.

2) a) Determinare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{(y(t))^6 - 7}{(y(t))^5} \\ y(0) = k \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$, precisando per quali k tale problema ha soluzione e precisando l'intervallo massimale delle soluzioni.

b) Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{(y(t))^{388} - 7}{(y(t))^{394}} \\ y(0) = k \end{cases}$$

Dire per quali $k \in \mathbf{R}$ tale problema ha soluzione, precisando se per qualche $k \in \mathbf{R}$ tale problema di Cauchy ha soluzione non costante, ma definita in tutto $\mathbf{R}$.

3)

a) Trovare una successione di funzioni $f_n : A \rightarrow \mathbf{R}$, con $A = [0, 6] \times [0, 1]$, tali che

i) $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ per ogni $x \in A$ e per ogni $n = 1, 2, 3, \dots$

ii) $\max_A f_n = 1$ e $\min_A f_n = 0$ per ogni $n = 1, 2, 3, \dots$

iii) Posto $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, si ha $f(x) < 1$ per ogni $x \in A$.

b) Provare che se si aggiunge l'ipotesi che se $n = 1, 2, 3, \dots$, $x \in A$, $f_n(x) < 1$ allora f_n è continua in x , una successione di funzioni come in a) non esiste.