

Esercizi su insiemistica e estremi superiore e inferiore.

1) Provare che, se A , B e C sono insiemi, allora

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

2) Generalizzare gli enunciati dell'esercizio 1) al caso in cui, all'interno delle parentesi, abbiamo unioni e intersezioni infinite, ad esempio

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i).$$

3) Provare che se A e B sono insiemi non vuoti, allora $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$, $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

4) Se A e B sono insiemi non vuoti e non disgiunti, che cosa possiamo dire di $\sup(A \cap B)$ in relazione con $\sup A$ e $\sup B$?

5) Usando il fatto che $\mathbf{N}$ è illimitato superiormente, provare che per ogni $a > 0$ esiste $n \in \mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ tale che $\frac{1}{n} < a$.

6) Nota. Si pone $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ come notazione abbreviata per $\bigcap_{n=1,2,3,\dots} A_n$. Determinare $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ quando

a) $A_n = [n, +\infty[$,

b) $A_n =]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[$.

7) Sia $A \subseteq]0, +\infty[$. Sia $B = \{\frac{1}{a} : a \in A\}$. Trovare una relazione tra $\sup A$ e $\inf B$.

8) Siano dati due sottoinsiemi non vuoti A e B di $\mathbf{R}$, e supponiamo che $x \leq y$ per ogni $x \in A$ ed ogni $y \in B$. Provare che $\sup A \leq \inf B$.

9) Provare che se abbiamo intervalli chiusi $[a_n, b_n]$ non vuoti e $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$, allora $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

10) Determinare $\sup (]0, 1[\cap \mathbf{Q})$ e $\inf (]0, 1[\cap \mathbf{Q})$.

11) Quali sono i numeri reali $a \geq 0$ tali che $a \leq \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$?

12) Dato un numero reale a , denotiamo con $[a]$ la parte intera di a ossia quell'unico numero intero n (ossia appartenente a $\mathbf{Z}$) tale che $n \leq a < n + 1$. Sia $Fr(a) = a - [a]$ la parte frazionaria di a . Notare che $Fr(a) \in [0, 1[$. Provare che dato $a \in \mathbf{R}$, l'insieme $C_a := \{Fr(na) : n \in \mathbf{Z}\}$ è finito se e solo se $a \in \mathbf{Q}$.

13).* Provare che se $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, l'insieme $C'_a = \{Fr(na) : n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$ ha estremo inferiore uguale a 0. * indica che l'esercizio è difficile. Può essere utile notare che se $Fr(a) > Fr(b)$, allora $Fr(a - b) = Fr(a) - Fr(b)$.

14).* Dedurre che se $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, allora C'_a è denso in $]0, 1[$, ossia che per ogni intervallo aperto non vuoto $]c, d[\subseteq]0, 1[$, si ha $]c, d[\cap C'_a \neq \emptyset$. Con $\emptyset$ denoteremo l'insieme vuoto.

15).* Provare che se $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, allora l'insieme $D_a = \{Fr(na) : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\}$ ha estremo inferiore uguale a 0 ed è denso in $]0, 1[$.

16) Provare che, se $x \in \mathbf{R}$ e $x^2 \notin \mathbf{Q}$ allora $x \notin \mathbf{Q}$.

17).* Provare che esistono a e b irrazionali positivi tali che $a^b \in \mathbf{Q}$ (già detto a lezione).