1) Provare che, comunque dati insiemi A, B e C, si ha $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2) Provare che, comunque dati insiemi A, B e C, si ha $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

3) Provare che se A e B sono sottoinsiemi non vuoti limitati di $\mathbf{R}$ e inoltre $A \subseteq B$, si ha $\sup A \leq \sup B$, $\inf A \geq \inf B$.

4) Provare che se A e B sono sottoinsiemi non vuoti limitati di $\mathbf{R}$, allora

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

5) Provare che se A è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}$ e x è un numero reale tale che $x \geq a$ per ogni $a \in A$, allora $x \geq \sup A$.

6) Provare che se A e B sono sottoinsiemi limitati non vuoti di $\mathbf{R}$ con $A \subseteq B$, e inoltre si ha

$$\forall\, b \in B \;\exists\, a \in A : a \geq b$$

allora $\sup A = \sup B$.

7) Dire quali delle seguenti frasi sono vere
(1) $\forall\, x \in \mathbf{R}\; \exists\, y \in \mathbf{R}$ tale che $x + y = 6$
(2) $\exists\, y \in \mathbf{R} : \forall\, x \in \mathbf{R}$ si ha $x + y = 6$
(3) $\forall\, x \in \mathbf{R}, \forall\, y \in \mathbf{R}\; \exists\, z \in \mathbf{R}$ tale che $z > x$ e $z > y$.

8) Sia f una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $f(x+1) > f(x) + 1$. Provare, usando il principio di induzione, che si ha $f(x+n) > f(x) + n$ per ogni numero reale x e per ogni intero positivo n.

9) Dire quali sono le successioni (a_n) di numeri reali tali che

$$\exists\, \nu \in \mathbf{N} : \forall\, \varepsilon > 0 \text{ si ha } \; |a_n - 3| < \varepsilon \;\forall\, n > \nu.$$

10) Provare che, se $x \in \mathbf{Q}$ e $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ allora $x + y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

11) Dire quali sono i sottoinsiemi non vuoti A di $\mathbf{R}$ tali che

$$\forall\, x \in A \;\exists\, y \in A \;: y > x.$$

12) Provare che se A e B sono sottoinsiemi non vuoti di $\mathbf{R}$ e si ha $x \leq y$ per ogni $x \in A$ e per ogni $y \in B$, allora $\sup A \leq \inf B$.