

ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA IV, ANNO 2015/16, FOGLIO 4

I seguenti esercizi (1-18) sono stati dati alle prove di Pec.

1) Siano $A_1 = [0, 1] \times [0, 3]$, $A_2 = [2, 3] \times [0, 3]$, $A_3 = [0, 3] \times [0, 1]$, $A_4 = [0, 3] \times [2, 3]$.
Determinare, se esistono, $\max_{A_1 \cup A_3} x(1-y)$, $\min_{A_1 \cup A_3} x(1-y)$.

2) Calcolare $\max_A g$ e $\min_A g$ ove $g(x, y) = x(10y^2 - y)$ e

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \leq 1, y \geq \sqrt{x}\}.$$

3) Provare che se g è una funzione continua da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ periodica di periodo $(1, 0)$ (ossia tale che $g(x+1, y) = g(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$), e inoltre vale

$$\forall M \in \mathbf{R} \exists K > 0 : (|y| > K) \Rightarrow (g(x, y) > M),$$

allora g ha minimo assoluto in $\mathbf{R}^2$.

4) Sia

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 \leq y \leq x^2 + 2, y \leq 7\}.$$

a) Sia B il segmento chiuso (ossia inclusi gli estremi) che congiunge $(0, 0)$ e $(2, 1)$. Calcolare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione v definita da $v(x, y) = y - x^2$ su $A \cup B$.

b) Fissato un punto Q di A , provare che ogni funzione uniformemente continua da $A \setminus \{Q\}$ in $\mathbf{R}$ ha o un massimo o un minimo (eventualmente sia massimo sia minimo) su $A \setminus \{Q\}$.

5) Determinare massimo e minimo della funzione α definita da $\alpha(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ sull'insieme $D_a := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq 2x\}$, al variare di $a > 0$.

6) a) Sia data la funzione α definita da $\alpha(x, y) = x^2 + y^2 - x$. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo di α sull'insieme $C := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

b) Dire se comunque dati vettori w_n in $\mathbf{R}^2$ tali che $\|w_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, la funzione α ha

minimo su $\bigcup_{n=1}^{+\infty} (C + w_n)$.

7) Sia $A = \{(x, y) \in [-4, 4] \times [0, 4] : x^2 + (y+2)^2 \leq 9\}$. Calcolare, se esistono, il massimo e il minimo su A della funzione g definita da $g(x, y) = x - y$.

8) a) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$, sia $v(x, y) = x(y+1)$. Determinare, se esistono, $\max_{(x,y) \in A} v(x, y)$, $\min_{(x,y) \in A} v(x, y)$.

b) Provare che se r è una funzione continua da $[0, 1] \times [0, 1]$ in $\mathbf{R}$, allora la successione $d_n := \max_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \times [0, 1]} r$ è convergente.

9) a) Siano $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{(x, y) : y = nx, x \geq 0\}$, $C = \{(0, y) : y \geq 0\}$. Provare che se h è una funzione della forma $h(x, y) = x^2 + y^2 + \alpha(x, y)$ con α continua e ≥ 0 in $\mathbf{R}^2$ allora h ha minimo assoluto su $B \cup C$.

b) Provare per ogni D sottoinsieme proprio di $B \cup C$ contenente B , esiste h come in b) che non ha minimo assoluto su D .

10) Calcolare, se esistono,

$$\min_{(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]} (x^2 - 1)(y^2 - 1), \quad \max_{(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]} (x^2 - 1)(y^2 - 1).$$

11) a) Sia $C := (\mathbf{Z} \times \mathbf{R}) \cup (\mathbf{R} \times \mathbf{Z})$ e sia $f : C \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = (x - \pi)^2 + (y - \sqrt{3})^2$. Calcolare, se esiste, $\min_C f$.

b) Determinare una funzione continua $g : C \rightarrow \mathbf{R}$ tale che

$$\begin{aligned} g(x, n) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \forall n \in \mathbf{Z}, & g(x, n) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty \quad \forall n \in \mathbf{Z}, \\ g(n, y) &\xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty \quad \forall n \in \mathbf{Z}, & g(n, y) &\xrightarrow{y \rightarrow -\infty} +\infty \quad \forall n \in \mathbf{Z}, \end{aligned}$$

ma g non ha minimo assoluto su

12) Siano

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -8 \leq x \leq \ln(8), 1 \leq y \leq e^x\}, \quad B_n := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : [nx] \text{ dispari}\},$$

per n intero positivo. Provare che se f è una funzione continua da A in $\mathbf{R}$, allora esiste $\min_A f$, e inoltre $\inf_{A \cap B_n} f \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \min_A f$.

13) Sia f la funzione da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 3)^2$. Per $v \in \mathbf{R}^2$ poniamo $A_v = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \|(x, y)\| \leq 10, \|(x, y) - v\| > 1\}$.

a) Dire per quali $v \in \mathbf{R}^2$ con $\|v\| \leq 5$ l'insieme A_v è compatto.

b) Dire per quali $v \in \mathbf{R}^2$ con $\|v\| \leq 5$ esiste $\max_{A_v} f$ e per quali $v \in \mathbf{R}^2$ con $\|v\| \leq 5$ esiste $\min_{A_v} f$.

14) $A_n = \left\{x \in \mathbf{R}^2 : \left\|x - \left(0, \frac{1}{n}\right)\right\| = \frac{1}{n}\right\}$, e sia $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

a) Provare che A è compatto.

b) Determinare il minimo della funzione α definita da $\alpha(x, y) = x^2$ su A .

c) Determinare il minimo della funzione β definita da $\beta(x, y) = x - y$ su A .

15) Sia g una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $g(x) = x^2$ se $x \in [-1, 1]$, e g periodica di periodo 2. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq g(x)\}$. Posto $C_t = \{(x, y) \in A : x \in [1, 51], y \leq t\}$, poniamo $r(t) = (t - 1)^2 + \int_{C_t} y \, dx \, dy$. Calcolare $r(t)$ al variare di $t \in \mathbf{R}$, e dire se r ha minimo assoluto.

16) Sia $u(x, y) = y - \ln(1 + x^2)$.

a) Dato $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ln(1 + x^2) \leq y \leq 5\}$, calcolare, se esistono,

$$\min_{(x,y) \in A} u(x,y), \quad \max_{(x,y) \in A} u(x,y).$$

b) Data la funzione β definita da $\beta(t) = t^3 - t$, dire per quali $k > -5$, ogni funzione continua v da A in $\mathbf{R}$ tale che $\min_{(x,y) \in A} v(x,y) = -5$, $\max_{(x,y) \in A} v(x,y) = k$, soddisfa $\max_{(x,y) \in A} \beta(v(x,y)) = \beta(k)$.

17) Siano $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1, x + 2y \geq 1\}$,

$$g_1(x,y) = xy, \quad g_2(x,y) = 7x + \cos(x) + x \sin(y) + y^2$$

a) Calcolare, se esistono,

$$\min_{(x,y) \in A} g_1(x,y), \quad \max_{(x,y) \in A} g_1(x,y)$$

18) Sia $A_a = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 100\sqrt{|x|} \leq y \leq 1 + ax\}$ e poniamo $A = A_0$; sia $u(x,y) = x + y$.

a) Calcolare, se esistono, $\max_{x,y \in A} u(x,y)$, $\min_{x,y \in A} u(x,y)$.

b) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ esiste $\max_{x,y \in A_a} u(x,y)$.

Altri esercizi.

19) Calcolare, se esistono $\max_{(x,y) \in A} x + y$, $\min_{(x,y) \in A} x + y$, ove

$$A := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : e^x + e^y = 10, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

.

20) Calcolare, se esistono $\max_{(x,y) \in A} x + y$, $\min_{(x,y) \in A} x + y$, ove

$$A := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : e^x + e^y + xy = 2e^2 + 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

.

21) Calcolare, se esistono $\max_{(x,y,z) \in A_a} xyz$, $\min_{(x,y,z) \in A} xyz$, ove

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 1\}.$$

.