

ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA IV, ANNO 2015/16, FOGLIO 3

1) Sia $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} (x-n)^a & \text{se } x \in [n+1, n+3] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

Studiare la convergenza puntuale, uniforme e uniforme sui compatti della successione f_n e della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

2) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - ay'(t) + 2y(t) = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1, \end{cases}$$

al variare di $a \in \mathbf{R}$.

3) Determinare le soluzioni y dell'equazione differenziale $y''(t) = ay(t)$ tali che $y(0) = 1$, $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, al variare di $a > 0$.

4) Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(t) = \frac{t}{2e^{2y(t)} - e^{y(t)}}$.

5) a) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) = 5y(x)$.

b) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $\frac{d}{dx}(y'(x)y(x)^2) = 5y'(x)y(x)^2$.

6) Sia data l'equazione differenziale

$$y''(x) + b^2y(x) = 7y(x). \quad (E_b)$$

a) Dire per quali $b \in \mathbf{R}$ tutte le soluzioni di E_b sono limitate.

b) Provare che se y è una soluzione non limitata di E_b , allora y non può assumere più di due volte lo stesso valore, ossia per ogni $a \in \mathbf{R}$ l'equazione $y(x) = a$ ha al massimo due soluzioni.

7) Determinare, al variare di $a \in \mathbf{R}$, le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(x) - 3^a y'(x) + 7 \cdot 2^a y(x) = 0$$

8) Sia dato il problema differenziale P_d

$$\begin{cases} y''(t) = |3y'(t) + 5(y(t))^d| \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

a) Determinare, nel caso $d = 1$, le soluzioni di P_d in un opportuno intorno di 0.

b) Provare che comunque dato $d > 0$ ogni soluzione di P_d in un intervallo della forma $]a, b[$ con $a < 0 < b$ è crescente in $[0, b[$.

9) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{1}{(y(t))^2 e^{(y(t))^3}}$$

in un opportuno intervallo. Non si pretende di determinare tale intervallo. Dire invece se ci sono soluzioni della data equazione differenziale definite su $\mathbf{R}$.

10) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{y'(t)y(t)}{y(t)^2+1} = t^2 \\ y(0) = c \end{cases}$$

al variare di c in un opportuno intorno di 0.

11)

a) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) - 7y'(t) + 10y(t) = 0$.

b) Risolvere l'equazione differenziale

$$y''(t) + ay(t) = e^{3t} + e^{-t}$$

al variare di $a \in \mathbf{R}$.

12) a) Risolvere l'equazione differenziale

$$\sqrt{y'(t) + y(t)} = e^{2t} - 6e^t + a \quad (E)$$

quando $a = 0$.

b) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ l'equazione (E) ha soluzioni definite su tutto $\mathbf{R}$.

13) a) Trovare tutte le soluzioni delle equazioni differenziali

$$y''(t) + y(t) = t^2, \quad y''(t) - y(t) = t^2 e^t.$$

b) Provare che per ogni intero positivo n l'equazione differenziale

$$y''(t) + y(t) = t^n \sin(t)$$

non ha soluzioni limitate su $\mathbf{R}$.

c) Provare che per ogni numero reale positivo a l'equazione differenziale

$$y''(t) + y(t) = t^a \sin(t)$$

non ha soluzioni limitate su $]0, +\infty[$.

- 14)** a) Risolvere l'equazione differenziale $y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = t$.
 b) Sia dato il problema di Cauchy P_a

$$\begin{cases} (y'(t))^2 + 2y'(t) = y(t) \\ y(0) = a. \end{cases}$$

Provare che per $a = -10$ tale problema non ha alcuna soluzione in un opportuno intorno di 0. Inoltre determinare $c, d \in \mathbf{R}$ tale che $c < d$ per cui, se a è tale che $c < a < d$, allora P_a ha almeno una soluzione in un opportuno intorno di 0.

- 15)** Risolvere l'equazione differenziale

$$y''(t) - 10y'(t) + 16y(t) = \sin(4t).$$

- b) Provare che ogni soluzione dell'equazione differenziale $y'(t) = \frac{1}{(y(t))^2 + t^8 + 6}$ è limitata su $\mathbf{R}$.

- 16)** Provare che le seguenti equazioni differenziali hanno soluzioni globali

- a) $y'(t) = \sin(ty(t)) + 3$,
 b) $y'(t) = t^3y(t) \cos(y(t)) + t^7$,
 c) $y'(t) = y(t)e^{t^6y(t)} \sin(y(t))$.