ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA IV, ANNO 2015/16, FOGLIO 2

1) Sia $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [n, 3n] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Studiare la convergenza puntuale, uniforme e uniforme sui compatti della successione f_n e della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}$.

2) Fare lo stesso se f_n è definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} (x-n)^a & \text{se } x \in [n, 3n] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

al variare di $a > 0$.

3) Fare lo stesso se f_n è definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(x - n + \frac{1}{n}\right)^a & \text{se } x \in [n, n+3] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

al variare di $a \in \mathbf{R}$.

4) Dire se la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^4 \ln(x^2+n^2)}{2^n}$ si può derivare termine a termine in $\mathbf{R}$.

5) a) Trovare l'insieme di convergenza puntuale della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2+2)^n}{4^n+1}$ precisando in quali insiemi tale serie converge uniformemente.
b) Dire se nell'intervallo di convergenza puntuale tale serie si può derivare termine a termine.

6) Trovare la serie di Taylor, centrata in 0 delle funzioni f_1 e f_2 definite da $f_1(x) = x^7 \ln(1+3x^2)$, $f_2(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}$ per $x \neq 0$ e prolungata in 0 per continuità.

7) Calcolare la somma delle seguenti serie di funzioni: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(x^2+1)^n}$, $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+5}}{n!}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n+1)!}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

8) Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$ precisando in quali insiemi tale serie converge uniformemente.

9) a) Sia $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$. Calcolare $f'''(x)$.
b) Trovare il valore di $f(x)$, ossia calcolare la somma della serie definente f.