ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA IV, ANNO 2015/16, FOGLIO 1

1) Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{\frac{8^n}{3^n+1} + n}$ converge.

2) a) Provare che la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^5 + n^{10}}$ si può derivare termine a termine nell'intervallo $]0, +\infty[$.
b) Si può derivare termine a termine in tutti i punti x che non sono cella forma $x = -n^2$ con n intero positivo?

3) a) Determinare una successione $\alpha_n > 0$ di numeri reali positivi tale che la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \frac{7^n}{5^n + x^2}$ converga uniformemente su $\mathbf{R}$.
b) Provare che esiste una successione a_n di numeri reali tale che, posto

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n^2}{n^3+7} & \text{se } x = a_n \\ 0 & \text{se } x \neq a_n, \end{cases}$$

allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente, ma non uniformemente, in $\mathbf{R}$.

4) Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n+1} 2^n x^n$ converge precisando per quali $a > 0$ tale serie converge uniformemente in $[0, a[$.

5) Sia data la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a^n \sin\big(\frac{x}{6^n}\big)$.
Discuterne, al variare di $a > 0$, la convergenza puntuale, uniforme, uniforme sui compatti.

6) Sia α una funzione ad $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, e sia f_n la successione definita da $f_n(x) = \alpha(x + n)$.
a) Provare che se esiste $\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) \in \mathbf{R}$, allora f_n converge puntualmente a una funzione costante.
b) Trovare una funzione α tale che f_n converge puntualmente a una funzione costante, ma non esiste $\lim_{x\to+\infty} \alpha(x)$.
c) Per quali funzioni α, f_n converge uniformemente a una costante?

7) Provare che se f_n, f, g_n, g sono funzioni da un insieme X in $\mathbf{R}$, e $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente e $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$ uniformemente, allora $f_n + g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f + g$ uniformemente; provare che se inoltre f e g sono limitate, allora $f_n \cdot g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \cdot g$ uniformemente.

8) Sia f_n da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ definita da $f_n(x) = 1$ se x ha la forma $\frac{p}{n}$ con p intero, e p, n primi tra loro, $f_n(x) = 0$ altrimenti. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, e trovarne la somma.

9) Determinare l'intervallo di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

10) Determinare i coefficienti di Fourier della funzione f definita da $f(x) = |x|$ su $[-\pi, \pi[$ e prolungata in modo (2π)-periodico a tutto $\mathbf{R}$.

10) Sia f una funzione regolare a tratti e (2π)-periodica. Siano a_k e b_k i suoi coefficienti di Fourier. Provare che le due serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx)$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx)$ sono entrame convergenti puntualmente. Allo scopo si consiglia di modificare f in modo da renderla pari o dispari.