Dispense di Analisi Matematica 4

1.Teorema di Ascoli-Arzelà

.

In questo paragrafo dimostriamo il teorema di Ascoli-Arzelà. Esistono molte versioni leggermente diverse di tale teorema. Qui dimostrerò una delle versioni piú usuali del teorema di Ascoli-Arzelà che sarà utile per le nostre applicazioni. Premettiamo delle definizioni e un'osservazione.

Definizione 1.1. *Diciamo che le funzioni f_n, $n = 1, 2, 3....$ da uno spazio topologico X a valori in uno spazio metrico Y con metrica d sono equicontinue se per ogni $x \in X$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U di x tale che per ogni $y \in U$ e per ogni n si ha $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$.*

Nota che se f_n sono equicontinue allora ogni f_n è continua, ma non vale il viceversa poiché nella precedente definizione richiediamo che l'intorno U non dipende da n. Nota anche che, dato che ogni intorno di x contiene un aperto contenente x dalla definizione di intorno, in Def. 1.1 possiamo supporre che U è aperto. Se X è uno spazio metrico con metrica d' la precedente definizione si può esprimere usando ε e δ, ossia,
per ogni $x \in X$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $y \in X$ tale che $d'(x, y) < \delta$ e per ogni n si ha $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$.
Come piccola osservazione notiamo che se se X è uno spazio metrico con metrica d' , diciamo che f_n soon uniformemente equicontinue se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in X$ con $d'(x, y) < \delta$ e per ogni n si ha $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$. Ossia, δ non dipende neanche da x. Ovviamente se f_n sono uniformemente equicontinue sono anche equicontinue. Si può provare che vale anche il viceversa se X è compatto, con un ragionamento simile a quello usato per provare che una funzione continua su un compatto è uniformemente continua.

Definizione 1.2. *Le funzioni f_n da un insieme X a valori in $\mathbf{R}^N$ sono equilimitate se esiste $K > 0$ tale che $||f_n(x)|| \leq K$ per ogni $x \in X$ e per ogni n.*
Ossia pretendiamo non solo che tutte le funzioni siano limitate ma che la costante che le limita non dipenda da n.

Osservazione 1.3. Notiamo che, come ben noto, uno spazio metrico compatto è separabile. Infatti, preso un fissato n intero positivo, il ricoprimento aperto costituito dalle palle di centro x ($x \in X$) e raggio $\varepsilon > 0$ (denotate da $B_\varepsilon(x)$) ha un sottoricoprimento finito, ossia esistono $x_1, ..., x_m$ in X tali che

$$X = \bigcup_{h=1}^{m} B_\varepsilon(x_h). \tag{1.1}$$

Dato un intero positivo n, possiamo fare tale considerazione con $\varepsilon = \frac{1}{n}$. In tal caso esistono $x_{1,n}, ..., x_{m_n,n}$ in X tali che

$$X = \bigcup_{h=1}^{m_n} B_{\frac{1}{n}}(x_{h,n}).$$

In questa situazione metto due indici ai punti x poiché al variare di n ho punti diversi. In altri termini, per ogni $y \in X$ esiste $h = 1, ...m_n$ tale che $d(y, x_{h,n}) < \frac{1}{n}$. Sia ora E l'insieme di tutti gli $x_{h,n}$ al variare anche di tutti i possibili interi positivi n e non solo di h, in termini piú precisi,

$$E := \{x_{h,n} : n = 1, 2, 3, ..., h = 1, ..., m_n\}.$$

Si ha $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, ove $E_n := \{x_{h,n} : h = 1, ..., m_n\}$. Poiché ogni E_n è un insieme finito, E è (al massimo) numerabile in quanto unione numerabile di insiemi finiti. Proviamo che E è anche denso e quindi X è separabile. Fissato $y \in X$ e $\varepsilon > 0$ esisterà un intero positivo n tale che $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Quindi, preso $h = 1, ..., m_n$ tale che $d(y, x_{h,n}) < \frac{1}{n}$, si ha $x_{h,n} \in E$ e $d(y, x_{h,n}) < \varepsilon$. ■

Teorema 1.4 (di Ascoli-Arzelà) *Se f_n è una successione di funzioni da uno spazio metrico compatto X con metrica d' a valori in $\mathbf{R}^N$, con f_n equilimitate ed equicontinue, allora f_n ha una sottosuccessione che converge uniformemente.*

Dimostrazione. Lo spazio X è separabile (vedi osservazione 1.3). Sia quindi

$$A := \{a_1, a_2, a_3, ...\}$$

una successione di elementi di X densa in X. Come primo passo troviamo una sottosuccessione di f_n che converge in tutti i punti di A.

Dato che $f_n(a_1)$ è una successione limitata in $\mathbf{R}^N$ (per l'ipotesi che le f_n sono equilimitate), questa ha una sottosuccessione convergente, ossia esiste una sottosuccessione $g_n^{(1)}$ di f_n tale che $g_n^{(1)}(a_1)$ converge, in altri termini la sottosuccessione $g_n^{(1)}$ converge nel punto a_1. Per lo stesso motivo possiamo trovare una sottosuccessione $g_n^{(2)}$ di $g_n^{(1)}$ che converge nel punto a_2 e $g_n^{(2)}$, essendo una sottosuccessione di $g_n^{(1)}$, converge anche in a_1. Andando avanti allo stesso modo, troviamo una sottosuccessione $g_n^{(3)}$ di $g_n^{(2)}$ che converge in a_3, ed essendo una sottosuccessione di $g_n^{(2)}$, converge anche in a_1 e a_2. Continuando, troviamo induttivamente successioni $g_n^{(h)}$ per ogni intero positivo h tali che $g_n^{(h+1)}$ è una sottosuccessione di $g_n^{(h)}$ per ogni h, e $g_n^{(h)}$ converge in $a_1, a_2, ..., a_h$. Ovviamente ogni $g_n^{(h)}$ è una sottosuccessione di f, e il problema è che ognuna di queste successioni converge soltanto (a priori) in un sottoinsieme finito di A, mentre noi cerchiamo una sottosuccessione che converge in tutti punti di A.

Per trovare tale sottosuccessione noi prendiamo la *diagonale*, ossia $g_n = g_n^{(n)}$. Infatti g_n è una sottosuccessione "da h in poi" di $g_n^{(h)}$ per ogni h. Detto piú precisamente, questo significa che esiste una applicazione strettamente crescente ψ_h da $\{h, h + 1, ...\}$ in sé tale

che $g_n = g^{(h)}_{\psi_h(n)}$ per ogni $n \geq h$, e quindi da un lato g_n è una sottosuccessione di f_n, dall'altro g_n converge in a_h per ogni h. [1]
Ora proviamo che questa sottosuccessione g_n converge uniformemente su X. Basta provare che g_n è uniformemente di Cauchy, ossia

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \nu = 1, 2, 3, ... : ||g_n(x) - g_m(x)|| < \varepsilon \; \forall n > \nu, m > \nu, x \in X. \tag{1.2}$$

Sia dato $\varepsilon > 0$. Dato che le f_n e quindi anche le g_n sono equicontinue, per ogni $x \in X$ esiste U_x intorno aperto di x tale che

$$||g_n(x) - g_n(y)|| < \frac{\varepsilon}{6} \quad \forall \, y \in U_x \; \forall \, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$$

e quindi

$$||g_n(y) - g_n(y')| \leq ||g_n(x) - g_n(y)| + ||g_n(x) - g_n(y')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \, y, y' \in U_x \; \forall \, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}. \tag{1.3}$$

Dato che, al variare di $x \in X$ gli U_x formano un ricoprimento aperto, e X è compatto, esistono $x_1, ..., x_m$ tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}. \tag{1.4}$$

Siano $a_{\rho(i)} \in A \cap U_{x_i}$. Tali $a_{\rho(i)}$ esistono dato che A è denso. Siccome $g_n(a_{\rho(i)})$ converge, e quindi è di Cauchy, allora esiste $\nu_i \in \mathbf{N}$ tale che

$$||g_n(a_{\rho(i)}) - g_m(a_{\rho(i)})|| < \frac{\varepsilon}{3} \; \forall \, n > \nu_i, m > \nu_i. \tag{1.5}$$

Sia $\overline{\nu} := \max_{i=1;...,m} \nu_i$. (NOTARE un fatto fondamentale: ν non dipende ad x). Fissiamo ora $x \in X$. Per (1.4) esiste $i = 1, ..., m$ (dipendente da x) tale che $x \in U_{x_i}$, e d'altra parte anche $a_{\rho(i)} \in U_{x_i}$. Per (1.3)

$$||g_n(x) - g_n(a_{\rho(i)})|| < \frac{\varepsilon}{3} \; \forall \, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}.$$

D'altra parte, se n ed m sono maggiori di $\overline{\nu}$, per (1.4) si ha

$$||g_n(a_{\rho(i)}) - g_m(a_{\rho(i)})|| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Quindi, per (1.5), se n e m sono maggiori di $\overline{\nu}$, si ha

---

[1] Per vedere questo, notiamo che se $m \geq h$, allora $g^{(m)}_n$ è una sottosuccessione di $g^{(h)}_n$ quindi esiste $\phi_m : \{1, 2, ...\}$ tn sé tale che $g^{(m)}_n = g^{(h)}_{\phi_m(n)}$. Siccome $g^{(m+1)}_n$ è una sottosuccessione di $g^{(m)}_n$ troviamo induttivamente ϕ_m, in particolare $g^{(m+1)}_n = g^{(m)}_{\sigma(n)} = g^{(h)}_{\phi_m(\sigma(n))}$ per qualche σ strettamente crescente, quindi $\phi_{m+1} = \phi_m \circ \sigma$, e $\phi_{m+1} \geq \phi_m$. Quindi per $n \geq h$, $g_n = g^{(n)}_n = g^{(h)}_{\psi_h(n)}$ con $\psi_h(n) = \phi_n(n)$ e siccome $\phi_{n+1}(n+1) \geq \phi_n(n+1) > \phi_n(n)$, ψ_h è strettamente crescente.

$$||g_n(x)-g_m(x)|| \leq ||g_n(x)-g_n(a_{\rho(i)})||+||g_n(a_{\rho(i)})-g_m(a_{\rho(i)})||+||g_m(x)-g_m(a_{\rho(i)})|| < \varepsilon.$$

Quindi (1.2) è provata. ■

2. Teoremi di esistenza e unicità per il problema di Cauchy.

Consideriamo la seguente situazione generale. Sia $f : A \to \mathbf{R}^N$ una funzione continua ove A è un aperto non vuoto di $\mathbf{R}^{N+1}$ e N è un intero postivo. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{P}$$

ove $(t_0, y_0) \in A$. Proveremo che sotto queste sole ipotesi (P) ha soluzione locale, ossia esiste $\delta > 0$ tale che (P) ha soluzione in $]t_0-\delta, t_0+\delta[$. Ricordo, e considereremo sottinteso nel seguito, che y risolve (P) in un intervallo aperto I contenente t_0 se e solo se y è una funzione continua da I in $\mathbf{R}^n$ tale che $\big(t, y(t)\big) \in A$ per ogni $t \in I$ e inoltre (la cosa piú importante) per ogni $t \in I$ vale

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\, ds. \tag{EV}$$

(EV) è anche detta a volte *equazione di Volterra.*

Siano dati numeri positivi a e b tali che

$$[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_b(y_0)} \subseteq A. \tag{2.1}$$

Tali numeri positivi esistono poiché $(t_0, y_0) \in A$ e A è aperto. Poniamo

$$R := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_b(y_0)}. \tag{2.2}$$

Sia $M > 0$ tale che

$$||f(t, z)|| \leq M \quad \forall\, (t, z) \in R. \tag{2.3}$$

Tale M esiste dato che f (e quindi anche $||f||$) è continua sul compatto R, e possiamo applicare il teorema di Weierstrass. Sia ora $\delta > 0$ tale che

$$\delta < \min\big\{a, \frac{b}{M}\big\}. \tag{2.4}$$

Proveremo che con tale δ, (P) ha soluzione in $]t_0-\delta,t_0+\delta[$. Premetto una semplice osservazione.

Osservazione 2.1 Siano a,b,c numeri reali con $a<b<c$. Sia M un numero reale positivo e g una funzione da $[a.c]$ in $\mathbf{R}^N$ tale che la disuguaglianza

$$||g(t)-g(t')||\le M|t-t'|$$

vale se $t,t'\in[a,b]$ e anche se $t,t'\in[b,c]$. Allora tale disuguaglianza vale per ogni $t,t'\in[a,c]$. Infatti basta provarla se uno dei due sta in $[a,b]$ e l'altro in $[b,c]$. Ad esempio $t\in[a,b]$, $t'\in[b,c]$. Poiché t e b stanno in $[a,b]$ e b e t' stanno in $[b,c]$, per le nostre ipotesi si ha:

$$||g(t)-g(t')||\le||g(t')-g(b)||+||g(b)-g(t)||$$
$$\le M|t'-b|+M|b-t|=M(t'-b)+M(b-t)=M(t'-t)=M|t'-t|.$$

Teorema 2.2 *Esiste y soluzione di (P) in $]t_0-\delta,t_0+\delta[$, ove δ è dato da (2.4).*

Dimostrazione. Sia $\tilde{I}=[t_0-\delta,t_0+\delta]$. Definiamo una successione di funzioni y_n da $[t_0-\delta,t_0+\delta]$ in $\mathbf{R}^N$ che sono "soluzioni approssimate" di (EV) in $[t_0-\delta,t_0+\delta]$, quindi anche in $]t_0-\delta,t_0+\delta[$. Troveremo un'estratta di y_n che convergerà uniformemente a una funzione y che sarà soluzione di (EV) e quindi di (P) in $\tilde{I}=[t_0-\delta,t_0+\delta]$. Fissato un intero positivo n, sia $t_k:=t_0+\frac{k}{n}\delta$ per $k=-n,...,-1,0,1,...n$. Notare che per $k=0$ ritroviamo proprio t_0. Poniamo $y_n(0)=y_0$. Supponiamo poi di conoscere y_n in $[t_{-k},t_k]$ con $k=0,...,n-1$ e la estendiamo su y_n in $[t_{-(k+1)},t_{k+1}]$. Alla fine induttivamente avremo definito y_n su $[t_{-n},t_n]=\tilde{I}$. Supponiamo dunque data $y_n:[t_{-k},t_k]\to\mathbf{R}^N$ con $k=0,...,n-1$ e supponiamo che valga la seguente

$$||y_n(t)-y_n(t')||\le M|t-t'|\quad\forall\,t,t'\in[t_{-k},t_k]. \tag{H_k}$$

ove ricordo che M è definito in (2.3). Notiamo che (H_k) implica in particolare che y_n è continua in quanto Lipschitziana, e che

$$||y_n(t)-y_n(t_0)||\le M|t-t_0|\le M\delta<b\quad\forall t\in[t_{-k},t_k]. \tag{H'_k}$$

e quindi $\big(t,y(t)\big)\in R$ per ogni $t\in[t_{-k},t_k]$. Questa osservazione è importante perché altrimenti potrebbe non avere senso parlare di $f\big(t,y(t)\big)$. Definiamo y_n anche in $[t_k,t_{k+1}]\cup[t_{-(k+1)},t_{-k}]$ nel seguente modo.

$$y_n(t)=\begin{cases} y_n(t_k)+(t-t_k)f\big(t_k,y_n(t_k)\big) & \text{se } t\in[t_k,t_{k+1}] \\ \\ y_n(t_{-k})+(t-t_{-k})f\big(t_{-k},y_n(t_{-k})\big) & \text{se } t\in[t_{-(k+1)},t_{-k}] \end{cases}.$$

Proviamo che vale (H_{k+1}). Intanto notiamo che se $t,t'\in[t_k,t_{k+1}]$, allora

$$||y_n(t) - y_n(t')|| = ||(t-t')f\big(t_k, y_n(t_k)\big)|| = |t-t'|||f\big(t_k, y_n(t_k)\big)|| \leq M|t-t'|$$

grazie a (2.3) e al fatto che $\big(t_k, y_n(t_k)\big) \in R$. Quindi la disuguaglianza

$$||y_n(t) - y_n(t')|| \leq M|t-t'| \tag{2.5}$$

vale se $t, t' \in [t_k, t_{k+1}]$. In modo analogo si prova che (2.5) vale se $t, t' \in [t_{-(k+1)}, t_{-k}]$; grazie a (H_k) (2.5) vale anche se $t, t' \in [t_{-k}, t_k]$. Per Osservazione 2.1 (applicata due volte) (2.5) vale se $t, t' \in [t_{-(k+1)}, t_{k+1}]$ e quindi (H_{k+1}) vale e il passo induttivo è completato. Alla fine per $k = n$ abbiamo che y_n è definita in $\tilde{I}$, e grazie a (H'_n), come visto, si ha $\big(t, y_n(t)\big) \in R$ per ogni $t \in \tilde{I}$. In particolare $||y_n(t)|| \leq ||y_0|| + b$ e quindi le y_n sono equilimitate. Inoltre grazie ad (H_n), sono anche equilipschitziane di costante M, e quindi equicontinue, in tutto $\tilde{I}$. Per il teorema di Ascoli-Arzelà esiste y_{n_k}, sottosuccessione di y_n che converge uniformemente a una funzione continua y. Prima di concludere abbiamo bisogno della seguente considerazione. Dato che f è continua, e quindi uniformemente continua sul compatto R, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che, se $w, w' \in R$ e $||w - w'|| < \eta$ allora $||f(w) - f(w')|| < \varepsilon$. Posto allora

$$\omega_n = \sup\Big\{||f(w) - f(w')|| : w, w' \in R, ||w - w'|| \leq \frac{\delta(M+1)}{n}\Big\},$$

si ha

$$\omega_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.6}$$

Infatti, preso $\varepsilon > 0$, per n "abbastanza grande" si ha $\frac{\delta(M+1)}{n} < \eta$ e quindi per tali n si ha $\omega_n \leq \varepsilon$. Proviamo ora

$$\Big|\Big|y_n(t) - \Big(y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)\, ds\Big)\Big|\Big| \leq \omega_n |t - t_0| \quad \forall\, t \in \tilde{I}. \tag{2.7}$$

Notiamo che dato che (2.7) è ovvia per $t = t_0$, e quindi per $t \in [t_{-k}, t_k]$ con $k = 0$, basta provare che se vale per $t \in [t_{-k}, t_k]$ con $k = 0, ..., n-1$, allora vale anche per $t \in [t_{-k(+1)}, t_{k+1}]$, e chiaramente basta provarla per $t \in [t_k, t_{k+1}] \cup [t_{-(k+1)}, t_{-k}]$. Proviamo (2.7) solo per $t \in [t_k, t_{k+1}]$ poiché la dimostrazione per $t \in [t_{-(k+1)}, t_{-k}]$ è analoga. Sia dunque $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Si ha

$$\Big|\Big|y_n(t) - \Big(y_n(t_k) + \int_{t_k}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)\, ds\Big)\Big|\Big| =$$

$$\Big|\Big|(t - t_k) f\big(t_k, y_n(t_k)\big) - \int_{t_k}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)\, ds\Big|\Big| =$$

$$\Big|\Big|\int_{t_k}^{t} f\big(t_k, y_n(t_k)\big)\,ds - \int_{t_k}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)\,ds\Big|\Big| =$$

$$\Big|\Big|\int_{t_k}^{t} f\big(t_k, y_n(t_k)\big) - f\big(s, y_n(s)\big)\,ds\Big|\Big| \leq$$

$$\int_{t_k}^{t} \Big|\Big|f\big(t_k, y_n(t_k)\big) - f\big(s, y_n(s)\big)\Big|\Big|\,ds$$

$$\leq \int_{t_k}^{t} \omega_n\,ds = \omega_n(t - t_k).$$

Infatti dato che $|t - t_k| \leq \frac{\delta}{n}$, quindi $||y_n(t_k) - y_n(s)|| \leq M|t - t_k| \leq M\frac{\delta}{n}$, si ha

$$||\big(t_k, y_n(t_k)\big) - \big(s, y_n(s)\big)|| \leq |t_k - s| + ||y_n(t_k) - y_n(s)|| \leq (M+1)\frac{\delta}{n},$$

quindi

$$\Big|\Big|f\big(t_k, y_n(t_k)\big) - f\big(s, y_n(s)\big)\Big|\Big| \leq \omega_n$$

per definizione di ω_n. Dunque abbiamo provato

$$\Big|\Big|y_n(t) - \Big(y_n(t_k) + \int_{t_k}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)\,ds\Big)\Big|\Big| \leq \omega_n(t - t_k).$$

D'altra parte, per (2.7)con $t = t_k \in [t_{-k}, t_k]$ si ha

$$\Big|\Big|y_n(t_k) - \Big(y_0 + \int_{t_0}^{t_k} f\big(s, y_n(s)\big)\,ds\Big)\Big|\Big| \leq \omega_n|t_k - t_0| = \omega_n(t_k - t_0),$$

e quindi

$$\Big|\Big|y_n(t) - \Big(y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)\,ds\Big)\Big|\Big| \leq$$

$$\Big|\Big|y_n(t) - \Big(y_n(t_k) + \int_{t_k}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)\,ds\Big)\Big|\Big| + \Big|\Big|y_n(t_k) - \Big(y_0 + \int_{t_0}^{t_k} f\big(s, y_n(s)\big)\,ds\Big)\Big|\Big|$$

$$\leq \omega_n(t - t_k) + \omega_n(t_k - t_0) = \omega_n(t - t_0)$$

e (2.7) è provata. Ora, dato che $y_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y$ uniformemente su $\tilde{I}$, posto $u_k(t) = \big(t, y_{n_k}(t)\big)$, $u(t) = \big(t, y(t)\big)$, $v_k(t) = f\big(t, y_{n_k}(t)\big)$, $v(t) = f\big(t, y(t)\big)$, si ha subito $u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} u$ uniformemente su $\tilde{I}$, e dal fatto che u_k e u sono a valori in R dove f è uniformemente continua, si deduce facilmente che $v_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} v$ su $\tilde{I}$.

Segue quindi che per ogni $t \in \tilde{I}$ si ha

$$\int_{t_0}^{t} f\big(s, y_{n_k}(s)\big)\, ds \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\, ds$$

Quindi, da (2.7) e (2.6) segue

$$\Big|\Big| y(t) - \Big(y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\, ds\Big)\Big|\Big| = \lim_{k\to+\infty} \Big|\Big| y_{n_k}(t) - \Big(y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_{n_k}(s)\big)\, ds\Big)\Big|\Big| = 0$$

per ogni $t \in \tilde{I}$ e y risolve (EV) su $\tilde{I}$. ∎

Vediamo ora teoremi di unicità.

Definizione 2.3. *Sia A un sottoinsieme aperto (non vuoto) di $\mathbf{R}^N$, e scriviamo un elemento di A come (t, z) con $t \in \mathbf{R}$ e $z \in \mathbf{R}^N$. Una funzione $f : A \to \mathbf{R}^N$ si dice localmente Lipschtiziana in z uniformemente in t se per ogni $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ con $\alpha < \beta$, ogni $y_0 \in \mathbf{R}^N$ ed ogni $r > 0$ tale che*

$$[\alpha, \beta] \times \overline{B_r(y_0)} \subseteq A$$

*esiste $L > 0$ (**NOTA BENE:** Tale L dipende dal "rettangolo", ossia da α, β, r) tale che*

$$||f(t, z_1) - f(t, z_2)|| \leq L||z_1 - z_2|| \quad \forall\, t \in [a, b],\ z_1, z_2 \in \overline{B_r(y_0)}.$$

Teorema 2.4 *Se $f : A \to \mathbf{R}^N$ è continua e localmente Lipschtiziana in z uniformemente in t, allora se due funzioni $\overline{y}$ e $\widetilde{y}$ risolvono il problema di Cauchy (P) in un intervallo contenente t_0, esiste $\delta' \in [0, \delta]$ tale che $\overline{y}(t) = \widetilde{y}(t)$ per ogni $t \in]t_0 - \delta', t_0 + \delta'[$ ove δ è dato da (2.4).*

Dimostrazione. Consideriamo un numero $\delta' \in]0, \delta]$, che per il momento teniamo fissato, e poi lo sceglieremo opportunamente. Proveremo che se δ' è abbastanza piccolo, $\overline{y}$ e $\widetilde{y}$ coincidono su $I_{\delta'} :=]t_0 - \delta', t_0 + \delta'[$. Sia R l'insieme definito in (2.2). Poiché $\overline{y}(t_0) = y_0 = \widetilde{y}(t_0)$, per continuità, esiste $\delta_1 \in]0, \delta]$ tale che si ha

$$|\overline{y}(t)-y_0|<b, \quad |\widetilde{y}(t)-y_0|<b \ \ \forall\, t \in I_{\delta_1} \tag{2.8}$$

e quindi

$$\big(t,\overline{y}(t)\big), \big(t,\widetilde{y}(t)\big) \in R \ \ \forall\, t \in I_{\delta_1} \tag{2.9}$$

Consideriamo ora δ' tale che $0<\delta'\leq\delta_1$. Per (2.8) si ha

$$M := \sup_{t\in I_{\delta'}} ||\overline{y}(t)-\widetilde{y}(t)|| \leq 2b < +\infty.$$

Ora, per ogni $t \in I_{\delta'}$ si ha $\overline{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s,\overline{y}(s)\big)\,ds$, $\widetilde{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s,\widetilde{y}(s)\big)\,ds$, dato che per ipotesi $\overline{y}$ e $\widetilde{y}$ risolvono (P). Quindi, per ogni $t \in I_{\delta'}$ si ha

$$\begin{aligned}
||\overline{y}(t)-\widetilde{y}(t)|| &= \Big|\Big| \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(s,\overline{y}(s)\big)\,ds - f\big(s,\widetilde{y}(s)\big)\Big)\,ds \Big|\Big| \\
&= \Big|\Big| \int_{t_0\wedge t}^{t_0\vee t} \Big(f\big(s,\overline{y}(s)\big) - f\big(s,\widetilde{y}(s)\big)\Big)\,ds \Big|\Big| \\
&\leq \int_{t_0\wedge t}^{t_0\vee t} ||f\big(s,\overline{y}(s)\big) - f\big(s,\widetilde{y}(s)\big)||\,ds \\
&\leq \int_{t_0\wedge t}^{t_0\vee t} L||\overline{y}(s)-\widetilde{y}(s)||\,ds \qquad (H) \\
&\leq \int_{t_0\wedge t}^{t_0\vee t} LM\,ds \\
&= |t-t_0|LM \leq \delta' LM.
\end{aligned}$$

Qui in (H) abbiamo usato l'ipotesi che $f : A \to \mathbf{R}^N$ è localmente Lipschtiziana in z uniformemente in t con la L relativa alla definizione con R al posto di $[a,b]\times\overline{B_b(y_0)}$, tenuto conto di (2.9). Poiché questo vale per ogni $t\in I_{\delta'}$, per la definizione di M abbiamo $M \leq \delta' LM$, ma se $\delta' < \frac{1}{L}$, segue $M=0$, e per definizione di M, si ha $\overline{y}(t)=\widetilde{y}(t)$ per ogni $t \in I_{\delta'}$. Voglio sottolineare che l'osservazione $M<+\infty$ era essenziale in questo ragionamento. ∎

Nel teorema precedente abbiamo visto che sotto opportune condizioni due soluzioni del problema (P) coincidono in un opportuno intorno di t_0. Ora facciamo vedere un risultato piú forte, ossia che sotto le stesse condizioni, due soluzioni del problema (P) coincidono in ogni intervallo contenente t_0 in cui esistono entrambe.

Teorema 2.5 *Se $f : A \to \mathbf{R}^N$ è continua e localmente Lipschtiziana in z uniformemente in t, allora se due funzioni $\overline{y}$ e $\widetilde{y}$ risolvono il problema di Cauchy (P) in un intervallo $]a, b[$ contenente t_0, allora $\overline{y}(t) = \widetilde{y}(t)$ per ogni $t \in]a, b[$.*

Dimostrazione. Sia $B = \{t \in]a, b[: \overline{y}(t) = \widetilde{y}(t)\}$. Faremo vedere che B è non vuoto, aperto e chiuso in $]a, b[$, e quindi, dato che $]a, b[$, è connesso, si avrà $B =]a, b[$, da cui segue subito la tesi.

Si ha $B \neq \emptyset$ poiché $\overline{y}(t_0) = y_0 = \widetilde{y}(t_0)$ e quindi $t_0 \in B$.

Si ha che B è chiuso in $]a, b[$ poiché è l'insieme dei punti di $]a, b[$ dove coincidono le due funzioni $\overline{y}$ e $\widetilde{y}$ (infatti, posto $z = \overline{y} - \widetilde{y}$ si ha $B = z^{-1}(\{0\})$ e quindi B è chiuso in $]a, b[$ in quanto controimaagine del chiuso $\{0\}$ mediante la finzione continua z da $]a, b[$ in $\mathbf{R}^N$).

Si ha che B è aperto in $]a, b[$ poiché, *preso qualunque* $\bar{t} \in B$, allora, posto $\overline{y} = \overline{y}(\bar{t}) = \widetilde{y}(\bar{t})$, $\overline{y}$ e $\widetilde{y}$ rsolvono entrambe in $]a, b[$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) \\ y(\bar{t}) = \overline{y} \end{cases} \tag{P}$$

e quindi, per Teorema 2.4 (con $\bar{t}$ al posto di t_0), esiste $\eta > 0$ tale che $\overline{y}(t) = \widetilde{y}(t)$ per ogni $t \in]\bar{t} - \eta, \bar{t} + \eta[\subseteq]a, b[$. Perciò, per definizione di B si ha $B \supseteq]\bar{t} - \eta, \bar{t} + \eta[$, e quindi B è aperto in $]a, b[$ dato che abbiamo visto che se B contiene un punto $\bar{t}$, contiene anche un suo intorno. ■

Corollario 2.6. *Se $f : A \to \mathbf{R}^N$ è continua e localmente Lipschtiziana in z uniformemente in t, allora il problema di Cauchy (P) ha un'unica soluzione in $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ ove δ è dato da (2.4.)*

Dimostrazione. Per Teorema 2.2, (P) ha una soluzione in $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$, e questa è unica per Teorema 2.5. ■

Vediamo ora una caso notevole in cui la funzione $f : A \to \mathbf{R}^N$ è continua e localmente Lipschtiziana in z uniformemente in t.

Proposizione 2.7. *Se $f : A \to \mathbf{R}^N$ (con A aperto non vuoto in $\mathbf{R}^{N+1}$) è continua e esistono continue $\frac{\partial f_i}{\partial z_j}$ per ogni $i, j = 1, ..., N$, allora $f : A \to \mathbf{R}^N$ è localmente Lipschtiziana in z uniformemente in t. Qui si intende, come al solito, che i punti di A hanno la forma (t, z) con $t \in \mathbf{R}$ e $z \in \mathbf{R}^N$.*

Dimostrazione. Siano $a.b, y_0, r$ come in Definizione 2.3. Fissiamo $i = 1, ..., N$. Usando una ben nota forma del teorema di Lagrange per funzioni da un aperto di $\mathbf{R}^N$ a valori in $\mathbf{R}$, per ogni $t \in [a, b]$ e $z_1, z_2 \in \overline{B_r(y_0)}$ si ha

$$f_i(t, z_1) - f_i(t, z_2) = \nabla f(t, \xi) \cdot (z_1 - z_2) \tag{2.10}$$

ove ξ è un opportuno punto sul segmento tra z_1 e z_2, e ovviamente tale punto dipende da t, z_1, z_2. Qui ∇ indica il gradiente *rispetto a z* e $\cdot$ il prodotto scalare. Ricordo che questo fatto si dimostra applicando il teorema di Lagrange per funzioni di una variabile alla funzione α definita da $\alpha(u) = f_i\big(u, z_1 + u(z_2 - z_1)\big)$ ove u varia in $[0, 1]$. Qui usiamo il fatto che $\overline{B_r(y_0)}$ è convesso e quindi tutto il segmento tra z_1 e z_2 sta in $\overline{B_r(y_0)}$.

NOTA BENE: Dobbiamo usare il teorema per funzioni a valori in $\mathbf{R}$. Non esiste una versione analoga per funzionai valori in $\mathbf{R}^N$ poiché agendo sulle singole componenti, il punto ξ potrebbe benissimo dipendere dalla componente.

Da (2.10) deduciamo

$$\big|f_i(t, z_1) - f_i(t, z_2)\big| \leq ||\nabla f_i(t, \xi)||\ ||z_1 - z_2|| \leq T_i||z_1 - z_2|| \tag{2.11}$$

ove $T_i = \max\limits_{(t,z)\in[a,b]\times\overline{B_r(y_0)}} ||\nabla f_i(t, z)||$. Tale massimo esiste dato che per ipotesi $\frac{\partial f_i}{\partial z_j}$ è continua sul compatto $[a, b] \times \overline{B_r(y_0)}$ e per definizione

$$||\nabla f_i(t, \xi)|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \Big(\frac{\partial f_i(t, \xi)}{\partial z_j}\Big)^2};$$

quindi anche la funzione $||\nabla f_i||$ è continua, e quindi ha massimo sul compatto $[a, b]\times\overline{B_r(y_0)}$.

Da (2.11) e il fatto ben noto $||w|| \leq \sum\limits_{i=1}^{N} |w_i|$ valido per ogni vettore $w \in \mathbf{R}^N$, si ha

$$||f(t, z_1) - f(t, z_2)|| \leq \sum_{i=1}^{N} \big|f_i(t, z_1) - f_i(t, z_2)\big| \leq T||z_1 - z_2||$$

per ogni $t \in [a, b]$ e $z_1, z_2 \in \overline{B_r(y_0)}$ ove $T = \sum\limits_{i=1}^{N} T_i$. ∎

Vediamo ora come si trasportano i teorema di esistenza e di unicità al caso di equazioni di ordine n. Come noto queste sono equivalenti ad un sistema di n equazioni in n incognite ossia ad un'equazione in $\mathbf{R}^n$. In altri termini, sia data una funzione *continua* $f : A \to \mathbf{R}$ con A aperto non vuoto in $\mathbf{R}^{n+1}$, allora l'equazione

$$y^{(n)}(t) = f\big(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\big) \tag{E_n}$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ \text{............} \\ \text{............} \\ y_{n-1}'(t) = y_n(t) \\ y_n'(t) = f\big(t, y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)\big) \end{cases} \tag{S_n}$$

nel senso che le soluzioni $(y_1, y_2, ..., y_n)$ di (S_n) sono le n-uple della forma $(y, y', ..., y^{(n-1)})$ tali che y risolve (E_n). Da questo di deducono facilmente gli analoghi dei teoremi per equazioni o sistemi del primo ordine. Intanto, notiamo che il problema di Cauchy corrispondente a (E_n) sarà

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f\big(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)\big) \\ y(t_0) = y_{0,1} \\ y'(t_0) = y_{0,2} \\ .... \\ .... \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{0,n} \end{cases} \tag{P_n}$$

ove $(t_0, y_{0,1}, y_{0,2}, ..., y_{0,n}) \in A$. Si avrà.

Teorema 2.8. *Esiste $\delta > 0$ ed esiste y soluzione di (P_n) in $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Se inoltre f (oltre che essere continua) è anche localmente Lipschtiziana in z uniformemente in t, valgono anche le seguenti*

i) La soluzione di (P_n) in $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ è unica

ii) Se $\overline{y}$ e $\widetilde{y}$ sono soluzioni di (P_n) in un intervallo $]a, b[$ che contiene t_0, allora $\overline{y}(t) = \widetilde{y}(t)$ per ogni $t \in]a, b[$.

Facciamo un'ultima osservazione. Se abbiamo l'equazione (E_n) *con* $n = 1$, due soluzioni di (E_n) definite su un intervallo aperto I che coincidono in un punto $\bar{t}$ di I coincidono in tutto I, poiché nel punto $\bar{t}$ soddisfano lo stesso problema di Cauchy e si applica Teorema 2.4; di conseguenza, se $\overline{y}$ e $\widetilde{y}$ sono soluzioni di (E_1) in un intervallo aperto I ed esiste un punto $\bar{t} \in I$ tale che $\overline{y}(\bar{t}) < \widetilde{y}(\bar{t})$, allora si ha $\overline{y}(t) < \widetilde{y}(t)$ per ogni $t \in I$ (altrimenti, per continuità $\overline{y}$ e $\widetilde{y}$ coinciderebbero in qualche punto di I).

NOTA BENE. Tali considerazioni *non valgono* se $n > 1$, in quanto se due soluzioni coincidono in un punto, non soddisfano necessariamente lo stesso problema di Cauchy.