

Dispense di Analisi Matematica 4

1. Teorema di Ascoli-Arzelà

In questo paragrafo dimostriamo il teorema di Ascoli-Arzelà. Esistono molte versioni leggermente diverse di tale teorema. Qui dimostrerò una delle versioni più usuali del teorema di Ascoli-Arzelà che sarà utile per le nostre applicazioni. Premettiamo delle definizioni e un'osservazione.

Definizione 1.1. Diciamo che le funzioni f_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ da uno spazio topologico X a valori in uno spazio metrico Y con metrica d sono equicontinue se per ogni $x \in X$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U di x tale che per ogni $y \in U$ e per ogni n si ha $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$.

Nota che se f_n sono equicontinue allora ogni f_n è continua, ma non vale il viceversa poiché nella precedente definizione richiediamo che l'intorno U non dipende da n . Nota anche che, dato che ogni intorno di x contiene un aperto contenente x dalla definizione di intorno, in Def. 1.1 possiamo supporre che U è aperto. Se X è uno spazio metrico con metrica d' la precedente definizione si può esprimere usando ε e δ , ossia,

per ogni $x \in X$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $y \in X$ tale che $d'(x, y) < \delta$ e per ogni n si ha $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$.

Come piccola osservazione notiamo che se X è uno spazio metrico con metrica d' , diciamo che f_n sono uniformemente equicontinue se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in X$ con $d'(x, y) < \delta$ e per ogni n si ha $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$. Ossia, δ non dipende neanche da x . Ovviamente se f_n sono uniformemente equicontinue sono anche equicontinue. Si può provare che vale anche il viceversa se X è compatto, con un ragionamento simile a quello usato per provare che una funzione continua su un compatto è uniformemente continua.

Definizione 1.2. Le funzioni f_n da un insieme X a valori in \mathbf{R}^N sono equilimitate se esiste $K > 0$ tale che $\|f_n(x)\| \leq K$ per ogni $x \in X$ e per ogni n .

Ossia pretendiamo non solo che tutte le funzioni siano limitate ma che la costante che le limita non dipenda da n .

Osservazione 1.3. Notiamo che, come ben noto, uno spazio metrico compatto è separabile. Infatti, preso un fissato n intero positivo, il ricoprimento aperto costituito dalle palle di centro x ($x \in X$) e raggio $\varepsilon > 0$ (denotate da $B_\varepsilon(x)$) ha un sottoricoprimento finito, ossia esistono x_1, \dots, x_m in X tali che

$$X = \bigcup_{h=1}^m B_\varepsilon(x_h). \quad (1.1)$$

Dato un intero positivo n , possiamo fare tale considerazione con $\varepsilon = \frac{1}{n}$. In tal caso esistono $x_{1,n}, \dots, x_{m_n,n}$ in X tali che

$$X = \bigcup_{h=1}^{m_n} B_{\frac{1}{n}}(x_{h,n}).$$

In questa situazione metto due indici ai punti x poiché al variare di n ho punti diversi. In altri termini, per ogni $y \in X$ esiste $h = 1, \dots, m_n$ tale che $d(y, x_{h,n}) < \frac{1}{n}$. Sia ora E l'insieme di tutti gli $x_{h,n}$ al variare anche di tutti i possibili interi positivi n e non solo di h , in termini più precisi,

$$E := \{x_{h,n} : n = 1, 2, 3, \dots, h = 1, \dots, m_n\}.$$

Si ha $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, ove $E_n := \{x_{h,n} : h = 1, \dots, m_n\}$. Poiché ogni E_n è un insieme finito, E è (al massimo) numerabile in quanto unione numerabile di insiemi finiti. Proviamo che E è anche denso e quindi X è separabile. Fissato $y \in X$ e $\varepsilon > 0$ esisterà un intero positivo n tale che $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Quindi, preso $h = 1, \dots, m_n$ tale che $d(y, x_{h,n}) < \frac{1}{n}$, si ha $x_{h,n} \in E$ e $d(y, x_{h,n}) < \varepsilon$. ■

Teorema 1.4 (di Ascoli-Arzelà) *Se f_n è una successione di funzioni da uno spazio metrico compatto X con metrica d' a valori in \mathbf{R}^N , con f_n equilimitate ed equicontinue, allora f_n ha una sottosuccessione che converge uniformemente.*

Dimostrazione. Lo spazio X è separabile (vedi osservazione 1.3). Sia quindi

$$A := \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

una successione di elementi di X densa in X . Come primo passo troviamo una sottosuccessione di f_n che converge in tutti i punti di A .

Dato che $f_n(a_1)$ è una successione limitata in \mathbf{R}^N (per l'ipotesi che le f_n sono equilimitate), questa ha una sottosuccessione convergente, ossia esiste una sottosuccessione $g_n^{(1)}$ di f_n tale che $g_n^{(1)}(a_1)$ converge, in altri termini la sottosuccessione $g_n^{(1)}$ converge nel punto a_1 . Per lo stesso motivo possiamo trovare una sottosuccessione $g_n^{(2)}$ di $g_n^{(1)}$ che converge nel punto a_2 e $g_n^{(2)}$, essendo una sottosuccessione di $g_n^{(1)}$, converge anche in a_1 . Andando avanti allo stesso modo, troviamo una sottosuccessione $g_n^{(3)}$ di $g_n^{(2)}$ che converge in a_3 , ed essendo una sottosuccessione di $g_n^{(2)}$, converge anche in a_1 e a_2 . Continuando, troviamo induttivamente successioni $g_n^{(h)}$ per ogni intero positivo h tali che $g_n^{(h+1)}$ è una sottosuccessione di $g_n^{(h)}$ per ogni h , e $g_n^{(h)}$ converge in a_1, a_2, \dots, a_h . Ovviamente ogni $g_n^{(h)}$ è una sottosuccessione di f , e il problema è che ognuna di queste successioni converge soltanto (a priori) in un sottoinsieme finito di A , mentre noi cerchiamo una sottosuccessione che converge in tutti i punti di A .

Per trovare tale sottosuccessione noi prendiamo la *diagonale*, ossia $g_n = g_n^{(n)}$. Infatti g_n è una sottosuccessione "da h in poi" di $g_n^{(h)}$ per ogni h . Detto più precisamente, questo significa che esiste una applicazione strettamente crescente ψ_h da $\{h, h+1, \dots\}$ in sé tale

che $g_n = g_{\psi_h(n)}^{(h)}$ per ogni $n \geq h$, e quindi da un lato g_n è una sottosuccessione di f_n , dall'altro g_n converge in a_h per ogni h .¹

Ora proviamo che questa sottosuccessione g_n converge uniformemente su X . Basta provare che g_n è uniformemente di Cauchy, ossia

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu = 1, 2, 3, \dots : \|g_n(x) - g_m(x)\| < \varepsilon \forall n > \nu, m > \nu, x \in X. \quad (1.2)$$

Sia dato $\varepsilon > 0$. Dato che le f_n e quindi anche le g_n sono equicontinue, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|g_n(x) - g_n(x')\| < \frac{\varepsilon}{3} \forall n \forall x, x' \in X : d'(x, x') < \delta. \quad (1.3)$$

Scegliamo $x_1, \dots, x_m \in X$ tale che valga (1.1) in Osservazione (1.3) con $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$. Siano $a_{i(h)} \in A \cap B_{\frac{\delta}{2}}(x_h)$. Tali $a_{i(h)}$ esistono dato che A è denso. Siccome $g_n(a_{i(h)})$ converge, e quindi è di Cauchy, allora esiste $\nu_h \in \mathbf{N}$ tale che

$$\|g_n(a_{i(h)}) - g_m(a_{i(h)})\| < \frac{\varepsilon}{3} \forall n > \nu_h, m > \nu_h. \quad (1.4)$$

Sia $\bar{\nu} := \max_{h=1, \dots, m} \nu_h$. Fissiamo ora $x \in X$. Per (1.1) esiste $\bar{h} = 1, \dots, m$ (ovviamente dipendente da x) tale che $x \in B_{\frac{\delta}{2}}(x_{\bar{h}})$, e d'altra parte anche $a_{i(\bar{h})} \in B_{\frac{\delta}{2}}(x_{\bar{h}})$, quindi dalla disuguaglianza triangolare $d'(x, a_{i(\bar{h})}) < \delta$. Per (1.3) per ogni n si ha

$$\|g_n(x) - g_n(a_{i(\bar{h})})\| < \frac{\varepsilon}{3} \forall n. \quad (1.5)$$

D'altra parte, se n ed m sono maggiori di $\bar{\nu}$, per (1.4) si ha

$$\|g_n(a_{i(\bar{h})}) - g_m(a_{i(\bar{h})})\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Quindi, per (1.5), se n e m sono maggiori di $\bar{\nu}$, si ha

$$\|g_n(x) - g_m(x)\| \leq \|g_n(x) - g_n(a_{i(\bar{h})})\| + \|g_n(a_{i(\bar{h})}) - g_m(a_{i(\bar{h})})\| + \|g_m(x) - g_m(a_{i(\bar{h})})\| < \varepsilon.$$

Quindi (1.2) è provata. ■

¹ Per vedere questo, notiamo che se $m \geq h$, allora $g_n^{(m)}$ è una sottosuccessione di $g_n^{(h)}$ quindi esiste $\phi_m : \{1, 2, \dots\} \rightarrow \mathbf{N}$ tale che $g_n^{(m)} = g_{\phi_m(n)}^{(h)}$. Siccome $g_n^{(m+1)}$ è una sottosuccessione di $g_n^{(m)}$ troviamo induttivamente ϕ_m , in particolare $g_n^{(m+1)} = g_{\phi_m(\sigma(n))}^{(h)}$ per qualche σ strettamente crescente, quindi $\phi_{m+1} = \phi_m \circ \sigma$, e $\phi_{m+1} \geq \phi_m$. Quindi per $n \geq h$, $g_n = g_n^{(n)} = g_{\psi_h(n)}^{(h)}$ con $\psi_h(n) = \phi_n(n)$ e siccome $\phi_{n+1}(n+1) \geq \phi_n(n+1) > \phi_n(n)$, ψ_h è strettamente crescente.

2. Teoremi di esistenza e unicità per il problema di Cauchy.

Consideriamo la seguente situazione generale. Sia $f : A \rightarrow \mathbf{R}^N$ una funzione continua ove A è un aperto non vuoto di \mathbf{R}^{N+1} e N è un intero positivo. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (P)$$

ove $(t_0, y_0) \in A$. Proveremo che sotto queste sole ipotesi (P) ha soluzione locale, ossia esiste $\delta > 0$ tale che (P) ha soluzione in $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Ricordo, e considereremo sottinteso nel seguito, che y risolve (P) in un intervallo aperto I contenente t_0 se e solo se y è una funzione continua da I in \mathbf{R}^n tale che $(t, y(t)) \in A$ per ogni $t \in I$ e inoltre (la cosa più importante) per ogni $t \in I$ vale

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \quad (EV)$$

(EV) è anche detta a volte *equazione di Volterra*.

Siano dati numeri positivi a e b tali che

$$[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_b(y_0)} \subseteq A. \quad (2.1)$$

Tali numeri positivi esistono poiché $(t_0, y_0) \in A$ e A è aperto. Poniamo

$$R := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_b(y_0)}. \quad (2.2)$$

Sia $M > 0$ tale che

$$\|f(t, z)\| \leq M \quad \forall (t, z) \in R. \quad (2.3)$$

Tale M esiste dato che f (e quindi anche $\|f\|$) è continua sul compatto R , e possiamo applicare il teorema di Weierstrass. Sia ora $\delta > 0$ tale che

$$\delta < \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}. \quad (2.4)$$

Proveremo che con tale δ , (P) ha soluzione in $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Premetto una semplice osservazione.

Osservazione 2.1 Siano a, b, c numeri reali con $a < b < c$. Sia M un numero reale positivo e g una funzione da $[a, c]$ in \mathbf{R}^N tale che la disuguaglianza

$$\|g(t) - g(t')\| \leq M|t - t'|$$

vale se $t, t' \in [a, b]$ e anche se $t, t' \in [b, c]$. Allora tale disuguaglianza vale per ogni $t, t' \in [a, c]$. Infatti basta provarla se uno dei due sta in $[a, b]$ e l'altro in $[b, c]$. Ad esempio $t \in [a, b]$, $t' \in [b, c]$. Poiché t e b stanno in $[a, b]$ e b e t' stanno in $[b, c]$, per le nostre ipotesi si ha:

$$\begin{aligned} \|g(t) - g(t')\| &\leq \|g(t') - g(b)\| + \|g(b) - g(t)\| \\ &\leq M|t' - b| + M|b - t| = M(t' - b) + M(b - t) = M(t' - t) = M|t' - t|. \end{aligned}$$

Teorema 2.2 *Esiste y soluzione di (P) in $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$, ove δ è dato da (2.4).*

Dimostrazione. Sia $\tilde{I} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Definiamo una successione di funzioni y_n da $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ in \mathbf{R}^N che sono "soluzioni approssimate" di (EV) in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, quindi anche in $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Troveremo un'estratta di y_n che convergerà uniformemente a una funzione y che sarà soluzione di (EV) e quindi di (P) in $\tilde{I} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Fissato un intero positivo n , sia $t_k := t_0 + \frac{k}{n}\delta$ per $k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$. Notare che per $k = 0$ ritroviamo proprio t_0 . Poniamo $y_n(0) = y_0$. Supponiamo poi di conoscere y_n in $[t_{-k}, t_k]$ con $k = 0, \dots, n-1$ e la estendiamo su y_n in $[t_{-(k+1)}, t_{k+1}]$. Alla fine induttivamente avremo definito y_n su $[t_{-n}, t_n] = \tilde{I}$. Supponiamo dunque data $y_n : [t_{-k}, t_k] \rightarrow \mathbf{R}^N$ con $k = 0, \dots, n-1$ e supponiamo che valga la seguente

$$\|y_n(t) - y_n(t')\| \leq M|t - t'| \quad \forall t, t' \in [t_{-k}, t_k]. \quad (H_k)$$

ove ricordo che M è definito in (2.3). Notiamo che (H_k) implica in particolare che y_n è continua in quanto Lipschitziana, e che

$$\|y_n(t) - y_n(t_0)\| \leq M|t - t_0| \leq M\delta < b \quad \forall t \in [t_{-k}, t_k]. \quad (H'_k)$$

e quindi $(t, y(t)) \in R$ per ogni $t \in [t_{-k}, t_k]$. Questa osservazione è importante perché altrimenti potrebbe non avere senso parlare di $f(t, y(t))$. Definiamo y_n anche in $[t_k, t_{k+1}] \cup [t_{-(k+1)}, t_{-k}]$ nel seguente modo.

$$y_n(t) = \begin{cases} y_n(t_k) + (t - t_k)f(t_k, y_n(t_k)) & \text{se } t \in [t_k, t_{k+1}] \\ y_n(t_{-k}) + (t - t_{-k})f(t_{-k}, y_n(t_{-k})) & \text{se } t \in [t_{-(k+1)}, t_{-k}] \end{cases}.$$

Proviamo che vale (H_{k+1}) . Intanto notiamo che se $t, t' \in [t_k, t_{k+1}]$, allora

$$\|y_n(t) - y_n(t')\| = \|(t - t')f(t_k, y_n(t_k))\| = |t - t'| \|f(t_k, y_n(t_k))\| \leq M|t - t'|$$

grazie a (2.3) e al fatto che $(t_k, y_n(t_k)) \in R$. Quindi la disuguaglianza

$$\|y_n(t) - y_n(t')\| \leq M|t - t'| \quad (2.5)$$

vale se $t, t' \in [t_k, t_{k+1}]$. In modo analogo si prova che (2.5) vale se $t, t' \in [t_{-(k+1)}, t_{-k}]$; grazie a (H_k) (2.5) vale anche se $t, t' \in [t_{-k}, t_k]$. Per Osservazione 2.1 (applicata due volte) (2.5) vale se $t, t' \in [t_{-(k+1)}, t_{k+1}]$ e quindi (H_{k+1}) vale e il passo induttivo è completato. Alla fine per $k = n$ abbiamo che y_n è definita in \tilde{I} , e grazie a (H'_n) , come visto, si ha $(t, y_n(t)) \in R$ per ogni $t \in \tilde{I}$. In particolare $\|y_n(t)\| \leq \|y_0\| + b$ e quindi le y_n sono equilimitate. Inoltre grazie ad (H_n) , sono anche equilipschitziane di costante M , e quindi equicontinue, in tutto \tilde{I} . Per il teorema di Ascoli-Arzelà esiste y_{n_k} , sottosuccessione di y_n che converge uniformemente a una funzione continua y . Prima di concludere abbiamo bisogno della seguente considerazione. Dato che f è continua, e quindi uniformemente continua sul compatto R , dato $\varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che, se $w, w' \in R$ e $\|w - w'\| < \eta$ allora $\|f(w) - f(w')\| < \varepsilon$. Posto allora

$$\omega_n = \sup \left\{ \|f(w) - f(w')\| : w, w' \in R, \|w - w'\| \leq \frac{\delta(M+1)}{n} \right\},$$

si ha

$$\omega_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (2.6)$$

Infatti, preso $\varepsilon > 0$, per n "abbastanza grande" si ha $\frac{\delta(M+1)}{n} < \eta$ e quindi per tali n si ha $\omega_n \leq \varepsilon$. Proviamo ora

$$\left\| y_n(t) - \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \right) \right\| \leq \omega_n |t - t_0| \quad \forall t \in \tilde{I}. \quad (2.7)$$

Notiamo che dato che (2.7) è ovvia per $t = t_0$, e quindi per $t \in [t_{-k}, t_k]$ con $k = 0$, basta provare che se vale per $t \in [t_{-k}, t_k]$ con $k = 0, \dots, n-1$, allora vale anche per $t \in [t_{-k+1}, t_{k+1}]$, e chiaramente basta provarla per $t \in [t_k, t_{k+1}] \cup [t_{-(k+1)}, t_{-k}]$. Proviamo (2.7) solo per $t \in [t_k, t_{k+1}]$ poiché la dimostrazione per $t \in [t_{-(k+1)}, t_{-k}]$ è analoga. Sia dunque $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Si ha

$$\begin{aligned} & \left\| y_n(t) - \left(y_n(t_k) + \int_{t_k}^t f(s, y_n(s)) ds \right) \right\| = \\ & \left\| (t - t_k) f(t_k, y_n(t_k)) - \int_{t_k}^t f(s, y_n(s)) ds \right\| = \\ & \left\| \int_{t_k}^t f(t_k, y_n(t_k)) ds - \int_{t_k}^t f(s, y_n(s)) ds \right\| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{t_k}^t f(t_k, y_n(t_k)) - f(s, y_n(s)) ds \right\| \leq \\
& \int_{t_k}^t \left\| f(t_k, y_n(t_k)) - f(s, y_n(s)) \right\| ds \\
& \leq \int_{t_k}^t \omega_n ds = \omega_n(t - t_k).
\end{aligned}$$

Infatti dato che $|t - t_k| \leq \frac{\delta}{n}$, quindi $\|y_n(t_k) - y_n(s)\| \leq M|t - t_k| \leq M\frac{\delta}{n}$, si ha

$$\|(t_k, y_n(t_k)) - (s, y_n(s))\| \leq |t_k - s| + \|y_n(t_k) - y_n(s)\| \leq (M + 1)\frac{\delta}{n},$$

quindi

$$\left\| f(t_k, y_n(t_k)) - f(s, y_n(s)) \right\| \leq \omega_n$$

per definizione di ω_n . Dunque abbiamo provato

$$\left\| y_n(t) - \left(y_n(t_k) + \int_{t_k}^t f(s, y_n(s)) ds \right) \right\| \leq \omega_n(t - t_k).$$

D'altra parte, per (2.7) con $t = t_k \in [t_{-k}, t_k]$ si ha

$$\left\| y_n(t_k) - \left(y_0 + \int_{t_0}^{t_k} f(s, y_n(s)) ds \right) \right\| \leq \omega_n |t_k - t_0| = \omega_n(t_k - t_0),$$

e quindi

$$\begin{aligned}
& \left\| y_n(t) - \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \right) \right\| \leq \\
& \left\| y_n(t) - \left(y_n(t_k) + \int_{t_k}^t f(s, y_n(s)) ds \right) \right\| + \left\| y_n(t_k) - \left(y_0 + \int_{t_0}^{t_k} f(s, y_n(s)) ds \right) \right\| \\
& \leq \omega_n(t - t_k) + \omega_n(t_k - t_0) = \omega_n(t - t_0)
\end{aligned}$$

e (2.7) è provata. Ora, dato che $y_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y$ uniformemente su \tilde{I} , posto $u_k(t) = (t, y_{n_k}(t))$, $u(t) = (t, y(t))$, $v_k(t) = f(t, y_{n_k}(t))$, $v(t) = f(t, y(t))$, si ha subito $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u$ uniformemente su \tilde{I} , e dal fatto che u_k e u sono a valori in R dove f è uniformemente continua, si deduce facilmente che $v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} v$ su \tilde{I} .

Segue quindi che per ogni $t \in \tilde{I}$ si ha

$$\int_{t_0}^t f(s, y_{n_k}(s)) ds \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Quindi, da (2.7) e (2.6) segue

$$\left\| y(t) - \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right) \right\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| y_{n_k}(t) - \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n_k}(s)) ds \right) \right\| = 0$$

per ogni $t \in \tilde{I}$ e y risolve (EV) su \tilde{I} . ■