Appunti su Equazioni differenziali lineari

1. Sistemi differenziali lineari

Studieremo qui i sistemi differenziali lineari (del primo ordine) di n equazioni in n incognite (considereremo nel seguito sottointeso che i sistemi e le equazioni differenziali che tratteremo saranno **sempre in forma normale**). Questi sono sistemi della forma

$$
\begin{aligned}
&y_1'(t) = a_{1,1}(t)y_1(t) + a_{1,2}(t)y_2(t) + ... + a_{1,n}(t)y_n(t) + b_1(t)\\
&y_2'(t) = a_{2,1}(t)y_1(t) + a_{2,2}(t)y_2(t) + ... + a_{2,n}(t)y_n(t) + b_2(t)\\
&...\\
&...\\
&...\\
&y_n'(t) = a_{n,1}(t)y_1(t) + a_{n,2}(t)y_2(t) + ... + a_{n,n}(t)y_n(t) + b_n(t)
\end{aligned}
$$

ove le funzioni $a_{i,j}$ e b_i sono assunte continue da un intervallo aperto I a valori in $\mathbf{R}$. Dalla teoria generale dei sistemi di equazioni segue che le soluzioni di tale sistema sono definite in tutto I, per essere piú precisi, ogni problema di Cauchy relativo a tale sistema ha una (sola) soluzione su tutto I (poiché il sistema è lineare, cf. Giusti teoria pg. 106). Nel seguito per soluzione del sistema intenderemo sempre soluzione in tutto I. Spesso ma non necessariamente I sarà tutto $\mathbf{R}$. Possiamo riscrivere il sistema precedente in forma piú compatta come

$$y_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)y_j(t) + b_i(t), \text{ per } i = 1, ..., n$$

o anche in forma matriciale

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \tag{1}$$

ove y è il vettore (colonna) $(y_1, ..., y_n)$, b è il vettore (colonna) $(b_1, ..., b_n)$, la matrice A è la matrice $n \times n$ che ha al posto i, j $a_{i,j}$, e il prodotto $A(t)y(t)$ è inteso ovviamente come prodotto di matrici. Qui se abbiamo una matrice (in particolare un vettore) di funzioni derivabili che al posto i, j ha la funzione $c_{i,j}$ chiameremo come ovvio derivata di tale matrice la matrice che al posto i, j ha la funzione $c'_{i,j}$ (in altri termini la derivata di una matrice si definisce derivando i singoli elementi). In particolare $y'(t)$ è il vettore colonna $(y_1'(t), ..., y_n'(t))$. Useremo spesso la forma matriciale perché piú agile. Il sistema si dice omogeneo se il vettore b è il vettore nullo, ossia se tutte le funzioni b_i sono nulle. In genere non si riesce a risolvere esplicitamente un sistema di equazioni tipo (1), a parte il caso di una sola equazione cioè $n = 1$, o quando le funzioni $a_{i,j}$ (non necessariamente le b_i) sono costanti, nel qual caso il sistema è detto a coefficienti costanti; però si possono dare informazioni generali sull'insieme delle soluzioni, e questo è quello che faremo nei prossimi teoremi. Cominciamo col caso del sistema omogeneo.

Teorema 1. *Supponiamo che $b = 0$, cioè il sistema (1) sia omogeneo. Allora*
a) L'insieme V delle soluzioni di (1) costituisce uno spazio vettoriale di dimensione n.

b) Fissato $t_0 \in I$, un numero finito di soluzioni $y_{(1)}, ..., y_{(m)}$ di (1) (non necessariamente $m = n$) sono linearmente indipendenti se e solo se i vettori di $\mathbf{R}^n$ $y_{(1)}(t_0), ..., y_{(m)}(t_0)$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Prima proviamo che V è uno spazio vettoriale. Siano y e z in V e siano $a, b \in \mathbf{R}$. Abbiamo da provare che $ay + bz \in V$. Infatti

$$(ay + bz)'(t) = ay'(t) + bz'(t) = aA(t)y(t) + bA(t)z(t) = A(t)(ay(t) + bz(t))$$

ove nella prima uguaglianza abbiamo usato la linearità della derivata, nella seconda il fatto che y e z sono soluzioni di (1), e nella terza la linearità del prodotto con una fissata matrice. Ora proviamo che fissato $t_0 \in I$ l'applicazione $\phi : V \to \mathbf{R}^n$ definita da

$$\phi(y) = y(t_0)$$

è un'applicazione lineare biiettiva, ossia un isomorfismo di spazi vettoriali. Da questo seguirà subito che V ha dimensione n in quanto isomorfo a $\mathbf{R}^n$ e anche b), poiché b) dice in sostanza che m elementi di V sono linearmente indipendenti se e solo se le loro immagini mediante ϕ lo sono. Per provare che ϕ è lineare e biiettiva, osserviamo che la linearità è ovvia in quanto

$$\phi(ay + bz) = ay(t_0) + bz(t_0) = a\phi(y) + b\phi(z)$$

se $y, z \in V$, $a, b \in \mathbf{R}$. Inoltre ϕ è biiettiva se e solo se per ogni $u \in \mathbf{R}^n$ esiste unica $y \in V$ con $\phi(y) = u$, in altri termini per ogni $u \in \mathbf{R}^n$ esiste unica soluzione y di (1) tale che $y(t_0) = u$, ma questo enunciato è vero per il teorema di esistenza e unicità. ∎

Nell'enunciare b) ho preferito usare la notazione $y_{(i)}$ invece di y_i perché quest'ultima potrebbe sembrare la componente iesima di un vettore y. Notiamo che b) dice in sostanza che m soluzioni sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono in un punto arbitrario di I. Questo fatto sarà sottointeso nel seguito. Consideriamo ora il sistema (1) non necessariamente omogeneo. Allora il corrispondente sistema omogeneo

$$y'(t) = A(t)y(t) \tag{2}$$

cioè quello ottenuto da (1), "togliendo" il termine b è chiamato sistema omogeneo associato a (1). Proviamo il seguente

Teorema 2. *Data una soluzione $\overline{y}$ di (1), allora una funzione y da I in $\mathbf{R}^n$ è soluzione di (1) se e solo se $y - \overline{y}$ è soluzione di (2).*

Dimostrazione. Tenuto conto che $\overline{y}$ è soluzione di (1), y è soluzione di (1) se e solo se

$$\begin{aligned} y'(t) = A(t)y(t) + b(t) &\iff y'(t) - \overline{y}'(t) = A(t)y(t) + b(t) - (A(t)\overline{y}(t) + b(t)) \\ &\iff (y - \overline{y})'(t) = A(t)(y(t) - \overline{y}(t)) \end{aligned}$$

e il teorema è provato. ∎

Il teorema precedente dice in sostanza che una volta conosciuta una particolare soluzione $\overline{y}$ di (1) tutte le soluzioni si ottengono sommando a $\overline{y}$ tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato. Supponiamo ora di volere risolvere (1) e di conoscere tutte le soluzioni

dell'omogeneo associato. Per quanto visto ora basta trovare *una* soluzione di (1). Questa si può trovare usando quello che si chiama metodo della variazione delle costanti. In base alle considerazione fatte finora si capisce che il limite di questo metodo consiste nel fatto che dobbiamo conoscere le soluzioni dell'omogeneo associato, cosa che succede in genere solo quando il sistema è a coefficienti costanti o in altri casi particolari. Però a priori il metodo si può usare anche in altri casi, se per qualche motivo si conoscono ugualmente le soluzioni dell'omogeneo associato. Per Teorema 1 le soluzioni di (2) sono uno spazio vettoriale di dimensione n. Possiamo perciò trovarne n linearmente indipendenti $u_{(1)}, ..., u_{(n)}$. Ovviamente ognuna di queste soluzioni sarà un vettore di n componenti.
Chiamiamo ora U la matrice che ha come colonna jesima il vettore colonna $u_{(j)}$, ossia che al posto i, j ha $U_{i,j} = (u_{(j)})_i$ (la componenente iesima del vettore $u_{(j)}$). Dal fatto che ogni funzione vettoriale $u_{(j)}$ soddisfa (2) segue subito con semplice calcolo che la matrice U verifica l'equazione analoga

$$U'(t) = A(t)U(t). \tag{3}$$

Cerchiamo una soluzione di (1) della forma

$$\widetilde{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)u_{(i)}(t), \tag{4}$$

cioè cerchiamo una soluzione come "combinazione a coefficienti variabili" di $u_{(1)}, ..., u_{(n)}$. La (4) si può riscrivere in forma matriciale come

$$\widetilde{y}(t) = U(t)c(t). \tag{5}$$

Infatti quest'ultima espressione equivale a

$$\widetilde{y}_j(t) = \sum_{i=1}^{n} u_{j,i}(t)c_i(t) = \sum_{i=1}^{n} (u_{(i)})_j(t)c_i(t) \quad j = 1, ..., n$$

che è (4). Per andare avanti notiamo che la derivata del prodotto di due matrici derivabili B e C si calcola $(BC)' = BC' + B'C$. Questo si verifica facilmente; infatti BC al posto i, j ha $\sum_k b_{i,k}c_{k,j}$ che ha come derivata $\sum_k b'_{i,k}c_{k,j} + \sum_k b_{i,k}c'_{k,j}$ (ho qui omesso i limiti tra cui varia l'indice k per agilità di notazione; inoltre ho indicato con $b_{i,j}$ (risp. $c_{i,j}$) l'elemento di posto i, j della matrice B (risp. C)). Da (5), tenuto conto di (3), si ha

$$\widetilde{y}'(t) = U'(t)c(t) + U(t)c'(t) = A(t)U(t)c(t) + U(t)c'(t) = A(t)\widetilde{y}(t) + U(t)c'(t).$$

Quindi $\widetilde{y}$ risolve (1) se e solo se si ha

$$U(t)c'(t) = b(t). \tag{6}$$

Poiché le soluzioni $u_{(1)}, ..., u_{(n)}$ erano assunte linearmente indipendenti, per ogni t i vettori $u_{(1)}(t), ..., u_{(n)}(t)$ sono linearmente indipendenti, quindi la matrice $U(t)$ è invertibile e da (6) si ricava $c'(t) = U(t)^{-1}b(t)$. A questo punto, trovati $c'_i(t)$ si ricavano c_i per integrazione, e da (4) si ricava la soluzione $\widetilde{y}$ di (1). Per maggiore chiarezza riscriviamo (6) in forma di sistema esplicito, cioè

$$\sum_{j=1}^{n} (u_{(j)})_i(t)c'_j(t) = b_i(t) \quad i = 1, ..., n. \tag{7}$$

Vediamo ora di applicare le considerazioni svolte al caso di equazioni differenziali lineari di ordine n. Queste sono equazioni della forma

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) + b(t). \tag{8}$$

ove ancora le funzioni a_i e b sono assunte continue da un intervallo aperto I a valori in $\mathbf{R}$. L'equazione (8) è detta omogenea se $b = 0$. L'equazione

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) \tag{9}$$

viene chiamata omogenea associata a (8). Ora come noto dalla teoria, ogni equazione di ordine n si "trasforma" in un sistema del primo ordine, nel senso che le soluzioni del sistema sono tutte e sole le funzioni vettoriali $(y, y', ..., y^{(n-1)})$ ove y è una soluzione dell'equazione data (cioè son tutti e soli i vettori z con $z_i = y^{(i-1)}$ con y soluzione dell'equazione), e nel nostro caso il sistema associato a (8) è dato da

$$\begin{aligned}
&y'_1(t) = y_2(t)\\
&............\\
&............\\
&y'_{n-1}(t) = y_n(t)\\
&y'_n(t) = a_{n-1}(t)y_n(t) + ... + a_1(t)y_2(t) + a_0(t)y_1(t) + b(t)
\end{aligned}$$

mentre ovviamente quello associato a (9) è dato da

$$\begin{aligned}
&y'_1(t) = y_2(t)\\
&............\\
&............\\
&y'_{n-1}(t) = y_n(t)\\
&y'_n(t) = a_{n-1}(t)y_n(t) + ... + a_1(t)y_2(t) + a_0(t)y_1(t)
\end{aligned}$$

(ho il dubbio di avere scritto male gli indici durante la spiegazione in aula) Notiamo anche che m soluzioni dell'equazione omogenea (9) $(y_1,...,y_m)$ sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono le corrispondenti soluzioni del sistema associato (che sono, come visto, la n-upla composta dalla funzione e dalle sue prime $n-1$ derivate). Per vedere questo, basta notare che una combinazione lineare delle m funzioni cioè

$$\sum_{i=1}^{m} c_i y_i \tag{10}$$

è nulla se e solo se la stessa combinazione lineare delle corrispondenti soluzioni del sistema associato è nulla poiché questo equivale a dire

$$\sum_{i=1}^{m} c_i y_i^{(j)} = 0 \quad \text{per } j = 0, 1, ..., n-1 \tag{11}$$

e (10) è un caso particolare di (11) ($j = 0$), mentre (11) segue da (10) derivando j volte. Noi potremo ora risolvere l'equazione (8) se sapremo risolvere (9) (e questo è possibile quando l'equazione è a coefficienti costanti, come vedremo in dettaglio nel prossimo paragrafo) in questo modo: Dalle soluzioni di (9), noi ricaviamo come detto quelle del sistema associato a (9) che come si vede subito è il sistema omogeneo associato al sistema associato a (8). Perciò col metodo della variazione delle costanti possiamo risolvere il sistema associato a (8) e quindi l'equazione (8). In concreto siano date n soluzioni linearmente indipendenti di (9) y_1,...,y_n. Consideriamo le corrispondenti n soluzioni u_1,...., u_n (linearmente indipendenti) del sistema associato a (9), e cerchiamo una soluzione del sistema associato a (8) data da $u(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) u_i(t)$. Ritornando all'equazione (8) avremo che u è della forma $(y, y', ..., y^{(n-1)})$ ove y è una soluzione di (8) e si deve avere (per $j = 0, 1, ..., n-1$)

$$y^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i^{(j)}(t)$$

e in particolare

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i(t), \tag{12}$$

determinando cosí la nostra soluzione y di (8). Per determinare le funzioni c_i bisogna risolvere il sistema (7) per il sistema differenziale associato a (8), cioè il sistema

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t) y_i^{(j)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } j < n-1 \\ b(t) & \text{se } \quad j = n-1 \end{cases} \tag{13}$$

al variare di $j = 0, 1, ..., n-1$ (notare che il "b" di (1) corrisponde nel sistema associato a (8) al vettore $(0, ..., 0, b)$). Voglio ora dare una spiegazione piú diretta, ossia senza passare al sistema associato a (8), di tale procedimento. Supponiamo dunque che y sia data da (12) con c_i che soddisfano (13). Da (12) derivando otteniamo

$$y' = \sum c_i y_i' + \sum c_i' y_i = \sum c_i y_i'$$

ove la seconda uguaglianza segue dalla prima equazione del sistema (13) (se $n > 1$). Derivando questa otteniamo

$$y'' = \sum c_i y_i'' + \sum c_i' y_i' = \sum c_i y_i''$$

ove la seconda uguaglianza segue dalla seconda equazione di (13) (se $n > 2$) e man mano derivando ogni riga dalla precedente e usando le equazioni di (13) otteniamo

$$y^{(j)} = \sum c_i y_i^{(j)} + \sum c_i' y_i^{(j-1)} = \sum c_i y_i^{(j)}$$

per $j < n$ e

$$y^{(n)} = \sum c_i y_i^{(n)} + \sum c_i' y_i^{(n-1)} = \sum c_i y_i^{(n)} + b.$$

(è ovvio che per formalizzare questo ragionamento bisognerebbe usare l'induzione sull'indice di derivazione). Da queste formule, tenuto conto che $y_1, ..., y_n$ sono soluzioni dell'omogenea associata (9), si deduce

$$y^{(n)} = (\sum c_i y_i^{(n)}) + b = \big(\sum c_i (a_{n-1} y_i^{(n-1)} + ... + a_1 y_i' + a_0 y_i)\big) + b$$

$$= a_{n-1}(\sum c_i y_i^{(n-1)}) + ... + a_1(\sum c_i y_i') + a_0(\sum c_i y_i) + b$$

$$a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y + b$$

e quindi y è davvero una soluzione di (8). Per allegerire la notazione in questo discorso non ho evidenziato la dipendenza da t delle funzioni e ho sottointeso che tutte le sommatorie sono per i che varia da 1 a n.

2. Soluzione delle equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti

Per studiare le equazioni a coefficienti costanti è conveniente ambientare le equazioni nell'ambito delle delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$. Per fare questo cominciamo a generalizzare al caso di funzioni a valori complessi alcune nozioni usuali per funzioni a valori reali. Nota comunque che lo spazio di partenza è sempre $\mathbf{R}$ (eventualmente privato di un punto). Noi *definiamo* il limite di una funzione $f : \mathbf{R} \setminus \{t_0\} \to \mathbf{C}$ nel punto $t_0 \in \mathbf{R}$ nel seguente modo:

$$f(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} z \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 | \; 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - z| < \varepsilon$$

ove ovviamente $|\;|$ denota il modulo di un numero complesso. Nella definizione precedente si intende che z è un numero complesso (non consideriamo qui definizioni di limiti infiniti). Segue subito dalla definizione che $f(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} z$ equivale a $(\mathcal{R}f(t), \mathcal{I}f(t)) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} (\mathcal{R}(z), \mathcal{I}(z))$, ove $\mathcal{R}$ indica la parte reale e $\mathcal{I}$ la parte immaginaria; in altri termini, parlando in modo non del tutto preciso, si può "identificare" $\mathbf{C}$ con $\mathbf{R}^2$ e studiare il limite della corrispondente funzione a valori in $\mathbf{R}^2$, e questo semplicemente perché dalle definizioni il modulo in $\mathbf{C}$ in questo modo corrisponde esattamente alla norma in $\mathbf{R}^2$, cioè $|x + iy| = ||(x, y)||(= \sqrt{x^2 + y^2})$ (qui e nel seguito sarà sottointeso che quando scrivo un numero complesso $x + iy$, salvo avviso contrario x e y sono numeri reali e quindi rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria del numero). Da queste considerazioni segue subito che $f(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} z \iff \mathcal{R}f(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \mathcal{R}z$ e $\mathcal{I}f(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} \mathcal{I}z$ (poichè una funzione a valori in $\mathbf{R}^2$ ha come limite un certo elemento di $\mathbf{R}^2$ se e solo se le componenti della funzione hanno come limite le componenti dell'elemento, in altri termini (f_1, f_2) ha come limite (l_1, l_2) se e solo se f_1 ha come limite l_1 e f_2 ha come limite l_2; questo lo avevamo visto studiando i limiti di funzioni tra spazi metrici). Si prova allora facilmente la seguente

Proposizione 1. *Fissiamo* $t_0 \in \mathbf{R}$. *In questa proposizione sottointendiamo che le funzioni* f *e* g *considerate sono definite in* $\mathbf{R} \setminus \{t_0\}$ *a valori in* $\mathbf{C}$. *Allora*
a) Se $c \in \mathbf{C}$ *e* f *è la funzione identicamente uguale a* c *si ha* $f(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} c$.
b) Se $f(t) = t$, *allora* $f(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} t_0$ *(notare che* f *è in realtà a valori in* $\mathbf{R}$*; ovviamente questo non è un problema).*
c) Se $f(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} z_1$ *e* $g(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} z_2$, *allora* $f(t) + g(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} z_1 + z_2$ *e* $f(t)g(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} z_1 z_2$.
Dimostrazione. a) e b) seguono subito dalla definizione (e si dimostrano come i corrispondenti enunciati per funzioni a valori in $\mathbf{R}$). Anche la c) si dimostra esattamente come il corrispondente enunciato per funzioni reali. Vediamo ad esempio che $f(t)g(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} z_1 z_2$. Occorre premettere l'osservazione che come nel caso di funzioni a valori reali avendo f limite per $t \to t_0$, esiste $\delta_1 > 0$ tale che f è limitata nell'insieme

$$I^*(t_0, \delta_1) = \{t \in \mathbf{R} : 0 < |t - t_0| < \delta_1\},$$

per esempio, si vede subito che prendendo come δ_1 il δ corrispondente a $\varepsilon = 1$ nella definizione di limite si ha $|f(t)| < |z_1| + 1$ se $t \in I^*(t_0, \delta_1)$. Poi scriviamo

$$|f(t)g(t) - z_1 z_2| = |f(t)(g(t) - z_2) + z_2(f(t) - z_1)| \leq$$

$$|f(t)(g(t) - z_2)| + |z_2(f(t) - z_1)| = |f(t)|\,|g(t) - z_2| + |z_2|\,|f(t) - z_1|.$$

Ora, fissato $\varepsilon > 0$ basta prendere $\delta_2 > 0$ tale che se $0 < |t - t_0| < \delta_2$ si ha $|g(t) - z_2| < \frac{\varepsilon}{2(|z_1|+1)}$ e $|f(t) - z_1| < \frac{\varepsilon}{2(|z_2|+1)}$ (e questo è possibile per le ipotesi $f(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} z_1$ e $g(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} z_2$) perché se $0 < |t - t_0| < \delta (= \min\{\delta_1, \delta_2\})$ si abbia $|f(t)g(t) - z_1 z_2| < \varepsilon$, e questo chiude la dimostrazione. ■

Diciamo ora che $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ è continua in $t_0 \in \mathbf{R}$ se $f(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} f(t_0)$ e che f è continua se è continua se è continua in tutti i $t_0 \in \mathbf{R}$. Dalla Prop. 1 segue che le costanti sono continue, che la funzione identica (f definita da $f(t) = t$) è continua, che somma e prodotto di funzioni continue in un certo punto sono continue in quel punto. Perciò i polinomi (a coefficienti complessi), che si ottengono dalle funzioni costanti e dalla funzione identità mediante un numero finito di operazioni di somma e prodotto sono, sono funzioni continue (a rigore si dovrebbe dimostrare l'enunciato per induzione sul grado del polinomio).
Data una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ diciamo che f è derivabile in $t_0 \in \mathbf{R}$ se esiste

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

(o equivalentemente $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$). In tal caso tale limite si chiama derivata di f in t_0 (indicato con $f'(t_0)$). Ovviamente diremo che f è derivabile se è derivabile in tutti i punti di $\mathbf{R}$. Notiamo anche che se spezziamo f nella parte reale e in quella immaginaria, cioè $f = u + iv$ con u e v a valori reali, allora, dati $t_0 \in \mathbf{R}$ e $z = x + iy \in \mathbf{C}$, $\exists\, f'(t_0) = z$ se e solo se $\frac{u(t)+iv(t)-(u(t_0)+iv(t_0))}{t-t_0} \xrightarrow[t\to t_0]{} x+iy$ se e solo se $\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} + i\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} \xrightarrow[t\to t_0]{} (x+iy)$ se e solo se $\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} \xrightarrow[t\to t_0]{} x$ e $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} \xrightarrow[t\to t_0]{} y$, quindi

$$\exists\, f'(t_0) = z \iff \exists\, u'(t_0) = x \text{ e } \exists\, v'(t_0) = y,$$

in altre parole la determinazione della derivata di una funzione si riduce a quella delle due funzioni reali date da parte reale e parte immaginaria di quella funzione (nella precedente catena di equivalenze l'ultima segue dalle considerazioni iniziali in base alle quali il limite di una funzione a valori complessi si "riconduce al limite" della parte reale e della parte immaginaria della funzione). Noto ancora che avremmo potuto dare ovviamente definizioni di limiti continuità e derivata anche per funzioni non necessariamente definite in tutto $\mathbf{R}$ o $\mathbf{R} \setminus \{t_0\}$, ma per semplicità ho preferito considerare solo questo caso perché sufficiente per i nostri scopi. Si dimostra esattamente come nel caso di funzioni reali che una funzione derivabile in un punto è continua in quel punto. Inoltre si dimostra come nel caso reale che valgono le usuali regole di derivazione, cioè ad esempio: la derivata di una costante è 0, la derivata della funzione identità è $= 1$, se f e g sono derivabili in un punto $t_0 \in \mathbf{R}$ allora $f+g$ e fg sono deribabili in t_0 e $(f+g)'(t_0) = f'(t_0)+g'(t_0)$, $(fg)'(t_0) = f(t_0)g'(t_0)+f'(t_0)g(t_0)$. Per esempio accenno a come si dimostra l'ultima formula. Nelle nostre ipotesi si ha

$$\frac{f(t)g(t) - f(t_0)g(t_0)}{t - t_0} = f(t)\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} + g(t_0)\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

e si conclude che l'espressione tende a $f(t_0)g'(t_0) + g(t_0)f'(t_0)$ per $t \to t_0$ poiché $f(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} f(t_0)$ in quanto f, essendo derivabile in t_0, è continua in t_0 come detto prima, e poi si usa Prop. 1. Usando queste considerazioni si vede che i polinomi a coefficienti complessi sono derivabili e di derivano come nel caso reale (si segue esattamente la stessa dimostrazione), cioè la derivata della funzione

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$$

vale

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1}.$$

Si definisce in ovvia analogia col caso reale la derivata di ordine n di una funzione f (denotata con $f^{(n)}$). Segue facilmente dalle considerazioni precedenti (per induzione su n) che la derivata di ordine n è un operatore lineare nel senso che se f e g hanno derivata di ordine n in $t_0 \in \mathbf{R}$ allora, dati $a, b \in \mathbf{C}$ la funzione $af + bg$ ha derivata di ordine n in t_0 data da $af^{(n)}(t_0) + bg^{(n)}(t_0)$. Per proseguire diamo ora la definizione dell'esponenziale complesso, e cioè poniamo

$$e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Cerco ora di spiegare perché si usa proprio questa definizione. Ricordiamo che in Analisi I era definito e^x per x reale. Naturalmente uno è libero di dare la definizione che gli piace di piú dell'esponenziale di un numero complesso che non era in precedenza definito e quindi a priori non sappiamo che cosa è. Però in genere in casi come questo sembra opportuno dare una definizione che estenda in un modo naturale quella dell'esponenziale reale. Ora notiamo che se noi consideriamo la serie di Taylor di e^x otteniamo $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, che avevamo dimostrato valida per tutti gli x reali, e se al posto di x mettiamo iy nella serie precedente e separiamo parte reale e parte immaginaria otteniamo con semplici calcoli $\cos(y)+i\sin(y)$ (almeno formalmente perchè non abbiamo trattato in modo rigoroso le serie complesse quindi non sappiamo bene che cosa significa tale serie). Questa considerazione rende naturale dare la definizione $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$. Sottolineo ancora una volta che questa non è una *dimostrazione* di tale formula perché non possiamo dimostrare qualcosa su un oggetto come e^{iy} che non era stato in precedenza definito, ma spiega perché tale denizione appare ragionevole. Ora, definito e^{iy}, sembra naturale pretendere che anche in campo complesso l'esponenziale della somma sia uguale al prodotto degli esponenziali quindi sembra naturale porre $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$, ottenendo la formula data. Notiamo che, come nel caso reale, l'esponenziale di un numero complesso è sempre $\neq 0$ (questo fatto sarà sottointeso nel seguito). Infatti e^{x+iy} è il prodotto di e^x che, in quanto esponenziale reale è $\neq 0$, e del numero $\cos(y) + i\sin(y)$, che non può essere 0, in quanto il coseno e il seno di un numero reale non si annullano mai simultaneamente. Si verifica anche con semplice calcolo che come nel caso di numeri reali se z_1, z_2 sono numeri complessi allora $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. Proviamo ora che dato un numero complesso $z = x + iy$, la funzione

$$f(t) = e^{zt}$$

si deriva secondo la regola dell'esponeziale reale ossia ha derivata uguale a ze^{zt}. Per provare questa formula, basta scrivere $e^{zt} = e^{xt}(\cos(yt) + i\sin(yt))$, e notare che questa funzione è derivabile in quanto sono derivabili sia la parte reale sia la parte immaginaria e la derivata sia ottiene derivando queste ossia $f'(t) = \frac{d}{dt}(e^{xt}\cos(yt)) + i\frac{d}{dt}(e^{xt}\sin(yt)) = xe^{xt}\cos(yt) - ye^{xt}\sin(yt) + i(xe^{xt}\sin(yt) + ye^{xt}\cos(yt))$, e con semplici calcoli si ha

$$f'(t) = (x + iy)e^{xt}(\cos(yt) + i\sin(yt)) = ze^{zt}.$$

Finora abbiamo fatto delle considerazioni introduttive sulle funzioni definite sui reali a valori complessi. Ora passiamo alle equazioni a coefficienti costanti (in generale complessi) omogenee. Per studiare le soluzioni reali di equazioni a coefficienti reali ci conviene introdurre come concetto ausiliario le equazioni a coefficienti complessi e considerarne le soluzioni non solo reali ma anche complesse. Un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti complessi di ordine n è un'espressione della forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = 0 \tag{1}$$

ove a_k (i coefficienti) sono numeri complessi e $a_n \neq 0$, (se $a_n = 0$ viene ovviamente un'equazione di ordine minore). Le soluzioni di tale equazione sono le funzioni $y : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ soddisfacenti (1).

Osservazione 2. Osserviamo che *se l'equazione è a coefficienti reali*, allora la funzione complessa $y(t) = u(t) + iv(t)$ ove u e v sono la parte reale e quella immaginaria di y, é soluzione dell'equazione se e solo se u e v lo sono. Infatti

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = 0$$

se e solo se

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (u^{(k)}(t) + iv^{(k)}(t)) = 0$$

se e solo se

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u^{(k)}(t) + i\big(\sum_{k=0}^{n} a_k v^{(k)}(t)\big) = 0.$$

Poiché le due espressioni in sommatoria sono numeri reali essendo gli a_k reali per ipotesi, l'ultima uguaglianza equivale a dire che le due sommatorie sono entrambe 0, ossia u e v soddisfano (1). ∎

Definiamo ora C^∞ l'insieme delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ che hanno derivate di tutti gli ordini. Si vede subito che C^∞ è uno spazio vettoriale. Dato un polinomio a coefficienti complessi P con

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \tag{2}$$

ad esso possiamo associare quello che chiamiamo l'operatore differenziale

$$P(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k.$$

Per definizione $P(D)$ è l'applicazione da C^∞ in C^∞ data da

$$(P(D)(y))(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) \tag{3}$$

cosí l'equazione (1) si può riscrivere come

$$P(D)(y) = 0. \tag{4}$$

(si intende in questo contesto che la derivata di ordine 0 di una funzione è la funzione stessa, quindi $D^0(y) = y^{(0)} = y$; l'applicazione D^0 coincide quindi con l'identità e la indichiamo con I). Si vede facilmente che in effetti la funzione $P(D)(y)$ definita in (3) è in C^∞, avendo supposto che y è in C^∞, quindi è corretto dire che $P(D)$ è un'applicazione da C^∞ in C^∞, ed è facile verificare che $P(D)$ è lineare (essendo ogni derivata di ordine n un operatore lineare). In questo modo possiamo scrivere ogni equazione della forma (1) nella forma (4) ove P è il polinomio dato da (2). Tale polinomio, associato all'equazione, è anche chiamato *polinomio caratteristico* dell'equazione.

Osservazione 3. Si vede facilmente che se P_1 e P_2 sono polinomi allora
a) $(P_1 + P_2)(D) = P_1(D) + P_2(D)$.
b) $(P_1P_2)(D) = (P_1(D)) \circ (P_2(D)) = (P_2(D)) \circ (P_1(D))$.

Per verificare le due formule scriviamo i polinomi P_1 e P_2 nella forma $P_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^k$ e $P_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} b_k\lambda^k$. Notiamo anche (e questo renderà piú agile la dimostrazione di a)) che possiamo supporre $n = m$ ponendo eventualmente $= 0$ i coefficienti dei gradi piú alti di uno dei due polinomi (per esempio se P_1 ha grado 4 e P_2 ha grado 2, scriviamo P_2 come $0 \cdot \lambda^4 + 0 \cdot \lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda^1 + b_0$. La formula in a) significa per definizione che per ogni $y \in C^\infty$ si ha $((P_1 + P_2)(D))(y) = P_1(D)(y) + P_2(D)(y)$. Ma questo si verifica facilmente poiché supponendo $n = m$ come detto sopra si ha $(P_1 + P_2)(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\lambda^k$. Perciò

$$((P_1+P_2)(D))(y) = \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)y^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} b_k y^{(k)} = (P_1(D))(y)+(P_2(D))(y)$$

e questo prova a). Per provare b) intanto cerchiamo di capire che cosa significa l'espressione $(P_1(D)) \circ (P_2(D))$. Questa è semplicemente da interpretare come la composizione dei due operatori differenziali $P_1(D)$ e $P_2(D)$. Questi sono applicazioni da C^∞ in C^∞, e quindi la loro composizione è ancora un' applicazione da C^∞ in C^∞. Osserviamo anche che per provare b) basta provare la prima uguaglianza in b) poiché l'uguaglianza tra il primo e il terzo membro di b) segue da quella tra il primo e il secondo scambiando P_1 e P_2 e tenendo conto che ovviamente $P_1P_2 = P_2P_1$. Proviamo dunque tale prima uguaglianza. Prima osserviamo che

$$(P_1P_2)(\lambda) = P_1(\lambda)P_2(\lambda) = \big(\sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^k\big)\big(\sum_{h=0}^{m} b_h\lambda^h\big) =$$

$$\sum_{h=0}^{m}\big(b_h\lambda^h \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^k\big) = \sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_k b_h \lambda^{k+h}.$$

Nell'uguaglianza tra la prima e la seconda riga si è portata dentro la sommatoria in h la sommatoria in k che è costante in quanto non dipende da h (cioè si è usata la formula $c\sum d_h = \sum(cd_h)$ con $c =$ la sommatoria in k), nella successiva uguaglianza si è portato il termine $b_h\lambda^h$ dentro la sommatoria in k. Usando questa formula si ha

$$\big((P_1P_2)(D)\big)(y) = \sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_k b_h y^{(k+h)}.$$

D'altra parte si ha

$$\big(P_1(D)) \circ (P_2(D))\big)(y) = P_1(D)(P_2(D)(y)) = P_1(D)\big(\sum_{h=0}^{m} b_h y^{(h)}\big)$$

$$= \sum_{h=0}^{m} b_h \big(P_1(D)(y^{(h)})\big) = \sum_{h=0}^{m} b_h \big(\sum_{k=0}^{n} a_k y^{k+h}\big) = \sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_k b_h y^{(k+h)}$$

(nell'uguaglianza tra la prima e la seconda riga si è usato il fatto che $P_1(D)$ è un operatore lineare) e quindi b) è provata. ■

Notiamo che b) della precedente osservazione dice in sostanza che se ho un polinomio P prodotto di due polinomi, il corrispondente operatore differenziale $P(D)$ è la composizione (in un ordine arbitrario) dei corrispondenti operatore differenziali. Con un ovvio passaggio induttivo se ho un polinomio P prodotto di un numero finito di polinomi, il corrispondente operatore differenziale $P(D)$ è la composizione (in un ordine arbitrario) dei corrispondenti operatore differenziali. Supponiamo ora nel seguito che P sia un polinomio di grado n scritto nella forma (2) con $a_n = 1$ (per i nostri scopi supporre $a_n = 1$ non è una restrizione reale poiché le equazioni che consideriamo possono ricondursi a equazioni con $a_n = 1$ dividendo per a_n), e supponiamo d'ora in poi che i *coefficienti* di P siano *reali*. Per il teorema fondamentale dell'algebra si ha

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_m)^{\mu_m}$$

ove $\lambda_k, k = 1, ..., m$ sono le radici (complesse) di P distinte tra di loro e μ_k è la molteplicità di λ_k. Ricordo anche che essendo P a coefficienti reali, se λ è una radice di P, anche il suo coniugato $\overline{\lambda}$ è radice di P e con la stessa molteplicità di λ. Questo fatto sarà sottointeso nel seguito. Da b) dell'Osservazione 3 si deduce che

$$P(D) = (D - \lambda_1 I)^{\mu_1} \circ ... \circ (D - \lambda_m I)^{\mu_m} \tag{5}$$

ove $(D - \lambda I)^{\mu}$ con μ intero positivo significa $(D - \lambda I)$ composto con se stesso μ volte. In questa formula si vede l'utilità di considerare le equazioni in campo complesso poiché in campo reale non vale il teorema fondamentale dell'algebra, quindi non si riesce a ottenere una formula tipo la (5). Comunque, come accennato in precedenza, da (b) di Osserv.3 si vede che nella formula (5) in realtà possiamo cambiare a piacimento l'ordine della composizione e mettere come ultimo termine un qualunque $(D - \lambda_k I)^{\mu_k}$, e non necessariamente $(D - \lambda_m I)^{\mu_m}$. Perciò se y soddisfa

$$(D - \lambda I)^{\mu}(y) = 0 \tag{6}$$

per $\lambda = \lambda_k, \mu = \mu_k$, allora y soddisfa l'equazione (4), in quanto se ad esempio $k = m$, da $(D - \lambda_m I)^{\mu_m}(y) = 0$, usando (5) segue $P(D)(y) = 0$, dato che tutti gli operatori $(D - \lambda_1 I)^{\mu_1}$, $(D - \lambda_2 I)^{\mu_2}$, ecc. essendo lineari mandano la funzione 0 in se stessa. Noi ora cerchiamo delle soluzioni di (6) per ogni $k = 1, ..., m$ e poi proveremo che tutte queste funzioni che per quanto detto sono soluzioni di (4), sono in realtà una base dello spazio delle soluzioni di (4), e quindi le soluzioni di (4) saranno esattamente le combinazioni lineari delle funzioni trovate. Piú precisamente per ogni k troveremo μ_k soluzioni complesse di

(6) corrisponsenti a $\lambda = \lambda_k$, $\mu = \mu_k$. Mettendo insieme tutte queste soluzioni al variare di k, otterremo n soluzioni complesse di (4). Prendendo parte reale e parte immaginaria otterremo n soluzioni reali di (4). Proveremo che queste sono linearmente indipendenti e quindi formano una base dello spazio delle soluzioni di (4) che, come noto, ha dimensione n.

Lemma 4. *Le funzioni $t^h e^{\lambda t}$ per $h = 0, 1, ..., \mu - 1$, sono soluzioni (complesse) di (6).*

Dimostrazione. Noi potremmo verificare direttamente che le funzioni date sono soluzioni di (6), ma preferisco far vedere come si arriva a trovare queste funzioni. In altri termini *cerco* le soluzioni di (6) e ottengo le funzioni dette e non mi limito a fare una verifica che non spiega come sono arrivato a pensare proprio quelle funzioni. Se $\mu = 1$ (6) diventa $(D - \lambda I)(y) = 0$, ossia

$$y' = \lambda y \tag{7}$$

e una soluzione di questa è $y(t) = e^{\lambda t}$. Infatti avevamo provato poco dopo aver introdotto l'esponenziale complesso che la funzione data soddisfa (7) e abbiamo la tesi se $\mu = 1$. Supponiamo ora $\mu = 2$. Quindi l'equazione (6) diventa

$$(D - \lambda I)^2(y)\big(= (D - \lambda I)((D - \lambda I)(y))\big) = 0. \tag{8}$$

Ovviamente ogni soluzione di (7), (in particolare $y(t) = e^{\lambda t}$), è anche soluzione di (8), in quanto se y risolve (7) allora $(D - \lambda I)((D - \lambda I)y) = (D - \lambda I)(0) = 0$. D'altra parte, per il caso precedente, ogni y che risolve

$$(D - \lambda I)(y)(t)(= y'(t) - \lambda y(t)) = e^{\lambda t} \tag{9}$$

risolve (8). Per risolvere (9) usiamo il metodo della varizione delle costanti. Si potrebbe porre l'obiezione che tale metodo l'avevamo visto per equazioni reali e questa è un'equazione complessa. Comunque il metodo si dimostra valido nel campo complesso esattamente nello stesso modo poiché tutti i procedimenti usati nel caso reale (essenzialmente la regola di derivazione del prodotto di funzioni) sappiamo che valgono ancora in campo complesso. Per usare il metodo della variazione delle costanti notiamo che l'equazione omogenea associata a (9) è (7). Una soluzione di (7) è data da $e^{\lambda t}$. Quindi cerco una soluzione di (9) della forma $c(t)e^{\lambda t}$ con $c(t)$ da determinarsi, mediante l'equazione $c'(t)e^{\lambda t} = e^{\lambda t}$, che equivale a $c'(t) = 1$, quindi la funzione $te^{\lambda t}$ è soluzione di (9). In conclusione la funzione $t^h e^{\lambda t}$ è soluzione di (8) per $h = 0, 1$, che è quello che si doveva provare. Noi abbiamo provato la tesi nel caso $\mu = 2$ usando il fatto che la tesi valeva se $\mu = 1$. Usando questo stesso metodo possiamo trovare le soluzioni cercate per μ via via crescenti, verificando che, note le soluzioni di (6) per un certo μ, si trovano quelle per $\mu + 1$, aggiungendo a quelle trovate per μ la funzione $t^\mu e^{\lambda t}$. Formalizziamo questo procedimento procedendo per induzione. Supponiamo dunque che la tesi valga per μ e consideriamo l'equazione

$$(D - \lambda I)^{\mu+1}(y) = 0. \tag{10}$$

Proviamo che le funzioni $t^h e^{\lambda t}$ per $h = 0, 1, ..., \mu$ sono soluzioni di (10). Questo completerà il passo induttivo. Notiamo che se $h = 0, 1, ..., \mu - 1$ allora la funzione data è soluzione di (6) per l'ipotesi induttiva e quindi anche di (10) in quanto

$$(D-\lambda I)^{\mu+1}(y) = (D-\lambda I)\big((D-\lambda I)^{\mu}(y)\big) = (D-\lambda I)(0) = 0.$$

Rimane da provare che la funzione $t^{\mu}e^{\lambda t}$ è soluzione di (10). Riscriviamo (10) come

$$(D-\lambda I)^{\mu}((D-\lambda I)(y)) = (D-\lambda I)^{\mu}(y' - \lambda y) = 0.$$

Per l'ipotesi induttiva quindi (10) è soddisfatta se (non solo se)

$$y'(t) - \lambda y(t) = t^{\mu-1}e^{\lambda t}. \tag{11}$$

Cerco col metodo della variazione delle costanti una soluzione di (11) della forma $c(t)e^{\lambda t}$, e procedendo come nel caso precedente ottengo $c'(t) = t^{\mu-1}$ quindi ho una soluzione con $c(t) = \frac{1}{\mu}t^{\mu}$. Tenuto conto che per la linearità i multipli di soluzioni sono soluzioni si avrà che $t^{\mu}e^{\lambda t}$ è soluzione di (10), e questo conclude la dimostrazione. In realtà usando lo stesso procedimento in modo solo leggermente piú raffinato si vede che tutte le soluzioni di (6) sono le combinazioni lineari delle funzioni trovate, ma tralasciamo questo fatto perché non necessario nel seguito. ■

Per concludere la dimostrazione ci servono ancora due lemmi.

Lemma 5. *Sia f la funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ definita da $f(t) = e^{\lambda t}P(t)$ ove $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, è P e un polinomio. Allora si ha*

$$f^{(n)}(t) = P_n(t)e^{\lambda t}$$

ove P_n è un opportuno polinomio avente lo stesso grado di P. In particolare se P non è il polinomio 0 anche P_n non è il polinomio 0.

Dimostrazione. L'ultimo enunciato segue dai precedenti in quanto 0 è l'unico polinomio avente grado -1. Per provare la tesi basterà (per un ovvio procedimento induttivo) verificarla per $n = 1$. Si ha

$$f'(t) = e^{\lambda t}(\lambda P(t) + P'(t)).$$

Dobbiamo provare che il polinomio $\lambda P + P'$ ha lo stesso grado di P. Questo è ovvio se il grado di P è -1. In caso contrario il grado di P' è sempre $<$ di quello di P, perciò essendo per ipotesi $\lambda \neq 0$ e quindi il grado di λP uguale a quello di P, si deduce la tesi (il grado della somma di due polinomi di gradi diversi è uguale al massimo dei gradi dei due polinomi). ■

Lemma 6. *Siano dati m numeri complessi $\mu_1, ..., \mu_m$ diversi tra di loro, e m polinomi a coefficienti complessi $P_1, ..., P_m$. Allora l'uguaglianza*

$$\sum_{k=1}^{m} P_k(t)e^{\mu_k t} = 0 \tag{12}$$

vale per tutti i t reali solo nel caso che tutti i polinomi P_k siano nulli.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su m. Se $m = 1$ (12) si riduce a $P_1(t)e^{\mu_1 t} = 0$, e poiché l'esponenziale è sempre $\neq 0$, segue $P_1 = 0$. Supponiamo ora che la tesi sia vera per m e proviamola per $m+1$. Supponiamo quindi di avere

$$\sum_{k=1}^{m+1} P_k(t)e^{\mu_k t} = 0.$$

Riscriviamo questa uguaglianza come

$$-P_{m+1}(t) = \sum_{k=1}^{m} P_k(t)e^{(\mu_k-\mu_{m+1})t}, \tag{13}$$

e deriviamo un numero sufficiente di volte perché a sinistra si ottenga 0 (precisamente bisogna derivare una volta piú del grado di P_{m+1}). Ora dall'ipotesi che i μ_k sono tutti diversi tra loro si ha che i numeri $\mu_k - \mu_{m+1}$ sono tutti diversi tra loro e diversi da 0. Perciò per il Lemma 5 si otterrà

$$0 = \sum_{k=1}^{m} \tilde{P}_k(t)e^{(\mu_k-\mu_{m+1})t}$$

ove $\tilde{P}_k = 0$ se e solo se $P_k = 0$. D'altra parte per l'ipotesi induttiva si deve avere $\tilde{P}_k = 0$, e quindi $P_k = 0$ per ogni $k = 1, ..., m$. Rimane da provare che $P_{m+1} = 0$ ma questo segue subito da (13). ■

Scriviamo ora le radici dell'equazione (2), che è l'equazione caratteristica della nostra equazione differenziale (4), separando quelle reali da quelle non reali e accoppiando quelle complesse coniugate.

$$\lambda_k \in \mathbf{R}, k = 1, ..., l, \quad \lambda_k = \alpha_k + i\beta_k, \lambda_{k+s} = \alpha_k - i\beta_k, k = l+1, ..., l+s$$

ove ovviamente α_k e β_k sono numeri reali e $\beta_k \neq 0$, e inoltre $l + 2s = m$. Ricordo che μ_k è la molteplicità di λ_k e chiaramente $\mu_k = \mu_{k+s}$ per $k = l+1, ..., l+s$, poiché le radici λ_k e λ_{k+s} sono coniugate. Grazie alle considerazioni svolte finora le funzioni

$$t^h e^{\lambda_k t}, \ h = 0, ..., \mu_k - 1, \ k = 1, ..., m \tag{14}$$

sono soluzioni complesse di (4), e sono chiaramente n in quanto il loro numero è dato dalla somma di tutte le molteplicità delle radici, che è uguale al grado del polinomio caratteristico, cioè appunto n. Inoltre associamo a queste soluzioni delle soluzioni reali ottenute lasciando le stesse funzioni in corrispondenza dei λ_k reali, ossia per $k = 1, ..., l$, e sostituendo alle soluzioni

$$t^h e^{(\alpha_k+i\beta_k)t}, t^h e^{(\alpha_k-i\beta_k)t} \quad h = 0, ..., \mu_k - 1, \ k = l+1, ..., l+s$$

le rispettive parti reali e immaginarie, che vengono precisamente

$$t^h e^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t) \ \text{ e } \ t^h e^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t).$$

Si vede facilmente che in questo modo abbiamo n funzioni reali poiché abbiamo sostituito alle due funzioni complesse $t^h e^{(\alpha_k+i\beta_k)t}$ e $t^h e^{(\alpha_k-i\beta_k)t}$ le due funzioni reali $t^h e^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t)$

e $t^h e^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t)$. Sia E l'insieme delle funzioni cosí ottenute. Arriviamo dunque a provare il teorema conclusivo.

Teorema 7. *Le soluzioni reali di (4) sono tutte e sole le combinazioni lineari delle funzioni in E.*

Dimostrazione. Come già accennato in precedenza, poiché l'equazione è di ordine n e quindi l'insieme delle soluzioni di (4) è uno spazio vettoriale di dimensione n, e E è un insieme di n soluzioni, basta provare che queste sono linearmente indipendenti. Per ottenere questo, prima proviamo che le funzioni date da (14) sono linearmente indipendenti su $\mathbf{C}$ cioè l'unica loro combinazione lineare a coefficienti complessi è quella con tutti i coefficienti nulli. Supponiamo dunque che si abbia

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{h=0}^{\mu_k-1} c_{h,k}t^h e^{\lambda_k t} = 0$$

con $c_{h,k}\in\mathbf{C}$ e proviamo che si deve avere che $c_{h,k}=0$ per ogni h,k. Ora riscriviamo l'espressione precedente come

$$\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{h=0}^{\mu_k-1} c_{h,k}t^h\Big) e^{\lambda_k t} = 0.$$

Quindi per il lemma 6 i polinomi $P_k(t)=\sum_{h=0}^{\mu_k-1} c_{h,k}t^h$ devono essere tutti nulli e quindi tutti i $c_{h,k}$ devono essere tutti nulli, come volevasi. Ora proviamo che le funzioni in E sono linearmente indipendenti. Per ottenere questo l'idea è rimpiazzare una combinazione lineare di funzioni di E con una di funzioni di (14) in particolare notando che dati numeri u e v ogni loro combinazione lineare si può esprimere come una combinazione lineare di $u+iv$ e $u-iv$ e fatti i calcoli, $au+bv=\frac{a-ib}{2}(u+iv)+\frac{a+ib}{2}(u-iv)$, nel nostro caso sarà $u=t^h e^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t)$, $v=t^h e^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t)$. Quindi se

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{h=1}^{\mu_k-1} c_{h,k}t^h e^{\lambda_k t} + \sum_{k=l+1}^{l+s}\sum_{h=0}^{\mu_k-1} a_{h,k}t^h e^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t) + \sum_{k=l+1}^{l+s}\sum_{h=0}^{\mu_k-1} b_{h,k}t^h e^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t) = 0 \tag{15}$$

con i coefficienti $c_{h,k}, a_{h,k}, b_{h,k}$ reali, riscriviamo l'espressione precedente come

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{h=1}^{\mu_k-1} c_{h,k}t^h e^{\lambda_k t} + \sum_{k=l+1}^{l+s}\sum_{h=0}^{\mu_k-1} \frac{a_{h,k}-ib_{h,k}}{2}t^h e^{\lambda_k t} + \sum_{k=l+1}^{l+s}\sum_{h=0}^{\mu_k-1} \frac{a_{h,k}+ib_{h,k}}{2}t^h e^{\lambda_{k+s} t} = 0$$

tenuto conto che

$$t^h e^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t) + i t^h e^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t) = t^h e^{(\alpha_k+i\beta_k)t} = t^h e^{\lambda_k t}$$

e

$$t^h e^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t) - it^h e^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t) = t^h e^{(\alpha_k - i\beta_k)t} = t^h e^{\lambda_{k+s} t}$$

se $k = l+1, ..., l+s$. Dal fatto che abbiamo appena visto che le funzioni in (14) sono linearmente indipendenti su $\mathbf{C}$ segue che per $h = 0, ..., \mu_k - 1$, $c_{h,k} = 0$ per $k = 1, ..., l$, e $\frac{a_{h,k}+ib_{h,k}}{2} = \frac{a_{h,k}-ib_{h,k}}{2} = 0$ per $k = l+1, ..., l+s$, ma questo implica facilmente che tutti gli $a_{h,k}$ e tutti i $b_{h,k}$ sono pure nulli e abbiamo provato che tutti i coefficienti della nostra combinazione lineare (formula (15)) sono nulli. ▪

3. Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti non omogenee.

In questo paragrafo descriviamo un metodo, alternativo a quello della variazione delle costanti, per risolvere le equazioni differenziali di ordine n lineari a coefficienti costanti non omogenee. Il metodo della variazione delle costanti ha lo svantaggio che in molti casi è piuttosto laborioso, in particolare se n è grande. Il metodo che descriverò tra poco, detto *metodo degli annichilatori*, in molto casi è molto piú rapido. Ha però lo svantaggio che funziona solo con certi termini noti particolari (ossia le funzioni b in (8)). Inoltre si applica solo alle equazioni a coefficienti costanti, mentre il metodo della variazione delle costanti funziona anche per le equazioni lineari a coefficienti variabili, a patto però che conosciamo le soluzioni dell'omogenea associata, cosa che capita raramente se i coefficienti non sono costanti e l'ordine n è maggiore di 1.

Sia data dunque un'equazione lineare a coefficienti costanti non omogenea. Questa può essere scritta, usando la terminologia del paragrafo 2, come

$$P(D)(y) = b. \tag{E}$$

ove P è un polinomio di grado $n > 0$ uguale all'ordine dell'equazione, e naturalmente $P(D)$ è l'operatore differenziale associato. Scriviamo anche l'equazione omogenea associata, ossia

$$P(D)(y) = 0. \tag{EO}$$

Ora facciamo l'assunzione fondamentale per potere risolvere (E), ossia

$$\exists\ Q \text{ polinomio non nullo } : Q(D)(b) = 0. \tag{A}$$

Supponiamo che m sia il grado del polinomio Q. Ossia con (A) richiediamo che b sia di tipo particolare. Vedremo in seguito quali b soddisfano (A). In tale caso, tenendo anche conto di Osserv. 3 b) in paragrafo 2, ogni y che risolve (E) risolve anche $(PQ)(D)(y) = Q(D)\big(P(D)(y)\big) = Q(D)(b) = 0$, ossia ogni soluzione di (E) è anche soluzione di (E'), ove (E') è data da

$$(PQ)(D)(y) = 0. \tag{E'}$$

Ovviamente il grado di PQ, e quindi anche l'ordine dell'equazione (E'), è $n+m$. Quindi le soluzioni di (E) sono anche soluzioni di (E'), ma *non vale il viceversa*, dato che ad esempio anche tutte le soluzioni di (EO) sono soluzioni di (E'). Ad ogni modo possiamo cercare le soluzioni di (E) tra le possibili soluzioni di (E'), e poi imporre che la generica soluzione di (E') sia soluzione di (E). Il vantaggio di studiare (E') invece che (E) è che (E') è omogenea e quindi sappiamo trovarne le soluzioni. Queste saranno le combinazioni lineari di certe funzioni, trovate come visto, in base alle radici del polinomio PQ; si può anche vedere che dato che le soluzioni di (EO) sono anche soluzioni di (E') potremo scrivere la nostra soluzione di (E') come somma di una soluzione di (EO) e di un'altra funzione. Vediamo piú precisamente. Si vede che possiamo scrivere una $\overline{y}$ soluzione di (E') come

$$\overline{y} = \sum_{i=1}^{n+m} c_i y_i$$

ove ogni y_i è soluzione di (E'), e y_i, $i = m+1, ..., m+n$ sono anche soluzioni di (EO). Allora, dato che imponiamo che $\overline{y}$ sia soluzione di (E), si ha

$$b = P(D)(\overline{y}) = P(D)\Big(\sum_{i=1}^{n+m} c_i y_i\Big) = P(D)\Big(\sum_{i=1}^{m} c_i y_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} c_i y_i\Big)$$

$$= P(D)\Big(\sum_{i=1}^{m} c_i y_i\Big) + P(D)\Big(\sum_{i=m+1}^{m+n} c_i y_i\Big) = P(D)\Big(\sum_{i=1}^{m} c_i y_i\Big)$$

dato che la funzione $\sum_{i=m+1}^{m+n} c_i y_i$, essendo combinazione lineare delle y_i, $i = m+1, ..., m+n$, che sono soluzioni di (EO), è a sua volta soluzione di (EO). In conclusione la funzione $\sum_{i=1}^{m} c_i y_i$ è pure soluzione di (E), e poi determiniamo i coefficienti c_i in modo che risolva (E). Il fatto di potere "buttare via" la parte soluzione di (EO), ossia $\sum_{i=m+1}^{m+n} c_i y_i$, ci aiuta un pochino in quanto abbiamo meno coefficienti c_i incogniti da determinare. Per capire le precedenti considerazioni vediamo ora un caso concreto. Sia data l'equazione

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = e^{at}, \tag{E_a}$$

al variare di $a \in \mathbf{R}$. Applichiamo ad ambo i membri di (E_a) l'operatore $D - aI$ che annulla il secondo membro proprio perché la funzione e^{at} risolve l'equazione $(D - aI)(y) = y' - ay = 0$. Faccio notare che qui, come farò anche piú volte in seguito, ho usato un piccolo abuso di notazione ossia dico la funzione e^{at} per indicare la funzione $t \mapsto e^{at}$. Quindi ottengo

$$(D - aI)\big((D^2 - 5D + 6I)(y)\big) = 0. \tag{E'_a}$$

Notiamo che (E'_a) si può anche riscrivere come

$$(PQ_a)(D)(y) = 0$$

ove $P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$, $Q_a(\lambda) = \lambda - a$. Ora cerchiamo le soluzioni di (E'_a). Si hanno due casi.

Caso 1. $2 \neq a \neq 3$. In questo caso le radici di PQ_a sono tutte diverse per cui la soluzione di (E'_a) sarà una funzione del tipo

$$\overline{y}(t) = c_1 e^{at} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}.$$

Allora $\overline{y}$ risolve (E_a) se e solo se

$$e^{at} = (D^2 - 5D + 6I)(\overline{y}) = (D^2 - 5D + 6I)(c_1 e^{at} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t})$$
$$= (D^2 - 5D + 6I)(c_1 e^{at}) + (D^2 - 5D + 6I)(c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}) = (D^2 - 5D + 6I)(c_1 e^{at})$$

poiché e^{2t} e e^{3t} sono soluzioni dell'omogenea associata a (E_a), ossia $P(D)(y) = 0$ e quindi, $c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$, che è una loro combinazione lineare, è pure soluzione di $P(D)(y) = 0$. In conclusione anche ogni soluzione di (E_a) sarà della forma $c_1 e^{at} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$, e quindi ci sarà anche una soluzione di (E_a) della forma $c_1 e^{at}$. Quindi cerchiamo $c_1 \in \mathbf{R}$ tale la funzione $\widetilde{y}$ definita da $\widetilde{y}(t) = c_1 e^{at}$ sia soluzione di (E_a). Si ha $\widetilde{y}'(t) = ac_1 e^{at}$, $\widetilde{y}''(t) = a^2 c_1 e^{at}$, e quindi $\widetilde{y}$ risolve (E_a) se e solo se $a^2 c_1 e^{at} - 5ac_1 e^{at} + 6c_1 e^{at} = e^{at}$, ossia se e solo se $c_1(a^2 - 5a + 6) = 1$, ossia $c_1 = \dfrac{1}{a^2 - 5a + 6}$. Notiamo che dato che $a \neq 2$, $a \neq 3$, si ha $a^2 - 5a + 6 \neq 0$. Ovviamente la soluzione generale di (E_a) è data dalla somma di $\widetilde{y}$ e della soluzione generale dell'omogenea associata ad (E_a), quindi è data da

$$\frac{1}{a^2 - 5a + 6} e^{at} + d_1 e^{2t} + d_2 e^{3t}, \quad d_1, d_2 \in \mathbf{R}.$$

Caso 2. $a = 2$ oppure $a = 3$. Mostro solo il caso $a = 2$ dato che il caso $a = 3$ è del tutto analogo. In questo caso le radici di PQ_a sono 2 con molteplicità 2, e 3 con molteplicità 1 per cui la soluzione di (E'_a) sarà del tipo

$$\overline{y}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_3 e^{3t}.$$

Similmente a prima posso "buttare via" il pezzo $c_1 e^{2t} + c_3 e^{3t}$, soluzione dell'omogenea associata. Piú precisamente, $\overline{y}$ risolve (E_a) se e solo se

$$e^{at} = (D^2 - 5D + 6I)(\overline{y}) = (D^2 - 5D + 6I)(c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_3 e^{3t})$$
$$= (D^2 - 5D + 6I)(c_2 t e^{2t}) + (D^2 - 5D + 6I)(c_1 e^{2t} + c_3 e^{3t}) = (D^2 - 5D + 6I)(c_2 t e^{2t}).$$

Quindi cerchiamo $c_2 \in \mathbf{R}$ tale la funzione $\widetilde{y}$ definita da $\widetilde{y}(t) = c_2 t e^{2t}$ sia soluzione di (E_a) (ricordo $a = 2$). Si ha $\widetilde{y}'(t) = c_2(2t + 1)e^{2t}$, $\widetilde{y}''(t) = c_2(4t + 4)e^{2t}$, e quindi $\widetilde{y}$ risolve (E_a) se e solo se $c_2(4t + 4)e^{2t} - 5c_2(2t + 1)e^{2t} + 6c_2 t e^{2t} = e^{2t}$, ossia, separando i coefficienti di e^{2t} e quelli di te^{2t}, se e solo se si ha $(4c_2 - 10c_2 + 6c_2)te^{2t} + (4c_2 - 5c_2)e^{2t} = e^{2t}$. Questo equivale al sistema

$$\begin{cases} 4c_2 - 10c_2 + 6c_2 = 0 \\ 4c_2 - 5c_2 = 1 \end{cases}$$

che ha soluzione $c_2 = -1$. In conclusione si ha $\widetilde{y}(t) = -te^{2t}$ e la soluzione generale di (E_a) è data da

$$-te^{2t}+d_1e^{2t}+d_2e^{3t}, \quad d_1,d_2\in\mathbf{R}.$$

L'esempio precedente chiarisce perché se a è radice del polinomio caratteristico dell'omogenea associata si cerca una soluzione del tipo cte^{at} mentre altrimenti si cerca del tipo ce^{at}.

Ora cerchiamo di capire quali funzioni b soddisfano (A). Per fare questo basta che ricordiamo quali funzioni (di base) sono soluzioni di una qualche equazione del tipo

$$Q(D)(y)=0.$$

Ricordo che queste sono sempre del tipo $e^{\gamma t}$ se γ è radice di Q, o piú generalmente $t^m e^{\gamma t}$ se γ è radice di Q con molteplicità almeno $m+1$, oppure del tipo $t^m e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ o $t^m e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, $\beta\neq 0$, se $\alpha+i\beta$ è radice di Q con molteplicità almeno $m+1$. Ovviamente, ognuna delle precedenti funzioni b può essere moltiplicata per una costante rimanendo soluzione della stessa equazione differenziale. Quindi se

$$b(t)=ct^m e^{\gamma t},\ m=0,1,2,3,...,c\in\mathbf{R}$$

possiamo scegliere

$$Q(\lambda)=(\lambda-\gamma)^{m+1}.$$

Se invece

$$\beta\neq 0,\ b(t)=ct^m e^{\alpha t}\cos(\beta t)\ \text{ oppure }\ b(t)=ct^m e^{\alpha t}\sin(\beta t),\ m=0,1,2,3,...,c\in\mathbf{R}.$$

allora possiamo scegliere

$$Q(\lambda)=\big(\lambda^2-2\alpha\lambda+(\alpha^2+\beta^2)\big)^{m+1}.$$

In quest'ultimo caso, infatti, dobbiamo cercare un polinomio Q che abbia $\alpha+i\beta$ come radice di molteplicità $m+1$. la prima proposta potrebbe sembrare $Q(\lambda)=\big(\lambda-(\alpha+i\beta)\big)^{m+1}$ ma tale polinomio ha l'inconveniente che non è a coefficienti reali, e allora moltiplichiamo ogni termine per quello con la corrispondente radice complessa coniugata, ottenendo

$$\big(\lambda-(\alpha+i\beta)\big)^{m+1}\big(\lambda-(\alpha-i\beta)\big)^{m+1}=\Big(\big(\lambda-(\alpha+i\beta)\big)\big(\lambda-(\alpha-i\beta)\big)\Big)^{m+1}$$
$$=\big(\lambda^2-2\alpha\lambda+(\alpha^2+\beta^2)\big)^{m+1}.$$

NOTA BENE. Nelle precedenti considerazioni abbiamo dovuto supporre $\beta\neq 0$, ma γ e α possono benissimo valere 0. Questi sono casi particolari importanti.

Un' ulteriore possibilità è quando b è una somma $\sum_{k=1}^{l} b_k$ di funzioni b_k del tipo considerato sopra. Allora un modo è risolvere separatamente con ogni b_k e poi fare la somma. Faccio un esempio per chiarire. Sia data l'equazione

$$P(D)(y) = e^{3t} - 5t^2 \cos(t). \qquad (\overline{E})$$

dove P è un qualunque polinomio di grado positivo. Allora cerchiamo y_1 e y_2 tali che

$$P(D)(y_1) = e^{3t},$$
$$P(D)(y_2) = -5t^2 \cos(t).$$

Allora la funzione $\overline{y} := y_1 + y_2$ risolve $(\overline{E})$. Infatti

$$P(D)(\overline{y}) = P(D)(y_1 + y_2) = P(D)(y_1) + P(D)(y_2) = e^{3t} - 5t^2 \cos(t).$$