Proprietà delle potenze.

Ricordo le principali proprietà delle potenze. Intanto la definizione di potenza:

Se n intero positivo, per ogni numero reale a, a^n vuol dire a moltiplicato per se stesso n volte.

Per ogni numero reale a, $a^0 = 1$. Notiamo che 0^0 da alcuni è considerato non definito, noi preferiamo considerarlo uguale a 1.

Se n intero negativo, per ogni numero reale $a \neq 0$, si pone $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$. Notiamo che è necessario pretendere $a \neq 0$, poiché se fosse $a = 0$ nella definizione avremmo un denominatore uguale a 0.

Se $r \in \mathbf{Q}$, si ha $r = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbf{Z}$, $q > 0$. In tal caso *per ogni* $a > 0$, si pone $a^r = \sqrt[q]{a^p}$, e se $r > 0$, si pone pure $0^r = 0$. Notiamo che preferiamo usare questa definizione SOLO per a positivo (o anche nullo se $r > 0$) anche quando, essendo q intero dispari, avrebbe senso la precedente scrittura anche per a negativo. Il motivo è che la definizione dipenderebbe da come scriviamo r. Ad esempio, se $r = \frac{1}{3}$ si ha anche $r = \frac{2}{6}$, e se vogliamo definire $(-1)^r$, in base alla definizione precedente avremmo. da un lato $(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-1)^1} = -1$, dall'altro $(-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = 1$.

Sia infine $r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.
Se $a \geq 1$, si pone $a^r = \sup\left\{a^q : q \in \mathbf{Q}, q < r\right\}$,
Se $0 < a < 1$, si pone $a^r = \inf\left\{a^q : q \in \mathbf{Q}, q < r\right\}$,
Se $r > 0$ si pone sempre $0^r = 0$.

Riassumendo a^r è definita:
per ogni numero reale a se $r \in \mathbf{N}$,
per $a \neq 0$ se $r \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$,
per $a > 0$, se $r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, $a < 0$,
per $a \geq 0$, se $r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, $a > 0$.

Ad esempio $(-1)^{\frac{3}{4}}$ o $(-3)^{\pi}$ non sono definiti. Ricordo anche una convenzione importante

$$a^{b^c} = a^{(b^c)},$$

ad esempio 2^{3^2} significa 2^9, e **NON!!!!!!** $(2^3)^2 = 2^6$. Ora richiamiamo le principali proprietà delle potenze

1) $a^{r+r'} = a^r \cdot a^{r'}$,

2) $a^{r-r'} = \frac{a^r}{a^{r'}}$,

3) $\left(a^r\right)^{r'} = a^{rr'}$,

4) $(ab)^r = a^r b^r$,

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$,

6) $0^r = 0$ se $r > 0$, $0^0 = 1$.

7) $1^r = 1$,

8) $a^r > 0$ se $a > 0$,

9) Se $a > 0$, $b > 0$, e $r > 0$, si ha $\left(a^r < b^r\right) \iff a < b$,

10) Se $a > 0$, $b > 0$, e $r < 0$, si ha $\left(a^r < b^r\right) \iff a > b$,

11) Se n intero positivo *dispari*, si ha $\left(a^n < b^n\right) \iff a < b$ (a prescindere dal fatto che a e b siano positivi),

12) Se $a > 1$, si ha $\left(a^r < a^{r'}\right) \iff r < r'$,

13) Se $0 < a < 1$, si ha $\left(a^r < a^{r'}\right) \iff r > r'$-

Non ho scritto sotto quali ipotesi valgono le proprietà precedenti (salvo qualche caso). La regola generale è che se gli esponenti considerati sono naturali valgono per tutte le basi, se gli esponenti sono interi negativi valgono per ogni base diversa da 0, se gli esponenti sono non interi (o almeno uno degli esponenti non è intero), valgono per basi positive (o eventualmente anche 0). I denominatori, quando ci sono (nella 2)) devono essere diversi da 0.

Un esempio interessante è la 3). In base a quanto abbiamo appena detto se r e r' sono reali ma non entrambi interi dobbiamo considerare $a > 0$. Notiamo che se $a < 0$, a volte le due espressioni di cui stabiliamo l'uguaglianza esistono ma sono diverse. Ad esempio $\left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$, mentre $(-1)^{2\cdot\frac{1}{2}} = (-1)^1 = -1$. Notiamo inoltre, sempre a proposito di questa formula, che $\left((-1)^{\frac{1}{2}}\right)^2$ non è definita.

Richiami su alcune proprietà delle disuguaglianze e disequazioni.

Ricordo che se $a < b$ allora $a + c < b + c$ (e viceversa se $a + c < b + c$ allora $a < b$), ossia possiamo in un certo senso sommare un numero a una disuguaglianza.

Invece lo stesso non vale in genere per il prodotto, ossia $a < b$ implica $ac < bc$ **SOLO** se $c < 0$. Ossia, le regole su come si comportano le disuguaglianze rispetto al prodotto sono piú delicate che quelle rispetto alla somma. Ricordo alcune delle piú importanti.

14) Se $c > 0$, allora $a < b \iff ac < bc$,

15) Se $c < 0$, allora $a < b \iff ac > bc$,

16) Se $c > 0$, allora $a < b \iff \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$,

17) Se $c < 0$, allora $a < b \iff \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$,

18) Se sappiamo solo $c \geq 0$ allora da $a \leq b$ segue $ac \leq bc$ ma ovviamente non vale iil viceversa in quanto se $c = 0$ la formula $ac \leq bc$ è sempre vera a prescindere da b e c,

19) Se a, b, c, d sono tutti numeri reali > 0, allora da $a < b$, $c < d$ possiamo dedurre $ac < bd$,

20) Se a, b, c, d sono tutti numeri reali ≥ 0, allora da $a \leq b$, $c \leq d$ possiamo dedurre $ac \leq bd$.

Dalle precedenti regole si capisce che bisogna stare attenti nelle disequazioni: Ad esempio

$$\frac{x}{x+3} < x + 1$$

non equivale a

$$x < (x + 1)(x + 3)$$

dato che questo vorrebbe dire moltiplicare i membri per $x + 3$, cosa che in base a 14) e 15) in genere non è lecita, ma si studia cosí:

$$\begin{gathered}\frac{x}{x+3} < x + 1 \iff \\ \frac{x}{x+3} - (x + 1) < 0 \\ \frac{x - (x + 1)(x + 3)}{x + 1} < 0.\end{gathered}$$

Altra cosa (e ancora piú importante) da ricordare sulle disequazioni è la seguente: Quando si ha un prodotto di termini che si richiede che sia (per esempio) < 0, si studiano tutti i termini mettendo il segno $+$ dove il termine è positivo, e il segno $-$ dove il termine è negativo, e poi si fa il prodotto dei segni. Molti studenti che vengono dalle superiori usano un procedimento che in pratica si riduce al contrario a mettere il segno $+$ dove il termine è negativo (in quanto la disuguaglianza sarebbe "verificata") e il segno $-$ dove il termine è positivo. La cosa non ha alcun senso in quanto quando si fa il prodotto dei segni, come ben noto si intende che $+$ vuol dire positivo e $-$ negativo, ad esempio $+$ per $-$ da $-$ vuol dire positivo per negativo da negativo.

Un esempio pratico: se si studia la disequazione

$$(x-1)(x-3)(x-4) < 0$$

si studia il segno di $x-1$ che sarà $+$ per $x > 1$ e $-$ per $x < 1$, poi il segno di $x-3$ che sarà $+$ per $x > 3$ e $-$ per $x < 3$, poi il segno di $x-4$ che sarà $+$ per $x > 4$ e $-$ per $x < 4$. Facendo il prodotto dei segni, si ottiene che la disequazione è soddisfatta negli intervalli $]-\infty, 1[$ e $]3, 4[$, ossia nell'insieme $]-\infty, 1[\cup]3, 4[$.

Infine ricordo che come ovvio, se la disequazione precedente fosse sostituita da una dove al secondo membro c'è un numero diverso da 0 non si potrebbe fare studiando dove i singoli fattori sono minori di quel numero. Ad esempio

$$(x-1)(x-3)(x-4) < 2$$

non ha alcuna relazione con lo studio di dove $x-1 < 2$, $x-3 < 2$, $x-4 < 2$.