VII Tutorato 20 Novembre 2014

- Studiare i seguenti limiti:

1. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+x}{a^x+x^3+\sin(x)}$$
   al variare di $a\in\mathbb{R}$.

2. $$\lim_{x\to-1}\frac{3x+1}{2x+3}+e^x$$

3. $$\lim_{x\to0^-}\frac{|x|^a}{\sin(x)}$$
   al variare di $a\in\mathbb{R}$.

4. $$\lim_{x\to0}\sin\left(\frac{e^{5x}-1}{x}\right)$$

5. $$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2-\sin\left(x^3\right)}$$

6. $$\lim_{x\to0}\frac{\sin(e^{x^2}-1)+x\sin(3x)}{\cos(x)-1}$$

7. $$\lim_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{\sin(x)-\sin(2)}$$

8. $$\lim_{x\to0}\left(\sin(x^2)\right)^x$$

9. $$\lim_{x\to+\infty}3^{\sin(x)}\left(x^3-\ln\left(x^{17}-x^{12}-x+9\right)\right)^a$$
   al variare di $a\in\mathbb{R}$.

- Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)}{x} & \text{se } x \in (0,\pi), x \neq 2 \\ 9 & \text{se } x = 2 \\ x^2 - x + 3 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Dire in che punti la funzione è continua e dire se esiste $\lim_{x\to 2} f(x)$, nel caso calcolarlo.

Soluzioni dei limiti

1. Si osserva che per $a \leq 0$ la funzione, di cui si vuole calcolare il limite, non e definita per $x < 0$, quindi non si può nemmeno parlare del limite a meno infinito. Si considereri solo $a > 0$.
   Si può notare che, nella funzione, il numeratore si comporta a $-\infty$ come x, dato che 2^{-x} tende a 0. A denominatore sia che il termine dominante sia a^x sia x^3 si ha comunque una funzione piu grande di quella a numeratore, ci si aspetta quindi che il limite sia 0. Per vederlo rigorosamente si attua prima il cambio di variabile $y = -x$ e si ottiene il limite
   $$\lim_{y\to+\infty} \frac{2^{-y} - y}{a^{-y} - y^3 - \sin(y)}$$
   Si osserva che $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{-y} = 0$ se $a > 1$, mentre, se $0 < a < 1$, si ha $\lim\limits_{y\to+\infty} a^{-y} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{1}{a^y} = \lim\limits_{y\to+\infty} b^y = +\infty$, dove si è posto $b = \dfrac{1}{a} > 1$.
   Se invece $a = 1$ il limite è sempre 1.

   Nel caso in cui $a \geq 1$ si mette in evidenza $-y$ a numeratore e $-y^3$ a denominatore e si ottiene
   $$\lim_{y\to+\infty} \frac{-y\left(1 - \dfrac{1}{2^y y}\right)}{-y^3\left(1 - \dfrac{1}{a^y y^3} + \dfrac{\sin(y)}{y^3}\right)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y^2} \cdot g(y) = 0$$
   dove si è posto $g(y) = \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^y y}}{1 - \dfrac{1}{a^y y^3} + \dfrac{\sin(y)}{y^3}}$ che tende a 1 per $y \to +\infty$.

   Nel caso in cui $a < 1$ si mette in evidenza $-y$ a numeratore e, usando la notazione precedente, b^y a denominatore e si ottiene
   $$\lim_{y\to+\infty} \frac{-y\left(1 - \dfrac{1}{2^y y}\right)}{b^y\left(1 - \dfrac{y^3}{b^y} - \dfrac{\sin(y)}{b^y}\right)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{-y}{b^y} \cdot g(y) = 0$$
   dove si è posto $g(y) = \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^y y}}{1 - \dfrac{y^3}{b^y} - \dfrac{\sin(y)}{b^y}}$ che tende a 1 per $y \to +\infty$.

2. In -1 la funzione è continua, quindi per calcolare il limite basta sostituire il valore nella funzione
$$\lim_{x\to -1} \frac{3x+1}{2x+3} + e^x = \frac{3(-1)+1}{2(-1)+3} + e^{-1} = e^{-1} - 2.$$

3. Si attua un cambio di variabile $y = -x$ e si ottiene il limite
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{|-y|^a}{\sin(-y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y^a}{-\sin(y)}$$
dove si è usato la disparità della funzione seno e la definizione di modulo. Si riscrive allora il limite come
$$\lim_{y\to 0^+} -\frac{y^a}{\frac{\sin(y)}{y}y} = \lim_{y\to 0^+} -y^{a-1} \cdot g(y)$$
dove si è posto $g(y) = \frac{1}{\frac{\sin(y)}{y}}$ che tende a 1 per $y \to 0^+$. Si hanno allora i casi:

   - $a-1 > 0$ in questo caso si ha $\lim_{y\to 0^+} -y^{a-1} = 0$, quindi tende a 0 anche il limite iniziale;
   - $a-1 < 0$ in questo caso si ha $\lim_{y\to 0^+} -y^{a-1} = -\infty$, quindi tende a $-\infty$ anche il limite iniziale;
   - $a-1 = 0$ in questo caso si ha $\lim_{y\to 0^+} -y^{a-1} = -1$, quindi tende a -1 anche il limite iniziale.

4. Poiché la funzione seno è continua, il limite $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{e^{5x}-1}{x}\right)$ equivale a $\sin\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{x}\right)$.
Si ricorda che se $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$ e f è una funzione continua in l allora $f(g(x)) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f(l)$. Questo segue dalla regola di cambio di variabile nei limiti.
Si studia allora
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{5x} \cdot \frac{5x}{x} = 5$$
usando il limite notevole $\frac{e^y-1}{y} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 1$ con il cambio di variabile $y = 5x$.
Allora
$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{e^{5x}-1}{x}\right) = \sin(5).$$

5. Si osserva che

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^3)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^3)}{x^3}\cdot\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^3)}{x^3}\cdot x=0$$

usando il limite notevole $\dfrac{\sin(y)}{y}\underset{y\to0}{\longrightarrow}1$.

Nel limite $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2-\sin\left(x^3\right)}$ si mette dunque in evidenza x^2 a denominatore, come segue

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2-\sin\left(x^3\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2\left(1-\dfrac{\sin\left(x^3\right)}{x^2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1-\dfrac{\sin\left(x^3\right)}{x^2}}=1$$

per l'osservazione iniziale.

6. Si riscrive il limite cercando di ricondursi a somme di limiti notevoli come segue

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(e^{x^2}-1)+x\sin(3x)}{\cos(x)-1}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin(e^{x^2}-1)}{e^{x^2}-1}\cdot\left(e^{x^2}-1\right)+x\dfrac{\sin(3x)}{3x}\cdot3x}{\dfrac{\cos(x)-1}{x^2}\cdot x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin(e^{x^2}-1)}{e^{x^2}-1}\cdot\dfrac{\left(e^{x^2}-1\right)}{x^2}\cdot x^2+\dfrac{\sin(3x)}{3x}\cdot3x^2}{\dfrac{\cos(x)-1}{x^2}\cdot x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2\left(\dfrac{\sin(e^{x^2}-1)}{e^{x^2}-1}\cdot\dfrac{\left(e^{x^2}-1\right)}{x^2}+3\dfrac{\sin(3x)}{3x}\right)}{x^2\left(\dfrac{\cos(x)-1}{x^2}\right)}=\frac{1+3}{1/2}=8.$$

Si può dire che $\dfrac{\sin(e^{x^2}-1)}{e^{x^2}-1}\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$ usando il cambio di variabile $y=e^{x^2}-1$, riconducendosi al limite notevole $\dfrac{\sin(y)}{y}\underset{y\to0}{\longrightarrow}1$ dato che $e^{x^2}-1\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$.

7. In genere quando si ha un limite per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ lo si riconduce a un limite per $y \to 0$ con il cambio di variabile $y = x - x_0$. In questo caso si attua un cambiamento di variabile $x - 2 = y$ si ottiene

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{\sin(x)-\sin(2)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{\sin(y+2)-\sin(2)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{\sin(y+2)-\sin(2)} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{\sin(y)\cos(2)+\cos(y)\sin(2)-\sin(2)}$$

usando le formule di somma del seno. Mettendo in evidenza $\sin(2)$ nel secondo termine del denominatore, si ha

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{\sin(y)\cos(2)+\sin(2)\,(\cos(y)-1)} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{\sin(y)\cos(2)+\sin(2)\left(\dfrac{\cos(y)-1}{y^2}\right)\cdot y^2}$$

Si mette ora in evidenza $\sin(y)$ e si ottiene

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{\sin(y)\left(\cos(2)+\sin(2)\left(\dfrac{\cos(y)-1}{y^2}\right)\cdot\dfrac{y^2}{\sin(y)}\right)} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{\cos(2)+y\sin(2)\left(\dfrac{\cos(y)-1}{y^2}\right)\cdot\dfrac{y}{\sin(y)}} = \frac{1}{\cos(2)}$$

8. Si riscrive $\lim_{x\to 0}(\sin(x^2))^x$ nella forma $f(x) = e^{\ln(f(x))}$ ottenendo

$$\lim_{x\to 0} e^{x\ln\left(\sin(x^2)\right)} = e^{\lim_{x\to 0} x\ln\left(\sin(x^2)\right)}$$

per la continuità della funzione esponenziale. Si consideri solo

$$\lim_{x\to 0} x\ln\left(\sin(x^2)\right) = \lim_{x\to 0} x\ln\left(\frac{\sin(x^2)}{x^2}x^2\right) = \lim_{x\to 0} x\left(\ln\left(\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right)+\ln(x^2)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} x\ln\left(\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right) + x\ln(x^2) = 0$$

usando le regole dei logaritmi.
Per studiare il limite $\lim_{x\to 0} x\ln(x^2)$, si osserva che

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x^2) = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(\frac{1}{y^2})}{y} = \lim_{y\to+\infty} -2\frac{\ln(y)}{y} = 0,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} x\ln(x^2) = \lim_{z\to 0^+} -z\ln\left((-z)^2\right) = \lim_{z\to 0^+} -z\ln(z^2) = 0,$$

per quanto appena visto. Inoltre si fa notare che in questo caso non è possibile scrivere $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ dato che si sta studiando il limite per in 0 e non per x che tende a 0 da destra; nel caso in cui $x < 0$ la formula non vale dato che esiste $\ln(x^2)$ ma non $2\ln(x)$.
Allora

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin(x^2)\right)^x = e^0 = 1.$$

9. Si osserva che $3^{\sin(x)}$ non ammette limite per x che tende a $+\infty$.
Lo si capisce intuitivamente perché la funzione oscilla tra i valori $1/3$ e 3. Per vedere in modo rigoroso che non ammette limite basta far vedere che esistono due successioni tendenti a $+\infty$ su cui la funzione si comporta diversamente. Ricordo infatti che per il teorema ponte se per una funzione f si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, allora $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$ per ogni successione x_n tendente a $+\infty$. Se si prendono le successioni tipo $(n\pi)$ e $(2n\pi + \pi/2)$ la funzione calcolata in queste due successione tende a limiti diversi (rispettivamente 1 e 3).
D'altra parte, come vedremo meglio dopo, per i valori del parametro a per cui $(x^3 - \ln(x^{17} - x^{12} - x + 9))^a$ diverge, anche $3^{\sin(x)}(x^3 - \ln(x^{17} - x^{12} - x + 9))^a$ diverge e analogamente se $(x^3 - \ln(x^{17} - x^{12} - x + 9))^a$ tende a 0, per certi valori di a, anche $3^{\sin(x)}(x^3 - \ln(x^{17} - x^{12} - x + 9))^a$ convergerà a 0. Se $(x^3 - \ln(x^{17} - x^{12} - x + 9))^a \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$ con $l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ allora $3^{\sin(x)}(x^3 - \ln(x^{17} - x^{12} - x + 9))^a$ non ammette limite.

Ci si limita quindi a studiare

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - \ln(x^{17} - x^{12} - x + 9))^a =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3 - \ln\left(x^{17}\left(1 - \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^{16}} + \frac{9}{x^{17}}\right)\right)\right)^a =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x^3 - \ln\left(x^{17}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^{16}} + \frac{9}{x^{17}}\right)\right)^a =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x^3 - 17\ln(x) - \ln\left(1 - \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^{16}} + \frac{9}{x^{17}}\right)\right)^a =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{3a} \left(1 - \frac{17\ln(x)}{x^3} - \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^{16}} + \frac{9}{x^{17}}\right)}{x^3}\right)^a = \lim_{x\to+\infty} x^{3a} \cdot u(x)$$

dove $u(x) = \left(1 - \frac{17\ln(x)}{x^3} - \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^{16}} + \frac{9}{x^{17}}\right)}{x^3}\right)^a$

e vale $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Si hanno allora i casi:

- se $a < 0$ allora $\lim_{x\to+\infty} x^{3a} \cdot u(x) = 0$. Anche il limite iniziale tenderà a 0 perché prodotto di una funzione limitata per una infinitesima.
- se $a > 0$ allora $\lim_{x\to+\infty} x^{3a} \cdot u(x) = +\infty$ e si avrà $3^{\sin(x)}(x^3 - \ln(x^{17} - x^{12} - x + 9))^a \geq \frac{1}{3}x^{3a} \cdot u(x)$ quindi diverge a $+\infty$ anch'essa;
- se $a = 0$ allora la funzione sarebbe esattamente $3^{\sin(x)}$ che come visto, non ha limite per $x \to +\infty$.

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x} & \text{se } x \in (0, \pi), x \neq 2 \\ 9 & \text{se } x = 2 \\ x^2 - x + 3 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

Nell'intervallo $(-\infty, 0)$ tale funzione è continua perché coincide con $x^2 - x + 3$ che è continua. Anche in $(0, 2)$ è continua perché coincide con $\frac{\sin(3x)}{x}$. Affinché la funzione sia continua in 0 occorre che $x^2 - x + 3$ e $\frac{\sin(3x)}{x}$ si raccordino in 0 ovvero che

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 - x + 3 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x)}{x}$$

Ma

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 - x + 3 = 3$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} 3\frac{\sin(3x)}{3x} = 3$$

Dato che limite destro e quello sinistro sono uguali il limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ esiste e vale 3. Dato che inoltre $f(0) = 3$ si può concludere che f è continua in 0.
Ci si chiede ora come si comporta la funzione in 2. Poiché a destra e a sinistra di 2 la funzione coincide con $\frac{\sin(3x)}{x}$ si ha

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sin(3x)}{x} = \frac{\sin(6)}{2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sin(3x)}{x}$$

quindi esiste $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{\sin(6)}{2}$ d'altra parte in 2 la funzione non è continua dato che $f(2) = 9 \neq \lim_{x\to 2} f(x)$ quindi la funzione, benché esistano e coincidano il limite destro e quello sinistro, non è continua in 2 in quanto il valore della funzione nel punto non coincide con il valore dei limiti.
Invece di fare limite destro e sinistro si sarebbe potuto dire che, dato che la funzione in un intervallo aperto contenente 2 (ossia $(0, \pi)$) tranne 2 stesso, coincide con la funzione $\frac{\sin(3x)}{x}$, queste due funzioni hanno lo stesso limite in 2 ossia $\frac{\sin(6)}{2}$. Si ricorda infatti che per il calcolo del limite in un punto non ha alcuna importanza il valore della funzione nel punto stesso.

Si procede quindi analizzando il comportamento di f in π, poiché in $(2, \pi)$ e in $(\pi, +\infty)$ la funzione è continua perché nei due intervalli *aperti* coincide con una funzione continua.
Si studiano i limiti

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\sin(3x)}{x} = 0 \neq \pi^2 - \pi + 3 = \lim_{x \to \pi^+} x^2 - x + 3$$

Quindi, dato che in π limite destro e sinistro sono diversi, non esiste $\lim_{x \to \pi} f(x)$, e a maggior ragione f non è continua in π. In definitiva la funzione f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{2, \pi\}$, in particolare π è un punto di discontinuità di salto, mentre in 2 si ha una discontinuità eliminabile, ed esiste il limite in 2 e vale $\lim_{x \to 2} f(x) = \dfrac{\sin(6)}{2}$.