VI Tutorato 13 Novembre 2014

1. Data la successione
$$a_n = \frac{n^{1000}+1}{n^{998}+n^{997}+2}$$
determinare il $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2. Determinare il limite della successione
$$a_n = \frac{n^7}{n^5+1} - \frac{n^\alpha}{n^2\sqrt{n}+n+1}$$
al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Data la successione
$$a_n = \frac{n}{n^2+3} \cdot \frac{\cos(n^2)+13}{\sin(n)-\frac{6}{5}}$$
determinare il $\lim_{n\to\infty} a_n$.

4. Determinare
$$\lim_{n\to\infty} 3^{2n+3} - a^{3n+1}$$
al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

5. Data la successione
$$a_n = \frac{(n^3+1)^{212}(n^2+7)}{n^{637}-450n^{18}+4}$$
determinare il $\lim_{n\to\infty} a_n$.

6. Data la successione
$$a_n = \frac{(n^3+1)^{212}(n^2+7)}{n^b-450n^{18}+4}$$
determinare il $\lim_{n\to\infty} a_n$ al variare del parametro $b \in \mathbb{R}$.

7. Data la successione
$$a_n = \frac{(3^n+1)(2^n+7)^5(n+1)^2+n^{10}}{100^n+2^n}$$
determinare il $\lim_{n\to\infty} a_n$.

8. Data la successione

$$a_n = \frac{(3^n+1)(2^n+7)^5(n+1)^2+n^{10}}{b^n+2^n}$$

determinare il $\lim_{n\to\infty} a_n$ al variare del parametro $b \in \mathbb{R}$.

9. Data la successione

$$a_n = \frac{n!(n-3)^2}{(n+1)!-n+2}$$

determinare il $\lim_{n\to\infty} a_n$.

10. Data la successione

$$a_n = \frac{n!n^b+5}{(n+2)!-n+5}$$

determinare il $\lim_{n\to\infty} a_n$ al variare del parametro $b \in \mathbb{R}$.

11. Sia $l \in \bar{\mathbb{R}}$. Data la successione $\{a_n\}_n$ tale che

$$a_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \qquad a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

si può concludere che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$?
Viceversa, se $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, cosa si può dire di a_{2n}, a_{2n+1}?

12. Dire quali sono i sottoinsiemi non vuoti A di $\mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in A \quad \exists y \in A : \quad y > x.$$

Soluzioni

1. Si mettono in evidenza le potenze con esponente più grande a numeratore e a denominatore. Allora la successione si scrive nella forma

$$a_n = \frac{n^{1000}\left(1+\dfrac{1}{n^{1000}}\right)}{n^{998}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^{998}}\right)} = n^2 \cdot u_n$$

dove si è posto $u_n = \dfrac{1+\dfrac{1}{n^{1000}}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^{998}}}$ e vale $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Allora la successione $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. La successione $a_n = \dfrac{n^7}{n^5+1} - \dfrac{n^\alpha}{n^2\sqrt{n}+n+1}$ è scritta come differenza di due successioni. Si osserva che se il termine $\dfrac{n^\alpha}{n^2\sqrt{n}+n+1}$ diverge si ha una forma indeterminata, altrimenti la successione diverge perché il primo termine diverge (in quanto va come n^2).
Si riscrive la successione nel modo seguente

$$a_n = \frac{n^7\left(n^{\frac{5}{2}}+n+1\right)-n^\alpha\left(n^5+1\right)}{\left(n^5+1\right)\left(n^{\frac{5}{2}}+n+1\right)} = \frac{n^{\frac{19}{2}}+n^8+n^7-n^{\alpha+5}-n^\alpha}{n^{\frac{15}{2}}+n^6+n^5+n^{\frac{5}{2}}+n+1}$$

Occorre, innanzitutto, capire quale termine mettere in evidenza al numeratore. Si osserva che la potenza di n più grande che compare è o $n^{19/2}$ o $n^{\alpha+5}$ dato che $7 < \dfrac{19}{2}, 8 < \dfrac{19}{2}$ e $\alpha < \alpha+5$. Allora occorre discutere quale numero è più grande tra $\alpha+5$ e $\dfrac{19}{2}$.

Si hanno tre casi:

- $\alpha + 5 > \dfrac{19}{2}$, ossia $\alpha > \dfrac{9}{2}$
  In questo caso si mette in evidenza $-n^{\alpha+5}$ a numeratore e si

ottiene:

$$a_n = \frac{-n^{\alpha+5}\left(1 - n^{\frac{9}{2}-\alpha} - n^{3-\alpha} + n^{-5} - n^{2-\alpha}\right)}{n^{\frac{15}{2}}\left(1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^{\frac{13}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{15}{2}}}\right)} = \frac{-n^{\alpha+5}}{n^{\frac{15}{2}}} \cdot u_n$$

dove si è posto $u_n = \dfrac{1 - n^{\frac{9}{2}-\alpha} - n^{3-\alpha} + n^{-5} - n^{2-\alpha}}{1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^{\frac{13}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{15}{2}}}}$

e vale $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ poiché $\alpha > \dfrac{9}{2} > 3 > 2$.

Si ha che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ perché $\alpha + 5 > \dfrac{19}{2} > \dfrac{15}{2}$.

- $\alpha + 5 < \dfrac{19}{2}$, ossia $\alpha < \dfrac{9}{2}$

  In questo caso si mette in evidenza $n^{\frac{19}{2}}$ a numeratore e si ottiene:

$$a_n = \frac{n^{\frac{19}{2}}\left(1 + n^{\frac{-3}{2}} + n^{\frac{-5}{2}} - n^{\alpha-\frac{9}{2}} - n^{\alpha-\frac{19}{2}}\right)}{n^{\frac{15}{2}}\left(1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^{\frac{13}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{15}{2}}}\right)} = \frac{n^{\frac{19}{2}}}{n^{\frac{15}{2}}} \cdot u_n$$

dove si è posto $u_n = \dfrac{1 + n^{\frac{-3}{2}} + n^{\frac{-5}{2}} - n^{\alpha-\frac{9}{2}} - n^{\alpha-\frac{19}{2}}}{1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^{\frac{13}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{15}{2}}}}$

e vale $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ poiché $\alpha < \dfrac{9}{2} < \dfrac{19}{2}$.

Si ha che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ perché $\dfrac{19}{2} > \dfrac{15}{2}$.

- $\alpha + 5 = \dfrac{19}{2}$, ossia $\alpha = \dfrac{9}{2}$

  In questo caso la successione a_n diventa

$$a_n = \frac{n^8 + n^7 - n^{\frac{9}{2}}}{n^{\frac{15}{2}} + n^6 + n^5 + n^{\frac{5}{2}} + n + 1}$$

Come si vede con i procedimenti abituali tale successione diverge per n che tende ad infinito perché $8 > \dfrac{15}{2}$.

3. Si vuole far vedere che la successione $a_n = \dfrac{n}{n^2+3} \cdot \dfrac{\cos(n^2) + 13}{\sin(n) - \frac{6}{5}}$ è prodotto di una successione infinitesima per una successione limitata.

Poiché la successione $\dfrac{n}{n^2+3}$ tende a 0 per n che tende ad infinito, basta far vedere che $\dfrac{\cos(n^2)+13}{\sin(n)-\frac{6}{5}}$ è limitata per concludere che la successione $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si osserva, allora, che

$$\left|\cos(n^2)+13\right| \leq \left|\cos(n^2)\right| + 13 \leq 1+13 = 14$$

Inoltre

$$\left|\sin(n)-\frac{6}{5}\right| = \left|\frac{6}{5}-\sin(n)\right| \geq \frac{6}{5} - |\sin(n)| \geq \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$$

dove si è usata la disuguaglianza

$$|a-b| \geq |a| - |b|$$

e quindi

$$\frac{1}{\left|\sin(n)-\dfrac{6}{5}\right|} \leq 5$$

Allora, poiché il modulo del quoziente è uguale al quoziente dei moduli, si ha

$$\left|\frac{\cos(n^2)+13}{\sin(n)-\dfrac{6}{5}}\right| \leq \frac{14}{\dfrac{1}{5}} = 70$$

da cui la tesi.

In alternativa, sfruttando la precedente disuguaglianza, si poteva dire

$$|a_n| = \frac{n}{n^2+3} \cdot \left|\frac{\cos(n^2)+13}{\sin(n)-\dfrac{6}{5}}\right| \leq 70 \cdot \frac{n}{n^2+3}$$

ovvero

$$-70 \cdot \frac{n}{n^2+3} \leq a_n \leq 70 \cdot \frac{n}{n^2+3}$$

e poiché $\dfrac{n}{n^2+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la successione $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ per il Teorema dei Carabinieri.

4. Si riscrive la successione $3^{2n+3} - a^{3n+1}$ come segue

$$3^{2n+3} - a^{3n+1} = 3^{2n} \cdot 3^3 - a^{3n} \cdot a = 27 \cdot 9^n - (a^3)^n \cdot a$$

Per determinare il limite occorre confrontare a^3 e 9.
Se $a^3 > 9$, ossia $a > \sqrt[3]{9}$ allora

$$\lim_{n\to\infty} 3^{2n+3} - a^{3n+1} = \lim_{n\to\infty} (a^3)^n \cdot a \left(-1 + \left(\frac{9}{a^3}\right)^n \cdot \frac{27}{a}\right) = -\infty$$

Se $a^3 \leq 9$, ossia $a \leq \sqrt[3]{9}$ allora

$$\lim_{n\to\infty} 3^{2n+3} - a^{3n+1} = \lim_{n\to\infty} 9^n \cdot 27 \left(1 - \left(\frac{a^3}{9}\right)^n \cdot \frac{a}{27}\right) = +\infty$$

È ovvio che il limite venga $+\infty$ se $a < \sqrt[3]{9}$, mentre se $a = \sqrt[3]{9}$ si ha

$$1 - \left(\frac{a^3}{9}\right)^n \cdot \frac{a}{27} = 1 - \frac{\sqrt[3]{9}}{27} > 0$$

5. Nel numeratore della successione $a_n = \dfrac{(n^3+1)^{212}(n^2+7)}{n^{637} - 450n^{18} + 4}$ si mettono in evidemza i termini dominanti di ciascun fattore, come segue

$$a_n = \frac{\left(n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right)^{212}\left(n^2\left(1+\frac{7}{n^2}\right)\right)}{n^{637} - 450n^{18} + 4} = \frac{n^{636}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{212} n^2\left(1+\frac{7}{n^2}\right)}{n^{637} - 450n^{18} + 4} =$$

$$= \frac{n^{638}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{212}\left(1+\frac{7}{n^2}\right)}{n^{637}\left(1-\frac{450}{n^{619}}+\frac{4}{n^{637}}\right)} = \frac{n^{638}}{n^{637}} \cdot u_n = n \cdot u_n$$

dove si è posto $u_n = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{212}\left(1+\frac{7}{n^2}\right)}{1-\frac{450}{n^{619}}+\frac{4}{n^{637}}}$ e vale $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Allora la successione $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

6. Questo esercizio è una generalizzazione di quello precedente.
Come in precedenza si mettono in evidemza i termini dominanti di ciascun fattore del numeratore , come segue

$$a_n = \frac{\left(n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right)^{212}\left(n^2\left(1+\frac{7}{n^2}\right)\right)}{n^b - 450n^{18} + 4} = \frac{n^{636}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{212} n^2\left(1+\frac{7}{n^2}\right)}{n^b - 450n^{18} + 4} =$$

Si nota che se $b \leq 18$ la successione $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, mettendo in evidenza n^{18} a denominatore.
Si suppone quindi che $b > 18$ e si mette in evidenza il termine n^b a denominatore; si ottiene

$$a_n = \frac{n^{638}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{212}\left(1+\frac{7}{n^2}\right)}{n^b\left(1-\frac{450}{n^{b-18}}+\frac{4}{n^b}\right)} = \frac{n^{638}}{n^b}\cdot u_n = n^{638-b}\cdot u_n$$

dove si è posto $u_n = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{212}\left(1+\frac{7}{n^2}\right)}{1-\frac{450}{n^{b-18}}+\frac{4}{n^b}}$ e vale $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Si hanno allora i casi :

- b<638 la successione $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$.
- b>638 la successione $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- b=638 la successione $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

7. Nella successione $a_n = \dfrac{(3^n+1)(2^n+7)^5(n+1)^2+n^{10}}{100^n+2^n}$, a numeratore si mettono in evidenza in ogni fattore del primo addendo i termini dominanti, poi, dopo avere aggiustato bene il primo addendo, il più grande tra i termini dominanti dei due addendi, come segue

$$a_n = \frac{3^n\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)2^{5n}\left(1+\dfrac{7}{2^n}\right)^5 n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2+n^{10}}{100^n\left(1+\dfrac{1}{50^n}\right)} =$$

$$= \frac{(3\cdot 2^5)^n\cdot n^2\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)\left(1+\dfrac{7}{2^n}\right)^5\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2+n^{10}}{100^n\left(1+\dfrac{1}{50^n}\right)} =$$

$$= \left(\frac{96}{100}\right)^n\cdot n^2\cdot\frac{\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)\left(1+\dfrac{7}{2^n}\right)^5\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2+\dfrac{n^8}{96^n}}{\left(1+\dfrac{1}{50^n}\right)} =$$

$$= \left(\frac{24}{25}\right)^n\cdot n^2\cdot u_n$$

dove si è posto $u_n = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)\left(1+\dfrac{7}{2^n}\right)^5\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2+\dfrac{n^8}{96^n}}{\left(1+\dfrac{1}{50^n}\right)}$

e vale $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Allora la successione $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ poiché $\left(\dfrac{24}{25}\right)^n n^2 = \dfrac{n^2}{\left(\dfrac{25}{24}\right)^n}$.

8. Questo esercizio è una generalizzazione di quello precedente.

Come in precedenza, nella successione $a_n = \dfrac{(3^n+1)(2^n+7)^5(n+1)^2+n^{10}}{b^n+2^n}$ si mettono in evidemza i termini dominanti di ciascun fattore del numeratore, come segue

$$a_n = \frac{3^n\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)2^{5n}\left(1+\dfrac{7}{2^n}\right)^5 n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2+n^{10}}{b^n+2^n}$$

Si osserva che, se $b \leq 2$ la successione divergerebbe, come si vede mettendo in evidenza 2^n a denominatore. Si suppone, quindi $b > 2$ e si mette in evidenza il termine b^n al denominatore, come segue

$$= \frac{(3\cdot 2^5)^n \cdot n^2\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)\left(1+\dfrac{7}{2^n}\right)^5\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2+n^{10}}{b^n\left(1+\left(\dfrac{2}{b}\right)^n\right)} =$$

$$= \left(\frac{96}{b}\right)^n \cdot n^2 \cdot \frac{\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)\left(1+\dfrac{7}{2^n}\right)^5\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2+\dfrac{n^8}{96^n}}{1+\left(\dfrac{2}{b}\right)^n} =$$

$$= \left(\frac{96}{b}\right)^n \cdot n^2 \cdot u_n$$

dove si è posto $u_n = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)\left(1+\dfrac{7}{2^n}\right)^5\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2+\dfrac{n^8}{96^n}}{1+\left(\dfrac{2}{b}\right)^n}$

e vale $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, perché $b > 2$.

Allora la successione $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ se $b > 96$, poiché $\left(\dfrac{96}{b}\right)^n n^2 = \dfrac{n^2}{\left(\dfrac{b}{96}\right)^n}$

e $\dfrac{b}{96} > 1$ mentre

$a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ se $b \leq 96$.
Si osserva, infatti, che nel caso in cui $b = 96$, la successione diventa

$$a_n = n^2 u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

9. Nella successione $a_n = \dfrac{n!(n-3)^2}{(n+1)! - n + 2}$ si mettono in evidenza i termini dominanti di ciascun fattore, come segue

$$a_n = \frac{n!\, n^2 \left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^2}{(n+1)! \left(1 - \dfrac{n}{(n+1)!} + \dfrac{2}{(n+1)!}\right)} =$$

$$= \frac{n!\, n^2 \left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^2}{(n+1)n! \left(1 - \dfrac{n}{(n+1)!} + \dfrac{2}{(n+1)!}\right)} = \frac{n^2}{n+1} \cdot u_n$$

dove si è posto $u_n = \dfrac{\left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^2}{1 - \dfrac{n}{(n+1)!} + \dfrac{2}{(n+1)!}}$ e vale $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

poiché $\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{n}{(n+1)} \dfrac{1}{n!}$.

Allora la successione $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

10. Come in precedenza, nella successione $a_n = \dfrac{n!\, n^b + 5}{(n+2)! - n + 5}$ si mettono in evidenza i termini dominanti di ciascun fattore, come segue

$$a_n = \frac{n!\, n^b \left(1 + \dfrac{5}{n!\, n^b}\right)}{(n+2)! \left(1 - \dfrac{n}{(n+2)!} + \dfrac{5}{(n+2)!}\right)} =$$

$$= \frac{n!\, n^b \left(1 + \dfrac{5}{n!\, n^b}\right)}{(n+2)(n+1)n! \left(1 - \dfrac{n}{(n+2)!} + \dfrac{5}{(n+2)!}\right)} = \frac{n^b}{(n+2)(n+1)} \cdot u_n$$

Quindi $a_n = \dfrac{n^b}{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right) n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} \cdot u_n = n^{b-2} \cdot \dfrac{u_n}{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}$

dove si è posto $u_n = \dfrac{1+\dfrac{5}{n!\, n^b}}{1-\dfrac{n}{(n+2)!}+\dfrac{5}{(n+2)!}}$

e vale $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Allora

se $b > 2$ la successione $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

se $b < 2$ la successione $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

se $b = 2$ la successione $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

11. L'esercizio chiede di esaminare le relazioni che intercorrono tra il limite di una successione data e quello di due sue particolari sottosuccessioni estratte.
Si vuole far vedere che se le sottosuccessioni $(a_{2n})_n$, $(a_{2n+1})_n$ tendono allo stesso limite $l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora la successione stessa $(a_n)_n$ tende a l.
A tal fine, si consideri un qualunque intorno V di l. Per definizione di limite,

$$\exists \nu_1 \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \geq \nu_1 \qquad a_{2n} \in V \quad \text{poiché } a_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \tag{1}$$

e

$$\exists \nu_2 \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \geq \nu_2 \qquad a_{2n+1} \in V \quad \text{poiché } a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \tag{2}$$

Sia a_n un elemento della successione tale che $n \geq \max\{2\nu_1, 2\nu_2+1\}$.

Se n è pari, cioè del tipo $n = 2m$ per un opportuno $m \in \mathbb{N}$, allora deve essere $n \geq 2\nu_1$, cioè $2m \geq 2\nu_1$, da cui $m \geq \nu_1$.
Allora $a_n = a_{2m} \in V$ per (1).
Se n è dispari, cioè del tipo $n = 2m+1$ per un opportuno $m \in \mathbb{N}$, allora deve essere $n \geq 2\nu_2+1$, cioè $2m+1 \geq 2\nu_2+1$, da cui $m \geq \nu_2$.
Allora $a_n = a_{2m+1} \in V$ per (2).

In ogni caso per $n \geq \max\{2\nu_1, 2\nu_2 + 1\}$ l'elemento a_n sta nell'intorno V di l, quindi la successione sta definitivamente in V, ovvero tende ad l.

Viceversa, se la successione $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, allora ogni sua sottosuccessione estratta deve convergere allo stesso limite, in particolare quindi deve valere per $(a_{2n})_n$ e per $(a_{2n+1})_n$, ossia $a_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ e $a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

12. La frase
$$\forall x \in A \quad \exists y \in A : \quad y > x \tag{3}$$
significa che, comunque si prenda un elemento nell'insieme A, esiste un altro elemento dello stesso insieme che lo supera.
Volgendola al negativo, vuol dire che non esiste un elemento di A che è il più grande tra tutti gli elementi di A stesso. Quindi la frase (3) è la negazione di
$$\exists \bar{x} \in A \;\; | \;\; \forall y \in A \quad y \leq \bar{x} \tag{4}$$
Quest'ultima è la definizione di massimo per l'insieme A.

Un insieme soddisfa (3) se e solo se non soddisfa (4) ovvero se e solo se non possiede massimo.