V Tutorato 6 Novembre 2014

1. Data la successione
$$b_n = \frac{n^8 6^n + 1}{n^{80} 2^n + n^4 18^n}$$
determinare il $\lim_{n\to\infty} b_n$

2. Data la successione
$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1} & \text{se } n \geq 20 \\ \dfrac{3n}{n+1} & \text{se } n < 20 \end{cases}$$
scrivere i termini a_0, a_1, a_2, a_{50} e determinare $\lim_{n\to\infty} a_n$

3. Data la successione
$$b_n = \frac{4n^2}{4^n - 1870 \cdot 3^n + 3}$$
provare che esiste un numero naturale N tale che $b_n > 0$ se $n \geq N$

4. Data la successione
$$a_n = \frac{2^n + n^{10}}{7^n + 1} \cdot 3^{n+2} \cdot \frac{10}{n \sin^2 n + 5}$$
calcolare il $\lim_{n\to\infty} a_n$

5. Data la successione
$$a_n = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n + n^{10}}{\left(\frac{5}{2}\right)^n + \sin(n)} - \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + n^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + n^2}$$
calcolare il $\lim_{n\to\infty} a_n$

6. Data la successione
$$a_n = \sqrt[7]{n} + n^2 \cos^2 n - 4n \cos n + 5$$
calcolare il $\lim_{n\to\infty} a_n$

7. Provare che, comunque dati insiemi A, B e C, si ha $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Soluzioni

1. Si mettono in evidenza, al numeratore e al denominatore, i termini che vanno all'infinito "più velocemente", ovvero

$$b_n = \frac{n^8 6^n \left(1 + \dfrac{1}{n^8 6^n}\right)}{n^4 18^n \left(n^{76}\left(\dfrac{2}{18}\right)^n + 1\right)}$$

Posto $u_n = \left(\dfrac{1}{n^8 6^n}\right)$ e $v_n = n^{76}\left(\dfrac{2}{18}\right)^n$ si ottiene

$$b_n = n^4 \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1+u_n}{1+v_n}$$

dove si ha che $u_n, v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Che la successione u_n tende a 0 è ovvio, mentre per v_n basta osservare che $n^{76}\left(\dfrac{2}{18}\right)^n = \dfrac{n^{76}}{9^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si ricorda, infatti, il limite notevole $\dfrac{n^b}{a^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ quando $a > 1$.

Se si pone $\alpha_n = \dfrac{1+u_n}{1+v_n}$ si ha che tale successione tende a 1 (per $n \to +\infty$) e allora

$$b_n = \frac{n^4}{3^n} \cdot \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

perché $\dfrac{n^4}{3^n}$ tende a 0.

Osservazione

In ogni somma si mette in evidenza il termine più grande.
A numeratore la situazione è chiara. L'unica cosa da notare è che in un prodotto l'andamento non è dato dal più grande dei fattori ma dal prodotto degli stessi.
Ad esempio se si avesse la successione $a_n = \dfrac{n^4 n^3 + 1}{n^6}$ benché n^4 e n^3 siano più piccoli di n^6, il loro prodotto è più grande, quindi ci si aspetta che la successione tenda a $+\infty$, perché è tipo $\dfrac{n^7}{n^6} = n$.

Per formalizzare questa idea si mette in evidenza a numeratore $n^4 n^3 = n^7$, che è la parte che ne determina l'andamento.
Analogamente nel caso in esame, si è messo in evidenza a numeratore $n^8 6^n$. Mentre, a denominatore, si è messo in evidenza $n^4 18^n$ e non $n^{80} 2^n$ perché ci si aspetta che il primo termine prevalga in quanto è più grande la parte esponenziale (18^n) che è la parte che ne determina l'andamento asintotico.
Qualora non fosse chiaro "a vista" quale possa essere il termine dominante nella somma, si prova tra due pezzi quale è quello più grande facendo il rapporto dei due e vedendo se tende a 0 o a ∞. In questo caso, confrontando i due termini si ha che $\dfrac{n^{80}2^n}{n^4 18^n}$ tende a 0, quindi il denominatore è più grande, ossia da mettere in evidenza.
Si osserva inoltre che, come nel caso di questo esercizio, se si ha una forma imdeterminata del tipo $n^b a^n$, non essendo un limite notevole, lo si può ricondurre ad una forma nota, facendolo diventare un quoziente; ad esempio $n^4 \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \dfrac{n^4}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}$, che tende a 0 dato che $\dfrac{3}{2} > 1$.

2. I numeri $0, 1, 2$ sono minori si 20, per cui, per determinare i termini corrispondenti della successione occorre far riferimento alla legge $a_n = \dfrac{3n}{n+1}$, da cui $a_0 = 0, a_1 = \dfrac{3 \cdot 1}{1+1} = \dfrac{3}{2}$ e $a_2 = \dfrac{3 \cdot 2}{2+1} = 2$.

   Per $n = 50$ occorre guardare la legge $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ da cui si ha $a_{50} = \dfrac{50}{50+1} = \dfrac{50}{51}$.

   Per il limite bisogna considerare solo la parte per $n \geq 20$ (tanto conta solo che cosa fa la successione per n grande) e quindi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

3. Ci si chiede se esistono n per i quali la successione b_n sia positiva. Poiché il numeratore è positivo per ogni n, basta limitarsi a studiare se il denominatore lo è. Si osserva che è sufficiente mostrare $4^n - 1870 \cdot 3^n > 0$ per un n opportuno, poiché se questo numero è positivo, lo sarà a maggior ragione se vi si aggiunge 3. Si studia quindi se per un certo n

vale $4^n > 1870 \cdot 3^n$ ovvero

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n > 1870$$

Si osserva che per n che tende ad infinito $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ diverge, per definizione di limite, questo significa che

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N} : \quad \left(\frac{4}{3}\right)^n > M, \quad \forall n > N.$$

Tale definizione garantisce che da un certo indice in poi la successione $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ è più grande di ogni numero M, in particolare di $M = 1870$.

Si può anche ragionare in un modo leggermente diverso, che andrebbe bene anche se a denominatore ci fosse $4^n - 18703^n - 3$, mentre il ragionamento fatto qui non sarebbe più valido.
Basta notare che, mentre il numeratore è sempre positivo, il denominatore, come si verifica facilmente, tende a $+\infty$, e quindi sarà positivo per ogni n maggiore di un certo indice. Se n è maggiore di tale indice, allora la frazione sarà positiva, dato che saranno positivi sia il numeratore sia il denominatore.
Si osserva, inoltre, che la successione b_n tende a 0, e da questa informazione non è possibile dedurre nulla sul suo segno (la successione potrebbe tendere a 0 sia essendo positiva, sia essendo negativa), e per questo conviene studiare separatamente numeratore e denominatore.

4. Per determinare l'andamento asintotico della successione

$$a_n = \frac{2^n + n^{10}}{7^n + 1} \cdot 3^{n+2} \cdot \frac{10}{n \sin^2 n + 5}$$

si osserva che $n \sin^2 n + 5 \geq 5$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\frac{1}{n \sin^2 n + 5} \leq \frac{1}{5}$.
È possibile "capovolgere" perché i numeri in questione sono entrambi positivi.
Allora si ottiene

$$\frac{10}{n \sin^2 n + 5} \leq \frac{10}{5} = 2$$

La successione è maggiorata da

$$a_n \leq \frac{2^n + n^{10}}{7^n + 1} \cdot 3^{n+2} \cdot 2 = 18 \cdot 3^n \frac{2^n + n^{10}}{7^n + 1}$$

Mettendo in evidenza le successioni esponenziali a numeratore e denominatore si ottiene

$$a_n \leq 18 \cdot 3^n \cdot \frac{2^n}{7^n} \cdot \frac{\left(1 + \dfrac{n^{10}}{2^n}\right)}{\left(1 + \dfrac{1}{7^n}\right)} = 18 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n u_n$$

ove si è posto $u_n = \frac{\left(1 + \dfrac{n^{10}}{2^n}\right)}{\left(1 + \dfrac{1}{7^n}\right)}$, con $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, allora la successione a_n è maggiore di 0 per ogni n e maggiorata da una successione che tende a 0, per il Teorema dei Carabinieri si puó concludere che $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

5. Si consideri la successione

$$a_n = \frac{\left(\dfrac{5}{3}\right)^n + n^{10}}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^n + \sin(n)} - \frac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + n^2}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n^2}$$

Se la differenza non da luogo ad una forma indeterminata, si possono considerare i limiti dei due termini e poi farne la differenza. Mettendo in evidenza i termini che divergono, occorre notare che nel secondo termine, benché compaia una successione esponenziale, $\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$, questa tende a 0, quindi non è il termine da metter in evidenza, cioè si ha

$$a_n = \frac{\left(\dfrac{5}{3}\right)^n \left(1 + \dfrac{n^{10}}{\left(\dfrac{5}{3}\right)^n}\right)}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^n \left(1 + \dfrac{\sin(n)}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^n}\right)} - \frac{n^2 \left(\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}{n^2} + 1\right)}{n^2 \left(\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{n^2} + 1\right)}$$

Se si pone $u_n = \dfrac{1 + \dfrac{n^{10}}{\left(\dfrac{5}{3}\right)^n}}{1 + \dfrac{\sin(n)}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^n}}$ e $v_n = \dfrac{\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}{n^2} + 1}{\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{n^2} + 1}$

la successione si riscrive come

$$a_n = \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{5}\right)^n \cdot u_n - v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot u_n - v_n$$

dove u_n, v_n tendono ad 1.

Considerando che $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si ha

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \cdot 1 - 1 = -1.$$

6. La successione

$$a_n = \sqrt[7]{n} + n^2 \cos^2 n - 4n \cos n + 5$$

si riscrive nella forma

$$a_n = \sqrt[7]{n} + (n \cos n - 2)^2 - 4 + 5 = \sqrt[7]{n} + (n \cos n - 2)^2 + 1$$

completando il quadrato.
Alla luce di ciò si osserva che $(n \cos n - 2)^2 \geq 0$ per cui la successione è in particolare più grande di $\sqrt[7]{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero

$$a_n \geq \sqrt[7]{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

per cui a_n stessa diverge.

7. Si dimostrano separatamente le inclusioni dei due insiemi, per concludere che questi coincidono, ovvero si mostra che tutti gli elementi di $A \cap (B \cup C)$ sono elementi di $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ e viceversa.

   Si prende $z \in A \cap (B \cup C)$ e si vuole provare che $z \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Se $z \in A \cap (B \cup C)$, allora $z \in A$ e $z \in B \cup C$; in ogni caso $z \in A$. Inoltre o $z \in B$ o $z \in C$; nel primo caso si ha $z \in A$ e $z \in B$ quindi $z \in (A \cap B)$, nel secondo caso si ha $z \in A$ e $z \in C$ quindi $z \in (A \cap C)$. In tutti i casi $z \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

   Viceversa, si prende $z \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e si vuole provare che $z \in A \cap (B \cup C)$.
   Se $z \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, o $z \in (A \cap B)$, quindi $z \in A$ e $z \in B$ o $z \in (A \cap C)$, quindi $z \in A$ e $z \in C$. In tutti i casi $z \in A$; inoltre $z \in B$ oppure $z \in C$, quindi $z \in (B \cup C)$ da cui $z \in A \cap (B \cup C)$.