IV Tutorato 30 Ottobre 2014

1. Fattorizzare su $\mathbb{R}$ $x^6 + 1$

2. Risolvere $z^2 - 6\bar{z} = 3$

3. Se $iz^{15} = 2 + 3i$ cosa si può dire di $i(\bar{z})^{15}$?

4. Determinare i numeri complessi z tali che

$$\frac{z}{\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-1}} = z^2$$

5. a) Determinare i numeri complessi z tali che $Re(iz) = iRe(z)$.
   b) Determinare i numeri complessi z tali che $Im(iz) = iIm(z)$.

Soluzioni

1.

Per determinare la fattorizzazione reale del polinomio x^6+1, lo si fattorizza, dapprima, in campo complesso, ossia si determinano le radici del polinomio x^6+1, che sarebbero le radici seste complesse di -1, ovvero $x^6 = -1 = e^{i\pi}$.

A tal scopo si ricorda che un polinomio di grado n del tipo

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

con $a_n \neq 0$, si scrive come

$$a_n(x-x_1)\cdot \cdots \cdot (x-x_n)$$

ove $x_1, \ldots x_n$ sono le radici contate con la loro molteplicità.
Dalla formula generica le sei radici sono della forma:

$x_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)} \quad k = 0, \ldots, 5$ da cui si ricavano:

$x_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$
$x_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
$x_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$
$x_4 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{6\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$
$x_5 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{8\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{9\pi}{6}} = -i$
$x_6 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{10\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

Ricordando che $(x-\lambda)(x-\bar{\lambda})$ è un polinomio reale, il polinomio si fattorizza come segue, dove si sono ordinate le radici in modo da ottenere moltiplicazioni tra numeri complessi coniugati.

$$x^6+1 = (x-x_1)(x-x_6)(x-x_2)(x-x_5)(x-x_3)(x-x_4) =$$

$$= \left(x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\right) \cdot (x-i)(x+i) \cdot$$

$$\cdot \left(x - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\right) =$$

$$\left[\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{4}\right)\right][x^2-(-1)]\left[\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{4}\right)\right]=$$

$$=\left[\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right][x^2+1]\left[\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]=$$

$$=\left[x^2+\frac{3}{4}-\sqrt{3}x+\frac{1}{4}\right][x^2+1]\left[x^2+\frac{3}{4}+\sqrt{3}x+\frac{1}{4}\right]=$$

$$=\left[x^2+1-\sqrt{3}x\right]\left[x^2+1+\sqrt{3}x\right][x^2+1]=\left[(x^2+1)^2-3x^2\right][x^2+1]$$

2.

Si consideri l'equazione di variabile complessa

$$z^2-6\bar{z}=3$$

Sapendo che $z=a+ib, \bar{z}=a-ib, z^2=a^2-b^2+2aib$, l'equazione si scrive nella forma $a^2-b^2+2aib-6a+6ib-3=0$. Da questa si ottiene il seguente sistema imponendo l'uguaglianza tra la parte reale e la parte immaginaria dell'equazione.

$$\begin{cases}2ab+6b=0\\ a^2-b^2-6a-3=0\end{cases} \iff \begin{cases}2b(a+3)=0\\ a^2-b^2-6a=3\end{cases}$$

Le soluzioni della prima equazione danno luogo ai due sistemi seguenti

$$1)\begin{cases}b=0\\ a^2-6a-3=0\end{cases} \qquad 2)\begin{cases}a=-3\\ 9-b^2+18=3\end{cases}$$

Dal primo sistema ottengo $b=0$ e $a_{1,2}=3\pm\sqrt{9+3}=3\pm 2\sqrt{3}$; quindi $z_1=3+2\sqrt{3}$ e $z_2=3-2\sqrt{3}$.
Dal secondo sistema ottengo $a=-3$ e $b^2=24$, cioè $b=\pm 2\sqrt{6}$; quindi $z_3=-3+2\sqrt{6}i$ e $z_4=-3-2\sqrt{6}i$.

3.

Si moltiplica per $-i$ l'equazione

$$iz^{15}=2+3i$$

e si ottiene $z^{15} = -i(2+3i) = 3-2i$.
Passando al coniugato e ricordando che il coniugato di una potenza coincide con la potenza del coniugato si ha

$$\bar{z}^{15} = \overline{z^{15}} = 3 \bar{-} 2i = 3 + 2i$$

Moltiplicando nuovamente per i si ottiene

$$i\overline{z^{15}} = i(3+2i) = -2+3i$$

4.

L'equazione

$$\frac{z}{\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-1}} = z^2 \quad \text{equivale a} \quad \frac{z}{\frac{z-i+z+i}{(z+i)(z-1)}} = z^2 \quad \text{ovvero,}$$

$$\frac{z(z+i)(z-1)}{2z-1+i} = z^2 \quad \text{che equivale a}$$

$$\frac{z(z^2-z+iz-i) - z^2(2z-1+i)}{2z-1+i} = 0$$

che vale quando il numeratore è nullo e il denominatore è non nullo. Si osserva che le soluzioni che si troveranno sono accettabili dato che si vede facilmente che non annullano nessuno dei denominatori coinvolti.

Si ha
$z^3 - z^2 + iz^2 - iz - 2z^3 + z^2 - iz^2 = 0$ cioè $z^3 + iz = 0$, le cui soluzioni si ottengono considerando

$$z(z^2+i) = 0$$

e si ottiene $z = 0$ e $z^2 = -i$. Le soluzioni sono 0 e le radici seconde di $-i$, scrivendo $-i = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ con $\cos(\alpha) = 0$ e $\sin(\alpha) = -1$ (si ha $\alpha = \frac{3}{2}\pi$) si ha

$$z_{1,2} = \pm e^{i\frac{3}{4}\pi} = \pm\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Visto che $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$ e $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$, si ottiene
$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{1+\cos(\frac{3\pi}{2})}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ e
$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\frac{3\pi}{2})}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Osservazione: Analogamente, se l'equazione fosse $z^2 = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ si determina z con le formule di bisezione, ovvero se $z^2 = \cos\theta + i\sin\theta$, allora

$$z = \pm\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) = \pm\left(\sqrt{1+\cos\theta} + i\sqrt{1-\cos\theta}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\frac{3}{5}} + i\sqrt{1-\frac{3}{5}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{8}{5}} + i\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{i}{\sqrt{5}}\right)$$

Tale esempio mostra che pur non conoscendo θ esplicitamente, si possono ricavare i valori del seno e del coseno in $\frac{\theta}{2}$ senza problemi, in quanto nella formula di bisezione basta conoscere $\cos(\theta)$ ed in questo caso vale $\cos(\theta) = \frac{3}{5}$.

Per determinare il segno delle radici (in questo caso segno positivo sia davanti al seno sia davanti al coseno, nel caso precedente segno negativo davanti al coseno e positivo davanti al seno), si osserva che il numero $\left(\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}\right)$, trovandosi nel primo quadrante, ha argomento θ compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, quindi la sua metà, $\frac{\theta}{2}$ si troverà compresa tra 0 e $\frac{\pi}{4}$ e quindi il numero complesso corrispondente $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ sta ancora nel primo quadrante, e ha quindi parte reale e parte immaginaria positiva.

Si osserva inoltre che in queste considerazioni si è usato il fatto che, data una delle due radici, esclusivamente nel caso della radice quadrata, l'altra si ottiene cambiando segno.

Infatti la formula dalla formula generale si ha $\cos(u) + i\sin(u)$, ove $u = \frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2}$ con k=0,1. Quando k=1 si ottiene $\frac{\theta}{2} + \pi$, che per le regole della trigonometria, calcolato nell'argomento delle funzioni è equivalente al numero cambiato di segno.

In questi casi si ha sempre avuto a che fare con numeri di modulo 1, cioè il numero i e il numero $\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$. Per trovare la radice quadrata, ad esempio di $3 + i$, occorre, dapprima, scrivere il suo modulo (in questo caso $\sqrt{10}$), e poi scrivere il numero come segue $3 + i = \sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}} + i\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, le radici si ottengono

$$\sqrt{\sqrt{10}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

ove $\cos(\theta)=\frac{3}{\sqrt{10}}$. Da qui si procede come in precedenza ricordando che si ha $\sqrt{\sqrt{10}}=\sqrt[4]{10}$.

Questo problema si puó comunque risolvere in un altro modo. Per trovare le radici quadrate di un numero $z=x+iy$ si puó scrivere il numero w tale che $w^2=z$. Posto $w=a+ib$ si scrive $(a+ib)^2=x+iy$, ossia $a^2-b^2+i2ab=x+iy$, da questa equazione si ricava un sistema uguagliando parte reale e parte immaginaria nei due membri, ossia $a^2-b^2=x, 2ab=y$. Si risolve il sistema in a e b (tenendo conto che entrambi devono essere numeri reali) e si ricava la soluzione.

5.

Per ogni numero complesso $z\in\mathbb{C}$, la sua parte reale e la sua parte immaginaria sono numeri reali. L'esercizio chiede che valga un'uguaglianza tra un numero reale ed un numero immaginario puro (numero complesso in cui la parte reale è nulla); per vederlo nel dettaglio si consideri $z=a+ib$ con $a,b\in\mathbb{R}$, in cui la parte reale è a, e b la parte immaginaria. Se si considera iz si ha $iz=ai-b$: la sua parte reale è $-b$, la sua parte immaginaria è a. a) Affinché valga la relazione si deve avere

$$Re(iz)=-b=ia=iRe(z)$$

Tale l'uguaglianza vale se $a=b=0$, quindi $z=a+ib=0$.

b) Analogamente vale per la parte immaginaria, ovvero

$$Im(iz)=a=ib=iIm(z)$$

Anche in questo caso si ha $a=b=0$, quindi $z=0$.