

III Tutorato 23 Ottobre 2014

1) *Esercizi proposti nei compiti dei vari anni*

1. Sia $\Gamma(f)$ il grafico di $f(x) = x^{10}((7x - 10)^{-1/2} - 5) + 3$. Dire quali punti di $\Gamma(f)$ appartengono alla retta di equazione $y = 3$.
2. Siano α, β le funzioni definite da

$$\alpha(x) = x - 2$$

$$\beta(x) = (3^x - 9)(16 - 4x)(x - 1)(x + 3)$$

Siano u e v le funzioni definite da

$$u(x) = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)|$$

$$v(x) = |\alpha(x)| + |\beta(x)|$$

Dire quali punti del grafico di u appartengono alla retta $y = 0$ e quali punti del grafico di v appartengono alla retta $y = 0$.

2) *Grafici di funzioni elementari*

1. $7 - 2x$
2. x^3
3. $x^4 - 5$
4. $(x + 2)^5$
5. $|2^{|x-3|} - 7|$
6. $2 \sin x + 4$
7. $\ln(x + 3)$

3) Numeri complessi

0. Dato il numero complesso $z = 1 - i$ determinare il suo coniugato, il suo modulo e collocarlo sul piano di Gauss.
1. $|(3 + i)^2 - 7|$
2. $(3 + 2i)(7 - 4i)$
3. $\frac{2 + i}{5 - i}$
4. $|(3 + 2i)(1 + i) - 7|$

Soluzioni 1

1. Per trovare le intersezioni tra i grafici delle due funzioni occorre studiare il sistema seguente, in cui si tiene in considerazione anche la condizione di esistenza del radicando $(7x - 10)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{7x - 10}}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 3 \\ y = x^{10} ((7x - 10)^{-1/2} - 5) + 3 \\ 7x - 10 > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = 3 \\ 3 = x^{10} ((7x - 10)^{-1/2} - 5) + 3 \\ 7x - 10 > 0 \end{cases} \iff \\ \begin{cases} y = 3 \\ 0 = x^{10} ((7x - 10)^{-1/2} - 5) \\ 7x - 10 > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \\ 7x - 10 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 3 \\ ((7x - 10)^{-1/2} - 5) = 0 \\ 7x - 10 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il primo sistema non ammette soluzioni, dal secondo si ha

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 3 \\ \frac{1}{\sqrt{7x - 10}} = 5 \\ 7x - 10 > 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = 3 \\ \sqrt{7x - 10} = \frac{1}{5} \\ x > \frac{10}{7} \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3 \\ x = \left(\frac{1}{25} + 10\right) \frac{1}{7} \\ x > \frac{10}{7} \end{cases} \iff \\ \begin{cases} y = 3 \\ x = \frac{251}{175} \\ x > \frac{10}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Il punto d'intersezione dei grafici delle due funzioni ha coordinate $\left(\frac{251}{175}, 3\right)$.

2. Per trovare i punti del grafico di u che appartengono alla retta $y = 0$ occorre studiare il sistema seguente

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 0 \\ u(x) = y \end{cases} &\iff \begin{cases} y = 0 \\ |\alpha(x) \cdot \beta(x)| = 0 \end{cases} \iff \\ \begin{cases} y = 0 \\ |x - 2||3^x - 9||16 - 4x||x - 1||x + 3| = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono $x = 2 \vee x = 4 \vee x = 1 \vee x = -3$.

Per trovare i punti del grafico di v che appartengono alla retta $y = 0$ occorre studiare il sistema seguente

$$\begin{cases} y = 0 \\ v(x) = y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ -|\alpha(x)| = |\beta(x)| \end{cases} \iff$$

Poiché $-|\alpha(x)|$ è sempre non positivo, mentre $|\beta(x)|$ è sempre non negativo, l'unica possibilità che siano uguali è che siano entrambi nulli, ovvero

$$\alpha(x) = 0 = \beta(x)$$

Per quanto visto nella parte precedente di questo esercizio, le funzioni α e β hanno una radice comune, quindi sono entrambe nulle se $x = 2$.

Soluzioni 2

1. È il grafico di una retta passante per il punto $(0, 7)$ e di pendenza -2 , oppure la si determina mediante due punti per cui passa, ad esempio $(0, 7)$ e $(1, 5)$. In generale le funzioni che hanno come grafico una retta sono tutte e sole quelle della forma $ax + b$. Per determinare la retta o si vede che passa per il punto $(0, b)$ e ha pendenza a o si trovano due punti per cui passa.
2. È il grafico di una funzione elementare.
3. Si trasla il grafico di x^4 verso il basso di 5.
4. Si trasla il grafico di x^5 verso sinistra di 2 .
5. Si disegna prima il grafico di 2^x , poi quello di $2^{|x|}$, ossia si riflette la parte a destra dell'asse delle ordinate rispetto all'asse delle y . Ora si trasla tale grafico di 3 verso destra, ottenendo così il grafico di $2^{|x-3|}$. Si trasla, infine, il grafico ottenuto di 7 verso il basso. Per ottenere il grafico richiesto, si riflette la parte sotto l'asse delle ascisse rispetto all'asse delle x .
6. Si disegna il grafico della funzione seno. Si dilata tale grafico di 2 e si trasla di 4 verso l'alto.
7. Si trasla il grafico della funzione logaritmo di 3 verso sinistra.

Soluzioni 3

1. Si svolge il quadrato per determinare esplicitamente la parte reale e quella immaginaria del numero $|(3+i)^2 - 7| = |9 - 1 + 6i - 7| = |1 + 6i|$ per definizione il modulo vale $\sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$.
2. Si svolge il prodotto termine a termine $(3 + 2i)(7 - 4i) = 21 - 12i + 14i - 8(-1) = 21 + 8 + (-12 + 14)i = 29 + 2i$.
3. Si moltiplicano numeratore e denominatore per il coniugato del numero a denominatore, cioè $\frac{2+i}{5-i} = \frac{(2+i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{10 + 2i + 5i - 1}{25 + 1} = \frac{9 + 7i}{26} = \frac{9}{26} + \frac{7i}{26}$.
4. Si svolge il prodotto per determinare esplicitamente la parte reale e quella immaginaria del numero $|(3 + 2i)(1 + i) - 7| = |3 + 3i + 2i + 2(-1) - 7| = |-4 + 5i - 2| = |-6 + 5i|$ per definizione il modulo vale $\sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}$.