II Tutorato 16 Ottobre 2014

1)Esercizi proposte nei compiti dei vari anni

Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni

a) $\sqrt{(x^3-2)x+2-x^3}\left(\frac{x^8}{1-2x^8}-7\right)<0$

b) $\left(\sqrt{(x^3-2)x+2-x^3}+x^6+6^x\right)\left(\frac{x^8}{1-2x^8}-7\right)<0$

c) $\frac{1}{(3x+5)^7}+\sqrt{x^8-\frac{9}{10}}<6+\sqrt{x^8-\frac{9}{10}}$

d) $\left(x^8+\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{(3x+5)^7}}<\left(x^8+\frac{1}{10}\right)^6$

e) $(86^4-(3x-1)^4)(x^7-2)\leq 0$

f) $\frac{\sqrt{86^4-(3x-1)^4}}{\sqrt[4]{x^7-2}\sqrt[4]{17-x}}>0$

g) Dire per quali $x\in\mathbb{R}$ almeno uno tra $86^4-(3x-1)^4$ e $(x^7-2)(17-x)$ è maggiore di 0.

h) Risolvere l'equazione $\sqrt{1-x^2}=x$.

2)Grafici di funzioni elementari

Disegnare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni

a) $4-3x$

b) x^5

c) x^4

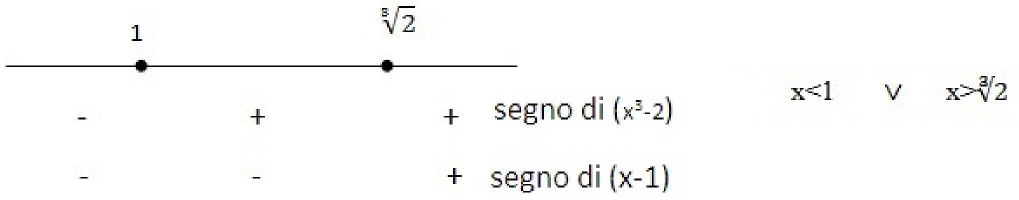
d) x^5+2

e) $(x-3)^5+2$

f) $|(x-3)^5+2|$

Soluzioni 1

a) Affinché la disequazione $\sqrt{(x^3-2)x+2-x^3}\left(\dfrac{x^8}{1-2x^8}-7\right)<0$ abbia senso, occorre studiare quando $(x^3-2)x+2-x^3\geq 0$, ovvero $(x^3-2)(x-1)\geq 0 \Rightarrow x\leq 1 \vee x\geq \sqrt[3]{2}$.
D'altra parte, poichè nella disequazione compare una disuguaglianza stretta, si può escludere il caso in cui il radicando è uguale a zero.



La soluzione è $x<1 \vee x>\sqrt[3]{2}$
In questi intervalli il termine $\sqrt{(x^3-2)x+2-x^3}$ è sempre maggiore di zero; ci si può quindi limitare a studiare quando $\left(\dfrac{x^8}{1-2x^8}-7\right)<0$.
Si ha quindi

$$\begin{cases} x<1 \quad \vee \quad x>\sqrt[3]{2} \\ \dfrac{x^8-7+14x^8}{1-2x^8}<0 \end{cases}$$

Si studia la disequazione

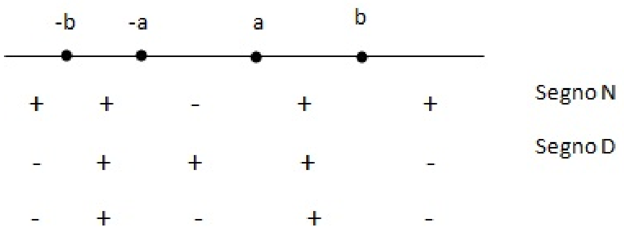
$$\frac{x^8-7+14x^8}{1-2x^8}<0 \iff \frac{15x^8-7}{1-2x^8}<0.$$

Dallo studio del numeratore si ha

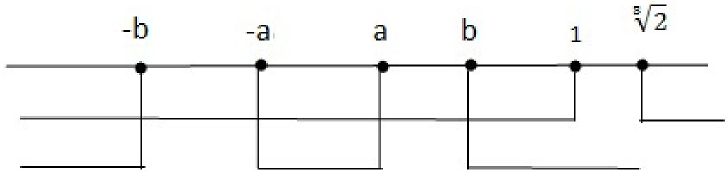
$N>0$ equivale a $15x^8-7>0 \Rightarrow x^8>\dfrac{7}{15}$ che vale per
$x>\sqrt[8]{7/15}:=a \;\; \vee x<-\sqrt[8]{7/15}:=-a$

Dallo studio del denominatore si ha

$D > 0$ equivale a $1 - 2x^8 > 0 \iff x^8 < \dfrac{1}{2}$ che vale per $-b := -\sqrt[8]{1/2} < x < \sqrt[8]{1/2} := b$



Dallo studio del sistema si ha

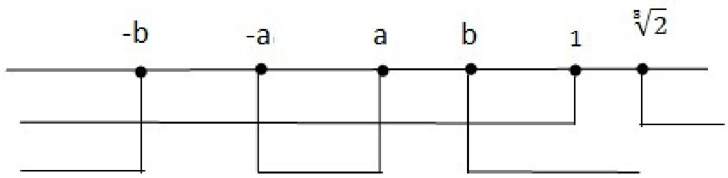


La soluzione è $x < -b \vee -a < x < a \vee b < x < 1 \vee x > \sqrt[3]{2}$

b) A differenza dell'esercizio precedente, nel primo fattore della disequazione

$$\left(\sqrt{(x^3-2)x+2-x^3} + x^6 + 6^x\right)\left(\frac{x^8}{1-2x^8} - 7\right) < 0$$

compaiono i termini $x^6 + 6^x$ che sono sempre positivi. Lo studio della disequazione è riconducibile a quella del punto precedente, ma in questo caso la disequazione è valida anche nei punti in cui si annulla il radicando, ovvero



La soluzione è $x < -b \vee -a < x < a \vee b < x \leq 1 \vee x \geq \sqrt[3]{2}$

c) La disequazione è equivalente a $\dfrac{1}{(3x+5)^7} < 6$ quando vale la condizione d'esistenza della radice cioè per $x^8 \geq \dfrac{9}{10}$, ovvero

$$\frac{1-6(3x+5)^7}{(3x+5)^7} < 0 \wedge \left(x \leq -\sqrt[8]{\frac{9}{10}} \vee x \geq \sqrt[8]{\frac{9}{10}}\right)$$

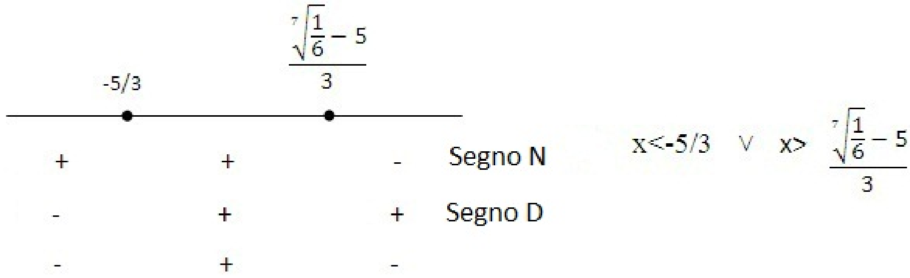
Nota: sarebbe sbagliato "capovolgere" $(3x+5)^7 > \frac{1}{6}$ dato che la regola $a < b \iff \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ vale se a e b sono positivi mentre in questo caso non si conosce il segno di $(3x+5)$. Ad esempio mentre $-2 < 1$ non vale $-\frac{1}{2} > 1$.

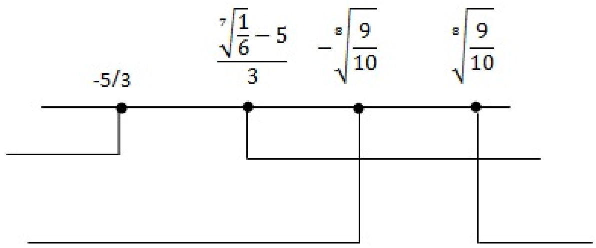
Si studiano separatamente numeratore e denominatore

$N > 0$ equivale a $1 - 6(3x+5)^7 > 0$, ovvero $(3x+5)^7 < \dfrac{1}{6} \iff x < \dfrac{\left(\sqrt[7]{\frac{1}{6}} - 5\right)}{3}$

$D > 0$ equivale a $(3x+5)^7 > 0 \iff 3x+5 > 0$, da cui $x > -\dfrac{5}{3}$

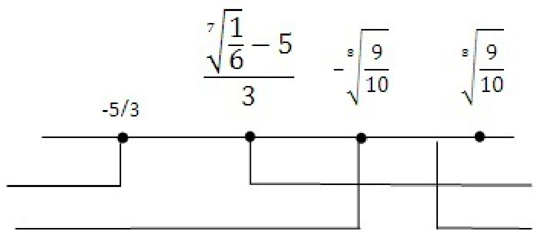
Considerando la condizione di esistenza della radice, si ottiene





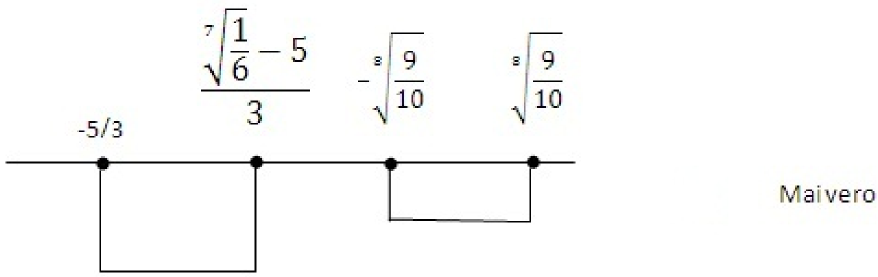
La soluzione è $x < -\dfrac{5}{3} \vee \dfrac{\left(\sqrt[7]{\dfrac{1}{6}}-5\right)}{3} < x \leq -\sqrt[8]{\dfrac{9}{10}} \vee x \geq \sqrt[8]{\dfrac{9}{10}}$

d) La disequazione $\left(x^8+\dfrac{1}{10}\right)^{\dfrac{1}{(3x+5)^7}} < \left(x^8+\dfrac{1}{10}\right)^6$ è vera se le basi sono maggiori di uno e tra gli esponenti vale la relazione $\dfrac{1}{(3x+5)^7} < 6$ oppure vale quando le basi sono comprese tra 0 e 1 e tra gli esponenti vale $\dfrac{1}{(3x+5)^7} > 6$. Nel primo caso, per quanto visto in precedenza, si ha che la relazione $\dfrac{1}{(3x+5)^7} < 6$ vale per $x < -\dfrac{5}{3} \vee x > \dfrac{\left(\sqrt[7]{\dfrac{1}{6}}-5\right)}{3}$.
Quindi $\left(x^8+\dfrac{1}{10}\right) > 1 \iff x^8 > \dfrac{9}{10}$ che vale per $x < -\sqrt[8]{\dfrac{9}{10}} \vee x > \sqrt[8]{\dfrac{9}{10}}$



La soluzione è $x < -\dfrac{5}{3} \vee \dfrac{\left(\sqrt[7]{\dfrac{1}{6}} - 5\right)}{3} < x < -\sqrt[8]{\dfrac{9}{10}} \vee x > \sqrt[8]{\dfrac{9}{10}}$

Nel secondo caso, con considerazioni simili a quelle appena esaminate, si ha
$-\dfrac{5}{3} < x < \dfrac{\left(\sqrt[7]{\dfrac{1}{6}} - 5\right)}{3}$ e $0 < x^8 + \dfrac{1}{10} < 1$ che vale per $-\dfrac{1}{10} < x^8 < \dfrac{9}{10}$.
Essendo la prima sempre verificata, ci si limita a considerare solo la seconda $x^8 < \dfrac{9}{10}$, da cui $-\sqrt[8]{\dfrac{9}{10}} < x < \sqrt[8]{\dfrac{9}{10}}$, si ha

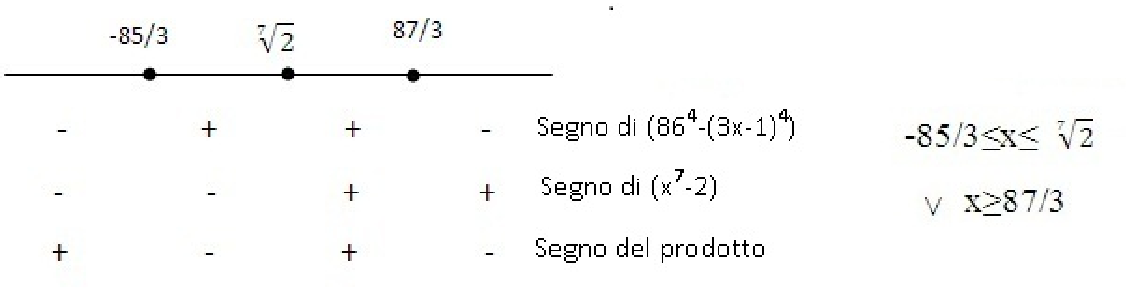


Poiché il secondo caso non è mai verificato, la soluzione globale (data dall'unione delle 2 soluzioni) coincide con quella del primo caso.

e) Si studiano i segni dei due fattori. La disequazione $(86^4 - (3x-1)^4) \geq 0$ è vera per $|3x - 1| \leq 86$, da cui $-\dfrac{85}{3} \leq x \leq \dfrac{87}{3} = 29$.

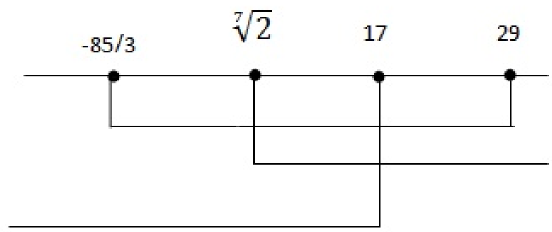
Mentre $x^7 - 2 \geq 0$ per $x \geq \sqrt[7]{2}$.

Si ha quindi



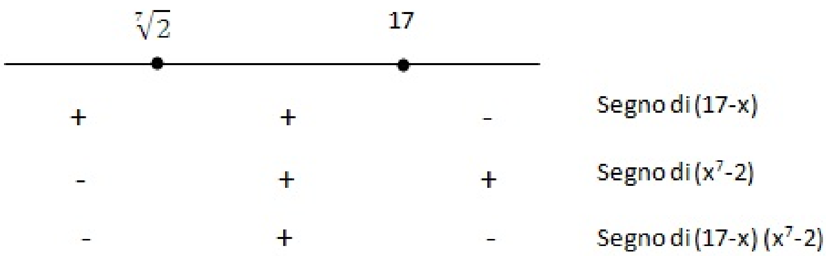
-85/3
$\sqrt[7]{2}$
87/3
Segno di $(86^4-(3x-1)^4)$
Segno di (x^7-2)
Segno del prodotto
$-85/3 \leq x \leq \sqrt[7]{2}$
$\vee \; x \geq 87/3$

f) Affinché la disequazione $\dfrac{\sqrt{86^4-(3x-1)^4}}{\sqrt[4]{x^7-2}\sqrt[4]{17-x}} > 0$ abbia senso occorre che $86^4-(3x-1)^4 \geq 0$. D'altra parte, poiché nella disequazione compare una disuguaglianza stretta, si può escludere il caso in cui il radicando si annulla. Quindi si studia $86^4-(3x-1)^4 > 0$ che vale per $-\dfrac{85}{3} < x < 29$. Si deve inoltre avere per motivi analoghi $x^7-2>0$ e $17-x>0$ ovvero $x > \sqrt[7]{2} \wedge x < 17$. La disequazione è chiaramente verificata se e solo se le tre disuguaglianze valgono simultaneamente.



La soluzione è $\sqrt[7]{2} < x < 17$

g) Il primo termine è positivo per $-\dfrac{85}{3} < x < 29$. Per verificare che $(x^7-2)(17-x) > 0$ occorre studiare il segno dei 2 fattori. Dal primo si ha $x > \sqrt[7]{2}$, dal secondo $x < 17$.



Affinché almeno uno dei due termini sia positivo occorre che $-\frac{85}{3} < x < 29$ infatti si ha

$$\begin{cases} x < -\frac{85}{3} & \text{entrambe negative} \\ -\frac{85}{3} < x < \sqrt[7]{2} & 86^4 - (3x-1)^4 \text{ è positiva e l'altra negativa} \\ \sqrt[7]{2} < x < 17 & \text{entrambe positive} \\ 17 < x < 29 & 86^4 - (3x-1)^4 \text{ è positiva e l'altra negativa} \\ x > 29 & \text{entrambe negative} \end{cases}$$

h) Dalla condizione d'esistenza $1 - x^2 \geq 0$ si ha che $-1 \leq x \leq 1$. L'equazione implica $1 - x^2 = x^2$ che vale se e solo se $2x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tali soluzioni sono compatibili con la condizione di esistenza. Però mentre l'equazione $\sqrt{1-x^2} = x$ implica $1 - x^2 = x^2$, non vale l'implicazione opposta. Infatti per $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ si avrebbe $\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ che è falsa.
Per ottenere un problema equivalente a $\sqrt{1-x^2} = x$ occorre aggiungere la condizione $x \geq 0$ che intersecata con la condizione d'esistenza da luogo a $0 \leq x \leq 1$.
Riassumendo

$$\sqrt{1-x^2} = x \iff \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x^2 = x^2 \end{cases}$$

In questo caso si ottiene l'unica soluzione $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Soluzioni 2

a) b) c) I grafici delle prime 3 funzioni sono elementari

d) Per ottenere il grafico basta traslare il grafico di x^5 verso "l'alto di 2"

e) Per ottenere il grafico basta traslare il grafico di x^5 verso "destra di 3" e "in alto di 2"

f) Per ottenere il grafico basta riflettere la parte sotto l'asse delle ascisse rispetto all'asse x.