I Tutorato 9 Ottobre 2014

Alcuni degli esercizi proposti per il corso di Matematica 0 per Biotecnologie AA 05/06

1. Verificare la seguente uguaglianza
$$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}$$
2. Semplificare l'espressione
$$\frac{2^{5n}4^n}{8^{2n}}$$
3. Dire quali dei seguenti numeri sono razionali:
   a) $\frac{3}{2}$
   b) $\frac{\sqrt{2}}{7}$
   c) $2\sqrt{2}+3$
   d) $(\sqrt{2}+1)^2 - 2\sqrt{2}$
4. Dire quali delle seguenti disuguaglianze sono vere, (cioè *vere per ogni* $x \in \mathbb{R}$), usando le regole delle potenze
   a) $x^5 < (x+1)^5$
   b) $x^6 < (x+1)^6$
   c) $(x+x^3)^5 \geq x^5$
   d) $(x+x^4)^5 \geq x^5$
   e) $6^{x+7} > 6^x$
   f) $(x-2)^7 > (x-2)^5$

   Di alcune di queste si può dire che, pur non essendo vere per ogni $x \in \mathbb{R}$, sono vere per certi valori di x. Quali valori di x?

Soluzioni

1. Si può mettere in evidenza il fattore $\sqrt{2}$ e si ottiene
$$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}$$
semplificando numeratore e denominatore.

2. Un modo possibile per risolvere questo esercizio è scrivere i numeri che compaiono nella frazione come potenze di 2, ovvero
$$\frac{2^{5n}4^n}{8^{2n}} = \frac{2^{5n}(2^2)^n}{(2^3)^{2n}} = \frac{2^{5n}\cdot 2^{2n}}{2^{6n}} = 2^{5n+2n-6n} = 2^n$$

3. Un numero p è razionale se esistono $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$ tali che $p = \dfrac{n}{m}$

   a) $\dfrac{3}{2}$ è un numero razionale.

   b) Se $\dfrac{\sqrt{2}}{7}$ fosse un numero razionale dovrebbero esistere $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$ tali che $\dfrac{\sqrt{2}}{7} = \dfrac{n}{m}$ ovvero $\sqrt{2} = \dfrac{7n}{m}$. Questo vorrebbe dire che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, arrivando ad un assurdo (si assume noto che $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). L'assurdo nasce dall'aver supposto l'esistenza di $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$ tali che $\dfrac{\sqrt{2}}{7} = \dfrac{n}{m}$ quindi $\dfrac{\sqrt{2}}{7}$ non è razionale.

   c) Analogamente si suppone l'esistenza di $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$ tali che $2\sqrt{2}+3 = \dfrac{n}{m}$ ovvero $2\sqrt{2} = \dfrac{n}{m} - 3 = \dfrac{n-3m}{m}$, ossia
$$\sqrt{2} = \frac{n-3m}{2m}$$
   poiché $n-3m, 2m \in \mathbb{Z}$ e $2m \neq 0$ vorrebbe dire che $\sqrt{2}$ è razionale, arrivando ad un assurdo.

   d) Tale esercizio mostra che non è sufficiente la presenza di $\sqrt{2}$ in un'espressione numerica per concludere che il numero è irrazionale. Infatti $(\sqrt{2}+1)^2 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 + 1^2 + 2\sqrt{2}\cdot 1 - 2\sqrt{2} = 3 \in \mathbb{Q}$.

4. a) Nella disequazione $x^5 < (x+1)^5$ compaiono potenze dispari, per cui la disuguaglianza è vera se e solo se sussiste la stessa disuguaglianza tra le basi, ovvero
$$x < x+1.$$

Tale disuguaglianza vale per ogni $x \in \mathbb{R}$

b) Si propongono due soluzioni della disequazione $x^6 < (x+1)^6$

- Si riscrive nel seguente modo

  $$(x^2)^3 < [(x+1)^2]^3$$

  Poiché si ha un esponente dispari la disuguaglianza equivale a quella tra le basi $(x^2) < (x+1)^2$
  Svolgendo il quadrato si ha $x^2 < x^2 + 2x + 1$ quindi
  $2x + 1 > 0 \iff x > -\dfrac{1}{2}$

- Essendo la potenza pari la disuguaglianza equivale a quella tra i moduli delle basi $|x| < |x+1|$. Se $x \neq -1$ si possono dividere entrambi i membri per $|x+1|$ e si ha

  $$\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1$$

  da cui $-1 < \dfrac{x}{x+1} < 1$. Dalla prima disuguaglianza si ha $x > -\dfrac{1}{2}$; la seconda è sempre vera. Dall'intersezione delle 2 soluzioni si ottiene $x > -\dfrac{1}{2}$ coerentemente con il caso precedente. Si osserva inoltre che $x = -1$ non soddisfa la disuguaglianza. Un altro modo per vedere che non è sempre vera segue dal fatto che $(x+1)^6$ può essere 0 mentre x^6 non è mai minore di 0.

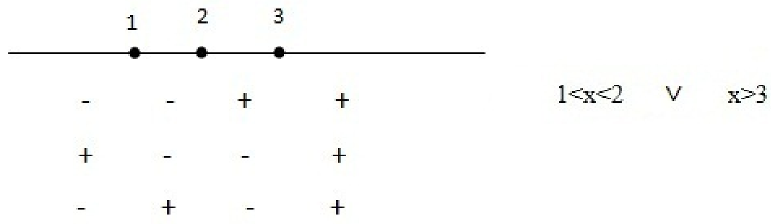
c)Anche in questo caso $(x + x^3)^5 \geq x^5$ equivale a $x + x^3 \geq x$ ovvero $x^3 \geq 0$, vera se e solo se $x \geq 0$.

d)Analogamente $(x + x^4)^5 \geq x^5$ implica $x + x^4 \geq x$ ovvero $x^4 \geq 0$ che è vera $\forall x \in \mathbb{R}$.

e)Essendo $6 > 1$ la disequazione $6^{x+7} > 6^x$ sussiste se la stessa vale per gli esponenti, ovvero $x + 7 > x$ che equivale a $7 > 0$, sempre vero.

f)Non è scorretto risolvere $(x-2)^7 > (x-2)^5$ nel modo seguente:

$(x-2)^7 - (x-2)^5 > 0$ e mettendo in evidenza il fattore $(x-2)^5$ si ottiene $(x-2)^5[(x-2)^2-1] > 0$.
Si studiano, quindi, separatamente i segni dei due fattori $(x-2)^5 > 0$ e $(x-2)^2 - 1 > 0$, ovvero $x-2>0$ e $(x-2)^2 > 1$ che vale quando $x-2>1$ o $x-2<-1$. Quindi la disequazione di partenza vale per $x \in (1,2) \cup (3,\infty)$.



La soluzione ottenuta è $1 < x < 2 \vee x > 3$.

Un modo di vederlo che coinvolge più direttamente le proprietà delle potenze è il seguente.

$$\text{Sapendo che} \begin{cases} n < m \iff a^n < a^m & \text{se } a > 1 \\ n < m \iff a^n > a^m & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

dato che $7 > 5$ la disuguaglianza è sicuramente vera se $x-2>1$ ossia $x>3$ e falsa se $0 < x-2 < 1$ ossia $2 < x < 3$.

Disequazioni proposte nei compiti dei vari anni

1. $\dfrac{(x-3)(x-5)}{(x-2)} \leq 0$

2. $[(3x+1)^6 - 2](7 - x^3) < 0$

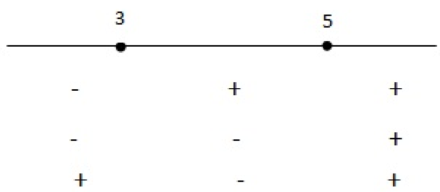
3. $x^4 < x^2$

4. $(2x-1)^7 \sqrt{(x-4)^{16} - 2} < (4x-2)^7$

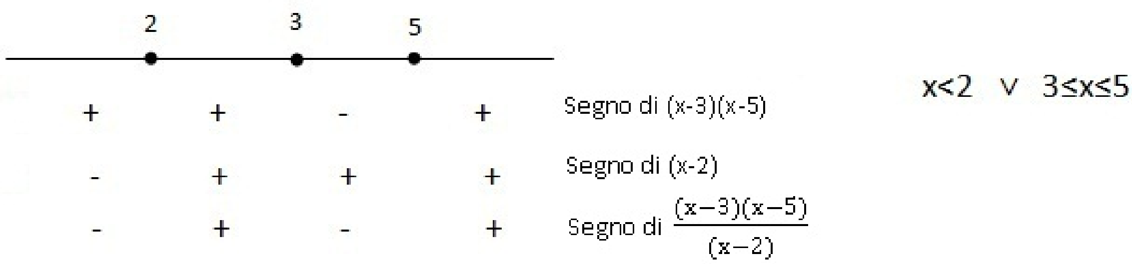
Soluzioni

1. Nella disequazione $\dfrac{(x-3)(x-5)}{(x-2)} \leq 0$ si studiano separatamente il segno del numeratore (per brevità N) e del denominatore (nel seguito D).

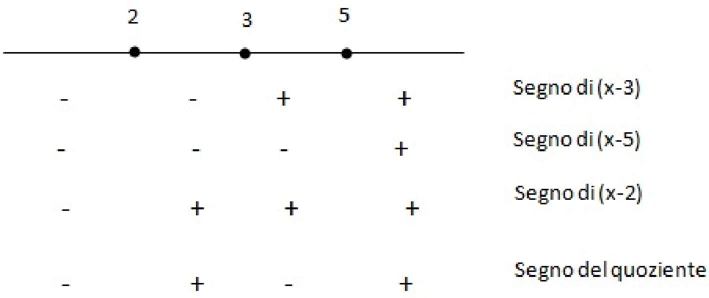
   $N \geq 0$ ovvero $(x-3)(x-5) \geq 0$ vale, come si vede dal disegno sotto, per i valori "esterni" alle soluzioni dell'equazione associata, cioè $x \leq 3 \vee x \geq 5$



   Mentre $D > 0 \iff x > 2$.



Si potrebbero anche studiare insieme i tre fattori, cioè

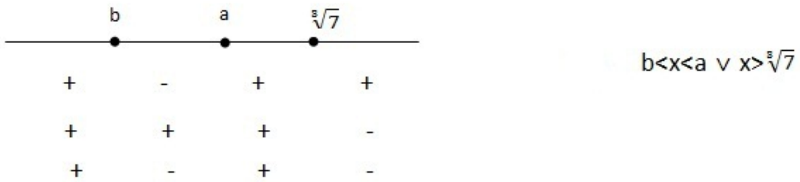


2. Nella $[(3x+1)^6 - 2](7 - x^3) < 0$ si studiano i segni dei due fattori.

   Si studia il segno del primo fattore. Si ha $(3x+1)^6 - 2 > 0 \iff (3x+1)^6 > 2$ la cui soluzione si può scrivere sinteticamente come $|3x+1| > \sqrt[6]{2}$ che significa $3x+1 > \sqrt[6]{2}$ o $3x+1 < -\sqrt[6]{2}$ che equivale a

$$x > \frac{\sqrt[6]{2} - 1}{3} := a \quad \text{o} \quad x < \frac{-1 - \sqrt[6]{2}}{3} := b$$

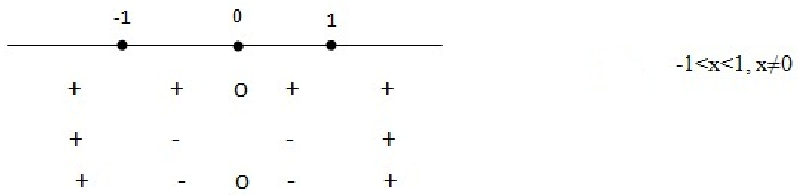
   Si studia il segno del secondo fattore. $7 - x^3 > 0 \iff x^3 < 7$ ovvero $x < \sqrt[3]{7}$



   La disuguaglianza è vera per $b < x < a \vee x > \sqrt[3]{7}$

3. Nella disequazione $x^4 < x^2$ si mette in evidenza il fattore x^2 come segue $x^4 - x^2 < 0$ mettendo in evidenza x^2 si ha $x^2(x^2 - 1) < 0$.

   Si studiano i segni dei due fattori, cioè quando valgono le disuguaglianze $x^2 > 0$ e $x^2 - 1 > 0$. La prima è vera per ogni valore $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mentre dalla seconda si ha $x^2 > 1$ che vale $x < -1 \vee x > 1$



La disuguaglianza è vera per $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$.

Nota: quando si studia il segno di un prodotto bisogna controllare ove ogni singolo fattore si annulla. Nel caso precedente se si fosse trascurata questa verifica si sarebbe ottenuta la soluzione sbagliata $(-1,1)$

4. Della disequazione $(2x-1)^7\sqrt{(x-4)^{16}-2} < (4x-2)^7$ si consideri, inizialmente, il secondo membro

$$(4x-2)^7 = [2(2x-1)]^7 = 2^7(2x-1)^7$$

per cui si può riscrivere

$$(2x-1)^7\sqrt{(x-4)^{16}-2} < 2^7(2x-1)^7$$

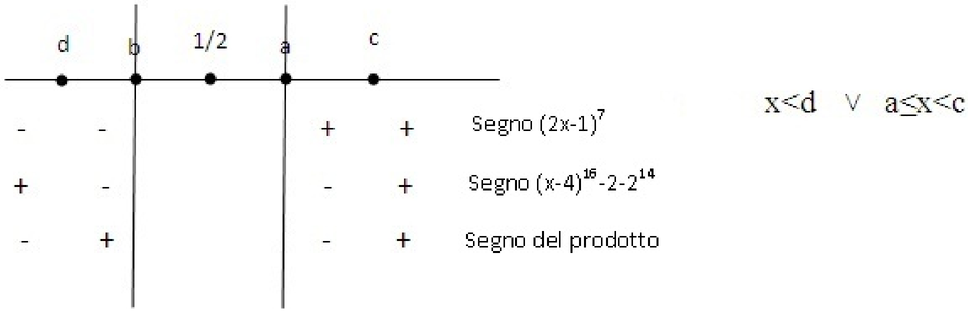
Si osserva preliminarmente che la disuguaglianza ha senso se il radicando è > 0.
$(x-4)^{16}-2 \geq 0$ che equivale a $x \geq \sqrt[16]{2}+4 := a$ o $x \leq -\sqrt[16]{2}+4 := b$.
Quindi i valori in (b,a) vanno a priori esclusi.
Per tali valori della variabile x si può studiare la disequazione

$$(2x-1)^7[\sqrt{(x-4)^{16}-2}-2^7)] < 0$$

Si studiano i segni dei singoli fattori. Si ha $(2x-1)^7 > 0 \iff 2x-1 > 0$ cioè $x > \dfrac{1}{2}$ e

$$\sqrt{(x-4)^{16}-2}-2^7 > 0 \iff \sqrt{(x-4)^{16}-2} > 2^7$$

Elevando al quadrato si ha $(x-4)^{16}-2 > 2^{14}$ che vale se e solo se $x > \sqrt[16]{2^{14}+2}+4 := c$ o $x < -\sqrt[16]{2^{14}+2}+4 := d$



Nota: per vedere se i punti estremi dei vari intervalli sono o no nell'insieme soluzione, un modo semplice è sostiutirli. Nel caso specifico d e c annullano uno dei due fattori, quindi la disuguaglianza non è valida, mentre a annulla il radicando ma giace nell'intervallo ove uno dei due fattori è positivo e l'altro negativo, quindi soddisfa la disuguaglianza.