

1. (a) Si consideri il reticolo  $\mathbf{D}_{12}$ . Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbf{D}_{12}$  sono sottoreticoli e quali sono isomorfi tra loro:  $\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\{1, 2, 4, 6\}$ ,  $\{1, 2, 3, 6\}$ ,  $\{2, 4, 6, 12\}$ ,  $\{1, 2, 4, 12\}$ .

(b) Si consideri il reticolo  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 60\}$ , ordinato tramite la divisibilità. Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi sono sottoreticoli di  $L$  e quali sono isomorfi tra loro:  $\{1, 2, 3, 6, 12\}$ ,  $\{1, 2, 3, 4, 12\}$ ,  $\{2, 4, 6, 10, 60\}$ ,  $\{1, 3, 6, 12, 60\}$ ,  $\{2, 4, 6, 12, 60\}$ ,  $\{1, 3, 5, 15, 60\}$ ,  $\{3, 6, 12, 15, 60\}$ ,  $\{1, 2, 3, 5, 60\}$ .

2. (a) Quali sono gli atomi del reticolo  $\mathbf{D}_{72}$ ? Quali sono gli elementi irriducibili di  $\mathbf{D}_{72}$ ? Determinare la decomposizione irridondante in elementi irriducibili dell'elemento 72.

(b) Si consideri un numero naturale  $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ , dove  $p_i$  sono numeri primi per ogni  $i = 1, \dots, k$  e  $p_i \neq p_j$  se  $i \neq j$ . Si consideri il reticolo  $\mathbf{D}_n$ . Quali sono gli atomi di  $\mathbf{D}_n$ ? Quali sono gli elementi irriducibili di  $\mathbf{D}_n$ ? Dato  $m \in \mathbf{D}_n$ ,  $m = p_1^{h_1} \cdots p_k^{h_k}$  ( $h_i \leq r_i$  per ogni  $i = 1, \dots, k$ ), qual è la decomposizione irridondante in elementi irriducibili dell'elemento  $m$ ?

3. Esibire un esempio di reticolo  $L$  in cui la decomposizione irridondante in elementi irriducibili non è unica. In altre parole, esibire un reticolo  $L$  tale che esiste un elemento  $a \in L$  avente due diverse decomposizioni irridondanti in elementi irriducibili.

4. Si consideri il reticolo  $L = \{1, 2, 3, 4, 9, 10, 14, 20, 90, 180\}$ , ordinato tramite la divisibilità.

(a) Stabilire se  $L$  è distributivo.

(b) Stabilire se  $L$  è a complemento unico

(c) Stabilire se esiste un  $a \in L$  che ha due diverse decomposizioni irridondanti in elementi irriducibili e, in caso affermativo, esibire esplicitamente un tale elemento  $a \in L$ .

5. Si considerino i seguenti insiemi  $A$  dotati di due operazioni  $(+ \text{ e } \cdot)$  e di una funzione  $A \rightarrow A$ ,  $a \mapsto a'$ . Quali tra essi soddisfano gli assiomi di Algebra di Boole?

(a)  $A = \mathbf{D}_{12}$ ,  $a + b = mcm(a, b)$ ,  $a \cdot b = mcd(a, b)$ ,  $a' = 12/a$ .

(b)  $A = \mathbf{D}_{30}$ ,  $a + b = mcm(a, b)$ ,  $a \cdot b = mcd(a, b)$ ,  $a' = 30/a$ .

(c)  $A = \mathbf{D}_{24}$ ,  $a + b = mcm(a, b)$ ,  $a \cdot b = mcd(a, b)$ ,  $a' = 24/a$ .