

Alcuni esercizi su determinanti e questioni collegate

1. Siano $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (a) Determinare l'inversa di A .
 (b) Calcolare $\det(2A^2B)$, $\det(4A + B)$, $\det(2(A^3B^{-2}))$.

2. Si consideri, per ogni $t \in \mathbf{R}$, la matrice $M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & t \\ t & t+2 & 1 & t+2 \\ t+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & t \end{pmatrix}$.
 (a) Calcolare $\det M_t$ al variare di $t \in \mathbf{R}$ e stabilire per quali t la matrice M_t ha rango quattro.
 (b) Si considerino, per ogni $t \in \mathbf{R}$, le rette L_t e R_t di equazioni cartesiane

$$L_t : \begin{cases} x_1 - x_3 = t \\ tx_1 + (t+2)x_2 + x_3 = t+2 \end{cases} \quad e \quad R_t : \begin{cases} (t+1)x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = t \end{cases}.$$

Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ le rette L_t e R_t sono incidenti (suggerimento: usare (a)).

3. Si consideri, al variare del parametro reale t , la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t & t & t & -t \\ 1 & 0 & t^2 - t & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ t^3 & t & t & -t \end{pmatrix}$.
 (a) Calcolare $\det(A_t)$ e stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ la matrice A_t ha rango quattro.
 (b) Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ il sistema lineare di matrice completa A_t è compatibile (suggerimento: usare la risposta data al punto precedente). Per tali $t \in \mathbf{R}$, risolvere il sistema.

4. Sia $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcolare $\det(C)$ e $\det(\frac{1}{2}(C^{-1})^3)$.

5. Si consideri, per ogni $t \in \mathbf{R}$, la matrice $C_t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & t+3 \\ 1 & 2 & t+2 & t \\ t+3 & 2 & t+2 & t \end{pmatrix}$.

- (a) Calcolare $\det(C_t)$.
 (b) Stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ il sistema lineare di matrice completa C_t è compatibile.

6. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Dopo avere calcolato le inverse di A , e C , calcolare le inverse delle matrici $D = AB^{-1}C$ ed $E = CAB^{-1}$. Calcolare inoltre $\det(2(A^2B^{-3}C^{-1})^3)$.

7. Sia $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}$ una matrice quadrata di ordine quattro, di righe $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbf{R}^4$, tale che

$\det(A) = -3$. Sia C la matrice (anch'essa scritta per righe) $\begin{pmatrix} 2A_1 \\ 3A_1 + 4A_2 \\ -2A_1 + 2A_2 + A_4 \\ A_1 + A_2 + 3A_3 \end{pmatrix}$. Calcolare $\det(C)$ e $\det(\frac{1}{2}C)$.

8. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (a) Determinare la matrice A^{-1} . (b) Determinare tutti i $t \in \mathbf{R}$ tali che $\det(tA^{-1}) = -16$.

9. Si consideri, al variare di $t \in \mathbf{R}$, la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & t & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & t+2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare $\det(A_t)$ e stabilire per quali $t \in \mathbf{R}$ la matrice A_t è invertibile. (b) Si consideri il sistema lineare la cui matrice *completa* è A_t . Stabilire per quali valori di t tale sistema ha soluzioni e, per ciascuno di tali t , determinare tali soluzioni.

10. Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 & 12 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 13 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare $\det A$. (b) Determinare la dimensione dello spazio generato dai vettori riga di A . (c) Stabilire se A è invertibile e, in caso affermativo, determinare $\det(A^{-1})$. (d) Per quali matrici $B \in M_{2,5}(\mathbf{R})$ esiste una matrice $C \in M_{2,5}(\mathbf{R})$ tale che $CA = B$?