Esercizi 15.01.2009

1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (a) Determinare tutti gli autovalori di A. (b) Stabilire se la trasformazione lineare $T : \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_4$ definita da $T(X) = A\,X$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una base di $\mathbf{V}_4$ composta di autovettori di T.

2. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$.
(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di T. (b) Stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{V}_3$ tale che la matrice rappresentativa di T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è una matrice diagonale. In caso affermativo, esibire una tale base e la corrispondente matrice diagonale.

3. Sia $\mathcal{B} = \{(0,1,-1),\ (0,1,1), (2,3,0)\}$.
(a) Mostrare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{V}_3$.
(b) Sia consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e sia $T : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ la trasformazione lineare tale che $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = A$. Determinare tutti gli autovalori di T e la loro molteplicità algebrica.
(c) Determinare una base di ciascun autospazio di T.
(d) Stabilire se T è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una base di $\mathcal{V}_3$ composta da autovettori di T.
(e) Determinare, se possibile, una matrice invertibile C tale che $C^{-1}AC$è diagonale.

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.
(a) Determinare gli autovalori di A.
(b) Stabilire se A è diagonalizzabile.
(c) Trovare (se possibile) una matrice invertibile C e una matrice diagonale D tali che $C^{-1}AC = D$.

5. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. (a) Determinare tutti gli autovalori di A. (b) Per ciascun autovalore, determinare una base del relativo autospazio. (c) Sia $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcolare $A^{51}\,v$.

6. Sia $T : V \to V$ una trasformazione lineare invertibile.
(a) Sia $v \in V$, $v \neq O$. Dimostrare che v è un autovettore di T se e solo se v è un autovettore di T^{-1}.
(b) Sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Dimostrare che λ è un autovalore di T se e solo se $\frac{1}{\lambda}$ è un autovalore di T^{-1}.

7. Sia $T : V \to V$ una trasformazione lineare e sia $n \in \mathbf{N}$.
(a) Dimostrare che se v è un autovettore di T, relativo all'autovalore λ, allora v è un autovalore si T^n, relativo all'autovalore λ^n.
(b) Mostrare un esempio di trasformazione lineare $T : V \to V$ tale che esiste un autovettore di T^2 che non è un autovettore di T.

8. Si consideri, per ogni $t \in \mathbf{R}$, la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t+2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Sia $S_t : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ la trasformazione lineare definita da: $S_t(X) = A_t\, X$. Stabilire per quali t si ha che S_t è diagonalizzabile.

9. Si consideri, per ogni $t \in \mathbf{R}$ la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t+2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Stabilire per quali t la matrice A_t è diagonalizzabile.

10. Sia $T : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ la rotazione di angolo $\theta \neq \pi$, in senso antiorario, attorno alla retta orientata $t(1, 1, -1)$. Determinare autovalori e autovettori di T e stabilire se T è diagonalizzabile.

11. Sia $V = L((1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, -1))$. Sia $R_V : \mathcal{V}^4 \to \mathcal{V}^4$ la riflessione ortogonale rispetto a V e sia $P_{V^\perp} : \mathcal{V}^4 \to \mathcal{V}^4$ la proiezione ortogonale di $\mathcal{V}^4$ su $V^\perp$. (a) Determinare rango e autovalori dell'applicazione lineare $P_{V^\perp} \circ R_V$. (b) Determinare una base per ciascun autospazio di $P_{V^\perp} \circ R_V$ e stabilire se $P_{V^\perp} \circ R_V$ è diagonalizzabile. (c) Stabilire se $P_{V^\perp} \circ R_V$ è un'applicazione lineare autoaggiunta.

12. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. (a) Determinare gli autovalori di A. (b) Stabilire se A è diagonalizzabile. (c) Determinare (se esiste) una base ortonormale di $\mathcal{V}^3$ formata da autovettori di A. (d) Determinare (se esiste) una matrice C tale che $C^T AC$ è una matrice diagonale.

13. Sia $T : \mathcal{V}^3 \to \mathcal{V}^3$ l'applicazione lineare tale che: $T((1, 1, 0)) = (2, 2, 0)$, $T((0, -1, 1)) = (0, -3, 3)$ e $T((1, 0, -1)) = (0, 1, -1)$. Determinare: (a) $rg(T)$ e una base di $Im(T)$. (b) Una base di $\ker(T)$. (c) Autovalori e autovettori di T. (d) $T((1, 0, 0))$.

14. Sia $L : \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_4$ un'applicazione lineare con le seguenti proprieta':
(a) $L((1, 0, -1, 2)) = (2, 0, -2, 4)$, $L((0, 1, 1, 1) = (0, -5, -5, -5)$, $L((1, 2, -1, 0) = (2, 4, -2, 0)$;
(b) $(2, 2, -2, 2)$ e $(1, 0, 0, 0)$ sono autovettori di L;
(c) $\det L = 100$.
(i) Determinare gli autovalori di L. (ii) Determinare gli autospazi di L. (iii) Stabilire se esiste una base di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di L e, in caso affernativo, esibirne una. (iv) Determinare la traccia di L.