GEOMETRIA 2, ESERCIZI 3

Ex. 0.1. *Stabilire il segno delle seguenti forme bilineari simmetriche su* $\mathbb{R}^k$ *(dove si denota* $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k)$ *e* $\underline{y} = (y_1, \dots, y_k)$ *):*
(a) $B(\underline{x}, \underline{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$*;*
(b) $B(\underline{x}, \underline{y}) = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$*;*
(c) $B(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}A\underline{y}^t$*, dove* $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$*;*
(d) $B(\underline{x}, \underline{y}) = -x_1y_1 + 2x_1y_2 + 5x_1y_3 + 2x_2y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 + 5x_3y_1 - x_3y_2 + 2x_3y_3$
(e) $B(\underline{x}, \underline{y}) = xy$*;*
(f) $B(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_3 + x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2$.

Ex. 0.2 (Una forma bilineare su uno spazio vettoriale "diverso")**.** *Si denoti* $\mathcal{P}_n$ *lo spazio vettoriale di tutti i polinomi reali di grado* $\leq n$*. Dati* $P, Q \in \mathcal{P}_n$*, si denoti*

$$B(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(\frac{k}{n})Q(\frac{k}{n})$$

(a) Dimostrare che B *è una forma bilineare simmetrica su* $\mathcal{P}_n$*, definita positiva ;*
(b) Calcolare $B(P, Q)$ *quando* $P(t) = t$ *e* $Q(t) = at + b$*, con* $a, b \in \mathbb{R}$*.*

Ex. 0.3. *Si consideri la forma bilinerare simmetrica su* $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, definita da* $B(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}A\underline{y}^t$*, dove* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$*. Calcolare la matrice rappresentativa di* B *rispetto alla base* $\mathcal{B} = \{((1, -2), (2, 3)\}$*.*

Ex. 0.4. *Sia* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare definita da*
$L(\underline{x}) = \underline{x} \times (1, 2, -1)$. *È autoaggiunta?*

Ex. 0.5. *Ridurre le seguenti forme quadratiche a forma diagonale per mezzo di una base ortonormale di autovettori e calcolare il massimo e il minimo sulla sfera unitaria e i punti di massimo e di minimo.*
(a) $Q(x, y) = xy$ *; (b)* $Q(x, y) = 4x^2 + 4xy + y^2$ *;*
(c) $Q(x, y) = 34x^2 - 24xy + 41y^2$ *;*
(d) $Q(x, y, z) = x^2 + xy + xz + yz$ *; (e)* $Q(x, y, z) = 2x^2 + 4xz + y^2 - z^2$ *;*
(f) $Q(x, y, z) = 3x^2 + 8xy + 4xz + 3y^2 + 4yz$*;*

Ex. 0.6. *Si consideri la funzione* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = 2\cos^2 t + 4\cos t \sin t + 5\sin^2 t.$$

Determinare massimi e minimi di f *e i punti di massimo e di minimo. (Suggerimento: interpretare* f *come una forma quadratica su* $\mathbb{R}^2$ *ristretta alla circonferenza unitaria).*

Ex. 0.7. *Si consideri, al variare dei parametri reali a, b, c, la funzione $F_{a,b,c} : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$, definita da*

$$F_{a,b,c}(\theta) = a\cos^2(\theta) + b\cos(\theta)\sin(\theta) + c\sin^2(\theta).$$

Determinare a, b, c assumendo che max $F_{a,b,c} = 5$, min $F_{a,b,c} = -2$ e che $\theta = \pi/3$ sia un punto di massimo. (Suggerimento: mettere in relazione $F_{a,b,c}$ con una forma quadratica $Q_{a,b,c}\mathbb{R}^2_2 \to \mathbb{R}$, ristretta alla circonferenza unitaria).