GEOMETRIA 2, ESERCIZI 6

Ex. 0.1. *Si considerino le seguenti curve parametrizzate e il segunte valore del parametro:*
(a) $(3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3)$*;* $t=2$*;*
(b) $(\cos t, \sin t, e^t)$*;* $t=\pi$*;*
(c) $(3t\cos t, 3t\sin t, 4t)$*;* $t=0$*; (d)* $(t-sint, 1-\cos t, 4\sin(t/2))$*;* $t=\pi$
(i) Per ognuna di esse calcolare la velocità vettoriale, la velocità scalare, il vettore accelerazione al variare di t*.*
(ii) per i valori di t *indicati calcolare i versori tangente e normale,* T *e* N*, il vettore accelerazione come combinazione lineare di* T *e* N*, e la curvatura.*

Ex. 0.2. *Si consideri la seguente parametrizzazione di un'iperbole:* $\underline{\gamma}(t) = (a\cosh t, b\sinh t)$*. Dimostrare che il vettore accelerazione è centrifugo (cioè* $\underline{\gamma}''(t)$ *è parallelo e concorde a* $\underline{\gamma}(t)$*).*

Ex. 0.3. *Sia* $\underline{\gamma}:(a,b)\to\mathbb{R}^2$ *tale che: (a)* $\underline{\gamma}(0)=(4,0)$*, (b)* $\underline{\gamma}'(0)=(0,6)$*e (c)* $\underline{\gamma}''(t)=-4\gamma(t)$ *per ogni* t *in* (a,b)*.*
(1) Determinare la funzione $\underline{\gamma}(t)$*.*
(2) La curva soggiacente $\underline{\gamma}$ *è una conica. Determinarne l'equazione cartesiana, farne un disegno approssimativp e indicare il senso del moto.*

Ex. 0.4. *Una curva parametrizzata* $\underline{\gamma}=(x,y):(a,b)\to\mathbb{R}^2$ *è tale che la curva soggiacente è la parabola di equazione* $x^2+c(y-x)=0$*. Supponiamo che* $X''(t)=y''(t)$ *per ogni* t*. Supponiamo che* $\underline{\gamma}(t_0)=(c,0)$ *e che* $\underline{\gamma}(t_0+T)=(0,0)$*. Per quale* t *si ha che* $\underline{\gamma}(t)=(c/2,c/4)$*?j*

Ex. 0.5. *Sia* $\underline{\gamma}=(x,y):(a,b)\to\mathbb{R}^2$ *una curva parametrizzata nel piano tale che la curva soggiacente sia l'ellisse di equazione* $3x^2+y^2=1$*. Si suppomga che* $x'(t)=-y(t)$ *per ogni* t*.*
(a) Il punto percorre l'ellisse in senso orario o antiorario?
(b) Dimostrare che $y'(t)=cx(t)$*. Chi è* c*?*
(c) Qual è il tempo necessario a percorrere una volta l'intera ellisse?

Ex. 0.6. *Si considerii una* C *nel primo quadrante, tale che la sua tangente ha pendenza negativa in ogni punto, e passante per il punto* $(3/2,1)$*. Si denotino rispettivamente* $\theta(t)$ *e* $\alpha(t)$ *gli angoli formati rispettivamente da* $\underline{\gamma}(t)$ *e dal* $\underline{\gamma}'(t)$ *con l'asse* x*, dove* $\underline{\gamma}(t)$ *è una parametrizzazione avente* C *come curva soggiacente . Si supponga che per ogni* t *valga la relazione* $2\tan\phi(t) = 4\cot\Theta(t)$ *. Determinare l'equazione cartesiana di* C *e disegnarne uno schizzo.*

Ex. 0.7. *Si supponga che, tracciando da ogni punto di una curva piana C la normale alla curva e una retta verticale, esse intersechino sempre sull'asse x segmenti di lunghezza costante uguale a 2. Inoltre la curva passi per il punto $(1, 2)$. Determinare l'equazione cartesiana della curva (ci sono due soluzioni).*

Ex. 0.8. *Dati due vettori non nulli A e B, e indicato con θ l'angolo tra di essi, si consideri una curva parametrizzata $\underline{\gamma}$ tale che*

$$\underline{\gamma}^{(}t) = A \times \underline{\gamma}(t),$$

con la condizione iniziale $\underline{\gamma}(0) = B$.
(a) Dimostrare che il vettore accelerazione è sempre ortoginale ad A;
(b) Dimostrare che la velocità scalare è costante, e calcolarla in funzione di A, B e θ.
(c) Disegnare uno schizzo della curva, indicando nel disegno A e B.

Ex. 0.9. *Calcolare le lunghezze dei seguenti archi di curve:*
(a) $a(1 - \cos t, t - \sin t)$, $t \in [0.2\pi$ (a¿0);
(b) $(e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in [0, 2]$;
(c) $a(\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$, $t \in [o, 2\pi]$ $(a > 0)$
(d) $(a \cos wt, a \sin wt, bwt)$, $t \in [t_0, t_1)$

Ex. 0.10. *Si consideri la curva (*catenaria*) di equazione $y = c \cosh(x/c)$ (c¿0).*
(a) Mostrare che su questa curva, la lunghezza dell'arco da $x = 0$ e $x = a$ è l'area della regione limitata dalla curva stessa, dall'asse x, dall'asse y e dalla retta $x = a$, divisa per c.
(c) Si calcoli la lunghezza dell'arco di curva di cui al punto (a) per $a = 2$.

Ex. 0.11. *Mostrare che, per $x > 0$, la lunghezza dell'arco di catenaria congiungente i punti $(0, 1)$ e $x, \cosh x)$ è $\sinh x$.*

Ex. 0.12. *Si supponga che per una funzione f di segno constante il rettangoloide da essa determinato (per qualunque intervallo base) abbia area uguale alla lunghezza della curva grafico di f. Si determini f.*

Ex. 0.13. *Mostrare che la lunghezza totale di un'ellisse è*

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt$$

dove a è il semiasse maggiore e e è l'eccentricità. Integrali di questo tipo si chiamano ellittici *e non posso essere calcolati per mezzo di funzioni elementari.*

Ex. 0.14. *Si consideri la curva parametrizzata*

$$\underline{\gamma}(t) = tA + t^2 B + 2(\frac{2}{3}t)^{3/2} A \times B,$$

dove A e B sono due vettori formanti un angolo di $\pi/3$. Calcolare la velocità scalare al tempo t e il tempo necessario per percorrere, a partire dalla posizione $\underline{\gamma}(0)$, una lunghezza uguale a 12.

Ex. 0.15. *Si consideri la cicloide $(a(t-\sin t), a(1-\cos t))$. Determinare (in funzione di t) la pendenza della tangente, e mostrare che la tangente passa sempre per il punto più alto della circonferenza che rotola.*

Ex. 0.16. *Sia $y = f(x)$ una curva grafico della funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Trovare una formula per la curvatura.*

Ex. 0.17. *Mostrare che se $\underline{\gamma}$ è una curva con velocità scalare costante e tale che il vettore accelerazione ha norma costante allora la curvatura è constante. Si esprima tale costante in funzione di v e $\| \underline{\gamma}'' \|$.*

Ex. 0.18. *(a) Si dimostri che la curvatura di una parabola ha il massimo nel vertice.*
(b) Si consideri la curva parametrizzata $\underline{\gamma}(t) = tA + t^2B$, dove A e B sono due vettori di $\mathbb{R}^3$ formanti tra loro un angolo θ. (a) Mostrare che la curva soggiacente è una parabola nel piano $Span(A, B)$. Si determini (in funzione di A, B e θ) il vertice della parabola (si può usare la parte (a)).

Ex. 0.19. *Si consideri la curva parametrizzata $\underline{\gamma}(t) = (4\cos t, 4\sin t 4\cos t)$.*
(a) Mostrare che la curva soggiacente è un'ellisse, e determinare l'equazione del piano che la contiene.
(b) Trovare la funzione curvatura.

Ex. 0.20. *Si consideri una curva parametrizzata $\underline{\gamma} : (-\epsilon, b) \to \mathbb{R}^2$ tale che:*
(a) $v(t) \equiv 5$ per ogni t; (b) $\underline{\gamma}'(0) = (0, 5)$; (c) $\underline{\gamma}(t)$ sta nel semipiano $y \geq 0$ per ogni t; (d) per ogni t, $0 \leq t < b$ la curvatura è $k(t) = 2t$.
(a) Determinare la funzione $\alpha(t)$ (angolo tra $T(t)$ e l'asse x).
(b) Determinare la funzione $\underline{\gamma}'(t)$.

Ex. 0.21. *Si ricorda che una* spirale logaritmica *è una curva piana parametrizzata del tipo $\underline{\gamma}(t) = ae^t(\cos t, \sin t)$. Mostrare che una curva piana tale che $k(s) = 1/s$ è una spirale logarimica (sugg.: ragionare come nella dimostrazione del teorma fondamentale per le curve piane).*