GEOMETRIA 2, ESERCIZI 6

Ex. 0.1. *Un punto si muove nel piano in modo che all'istate t le sue coordinate polari siano $\rho(t) = t$ e $\theta(t) = t$. Determinare in funzione di t il vettore veleocità $\underline{v}(t)$, il vettore accelerazione $\underline{a}(t)$ e la curvatura $k(t)$.*

Ex. 0.2. *Coordinate cilindriche: un punto (x, y, z) è individuato dalla terna (ρ, θ, z), dove (ρ, θ) sono le coordinate polari del punto (x, y) nel piano x, y. Un punto si muove nello spazio in modo tale che all'istante t le sue coordinate cilindriche siano $\rho(t) = t$, $\theta(t) = t$, $z(t) = t$. La curva descritta si chiama* elica conica *(si noti che la curva sta sul cono circolare retto di equazione $x^2 + y^2 = z^2$).*
(a) Determinare in funzione di t il vettore veleocità $\underline{v}(t)$, il vettore accelerazione $\underline{a}(t)$ e la curvatura $k(t)$.
(b) Si trovi una formula che calcoli (in ogni punto della curva) l'angolo tra il vettore velocità della curva e la generatrice del cono.

Ex. 0.3. *Un punto dello spazio di muove in modo tale che all'istante t le sue coordinate cilindriche siano $\rho(t) = t$, $\theta(t) = t$ e $z(t) = \ln \sec t$ $(t \in [0, \pi/2])$.*
(a) Mostrare che la curva descrita sta sul cilindro circolare retto di equazione $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$.
(b) Determinare in funzione di t l'angolo tra il vettore velocità e l'asse z.

Ex. 0.4. *Determinare una formula per calcolare la lunghezza d'arco di una curva piana in coordinate polari.*

Ex. 0.5. *La curva descritta dall'equazione polare $\rho = a(1 + \cos\theta)$ (dove $a > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$) è detta* cardioide. *Tracciarne un grafico approssimativo e calcolarne la lunghezza.*

Ex. 0.6. *Un punto si muove nel piano lungo una curva di equazione polare $\rho = e^{c\theta}$, con $c \in \mathbb{R}$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.*
(a) Si indichi graficamente l'andamento della curva per $c = 0$, per $c = -1$ e per $c = 1$.
(b) Si calcolino in funzione di c la lungezza $L(c)$ della curva e l'area $A(c)$ della regione spazzata dal vettore posizione quando $t = 2\pi$.

Ex. 0.7. *(a) Si tracci il grafico della curva di equazione polare $\rho = sin^2\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, e si mostri che esso consiste nell'unione di due curve chuse distinte.*
(b) Determinare l'area della regione contenuta in ognuna delle due curve. Calcolare la lunghezza delle due curve.

Ex. 0.8. *(a) Per ognuna delle seguenti equazioni polari tracciare il grafico della curva corrispondente e calcolarne la lunghezza:*

(i) $\rho = \theta$, $\theta \in [0, \pi]$; *(ii)* $\rho = e^{\theta}$, , $\theta \in [0, \pi]$; *(iii)* $\rho = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$; *(iv)* $\rho = 1 - \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$*).*
(b) Data una curve di equazione polare $\rho = f(\theta)$*, determinare una formula per il raggio di curvatura in un punto dato. Quindi calcolare il raggio di curvatura della curva (i), (ii) al variare di* θ*, della curva (iii) per* $\theta = \pi/4$ *e per la curva (iv) per* $\theta = \pi/2$*.*

Ex. 0.9. *Si indichi con* ϕ *l'angolo tra i vettori velocità e posizione di una curva data. Detta* v *la velocità scalare, mostare che* $\rho = v \sin\phi$ *e che* $\frac{d\rho}{d\theta} = v \cos\phi$*.*

Ex. 0.10. *Un missile è progettato in modo da puntare direttamente sul bersaglio ma, a causa di un difetto di fabbricazione, la sua direzione effettiva forma un angolo costante* $\alpha \neq 0$ *rispetto alla retta congiungente la posizione del missile e il bersaglio. Si determini la traiettoria supponendo che il bersaglio sia fisso e il moto piano, e si discuta come varia la traiettoria al variare di* α*. Il missile raggiungerà il bersaglio?*

Ex. 0.11. *Si dimostri che un'equazione differenziale al primo ordine* $y' = f(x, y)$ *diventa a variabili separabili quando trasformata in coordinate polari. Si utilizzi questo metodo per risolvere l'equazione* $y' = (y - x)/(y + x)$*.*

Ex. 0.12. *Si supponga che il vettore velocità di un punto* $\underline{r}(t)$ *che si muove nello spazio abbia l'espressione* $\underline{v}(t) = \omega(0, 0, 1) \times \underline{r}(t)$*, con* $\omega \in \mathbb{R}^+$*. Dimostrare che il punto si muove lungo una circonferenza con velocità angolare costante uguale a* ω*.*