

GEOMETRIA 2, ESERCIZI 4-1

Ex. 0.1. Ridurre le seguenti equazioni di coniche a forma standard, riconoscere di che tipo di conica si tratta, determinare le coordinate (rispetto alla base canonica) del centro di simmetria (se esiste) e dei fuochi. Determinare anche le equazioni degli assi di simmetria:

- (a) $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 10y - 13 = 0$; (b) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0$;
(c) $y^2 - 2xy + 2x^2 - 5 = 0$; (d) $y^2 - 2xy + 5x = 0$;
(e) $5x^2 - 4xy + 2y^2 - 6 = 0$; (f) $19x^2 + 4xy + 16y^2 - 212x + 104y = 356$;
(g) $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 2$; (h) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$;

Ex. 0.2. Per quali valori di a l'equazione $2xy = 4x + 7y + a = 0$ rappresenta una coppia di rette?

Ex. 0.3. Scrivere l'equazione delle coniche seguenti:

- (a) la circonferenza di raggio 3 e centro $(1, 2)$;
(b) la parabola di asse $x = 0$, vertice $(0, 4)$ e passante per $(-2, 0)$;
(c) l'ellisse di fuochi $(4, 0)$ e $(-4, 0)$ ed eccentricità $4/5$;
(d) l'iperbole con gli assi coordinati come asintoti e passante per il punto $(3, 2)$;
(e) l'iperbole con le rette: $2x - y = 0$ e $2x + y = 0$ come asintoti e passante per il punto $(3, -5)$;
(f) l'iperbole che passa per l'origine e ha come asintoti le rette $y = 2x + 1$ e $y = -2x + 3$;
(g) la conica formata da tutti i punti (x, y) la cui distanza dal punto $(0, 2)$ è la metà di quella dalla retta $y = 8$;
la parabola che ha come fuoco l'origine e come direttrice la retta $x + y + 1 = 0$.

Ex. 0.4. Sia \mathcal{C} una parabola il cui fuoco F è l'origine $O = (0, 0)$, la direttrice ha equazione $N \cdot (x, y) = c$, dove N è un vettore unitario. e $c > 0$. Sia $P = (x, y)$ un punto di \mathcal{C} tale che $d(P, F) = 100$ e l'angolo tra $P - O$ e N è $\pi/3$.

- (a) Determinare la distanza minima tra \mathcal{C} e F .
(b) Determinare la distanza minima tra \mathcal{C} e F supponendo questa volta che $c < 0$.

Ex. 0.5. (a) Stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 10x + 6y - k = 0$$

è degenera.

- (b) Stabilire, al variare di $k \in \mathbb{R}$ di che tipo di conica si tratta.