GEOMETRIA 2, ESERCIZI 2

Ex. 0.1. *(a) Mostrate che la matrice* $\begin{pmatrix} cos\theta & \sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{pmatrix}$ *rappresenta (rispetto alla base canonica) la composizione* $L \circ R_\theta$*, dove* R_θ *è la solita rotazione di angolo* θ *in senso antiorario e* L *è la riflessione rispetto all'asse* x*:* $L(x,y) = (x,-y)$.
(b) Mostrate che $L \circ R_\theta = R_\theta \circ S$*, dove* S *è la riflessione rispetto alla retta* $Span((cos\theta, \sin\theta))$.
(c) Mostrate che $L \circ R_\theta$ $(= R_\theta \circ S)$ *è la riflessione rispetto alla retta* $Span(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$.
(d) Deducete che ogni isometria del piano è o la composizione di una traslazione e di una rotazione (questi sono i movimenti rigidi) oppure è la composizione di una traslazione con una riflessione rispetto ad una retta.

Ex. 0.2. *Scrivete in coordinate la rotazione dello spazio di angolo* $\pi/4$ *(in senso antiorario) attorno alla retta orientata* $(1,1,0)+Span(1,2,-2)$*. (Suggerimento: cominciare con lo scrivere la rotazione attorno a* $Span(1,2,-2)$.

Ex. 0.3. *(a) Siano date due basi ortonormali,* $\mathcal{E}$ *e* $\mathcal{F}$*, di* $\mathbf{R}^3$*, orientate positivamente. Ad esempio*

$$\mathcal{E} = \{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1), \frac{1}{\sqrt{11}}(-1,-1,3), \frac{1}{\sqrt{66}}(7,-4,1)\} \quad e$$

$$\mathcal{F} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2)\}.$$

Mostrate che c'è una (unica) rotazione di $\mathbb{R}^3$ *che manda* $\mathcal{E}$ *in* $\mathcal{F}$ *e scriverla esplicitamente.*
(b) Siano date due basi ortonormali di $\mathbb{R}^3$*,* $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e_3}\}$ *e* $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$*, orientate positivamente. Per esempio le due basi del punto precedente. Siano inoltre* P *e* Q *due punti di* $\mathbb{R}^3$*. Mostrate che esiste un'unica isometria di* $\mathbb{R}^3$ *che manda il sistema di riferimento* $P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e_3}$ *nel sistema di riferimento* $Q, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f_3}$*, e scriverla esplicitamente.*

Ex. 0.4. *Per ciascuna nelle seguenti applicazioni lineari trovare autovalori e una base ortonormale di autovettori:*
(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*,* $T((x,y)) = (7x - 5\sqrt(3)y, -5\sqrt{3}x - 3y)$;
(b) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*,* $L((x,y,z) = (x - y - z, -x + z, -x + y + z)$.

Ex. 0.5. *(a) Trovare (se possibile) una matrice simmetrica* 2×2*,* A*, tale che* 2 *è un autovalore di* A*,* $(1,2)$ *è un autovettore di* A*, di autovalore* 2*, e la traccia* $tr(A) = -3$*. Quante ce ne sono?*
(b) Trovare (se possibile) una matrice simmetrica 3×3*,* A*, tale che* 2 *e* 3

sono gli autovalori di A *e l'autospazio* $V(2)$ *è* $Span(1, 2, -1)$. *Quante ce ne sono? (Suggerimento: usare il teorema spettrale).*