Lezioni sulle Superficie di Riemann
2017-2018
(II Semestre)

Mauro Nacinovich

Indice

Parte 1

Geometria piana

CAPITOLO I

Il piano complesso e la sfera di Riemann

1. I numeri complessi

1.1. Il piano di Gauss. Il polinomio X^2+1 non ha radici reali ed è dunque primo nell'anello $\mathbb{R}[X]$. Chiamiamo *numeri compessi* gli elementi del campo quoziente $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$. L'immagine canonica di X in $\mathbb{C}$ si indica con i e si dice *unità immaginaria*. Essa e la sua opposta $-i$ sono le radici in $\mathbb{C}$ dell'equazione algebrica $X^2+1 = 0$.

Il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali si identifica in modo naturale a un sottocampo di $\mathbb{C}$, per passaggio al quoziente dall'omomorfismo canonico di anelli che identifica $\mathbb{R}$ ai polinomi di grado 0 in $\mathbb{R}[X]$.

Ogni z in $\mathbb{C}$ si scrive in modo unico nella forma

$$z = x + i\,y, \quad \text{con } x, y \text{ reali}\,; \tag{1.1}$$

poniamo

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} z = \text{parte reale di } z\,, \\ y = \operatorname{Im} z = \text{parte immaginaria di } z\,. \end{cases} \tag{1.2}$$

I numeri della forma iy, con $y \in \mathbb{R}$ si dicono *immaginari puri*.

Gli unici automorfismi di $\mathbb{C}$ che lascino fissi gli elementi di $\mathbb{R}$ sono l'identità e il *coniugio*: quest'ultimo è caratterizzato dal fatto che scambia tra loro le due radici i e $-i$ dell'equazione $X^2+1 = 0$. Indichiamo con $\bar{z}$ il coniugato di z

$$\overline{x + i\,y} = x - i\,y\,, \quad \text{se } x,\ y \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

È

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}, \\ \operatorname{Im} z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}, \\ z\,\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2. \end{cases} \tag{1.4}$$

Il numero reale non negativo

$$|z| = \sqrt{z\,\bar{z}} \geq 0 \tag{1.5}$$

è il *modulo* del numero complesso z. Valgono le proprietà:

(i) $$\begin{cases} |z| > 0, & \text{se } z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}, \\ |0| = 0, \end{cases}$$

(ii) $$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}\,;$$

(iii) $$|z + w| \leq |z| + |w| \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}\,.$$

La corrispondenza:

$$\mathbb{C} \ni z \longrightarrow (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2 \tag{1.6}$$

è biunivoca ed è un'isometria di $\mathbb{C}$, con la distanza definita da

$$\mathrm{d}(z, w) = |z - w| \qquad \forall z, w \in \mathbb{C} \tag{1.7}$$

su $\mathbb{R}^2$ con la distanza Euclidea. L'espressione "*piano complesso*" si riferisce a questa corrispondenza, che ci permette di rappresentare i numeri complessi come punti di un piano Euclideo (*piano di Gauss*[1]).

Considereremo su $\mathbb{C}$ la topologia definita dalla distanza (1.7)

1.2. Forma trigonometrica. I numeri complessi di modulo 1 formano un gruppo commutativo $\mathbf{S}^1$ rispetto alla moltiplicazione. Con la topologia di sottospazio, $\mathbf{S}^1$ è un gruppo topologico connesso localmente omeomorfo ad $\mathbb{R}$. Possiamo identificarlo al quoziente di additivo $\mathbb{R}$ (additivo) rispetto a un sottogruppo discreto. È consuetudine scegliere il sottogruppo $2\pi\cdot\mathbb{Z} = \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ed indicare con

$$\mathbb{R} \ni \theta \longrightarrow e^{i\theta} \in \mathbf{S}^1 \tag{1.8}$$

l'epimorfismo così ottenuto. Valgono il particolare le uguaglianze

(i) $$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \qquad \forall \theta_1,\, \theta_2 \in \mathbb{R}\,;$$

(ii) $$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}, \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}\,,\ \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

Si definiscono poi le funzioni reali

$$\begin{cases} \mathbb{R} \ni \theta \mapsto \cos\theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) \\ \mathbb{R} \ni \theta \mapsto \sin\theta = \operatorname{Im}(e^{i\theta}). \end{cases} \tag{1.9}$$

Teorema 1.1. *Consideriamo* $\mathbb{C}^* = \{z{\in}\mathbb{C} \mid z{\neq}0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \,|\, t > 0\}$ *ed* $\mathbf{S}^1$ *come gruppi topologici con l'operazione di moltiplicazione. Allora l'applicazione:*

$$\mathbb{C}^* \ni z \longrightarrow \left(|z|, \frac{z}{|z|}\right) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbf{S}^1 \tag{1.10}$$

è un isomorfismo di gruppi topologici. □

[1]Johann Friedrich Carl Gauss (1777 -1855), è considerato il più grande matematico della storia moderna.

In particolare, ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}^*$ si scrive in modo unico nella forma

$$z = r \cdot u, \quad \text{con } r \text{ reale} > 0 \ \text{ ed } \ u \in \mathbf{S}^1. \tag{1.11}$$

Abbiamo dunque

$$z = r \cdot e^{i\theta} = r(\cos\theta + i \sin\theta) \tag{1.12}$$

con $r = |z|$, mentre la $\theta \in \mathbb{R}$ è determinata a meno di multipli di 2π. Un numero reale θ per cui valga la (1.12) si dice un *argomento* del numero complesso z. Chiamiamo *argomento principale* l'unico argomento nell'intervallo $[0, 2\pi[$. Poniamo

$$\begin{cases} \mathrm{Arg}(z) = [\text{argomento principale di } z] \in [0, 2\pi[\,; \\ \arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} \mid e^{i\theta} = z/|z|\} = \{Arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\,. \end{cases} \tag{1.13}$$

Valgono le regole:

$$\begin{cases} \arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w) & \forall z, w \in \mathbb{C}^*\,; \\ \arg(z^n) = \{n{\cdot}\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} & \forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}\,. \end{cases} \tag{1.14}$$

Abbiamo quindi:

Teorema 1.2. *Sia n un qualsiasi intero positivo. Ogni numero complesso z diverso da zero ammette esattamente n radici n-esime*[2] *distinte.*

Dimostrazione. Se $z = r \cdot e^{i\theta}$, con $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$, esse sono date da:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot \exp\left(i\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, n-1, \tag{1.15}$$

dove $\sqrt[n]{r}$ è la radice n-esima positiva di $r > 0$. L'equazione $w^n = z$ non può avere piú di n radici distinte per il teorema di Ruffini. □

2. Il teorema fondamentale dell'algebra

Teorema 2.1 (D'Alembert[3], Gauss). *Il campo $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.*

Dimostrazione. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio di grado $d \geq 1$, a coefficienti complessi. Vogliamo dimostrare che l'equazione $p(z) = 0$ ammette almeno una soluzione in $\mathbb{C}$. Dividiamo la dimostrazione in tre passi.

---

[2] Si dice radice n-esima del numero complesso z ogni soluzione complessa w dell'equazione $w^n = z$.

[3] Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783), enciclopedista e matematico francese. Enunciò il teorema nel suo *Traité de dynamique* del 1743. La dimostrazione rigorosa fu data da Gauss nel 1799.

A. *La funzione* $\mathbb{C} \ni z \longrightarrow |p(z)| \in \mathbb{R}$ *non può avere un minimo locale in un punto* $z_0 \in \mathbb{C}$ *in cui sia* $p(z_0) \neq 0$.

Ragioniamo per assurdo. Possiamo supporre per semplicità che $z_0 = 0$ e che $|p(z)|$ abbia in 0 un minimo locale, pur essendo $p(0) \neq 0$. Sia dunque:

$$p(z) = a_0 + a_k z^k + \cdots + a_d z^d$$

con a_0, a_k diversi da zero e $k \geq 1$. Sia w_0 una radice k-esima di $(-a_0/a_k)$. Poichè $w_0^k = -a_0/a_k$, abbiamo, per t reale, $-1 < t < 1$,

$$\begin{aligned} p(tw_0) &= a_0 + a_k w_0^k t^k + a_{k+1} w_0^{k+1} t^{k+1} + \cdots + a_d w_0^d t^d \\ &= a_0 \left(1 - t^k\right) + a_{k+1} w_0^{k+1} t^{k+1} + \cdots + a_d w_0^d t^d , \end{aligned}$$

e quindi:

$$|p(tw_0)| \leq |a_0| \left(1 - t^k\right) + C t^{k+1}, \quad \forall\, t \in (-1, 1),$$

ove $C = (d-k) \cdot \max_{h>k} |a_h w_0^h|$. Ci sono perciò numeri complessi tw_0 arbitrariamente piccoli tali che $|p(tw_0)| < |a_0| = |p(0)|$: questo contraddice il fatto che 0 sia un minimo locale e quindi dimostra il punto A.

B. *Fissato* $M > 0$, *possiamo trovare* $R > 0$ *tale che* $|p(z)| > M$ *per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *con* $|z| > R$.

Sia infatti

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d$$

con $d \geq 1$ e $a_d \neq 0$. Posto $c = \max_{h<d} |a_h|$, abbiamo:

$$|p(z)| \geq |a_d| \cdot |z|^d \; - \; c \cdot |z|^{d-1}, \quad \forall |z| \geq 1.$$

Il secondo membro tende a $+\infty$ per $|z| \to +\infty$, e quindi otteniamo B.

C. *La funzione* $\mathbb{C} \ni z \longrightarrow |p(z)| \in \mathbb{R}$ *ammette minimo in* $\mathbb{C}$.

Per il punto B, possiamo fissare $R{>}0$ in modo che $|p(z)|{>}|p(0)|$ se $|z|{>}R$. Quindi il minimo che la funzione continua $|p(z)|$ assume in un punto z_0 del compatto $\bar{D}_0(R) = \{z{\in}\mathbb{C} \mid |z|{\leq}R\}$ per il teorema di Weierstrass, è un minimo per $|p(z)|$ in tutto il piano complesso $\mathbb{C}$.

Per il punto A, abbiamo allora $p(z_0) = 0$. La dimostrazione è completa.

$\square$

3. La retta proiettiva complessa

Lo spazio proiettivo complesso di dimensione n, che indicheremo nel seguito con $\mathbb{CP}^n$, è il quoziente di $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica tra loro due vettori non nulli se essi sono $\mathbb{C}$-linearmente dipendenti.

In quanto compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{C}$, la retta proiettiva complessa $\mathbb{CP}^1$ è omeomorfa ad $\mathbf{S}^2 = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$.

Un omeomorfismo esplicito è dato dall'applicazione:

$$\boxed{\mathbf{S}^2 \ni (\xi, \eta, \zeta) \longrightarrow (1-\zeta : \xi + i\eta) \in \mathbb{CP}^1} \tag{3.1}$$

e dalla sua inversa:

$$\boxed{\mathbb{CP}^1 \ni (z_0 : z_1) \longrightarrow \left(\frac{z_0\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_0}{z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1}, \frac{i\,(z_0\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_0)}{z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1}, \frac{(z_1\bar{z}_1 - z_0\bar{z}_0)}{z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1} \right) \in \mathbf{S}^2} \tag{3.2}$$

Esse rappresentano la *proiezione stereografica di Tolomeo*[4]. Sia infatti α il piano equatoriale: $\alpha = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \zeta = 0\}$ e sia n=$(0, 0, 1)$ (*polo nord*). Le (3.1) e ((3.2)) descrivono la corrispondenza che ad ogni punto p di $\mathbf{S}^2$, distinto da n, associa l'intersezione p' della retta $n \vee p$ con il piano α. Osserviamo che il disco D=$\{|\mathfrak{z}|<1\}$ ha come immagine l'emisfero inferiore di $\mathbf{S}^2$ e 0 il *polo sud* s=$(0, 0, -1)$.

Osservazione 3.1. La proiezione di Tolomeo è utile per il disegno di carte astronomiche in quanto è isogonale (conserva gli angoli). Infatti, la controimmagine di una retta r di α è la circonferenza per n ottenuta intersecando $\mathbf{S}^2$ con il piano $r \vee n$.

Se r_1, r_2 sono due rette incidenti di α e κ_1, κ_2 le corrispondenti circonferenze per n su $\mathbf{S}^2$, allora le due circonferenze si intersecano nell'ulteriore punto p corrispondente all'intersezione p' delle rette r_1 ed r_2. L'angolo delle tangenti t_1 e t_2 a κ_1 e κ_2 per p è uguale all'angolo delle loro tangenti t'_1 e t'_2 per n. Esso è quindi uguale all'angolo di r_1 ed r_2 perché t'_1 è parallela ad r_1 e t'_2 è parallela ad r_2.

Il numero complesso $\mathfrak{z} = z_1/z_0$ si dice la *coordinata non omogenea* del punto $(z_0 : z_1)$ di $\mathbb{CP}^1$. Quando $z_0 = 0$ poniamo $\mathfrak{z} = \infty$. Nella coordinata non omogenea $\mathfrak{z}$ la corrispondenza (3.2) si scrive nella forma

$$\mathbb{CP}^1 \ni \mathfrak{z} \longrightarrow \left(\frac{2{\cdot}\mathrm{Re}\,(\mathfrak{z})}{|\mathfrak{z}|^2 + 1}, \frac{2{\cdot}\mathrm{Im}\,(\mathfrak{z})}{|\mathfrak{z}|^2 + 1}, \frac{|\mathfrak{z}|^2 - 1}{|\mathfrak{z}|^2 + 1} \right) \in \mathbf{S}^2,$$

dove a $\mathfrak{z}$=∞ corrisponde il polo nord $n = (0, 0, 1)$ e a $\mathfrak{z}$=0 il polo sud s=$(0, 0, -1)$.

Il *birapporto* di quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 (di cui almeno tre distinti) di $\mathbb{CP}^1$ si esprime in termini delle loro coordinate non omogenee $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4$ mediante:

$$\boxed{(P_1{:}P_2{:}P_3{:}P_4) = \frac{\mathfrak{z}_3 - \mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_3 - \mathfrak{z}_2} : \frac{\mathfrak{z}_4 - \mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_4 - \mathfrak{z}_2}\,.} \tag{3.3}$$

Nel definire il birapporto conveniamo che, nel caso a sia un numero complesso diverso da zero, $a/\infty = 0$, $a/0 = \infty$, $\infty + a = \infty$, $\infty/\infty = 1$.

Nel caso in cui due dei quattro punti coincidano, il birapporto assume uno dei valori 0, 1, ∞. Osserviamo che *dati tre punti distinti* P_1, P_2, P_3 *e*

[4]Claudio Tolomeo (100-175) (circa) fu un importante astronomo greco dell'età imperiale. È considerato il padre della geografia e fu autore di un importante trattato astronomico, l'*Almagesto*.

$\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *vi è uno un solo punto* $P \in \mathbb{CP}^1$ *tale che* $(P_1{:}P_2{:}P_3{:}P) = \lambda$.

In generale, posto $\lambda = (P_1{:}P_2{:}P_3{:}P_4)$, permutando i quattro punti si ottengono per il birapporto $(P_{\sigma_1}{:}P_{\sigma_2}{:}P_{\sigma_3}{:}P_{\sigma_4})$ i sei valori

$$\lambda\,,\ \frac{1}{\lambda}\,,\ 1-\lambda\,,\ \frac{1}{1-\lambda}\,,\ \frac{\lambda}{\lambda-1}\,,\ 1-\frac{1}{\lambda}. \tag{3.4}$$

Essi sono tutti distinti tranne che nei casi:

(1) $\lambda \in \{0, 1, \infty\}$ quando due dei quattro punti coincidono.

(2) $\lambda \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$. In questo caso diciamo che i quattro punti formano una *quaterna armonica*, e quando $(P_1 : P_2 : P_3 : P_4) = -1$ diciamo che P_4 è il *quarto armonico* di P_1, P_2, P_3.

Il quarto armonico di tre punti non allineati P_1, P_2, P_3 si può ottenere nel modo seguente. Siano A e B le intersezioni delle bisettrici degli angoli delle rette P_1P_3 e P_2P_3 con la retta P_1P_2. La circonferenza di diametro $[A, B]$ interseca la circonferenza per $P_1P_2P_3$ in P_3 e nel quarto armonico P_4 di P_1, P_2, P_3.

Infatti, la condizione che sia $(P_1{:}P_2{:}P_3{:}P_4) = -1$ si può esprimere nel modo seguente:

(a) I quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 appartengono tutti a una stessa circonferenza o a una stessa retta κ;

(b) detti $\kappa_{1,2}$ (rispettivamente $\kappa_{3,4}$) la circonferenza (o la retta) passante per P_1 e P_2 (rispettivamente per P_3 e P_4) e ortogonale a κ, anche $\kappa_{1,2}$ e $\kappa_{3,4}$ sono ortogonali.

Utilizzando questa condizione si può giustificare la costruzione appena descritta e dedurre la costruzione del quarto armonico anche nel caso in cui P_1, P_2, P_3 siano allineati.

(3) $\lambda = \left(1 \pm i\sqrt{3}\right)/2$ In questo caso si dice che i quattro punti formano una *quaterna equiarmonica*. Osserviamo che, se P_1, P_2, P_3 sono i vertici di un triangolo equilatero, e $(P_1 : P_2 : P_3 : P_4) = \left(1 + i\sqrt{3}\right)/2$, allora P_4 è o il centro del triangolo, oppure il punto all'infinito, a seconda che i tre punti siano orientati in senso orario o in senso antiorario.

I quattro punti non possono essere allineati né appartenere tutti ad una stessa circonferenza. Se tre di essi, ad esempio P_1, P_2, P_3 sono i vertici di un triangolo del piano di Gauss, allora P_4 è un punto *isodinamico* del triangolo $\triangle(P_1, P_2, P_3)$, si trova cioè nell'intersezione delle circonferenze di Apollonio relative agli estremi di ciascun lato e passanti per il vertice opposto.

Ricordiamo che le *proiettività* di $\mathbb{CP}^1$ si ottengono, per passaggio al quoziente, dalle trasformazioni del gruppo lineare $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$. In coordinate non omogenee esse si scrivono nella forma:

$$w = \phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ ed } ad - bc \neq 0. \tag{3.5}$$

Esse formano un gruppo **G**, che si dice *gruppo di Möbius* o delle *trasformazioni lineari fratte*.

Gli elementi ϕ di **G** sono caratterizzati dal fatto di essere le *trasformazioni bigettive di* $\mathbb{CP}^1$ *che preservano i birapporti.*

Chiamiamo *antitrasformazione di Möbius* una trasformazione bigettiva $\phi : \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ tale che

$$(\phi(P_1){:}\phi(P_2){:}\phi(P_3){:}\phi(P_4)) = \overline{(P_1{:}P_2{:}P_3{:}P_4)} \tag{3.6}$$

per ogni $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{CP}^1$, di cui almeno tre distinti.

Una antitrasformazione di Möbius si descrive in coordinate non omogenee mediante:

$$w = \phi(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \qquad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } ad - bc \neq 0. \tag{3.7}$$

Le trasformazioni di Möbius, insieme alle antitrasformazioni di Möbius, formano un gruppo, che diciamo delle *semiproiettività continue* di $\mathbb{CP}^1$, e che indicheremo con $\tilde{\mathbf{G}}$.

Lemma 3.1. *Siano P_1, P_2, P_3 e Q_1, Q_2, Q_3 due terne distinte di punti di $\mathbb{CP}^1$. Vi è allora una e una sola trasformazione di Möbius $\phi \in \mathbf{G}$ ed una e una sola antitrasformazione di Möbius $\psi \in \tilde{\mathbf{G}} \backslash \mathbf{G}$ tali che*

$$\phi(P_i) = Q_i = \psi(P_i) \qquad \forall i = 1, 2, 3. \qquad \square$$

4. Circonferenze sulla sfera di Riemann

Consideriamo il piano complesso $\mathbb{C}$ come un sottoinsieme di $\mathbb{CP}^1$ mediante l'inclusione canonica: $\mathbb{C} \ni z \longrightarrow (1 : z) \in \mathbb{CP}^1$, dimodoché z è anche la coordinata non omogenea del punto corrispondente a $z \in \mathbb{C}$ in $\mathbb{CP}^1$.

Lemma 4.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché quattro numeri complessi distinti z_1, z_2, z_3, z_4 rappresentino punti del piano di Gauss posti o sulla stessa retta o sulla stessa circonferenza è che il loro birapporto*

$$(z_1 : z_2 : z_3 : z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

sia un numero reale.

Dimostrazione. Infatti la condizione che il birapporto sia reale è che il segmento $[z_1, z_2]$ sia visto dai punti z_3 e z_4 secondo angoli uguali o supplementari. $\square$

Dati tre punti distinti a, b, c sulla sfera di Riemann $\mathbb{CP}^1$ definiremo quindi la *circonferenza* in $\mathbb{CP}^1$ passante per i punti a, b, c come l'insieme

$$\kappa = \left\{ p \in \mathbb{CP}^1 \mid (a{:}b{:}c{:}p) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \right\}. \tag{4.1}$$

Vale il seguente:

Teorema 4.2. *Una trasformazione bigettiva $\phi : \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ è una semiproiettività continua se e soltanto se trasforma circonferenze in circonferenze.*

Dimostrazione. Ricordiamo che i soli automorfismi continui del campo $\mathbb{C}$ sono l'identità e il coniugio. Chiaramente le semiproiettività continue trasformano circonferenze in circonferenze.

Per dimostrare il viceversa, osserviamo che a meno di comporre la trasformazione bigettiva $\phi : \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ con una proiettività, possiamo supporre che essa lasci fissi i punti a, b, c di $\mathbb{CP}^1$ di coordinate non omogenee 0, 1, ∞.

Consideriamo ora il piano affine $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \simeq \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\}$.

Se tre punti distinti p, q, r di $\mathbb{R}^2$ sono allineati, allora $(\phi(p){:}\phi(q){:}\phi(r){:}c)$ è reale e perciò $\phi(p), \phi(q), \phi(r)$ sono allineati in $\mathbb{R}^2$. Abbiamo cioè dimostrato che $\phi|_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ trasforma rette in rette. Per il teorema fondamentale della geometria affine la $\phi|_{\mathbb{R}^2}$ è un'affinità. Dal momento che trasforma circonferenze in circonferenze è una similitudine del piano. Poiché lascia fissi i punti a e b, lascia fissa la retta ab (l'asse reale) e deve quindi essere o l'identità o il coniugio nel piano complesso $\mathbb{C}$.

La dimostrazione è completa. $\square$

CAPITOLO II

Geometria della quadrica ellittica

La sfera $\mathbf{S}^2$ è diffeomorfa alla quadrica ellittica di $\mathbb{RP}^3$ e la struttura proiettiva complessa è legata alla geometria della quadrica ellittica. Questa relazione ha conseguenze interessanti, per cui la studieremo in qualche dettaglio nelle pagine seguenti. In particolare, nel Cap. III considereremo i modelli complessi delle geometrie piane a curvatura costante.

1. La quadrica ellittica

Considereremo, in tutta generalità, la quadrica ellittica dello spazio proiettivo reale di dimensione n.

Ricordiamo che una quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{RP}^n$ si dice *ellittica* se tutti i suoi punti sono ellittici, se cioè per ogni $p\in\mathcal{Q}$ il piano tangente H_p non ha con la quadrica altri punti di intersezione. Ciò equivale al fatto che la quadrica abbia indice[1] di Witt 0, ovvero possa essere definita a partire da una forma bilineare simmetrica non degenere in $\mathbb{R}^{n+1}$ con indice di Witt 1: essa corrisponde cioè all'insieme delle rette isotrope di uno spazio lineare[2] di Minkowski $(n+1)$-dimensionale.

Sia $\mathrm{V}=\mathbb{R}^{n+1}$. Una *struttura di Minkowski* su V è il dato di uno pseudoprodotto scalare

$$\mathrm{V}\times\mathrm{V}\ni(x,y)\longrightarrow[x|y]\in\mathbb{R} \tag{1.1}$$

con segnatura $(1,n)$.

Una *base ortonormale* di V è un sistema di vettori $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n$ con

$$[e_i|e_j]=\begin{cases}1 & \text{se}\quad i=j=0\,,\\ 0 & \text{se}\quad 0\leq i\neq j\leq n\,,\\ -1 & \text{se}\quad 1\leq i=j\leq n\,.\end{cases} \tag{1.2}$$

[1]Ernst Witt (1911-1991), algebrista tedesco. Oltre agli studi sulle forme quadratiche, sono importanti i suoi contributi alla teoria di Hodge p-adica, a quella delle algebre di Lie ed alla geometria algebrica.

[2]Hermann Minkowski (1864-1909) matematico lituano-tedesco, attivo in teoria dei numeri e fisica matematica.

Posto $\mathbb{RP}^n = \mathbb{CP}(\mathrm{V})$, la quadrica $\mathcal{Q}$ è descritta in coordinate omogenee dall'equazione:

$$[x|x] = 0\,. \tag{1.3}$$

Sia $pr : \mathrm{V}_*{=}\mathrm{V}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ la proiezione canonica. I punti della regione $[x|x] > 0$ (corrispondenti ai vettori di *tipo tempo*) si dicono *interni* e quelli della regione $[x|x] < 0$ (corrispondenti ai vettori di *tipo spazio*) *esterni* a $\mathcal{Q}$.

Ad un vettore non nullo v di V associamo l'iperpiano $v^\perp{=}\{x \in \mathrm{V} \mid [x|v] = 0\}$ ed indichiamo con H_v l'iperpiano $\mathbb{CP}(v^\perp)$ di $\mathbb{RP}^n$.

Se v è di tipo tempo, tutti i punti di H_v sono esterni alla quadrica: lo diciamo *esterno* alla quadrica.

Se v è di tipo spazio, H_v interseca la quadrica secondo una quadrica ellittica $\mathscr{C}$ di $H_v \simeq \mathbb{RP}^{n-1}$ (una conica se $n = 3$), che si dice *sezione piana* di $\mathcal{Q}$. In questo caso diciamo che H_v è *secante*.

Se v è *isotropo*, se cioè $[v|v] = 0$, allora H_v è l'iperpiano *tangente* alla quadrica $\mathcal{Q}$ nel punto $pr(v)$.

Se $p \in \mathbb{RP}^n$, scegliamo $v \in \mathrm{V}_*$ in modo che $pr(v) = p$, e poniamo $H_p = H_v$.

La corrispondenza $\mathbb{CP}(\mathrm{V}) \ni p \longrightarrow H_p \in \mathbb{CP}(\mathrm{V}')$ è una *reciprocità* su $\mathbb{RP}^n$, cioè una corrispondenza tra punti e iperpiani che fa corrispondere a rette fasci di iperpiani ed è anche una *polarità*: abbiamo cioè $p \in H_q$ per ogni $q \in H_p$.

La H si dice la *polarità associata alla quadrica* $\mathcal{Q}$. In generale, la polarità fa corrispondere ad un sottospazio proiettivo S di dimensione m di $\mathbb{RP}^n$ il sottospazio proiettivo $H_S = \bigcap_{p\in S} H_p$, di dimensione $n{-}m{-}1$.

In particolare, se $n = 3$, la polarità associa ad ogni retta a di $\mathbb{RP}^3$ la retta $H_a = \bigcap_{P\in a} H_P$, che si può ottenere come intersezione dei piani polari di due punti distinti di a. Se a è secante, la sua polare è l'intersezione dei piani tangenti a $\mathcal{Q}$ nei punti di $a \cap \mathcal{Q}$.

2. Corrispondenza tra $\mathbb{CP}^1$ e la quadrica ellittica di $\mathbb{RP}^3$

La proiezione di Tolomeo ci permette di stabilire una corrispondenza biunivoca naturale tra la retta proiettiva complessa $\mathbb{CP}^1$ e la quadrica ellittica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{RP}^3$.

Rappresentiamo $\mathcal{Q}$ in coordinate omogenee mediante:

$$\mathcal{Q} : \qquad x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\,. \tag{2.1}$$

La corrispondenza è allora stabilita dalle formule:

$$\boxed{\mathcal{Q} \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_0 - x_3 : x_1 + i x_2) \in \mathbb{CP}^1,} \tag{2.2}$$

(2.3)
$$\boxed{\mathbb{CP}^1 \ni (z_0{:}z_1) \longrightarrow (z_0\bar{z}_0+z_1\bar{z}_1 : z_0\bar{z}_1+z_1\bar{z}_0 : i\,(z_0\bar{z}_1-z_1\bar{z}_0) : z_1\bar{z}_1-z_0\bar{z}_0) \in \mathcal{Q},}$$

ovvero, utilizzando la coordinata non omogenea:

$$\boxed{\mathbb{CP}^1 \ni \mathfrak{z} \longrightarrow \left(|\mathfrak{z}|^2+1 : 2{\cdot}\mathrm{Re}\,(\mathfrak{z}) : 2{\cdot}\mathrm{Im}\,(\mathfrak{z}) : |\mathfrak{z}|^2-1\right) \in \mathcal{Q}.} \tag{2.4}$$

Proposizione 2.1. *La corrispondenza* (2.2)*,* (2.3)*,*(2.4) *associa a circonferenze di* $\mathbb{CP}^1$ *sezioni piane di* $\mathcal{Q}$ *e viceversa.*

Dimostrazione. Una circonferenza in $\mathbb{CP}^1$ è descritta nella coordinata non omogenea $\mathfrak{z}$ da

$$(*)\quad \alpha{\cdot}\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} + 2\beta{\cdot}\mathrm{Re}\,\mathfrak{z} + 2\gamma{\cdot}\mathrm{Im}\,\mathfrak{z} + \delta = 0 \quad \text{con la condizione che} \quad \beta^2{+}\gamma^2{>}\alpha\delta.$$

Utilizzando la (2.4) possiamo riscriverla nella forma
$(**)$
$$Ax_0{+}Bx_1{+}Cx_2{+}D = 0, \quad \text{con} \quad A = (\alpha{+}\delta)/2\,,\ B = \beta\,,\ C = \gamma\,,\ D = (\alpha{-}\delta)/2.$$

La condizione in $(*)$ è equivalente alla

$$(***)\qquad A^2 - B^2 - C^2 - D^2 < 0,$$

cioè il piano

$$Ax_0 + Bx_1 + Cx_2 + Dx_3 = 0$$

seca la quadrica $\mathcal{Q}$ in una sezione piana $\mathscr{C}$, in quanto $(A, B, C, D) \in \mathbf{R}^4_{1,3} = \mathrm{V}$ è un vettore di tipo spazio. Viceversa si verifica che al piano secante $(**)$ corrisponde la circonferenza $(*)$ della retta proiettiva complessa $\mathbb{CP}^1$. □

3. Automorfismi della quadrica ellittica

Supponiamo in questo paragrafo che n sia un intero positivo ed indichiamo con $\mathbb{R}^{n,1}$ lo spazio di Minkowski di dimensione $n{+}1$. Utilizziamo le partentesi quadre per indicare il relativo pseudo-prodotto scalare ed il simbolo $\mathbf{O}(1,n)$ per il corrispondente gruppo di *isometrie*

$$\mathbf{O}(1,n) = \{T \in \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) \mid [T(v)|T(w)] = [v|w],\ \forall v, w \in \mathbb{R}^{n+1}\}. \tag{3.1}$$

Le proiettività che trasformano in sé una quadrica ellittica si ottengono per passaggio al quoziente da trasformazioni di $\mathbf{O}(1,n)$. Ciò è conseguenza del seguente lemma.

Lemma 3.1. *Se* $T \in \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ *verifica la*

$$(\dagger)\qquad [v|v] = 0 \implies [T(v)|T(v)] = 0,$$

allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$(\ddagger)\qquad [T(v)|T(w)] = c{\cdot}[v|w],\quad \forall v, w \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dimostrazione. Fissiamo un vettore e_0 di tipo tempo, con $[e_0|e_0]=1$. Se v è un vettore di tipo spazio ortogonale ad e_0, posto $-r^2 = [v|v] < 0$, i vettori $re_0 \pm v$ sono isotropi e quindi:

$$[T(re_0 + v)|T(re_0 + v)] = r^2[T(e_0)|T(e_0)] + 2r[T(e_0)|T(v)] + [T(v)|T(v)] = 0$$
$$[T(re_0 - v)|T(re_0 - v)] = r^2[T(e_0)|T(e_0)] - 2r[T(e_0)|T(v)] + [T(v)|T(v)] = 0$$

da cui, sommando e sottraendo membro a membro, otteniamo che:

$$[T(e_0)|T(v)] = 0 \quad \text{ed} \quad r^2[T(e_0)|T(e_0)] + [T(v)|T(v)] = 0.$$

Posto $c = [T(e_0)|T(e_0)]$, risulta allora

$$[T(v)|T(v)] = c \cdot [v|v] \qquad \forall v \in e_0^\perp .$$

Dico che allora

$$[T(u)|T(u)] = c{\cdot}[u|u], \quad \forall u \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Infatti ogni vettore $u \in$ V si scrive in modo unico nella forma $u = \lambda e_0 + v$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ e v ortogonale ad e_0. Abbiamo allora

$$[u|u] = \lambda^2 + [v|v]$$

e quindi

$$[T(u)|T(u)] = \lambda^2[T(e_0)|T(e_0)] + [T(v)|T(v)] = c \cdot (\lambda^2 + [v|v]) = c \cdot [u|u] .$$

La tesi segue dalle formule di polarizzazione. □

Osserviamo che, se $n\geq 2$, la costante c nella tesi dell'enunciato precedente deve essere positiva.

Il *gruppo delle isometrie dello spazio di Minkowski* $\mathbf{O}(1,n)$ contiene i due sottogruppi normali di indice 2

$\mathbf{SO}(1,n) = \{T \in \mathbf{O}(1,n) \mid \det(T) = 1\}$, (gruppo delle rotazioni),

$\mathbf{O}^+(1,n) = \{T \in \mathbf{O}(1,n) \mid [T(e_0)|e_0] > 0\}$, (gruppo delle isometrie ortocrone).

La loro intersezione è il sottogruppo normale di indice 4

$\mathbf{SO}^+(1,n) = \mathbf{SO}(1,n) \cap \mathbf{O}^+(1,n)$, (gruppo di Lorentz).

Poiché ogni trasformazione $T \in \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ che verifichi le condizioni equivalenti (†), (‡) del Lemma 3.1 è proporzionale ad un'isometria ortocrona, otteniamo la

Proposizione 3.2. *L'omomorfismo canonico di* $\mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ *sul gruppo delle omografie proiettive di* $\mathbb{RP}^n$ *identifica* $\mathbf{O}^+(1,n)$ *con il gruppo delle proiettività che trasformano in sé una quadrica ellittica.* □

3.1. Automorfismi della quadrica ellittica di $\mathbb{RP}^3$. Tornando alla situazione della quadrica ellittica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{RP}^3$ abbiamo quindi il

TEOREMA 3.3. *L'omomorfismo canonico di* $\mathbf{GL}_4(\mathbb{R})$ *sul gruppo delle proiettività di* $\mathbb{RP}^3$ *induce un isomorfismo di* $\mathbf{O}^+(1,3)$ *sul gruppo delle proiettività che trasformano in sé la quadrica* $\mathcal{Q}$. □

Una qualsiasi sezione piana $\mathscr{C}$ divide la quadrica $\mathcal{Q}$ in due parti connesse.

TEOREMA 3.4. *Vi è un'unica proiettività che trasformi in sé la quadrica* $\mathcal{Q}$ *lasciando fissi i punti di* $\mathscr{C}$ *e scambiando tra loro le due componenti connesse di* $\mathcal{Q}\backslash\mathscr{C}$.

DIMOSTRAZIONE. La sezione $\mathscr{C}$ è l'intersezione della quadrica $\mathcal{Q}$ con un iperpiano H_v corrispondente a un vettore v di tipo spazio. Le due componenti connesse di $\mathcal{Q}\backslash\mathscr{C}$ sono descritte da

$$\mathcal{Q}^+{=}\mathcal{Q}\cap pr(\{x{\in}\mathbb{R}^4 \mid [v,x]{>}0\}) \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}^-{=}\mathcal{Q}\cap pr(\{x{\in}\mathbb{R}^4 \mid [v,x]{<}0\}).$$

La proiettività cercata si ottiene per passaggio al quoziente dalla simmetria ortocrona[3] σ_v. □

PROPOSIZIONE 3.5. *Sia* $\mathscr{C}$ *una conica di un piano proiettivo reale* $\mathbb{RP}^2$. *Date due terne* p_1, p_2, p_3 *e* q_1, q_2, q_3 *di punti distinti di* $\mathscr{C}$, *vi è un'unica proiettività* ψ *di* $\mathbb{RP}^2$ *tale che* $\psi(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$ *e* $\psi(p_i) = q_i$ *per* $i = 1,2,3$.

DIMOSTRAZIONE. Siano p_4 l'intersezione delle tangenti a $\mathscr{C}$ in p_1 e p_2 e q_4 quella delle tangenti a $\mathscr{C}$ in q_1 e q_2. Vi è allora un'unica proiettività ψ di $\mathbb{RP}^2$ tale che $\psi(p_i) = q_i$ per $i = 1,2,3,4$. Poiché per tre punti passa una sola conica che abbia due tangenti assegnate, risulta anche $\psi(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$. □

TEOREMA 3.6. *Date due terne* p_1, p_2, p_3 *e* q_1, q_2, q_3 *di punti distinti della quadrica ellittica* $\mathcal{Q}$, *vi sono esattamente due proiettività* ϕ *di* $\mathbb{RP}^3$ *tali che* $\phi(\mathcal{Q}){=}\mathcal{Q}$ *e* $\phi(p_i){=}q_i$ *per* $i{=}1,2,3$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mathscr{C} = \mathcal{Q}\cap H_v$ e $\mathscr{C}' = \mathcal{Q}\cap H_{v'}$ le due sezioni coniche determinate dai piani $p_1p_2p_3$ e $q_1q_2q_3$, rispettivamente. Poiché sia v che v' sono vettori di tipo spazio, possiamo trovare una $T_1 \in \mathbf{O}^+(1,3)$ che trasformi v' in un multiplo di v e quindi $\mathscr{C}'$ in $\mathscr{C}$.

Per il teorema precedente possiamo allora trovare una proiettività piana ψ che trasformi in sé la $\mathscr{C}$ e trasformi $T_1(q_i)$ in p_i per $i = 1,2,3$. Essa si ottiene per passaggio al quoziente da una trasformazione t di $\mathbf{O}^+(1,2)$. Definiamo una $T_2 \in \mathbf{O}^+(1,3)$ mediante le condizioni: $T_2(v) = t(v)$ se $v \in v^\perp$, e $T_2(v) = \pm v$. Con le due possibili scelte del segno, le $T_2{\circ}T_1$ definiscono le trasformazioni cercate. □

[3]Ricordiamo che, se v è anisotropo, allora $\sigma_v(x) = x - [x|v^\vee]v$, con $v^\vee = 2v/[v|v]$.

Questo teorema e la caratterizzazione geometrica delle semiproiettività continue di $\mathbb{CP}^1$, ci permettono di dare una dimostrazione semplice di un teorema[4] di Darboux sulle quadriche ellittiche:

Teorema 3.7 (Darboux). *Se Q è una quadrica ellittica di $\mathbb{RP}^3$ ed $f : Q \to Q$ un'applicazione invertibile che trasforma sezioni piane in sezioni piane, allora la f si estende ad una proiettività $\tilde{f} : \mathbb{RP}^3 \longrightarrow \mathbb{RP}^3$ tale che $\tilde{f}(Q) = Q$.*

Dimostrazione. Sia $\pi : Q \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ la bigezione di Q sulla sfera di Riemann ottenuta dalla proiezione di Tolomeo. Allora la $\pi \circ f \circ \pi^{-1}$ è una trasformazione di $\mathbb{CP}^1$ in sé che trasforma circonferenze in circonferenze e quindi è una semiproiettività.

Fissiamo ora una terna di punti distinti p_1, p_2, p_3 su Q e siano q_1, q_2, q_3 le loro immagini mediante la f. Per il Teorema 3.6, vi sono esattamente due proiettività T_1, T_2 di $\mathbb{RP}^3$ che trasformano in sé la quadrica Q e tali che $T_i(p_j) = q_j$ per $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Sia $\hat{T}_i : Q \ni P \longrightarrow T_i(P) \in Q$ $(i = 1, 2)$ l'applicazione ottenuta dalla T_i per restrizione del dominio e del codominio. Allora le $\pi \circ \hat{T}_i \circ f \circ \pi^{-1}$ sono trasformazioni in sé di $\mathbb{CP}^1$ distinte, che lasciano fissi i tre punti $\pi(p_1)$, $\pi(p_2)$, $\pi(p_3)$, e che mutano circonferenze in circonferenze. Una di esse è necessariamente l'identità. Se, per fissare le idee, la $\pi \circ \hat{T}_1 \circ f \circ \pi^{-1}$ è l'identità su $\mathbb{CP}^1$, allora la $\hat{T}_1 \circ f$ è l'identità su Q e quindi f è la restrizione a Q di T_1^{-1}. □

Corollario 3.8. *Il gruppo delle trasformazioni di Möbius è canonicamente isomorfo al gruppo* $\mathbf{SO}^+(1, 3)$. □

4. Classificazione delle trasformazioni di $\mathbf{O}^+(1, n)$.

Sia $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{n+1}_{1,n}$ uno spazio di Minkowski di dimensione $n+1$. Ricordiamo che una *simmetria vettoriale* di V è un'isometria di V che ha un iperpiano (anisotropo) di punti fissi; se $\xi \in V$ è un vettore anisotropo, ortogonale al luogo dei punti fissi, essa è definita da

$$\mathrm{V} \ni v \longrightarrow \sigma_\xi(v) = v - 2\frac{[v|\xi]}{[\xi|\xi]}\xi \in \mathrm{V} \tag{4.1}$$

Essa lascia fissi tutti i punti dell'iperpiano anisotropo $\xi^\perp$ e trasforma il vettore ξ nel suo opposto $-\xi$.

Le simmetrie vettoriali dello spazio di Minkowski sono di due[5] specie:

[4]Jean Gaston Darboux (1842-1917), matematico francese che ha dato notevoli contributi sia alla geometria che allo studio delle equazioni alle derivate parziali.

[5]In generale si dicono "ortocrone" le trasformazioni che lasciano invariato il verso del tempo ed "antiortocrone" quelle che lo rovesciano.

- *ortocrone* se il vettore ξ è di tipo spazio;
- *antiortocrone* se il vettore ξ è di tipo tempo.

Ricordiamo che vale il

TEOREMA 4.1 (Cartan-Dieudonné). *Ogni isometria $g \in \mathbf{O}(1,n)$ è prodotto di al più $(n+1)$ simmetrie vettoriali. Se il sottospazio dei punti fissi di g ha dimensione k, allora g si può scrivere come prodotto di $n-k+1$ simmetrie vettoriali.* □

Per il sottogruppo delle isometrie ortocrone abbiamo:

TEOREMA 4.2. *Ogni isometria ortocrona $g \in \mathbf{O}^{+}(1,n)$ è prodotto di al più $(n+1)$ simmetrie vettoriali ortocrone. Se il sottospazio dei punti fissi di g ha dimensione k, allora g si può scrivere come prodotto di $n-k+1$ simmetrie vettoriali ortocrone.*

DIMOSTRAZIONE. Sia F il sottospazio dei punti fissi di $g \in \mathbf{O}^{+}(1,n)$. Ragioniamo per induzione su $m = n+1-\dim_{\mathbb{R}} F$. Se $m = 0$, g è l'identità e se $m = 1$ una simmetria ortocrona. Il teorema è quindi vero quando $m \leq 1$. Supponiamo ora che sia $m>1$ ed il teorema vero per isometrie ortocrone con luogo di punti fissi di dimensione maggiore di $n+1-m$. Osserviamo che $g-\mathrm{I}_{n+1}$ ha rango m. Quindi il sottospazio $(g-I)(\mathrm{V})$, avendo dimensione $m \geq 2$ contiene almeno un vettore $\eta = g(\xi)-\xi$ di tipo spazio, tale cioè che $[\eta|\eta]<0$. Se $v \in F$, abbiamo allora:

$$[\eta|v] = [g(\xi)|v] - [\xi|v] = [g(\xi)|g(v)] - [\xi|v] = 0\,,$$

onde $\eta \in F^{\perp}$, ed $\eta \notin F$ perché η è anisotropo. La $g' = \sigma_{\eta} \circ g$ lascia fisso ogni vettore di F. Inoltre:

$$g'(\xi) = g(\xi) - 2\frac{[g(\xi)|\eta]}{[\eta|\eta]}\eta = \xi$$

e quindi g' lascia fissi i vettori del sottospazio F' generato da F e da ξ. Poiché $\xi \notin F$, questo sottospazio ha dimensione strettamente maggiore di F. Per induzione, g' è prodotto di un numero minore o uguale a $n+1-\dim_{\mathbb{R}} F'$ di simmetrie ortocrone, e quindi g è prodotto di un numero minore o uguale a $n+1-\dim_{\mathbb{R}} F$ di simmetrie ortocrone. Per la formula di intersezione di Grasmann, g non può essere prodotto di meno di $n+1-\dim_{\mathbb{R}} F$ simmetrie ortocrone, e da questo si ottiene la tesi. □

Chiamiamo *rotazione parabolica* una trasformazione $g \in \mathbf{O}(1,2)$ che abbia come luogo di punti fissi una retta isotropa.

LEMMA 4.3. *Le rotazioni paraboliche di $\mathbf{O}(1,2)$ che lasciano fissa una retta isotropa, insieme all'identità, formano un sottogruppo di trasformazioni unipotenti di $\mathbf{SO}^{+}(1,2)$.*

Dimostrazione. Sia g una rotazione parabolica ed u_0 un vettore non nullo della retta isotropa lasciata fissa da g. La restrizione di g ad $u_0^\perp$ è necessariamente unipotente: altrimenti vi sarebbe in $u_0^\perp$ un autovettore w di g di tipo spazio. Ma allora anche il piano iperbolico $w^\perp$ sarebbe g-invariante. La g, lasciando fisso il vettore isotropo u_0 di $w^\perp$, dovrebbe allora lasciar fisso tutto il piano $w^\perp$, contro l'ipotesi che il luogo dei punti fissi fosse una retta.

Per descrivere la g, è conveniente scegliere una base u_0, u_1, u_2 di $\mathbb{R}^3_{1,2}$ in cui u_0 sia un vettore isotropo appartenente alla retta dei punti fissi di g, u_1 completa u_0 a una base di $u_0^\perp$, e u_2 completa u_0 a una base isotropa di $u_1^\perp$. In questa base la matrice associata alla forma di Minkowski è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice associata a g sarà allora della forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La condizione che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ci dà

$$a = c \qquad \text{e} \qquad 2b = c^2 .$$

Quindi la matrice associata a g è della forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2s & 2s^2 \\ 0 & 1 & 2s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{con} \quad s \in \mathbb{R} . \tag{4.2}$$

La

$$\mathbb{R} \ni s \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2s & 2s^2 \\ 0 & 1 & 2s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{SO}(1,2) \tag{4.3}$$

è un gruppo a un parametro di isometrie dello spazio di Minkowski $\mathbb{R}^3_{1,2}$.

Il vettore u_0+u_2 è di tipo tempo. Abbiamo $g(u_2) = u_2+2su_1+2s^2u_0$ e quindi

$$[g(u_0+u_2)|u_0+u_2] = [u_0+u_2+2su_1+2s^2u_0|u_0+u_2] = 2(1+s^2) > 0 ,$$

e perciò g è ortocrona. □

L'opposta $-g$ di una rotazione parabolica g di $\mathbf{O}(1,2)$ si dice un'*antirotazione parabolica*. Osserviamo che $(-g) \in \mathbf{O}(1,2) \setminus (\mathbf{SO}(1,2) \cup \mathbf{O}^{+}(1,2))$.

Possiamo dare quindi il teorema di struttura delle isometrie dello spazio di Minkowski:

Teorema 4.4. *Sia* $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{n+1}_{1,n}$ *uno spazio di Minkowski di dimensione* $n{+}1$ *e sia* $g \in \mathbf{O}(1,n)$*. Allora possiamo decomporre* V *in una somma diretta di sottospazi g-invarianti ortogonali:*

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_m, \tag{4.4}$$

ciascuno di dimensione ≤ 3*, in modo tale che:*

(a) *g è l'identità o l'opposta dell'identità sui sottospazi* V_i *di dimensione* 1*;*
(b) *g è una rotazione ellittica se* $\dim(\mathrm{V}_i) = 2$ *e* V_i *è un piano ellittico;*
(c) *g è una rotazione iperbolica se* $\dim(\mathrm{V}_i) = 2$ *e* V_i *è un piano iperbolico;*
(d) *g è una rotazione o un'antirotazione parabolica se* $\dim(\mathrm{V}_i) = 3$.

Nella decomposizione ortogonale di g vi è al più un addendo V_i *su cui g definisca una rotazione iperbolica o parabolica o un'antirotazione parabolica.*

Dimostrazione. Possiamo ragionare per ricorrenza su n. Se $n{=}1$, $\mathbb{R}^{2}_{1,1}$ è un piano iperbolico e le $g \in \mathbf{O}(1,1)$ sono o rotazioni iperboliche o simmetrie vettoriali. La tesi è quindi verificata se $n{=}1$. Supponiamo ora sia $n{>}1$ e la tesi verificata per spazi di Minkowski di dimensione inferiore.

Poiché la forma di Minkowski ha indice di Witt 1, vettori isotropi linearmente indipendenti non possono essere ortogonali tra loro. Quindi, se g ha una coppia di autovalori isotropi v, w, essi generano un piano iperbolico $\mathrm{W} = \langle v, w\rangle$. Abbiamo la decomposizione g-invariante ortogonale $\mathrm{V} = \mathrm{W} \oplus \mathrm{W}^{\perp}$ e quindi otteniamo la (4.4) dalla decomposizione di $\mathrm{W} \simeq \mathbb{R}^{2}_{1,1}$ e dello spazio euclideo $\mathrm{W}^{\perp} \simeq \mathbb{R}^{n-1}_{0,n-1}$.

Se g ha un autovalore reale λ diverso da ± 1, con autovettore v, allora v è isotropo e g ha anche l'autovalore $1/\lambda$, con autovettore isotropo w. Allora g definisce una rotazione iperbolica sul piano iperbolico $\mathrm{V}_1 = \langle v, w\rangle$ e possiamo utilizzare l'argmento precedente.

Se g non ha autovalori reali diversi da ± 1 ed uno dei sottospazi

$$F^{+}(g) = \{v \mid g(v) = v\}, \ \text{oppure} \ \ F^{-}(g) = \{v \mid g(v) = -v\},$$

contiene un vettore di tipo tempo, esso genera un sottospazio g-invariante V_1 di dimensione 1, la $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_1^{\perp}$ è una decomposizione ortogonale e su $\mathrm{V}_1^{\perp}$ la g definisce un elemento di $\mathbf{O}(n)$. Anche in questo caso la decomposizione (4.4) segue dalla decomposizione ortogonale delle isometrie dello spazio Euclideo.

Se g ha un autovalore non reale λ, le parti reali ed immaginaria u_1 e u_2 di un corrispondente autovettore $u = u_1+i\cdot u_2$ generano un piano ellittico V_1 su cui g opera come una rotazione piana Euclidea. Abbiamo allora una decomposizione ortogonale $\mathrm{V}=\mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_1^{\perp}$ e, poiché $\mathrm{V}_1^{\perp}$ è un sottospazio di Minkowski g-invariante di dimensione $n-1$, la tesi segue per l'ipotesi induttiva.

Per concludere la dimostrazione, ci basta quindi considerare il caso in cui non ci siano rette anisotrope g-invarianti, non vi siano per g autovalori diversi da ± 1 e g non abbia due autovettori isotropi linearmente indipendenti.

Indichiamo con $E_1(g) = \bigcup_h \ker(g-\mathrm{I}_{n+1})^h$ ed $E_{-1}(g) = \bigcup_h \ker(g+\mathrm{I}_{n+1})^h$ gli autospazi generalizzati di g relativi agli autovalori ± 1. Ciascuno di essi, se non banale, dovrebbe contenere una retta isotropa g-invariante. Quindi uno solo di essi è non banale e, a meno di scambiare g con $-g$, possiamo supporre che $E_1(g) = V$. Quindi g è unipotente ed indecomponibile, con un'unica retta isotropa g-invariante. Poiché essa induce su $u_0^{\perp}/\mathbb{R}u_0$ una isometria unipotente di uno spazio Euclideo, cioè l'identità, deve essere $(g - \mathrm{I}_{n+1})(u_0^{\perp}) \subset \langle u_0\rangle$, e quindi $(g - \mathrm{I}_{n+1})^2 = 0$ su $u_0^{\perp}$. Da questa si deduce che $(g - \mathrm{I}_{n+1})^3 = 0$ e quindi V ha dimensione tre e g è una rotazione parabolica. □

Da questo ricaviamo facilmente il teorema di struttura relativo alle isometrie ortocrone:

Teorema 4.5. *Sia* $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{n+1}_{1,n}$ *uno spazio di Minkowski di dimensione* $n+1$ *e sia* $g \in \mathbf{O}^{+}(1, n)$*. Allora possiamo decomporre* V *in una somma diretta di sottospazi g-invarianti ortogonali:*

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_m, \tag{4.5}$$

ciascuno di dimensione ≤ 3*, in modo tale che:*

(a) *g è l'identità se V_i ha dimensione 1 ed è di tipo tempo;*
(b) *g è l'identità o l'opposto dell'identità se V_i ha dimensione 1 ed è di tipo spazio;*
(c) *g è una rotazione ellittica se V_i è un piano ellittico;*
(d) *g è una rotazione iperbolica se V_i è un piano iperbolico;*
(e) *g è una rotazione parabolica, se V_i ha dimensione tre.*

Nella decomposizione (4.5) *vi è al più una rotazione iperbolica o parabolica.*

4.1. Classificazione delle trasformazioni di $\mathbf{O}^{+}(1, 3)$. Classifichiamo ora le trasformazioni $g \in \mathbf{O}^{+}(1, 3)$ secondo il loro insieme di punti fissi $F(g)$.

- $\dim_{\mathbb{R}} F(g) = 4$ In questo caso $g = I$ è l'identità.

- $\dim_{\mathbb{R}} F(g) = 3$ In questo caso $g = \sigma_\xi$ è una simmetria ortocrona.
- $\dim_{\mathbb{R}} F(g) = 2$ Distinguiamo tre diversi casi:

a) Se $F(g)$ è di tipo spazio, g è una rotazione iperbolica del piano $F(g)^\perp$.
b) Se $F(g)$ è un piano iperbolico, g è una rotazione Euclidea del piano $F(g)^\perp$.
c) Se $F(g)$ è un piano parabolico (se cioè $F(g) \cap F(g)^\perp$ è una retta, g è una rotazione parabolica in un sottospazio di dimensione 3, che contiene la retta isotropa fissa $F(g) \cap F(g)^\perp$.

Se $g = \sigma_\xi \circ \sigma_\eta$ con ξ, η di tipo spazio, posto

$$D = \det\begin{pmatrix} [\xi|\xi] & [\xi|\eta] \\ [\xi|\eta] & [\eta|\eta] \end{pmatrix}$$

$$\text{la } g \text{ è} : \begin{cases} \text{una rotazione iperbolica piana se } D < 0 \\ \text{una rotazione ellittica piana se } D > 0 \\ \text{una rotazione parabolica se } D = 0 \end{cases}$$

- $\dim_{\mathbb{R}} F(g) = 1$ distinguiamo i diversi casi:

a) Se $F(g)$ è di tipo spazio, g è un'*antirotazione iperbolica*, cioè la composizione di una rotazione iperbolica piana e di una simmetria rispetto a un vettore ortogonale al piano iperbolico della rotazione;
b) Se $F(g)$ è di tipo tempo, allora g è un'*antirotazione ellittica*, cioè la composizione di una rotazione ellittica piana composta con una simmetria rispetto a un vettore di tipo spazio ortogonale al piano;
c) Se $F(g)$ è isotropo, allora g è la composizione di una rotazione parabolica e di una simmetria rispetto a un vettore di tipo spazio.

- $\dim_{\mathbb{R}} F(g) = 0$ Distinguiamo due diversi casi:

a) Se g non ha l'autovalore -1, allora è prodotto di due rotazioni, una ellittica, l'altra iperbolica, rispetto a piani tra loro ortogonali.
b) Quando g ha l'autovalore -1, l'autospazio corrispondente $F^-(g)$ deve avere dimensione pari. Se questa dimensione è 4, allora $g = -\mathrm{I}_4$ è in molti modi prodotto di una rotazione ellittica e di una rotazione iperbolica rispetto a piani tra loro ortogonali; ancora g è prodotto di una rotazione ellittica e di una rotazione iperbolica rispetto a piani tra loro ortogonali quando $F^-(g)$ ha dimensione due ed è anisotropo. Il caso di $F^-(g)$ di dimensione due isotropo si deve escludere, perché altrimenti $-g$ sarebbe una rotazione parabolica e g non potrebbe essere ortocrona.

Una $g \in \mathbf{O}^+(1,3)$ con $F(g) = \{0\}$ si dice *lossodromica*.

5. Classificazione delle semiproiettività continue di $\mathbb{CP}^1$.

Per classificare le semiproiettività continue di $\mathbb{CP}^1$, utilizzeremo la sua corrispondenza con la quadrica ellittica stabilita dalla proiezione di Tolomeo.

Una simmetrica ortocrona σ_ξ di $\mathbb{R}^4_{1,3}$ definisce una omografia proiettiva $\hat{\sigma}_\xi$ di $\mathbb{RP}^3$ che lascia fissi i punti della sezione piana $H_\xi \cap Q$ e scambia tra loro le due componenti connesse di $Q \setminus H_\xi$. La corrispondente trasformazione $\tilde{\sigma}_\xi$ di $\mathbb{CP}^1$ lascia fissi i punti della circonferenza:

$$\kappa_\xi : \qquad \xi_0(1 + \mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}) + \xi_1(\mathfrak{z} + \bar{\mathfrak{z}}) + i\xi_2(\bar{\mathfrak{z}} - \mathfrak{z}) + \xi_3(\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} - 1) = 0$$

(immagine della sezione piana $H_\xi \cap Q$ mediante la corrispondenza di Tolomeo) e scambia tra loro le due componenti connesse in cui essa divide $\mathbb{CP}^1$. Tale circonferenza (che corrisponde a una retta del piano di Gauss quando $\xi_0 + \xi_3 = 0$) ha centro nel punto:

$$\mathfrak{z}_0 = -\frac{\xi_1 + i\xi_2}{\xi_0 + \xi_3}$$

e raggio

$$R = -\frac{[\xi|\xi]}{(\xi_0 + \xi_3)^2}\,.$$

La $\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{w}$, con

$$\mathfrak{w} - \mathfrak{z}_0 = \frac{R^2}{\bar{\mathfrak{z}} - \bar{\mathfrak{z}}_0} \tag{5.1}$$

è la semiproiettività continua che lascia fissi i punti di κ_ξ.

Se $\xi_0 + \xi_3 = 0$, la κ_ξ è la retta del piano di Gauss di equazione:

$$\kappa_\xi : \qquad \xi_1(\mathfrak{z} + \bar{\mathfrak{z}}) + i\xi_2(\bar{\mathfrak{z}} - \mathfrak{z}) = 2\xi_3\,.$$

Ponendo $\mathfrak{w} = \mathfrak{z}$ in questa equazione, otteniamo:

$$(\xi_1 - i\xi_2)\mathfrak{w} + (\xi_1 + i\xi_2)\bar{\mathfrak{z}} = 2\xi_3\,,$$

e quindi la $\tilde{\sigma}_\xi$ è definita da

$$\mathfrak{w} = \tilde{\sigma}_\xi(\mathfrak{z}) = -\frac{a\bar{\mathfrak{z}} + b}{\bar{a}} = e^{i\theta}\bar{\mathfrak{z}} + \beta \tag{5.2}$$

ove

$$a = \xi_1 + i\xi_2, \quad e^{i\theta} = -a/\bar{a}, \quad b = 2\xi_0 = -2\xi_3, \quad \beta = b/\bar{a}\,.$$

Chiamiamo la $\tilde{\sigma}_\xi$ *inversione* rispetto alla circonferenza κ_ξ.

Osservazione 5.1. La $\tilde{\sigma}_\xi$ induce su ciascun diametro di κ_ξ la relativa involuzione iperbolica: due punti corrispondenti stanno su un diametro di κ_ξ e formano con i suoi estremi una quaterna armonica.

Dal teorema di Cartan-Dieudonné otteniamo il seguente

TEOREMA 5.2. *Ogni semiproiettività continua della sfera di Riemann $\mathbb{CP}^1$ è composizione di al più 4 inversioni rispetto a circonferenze. Le trasformazioni di Möbius sono quelle ottenute come prodotto di un numero pari di inversioni.* □

Una trasformazione di Möbius g di $\mathbb{CP}^1$ corrisponde a una trasformazione $\tilde{g}$ in $\mathbf{O}^+(1,3)$. La chiameremo *ellittica, iperbolica, parabolica, lossodromica* a seconda che $\tilde{g}$ sia una rotazione ellittica, iperbolica, parabolica oppure una trasformazione lossodromica.

Se $\xi, \eta \in \mathbb{R}^4_{1,3}$ sono due vettori di tipo spazio, allora le circonferenze κ_ξ, κ_η si intersecano in due punti, in un solo punto o non si intersecano a seconda che il piano $\xi^\perp \cap \eta^\perp$ sia iperbolico, parabolico o ellittico.

Abbiamo quindi:

- Una trasformazione di Möbius ellittica è la composizione di due inversioni rispetto a circonferenze secanti;
- Una trasformazione di Möbius parabolica è la composizione di due inversioni rispetto a circonferenze tangenti;
- Una trasformazione di Möbius iperbolica è la composizione di due inversioni rispetto a circonferenze che non si intersecano;
- Una trasformazione di Möbius lossodromica è la composizione di quattro e non meno di quattro inversioni rispetto a circonferenze.

Cerchiamo i punti fissi di una trasformazione di Möbius

$$\mathfrak{w} = \frac{a\mathfrak{z} + b}{c\mathfrak{z} + d}, \qquad ac - bd \neq 0. \tag{5.3}$$

Ponendo $\mathfrak{w} = \mathfrak{z}$ otteniamo l'equazione algebrica:

$$c\mathfrak{z}^2 - (a-d)\mathfrak{z} - b = 0. \tag{5.4}$$

Se $c = 0$, considereremo $\mathfrak{z} = \infty$ soluzione della (5.3). Ci saranno una sola soluzione con molteplicità due o due radici distinte (uno o due punti fissi), a seconda che il discriminante

$$\Delta = (a-d)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4(ad - bc) \tag{5.5}$$

sia uguale o diverso da zero. La seconda espressione del discriminante (5.5) è interessante in quanto è funzione dei due invarianti fondamentali: la traccia $a + d$ e il determinante $ad-bc$, della matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Il numero complesso

$$\lambda = \frac{(a+d)^2}{4(ad-bc)} \tag{5.7}$$

è funzione di grado zero dei coefficienti della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ed invariante per coniugio. È quindi un invariante *proiettivo* della matrice.

Teorema 5.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché due trasformazioni di Möbius $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$ siano coniugate in $\mathbf{G}$ è che*

$$\lambda(g_1) = \lambda(g_2). \tag{5.8}$$

Una trasformazione di Möbius g è:

- *ellittica se e soltanto se $\lambda(g) \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \lambda(g) < 1$;*
- *parabolica se e soltanto se $\lambda(g) = 1$;*
- *iperbolica se e soltanto se $\lambda(g) \in \mathbb{R}$ e $\lambda(g) > 1$;*
- *lossodromica se e soltanto se $\lambda(g) \notin \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \lambda \geq 0\}$.*

Dimostrazione. Osserviamo che due trasformazioni di Möbius coniugate hanno necessariamente lo stesso λ, in quanto corrispondono a matrici di $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ che, a meno di moltiplicazione per un numero complesso non nullo, sono simili in $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$. Completiamo la dimostrazione caratterizzando le $\lambda(g)$.

Consideriamo innanzi tutto una trasformazione di Möbius g con un solo punto fisso. A meno di coniugio possiamo supporre che il punto fisso sia ∞, onde $c = 0$ e la condizione $\Delta = 0$ ci dà $a = d$. Quindi abbiamo

$$g(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z} + b\,, \quad \text{con} \quad b \neq 0.$$

Essa è parabolica (composizione di due inversioni rispetto a rette parallele del piano di Gauss, che sono circonferenze tangenti nel punto all'infinito della sfera di Riemann). Osservando che $\Delta = 0$ è *equivalente* a $\lambda = 1$, otteniamo la caratterizzazione delle trasformazioni paraboliche.

Il cambiamento di coordinata non omogenea $\mathfrak{z}' = b \cdot \mathfrak{z}$ coniuga la g con la

$$g'(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z} + 1, \tag{$*$}$$

mostrandoci che tutte le trasformazioni paraboliche sono coniugate alla forma canonica $(*)$ e quindi coniugate tra loro.

Consideriamo ora una trasformazione di Möbius g con due punti fissi distinti $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$. Il cambiamento di variabili

$$\mathfrak{w}' = \frac{\mathfrak{w} - \mathfrak{z}_1}{\mathfrak{w} - \mathfrak{z}_2}\,, \qquad \mathfrak{z}' = \frac{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_2}$$

la coniuga con una trasformazione di Möbius $\mathfrak{w}' = g'(\mathfrak{z}')$ che ha come punti fissi 0 e ∞, cioè della forma

$$\mathfrak{w} = k \cdot \mathfrak{z} \qquad \text{con} \quad k \in \mathbb{C}^*. \tag{5.9}$$

Ad essa è associata la matrice:

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi:

$$\lambda(g) = \frac{(1+k)^2}{4k} = \left(\frac{k^{1/2} + k^{-1/2}}{2}\right)^2 .$$

Consideriamo l'elemento $t \in \mathbf{SO}^+(1,3)$ corrispondente a g'. I punti 0 e ∞ di $\mathbb{CP}^1$ corrispondono ai punti $(1 : 0 : 0 : -1)$ e $(1 : 0 : 0 : 1)$ della quadrica ellittica $\mathcal{Q}$. I piani $\langle e_0, e_3\rangle$ ed $\langle e_1, e_2\rangle$ sono allora t-invarianti. Esaminiamo le diverse possibilità.

1) Se la t lascia fissi i vettori del piano iperbolico $\langle e_0, e_3\rangle$, allora è una rotazione Euclidea sul piano ellittico $\langle e_1, e_2\rangle$. La matrice associata alla t è allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La trasformazione si scrive quindi nella forma:

$$\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_1 = \cos\theta\, x_1 - \sin\theta\, x_2 \\ y_2 = \sin\theta\, x_1 + \cos\theta\, x_2 \\ y_3 = x_3 \,. \end{cases}$$

Posto $\mathfrak{w} = \dfrac{y_1 + iy_2}{y_0 - y_3}$ e $\mathfrak{z} = \dfrac{x_1 + ix_2}{x_0 - x_3}$, otteniamo

$$\mathfrak{w} = g(\mathfrak{z}) = e^{i\theta}\mathfrak{z}.$$

La g' è una rotazione ellittica e $k = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$. In questo caso otteniamo:

$$\lambda(g) = \lambda(g') = \left(\frac{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}}{2}\right)^2 = \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}. \tag{5.10}$$

Chiaramente abbiamo $0 \leq \lambda < 1$ se la g' non è l'identità. Osserviamo poi che λ determina l'angolo θ a meno di multipli di 2π e del segno. Per concludere, basta quindi osservare che, se $\mathfrak{w} = k \cdot \mathfrak{z}$, allora per $\mathfrak{w}' = \mathfrak{w}^{-1}$, $\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}^{-1}$, abbiamo $\mathfrak{w}'=(1/k)\cdot\mathfrak{z}'$.

2) Consideriamo ora il caso in cui g sia una rotazione iperbolica. La $t \in \mathbf{SO}^+(1,3)$ corrispondente a g' è una rotazione nel piano iperbolico $\langle e_0, e_3\rangle$,

che lascia fissi i vettori del piano ellittico $\langle e_1, e_2 \rangle$. La matrice associata a t sarà dunque, per un opportuno $\theta \in \mathbb{R}_*$:

$$\begin{pmatrix} \cosh\theta & 0 & 0 & -\sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & 0 & \cosh\theta \end{pmatrix}.$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{cases} y_0 = \cosh\theta\, x_0 - \sinh\theta\, x_3 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = -\sinh\theta\, x_0 + \cosh\theta\, x_3 \end{cases}$$

e perciò

$$\mathfrak{w} = \frac{y_1 + iy_2}{y_0 - y_3} = e^{\theta}\mathfrak{z},$$

da cui

$$\lambda(g) = \left(\frac{e^{\theta/2} + e^{-\theta/2}}{2}\right)^2 = \frac{1 + \cosh\theta}{2} > 1.$$

Poiché λ determina θ a meno del segno e le $\mathfrak{w} = e^{\theta}\mathfrak{z}$ e $\mathfrak{w} = e^{-\theta}\mathfrak{z}$ sono coniugate dalla $\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{z}^{-1}$, la discussione delle trasformazioni iperboliche è completa. □

Osservazione 5.4. La k in (5.9) si può ricavare dalla λ risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$(1 + k)^2 - 4\lambda k = 0, \qquad \text{cioè} \qquad k^2 - 2(2\lambda - 1) + 1 = 0.$$

Questa è reciproca, cioè le due soluzioni hanno prodotto uguale ad uno.

CAPITOLO III

Geometrie piane elementari

1. Fasci e stelle di circonferenze

Data una retta r di $\mathbb{RP}^3$, il *fascio* $\mathscr{F}_r$ di *base* r consiste di tutti i piani α di $\mathbb{RP}^3$ che contengono la retta r. Due piani determinano un fascio: se

$$\alpha = \{\phi(x) = 0\}, \quad \beta = \{\psi(x) = 0\}$$

con

$$\begin{cases} \phi(x) = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \\ \psi(x) = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \end{cases} \tag{1.1}$$

sono le equazioni omogenee di due piani α e β distinti, allora la bigezione

$$\mathbb{RP}^1 \ni (u_0 : u_1) \longrightarrow H_{(u_0:u_1)} = \{u_0\phi(x) + u_1\psi(x) = 0\} \in \mathscr{F}_{\alpha\cap\beta} \tag{1.2}$$

definisce la struttura proiettiva del fascio di base $\alpha \cap \beta$.

Fissata una quadrica ellittica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{RP}^3$, le intersezioni $\mathcal{Q}\cap\alpha$ di $\mathcal{Q}$ con i piani α di un fascio $\mathscr{F}$ forma un *fascio* $\mathfrak{F}$ *di sezioni piane di* $\mathcal{Q}$, che, mediante la corrispondenza di Tolomeo, considereremo anche come un *fascio di circonferenze* sulla sfera di Riemann $\mathbb{CP}^1$.

Indichiamo con $\tilde{r}$ il piano di $\mathbb{R}^4_{1,3}$ corrispondente alla retta r di $\mathbb{RP}^3$. In $\mathbb{RP}^3$ consideriamo fissata la polarità definita dalla $\mathcal{Q}$.

Diciamo che il fascio di piani $\mathscr{F}_r$ ed il corrispondente fascio di circonferenze, o sezioni piane, $\mathfrak{F}_r$ è

- *iperbolico* se $\tilde{r}$ è un piano ellittico, se cioè la retta r non interseca la quadrica. In questo caso due distinte sezioni piane, o circonferenze, del fascio non hanno punti in comune.
- *ellittico* se $\tilde{r}$ è un piano iperbolico, se cioè la retta r seca la quadrica in due punti distinti. In questo caso il fascio delle sezioni piane (circonferenze) è costituito da tutte e sole le sezioni (circonferenze) che passano per i due punti.
- *parabolico* se $\tilde{r}$ è un piano parabolico, se cioè la retta r è tangente alla quadrica. In questo caso tutte le sezioni piane (circonferenze) di $\mathfrak{F}_r$ hanno in comune un punto e la tangente per quel punto. Per ciascun punto di $\mathbb{CP}^1$ distinto dal punto comune passa una e una sola circonferenza del fascio.

Una trasformazione di Möbius manda fasci ellittici, iperbolici e parabolici in fasci dello stesso tipo e, viceversa, fasci di circonferenze di $\mathbb{CP}^1$ dello stesso tipo sono coniugati mediante una trasformazione di Möbius.

1.1. Fascio iperbolico. Scegliamo come base del fascio la retta all'infinito del piano equatoriale della quadrica $\mathcal{Q}$. Il fascio delle sezioni è costituito allora dai paralleli e la sua immagine nel piano di Gauss da tutte le circonferenze con centro nell'origine:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}, \quad \text{con } R \text{ reale positivo.} \tag{1.3}$$

In generale, data una retta r di $\mathbb{RP}^3$ esterna a $\mathcal{Q}$, la sua polare H_r seca $\mathcal{Q}$ in due punti distinti P_1, P_2, cui corrispondono due punti $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ della sfera di Riemann. Il fascio iperbolico corrispondente è descritto allora da:

$$|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1| = k \cdot |\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_2|, \qquad \text{con } k \text{ reale positivo :} \tag{1.4}$$

sono le circonferenze di Apollonio relative ai punti $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$. Esso è l'immagine del fascio (1.3) mediante la trasformazione di Möbius

$$\mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_2}.$$

I punti $\mathfrak{z}_1$ e $\mathfrak{z}_2$ si dicono *punti limite del fascio*.

Osserviamo che le circonferenze del fascio sono le linee di forza del campo magnetico prodotto dal passaggio di due correnti opposte di uguale intensità che percorrano due fili ortogonali al piano e passanti per i punti $\mathfrak{z}_1$ e $\mathfrak{z}_2$.

1.2. Fascio ellittico. Scegliendo come punti comuni alle circonferenze del fascio 0 e ∞, otteniamo il fascio di tutte le rette uscenti dall'origine in $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, cui corrispondono i *meridiani* su $\mathcal{Q}$.

Nel caso in cui nessuno dei due punti fissi sia ∞, otteniamo il fascio di tutte le circonferenze passanti per due punti, che si dicono *base del fascio*. Esso corrisponde alle linee di forza del campo elettrico di due cariche uguali ed opposte poste nei punti comuni.

1.3. Fascio parabolico. Un fascio parabolico su $\mathbb{CP}^1$ consiste di tutte le circonferenze che passano per un punto $\mathfrak{z}_0$ assegnato, che si dice la sua *base*, ed hanno in $\mathfrak{z}_0$ una stessa tangente, che si dice il suo *asse radicale*. Se $\mathfrak{z}_0$ è il punto all'infinito, un fascio parabolico $\mathscr{F}$ definisce in $\mathbb{C}$ un fascio di rette parallele. Se il punto è al finito, le circonferenze di un fascio parabolico sono le linee di forza del campo elettrico di un dipolo posto nel punto comune.

Due fasci di piani $\mathcal{F}_{r_1}$ ed $\mathcal{F}_{r_2}$ di $\mathbb{RP}^3$ (e i corrispondenti fasci di sezioni piane di $\mathcal{Q}$ e di circonferenze di $\mathbb{CP}^1$) si dicono *ortogonali* se le loro rette di base r_1 ed r_2 sono l'una la polare dell'altra.

TEOREMA 1.1. *Siano $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ due fasci ortogonali di circonferenze di* $\mathbb{CP}^1$.

(1) *Il fascio $\mathscr{F}_2$ è ellittico, iperbolico o parabolico a seconda che il fascio $\mathscr{F}_1$ sia iperbolico, ellittico o parabolico.*
(2) *Nel caso i due fasci siano l'uno ellittico, l'altro iperbolico, i punti base di un fascio sono punti limite del secondo.*
(3) *Due fasci parabolici ortogonali hanno lo stesso punto base ed assi radicali perpendicolari.*
(4) *Le inversioni rispetto alle circonferenze di $\mathscr{F}_1$ trasformano in sé le circonferenze di $\mathscr{F}_2$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $\mathscr{F}_i$ sia definita a partire dal piano $F_i \subset \mathbb{R}^4_{1,3}$ (i=1, 2). Allora $F_2 = F_1^\perp$ è ellittico, iperbolico o parabolico a seconda che F_1 sia iperbolico, ellittico o parabolico. L'affermazione relativa ai punti base e limite dei fasci ellittici ed iperbolici ortogonali segue immediatamente dalle definizioni, così come l'affermazione su punto base ed assi radicali dei fasci parabolici ortogonali.

Verifichiamo la (4). Indichiamo con $\mathfrak{F}_1$ ed $\mathfrak{F}_2$ i fasci di piani di $\mathbb{RP}^3$ corrispondenti ad $\mathscr{F}_1$ ed $\mathscr{F}_2$. L'equazione omogenea di un piano di $\mathfrak{F}_1$ si scrive:

$$[x\,|\,\xi] = 0 \qquad \text{con} \quad \xi \in F_1^\perp = F_2$$

e quella di un piano di $\mathfrak{F}_2$ mediante:

$$[x\,|\,\eta] = 0 \qquad \text{con} \quad \eta \in F_2^\perp = F_1\,.$$

Allora risulta $\sigma_\xi(\eta) = \eta$ e dunque σ_ξ trasforma in sé l'iperpiano $\eta^\perp$. Quindi per la relativa inversione $\tilde{\sigma}_\xi$ rispetto alla circonferenza κ_ξ abbiamo $\tilde{\sigma}_\xi(\kappa_\eta) = \kappa_\eta$. □

Si chiama *stella di piani di base P* in $\mathbb{RP}^3$ l'insieme $\mathscr{S}_P$ di tutti i piani che contengono il punto P.

Come per i fasci di piani, parleremo di *stella di sezioni piane* della quadrica $\mathcal{Q}$ e di *circonferenze* di $\mathbb{CP}^1$ per indicare le intersezioni di $\mathcal{Q}$ con una stella di piani e la sua immagine in $\mathbb{CP}^1$ mediante la mappa di Tolomeo.

Indicheremo con lo stesso simbolo $\mathcal{S}_P$ le stella di sezioni piane e di circonferenze corrispondenti ad $\mathscr{S}_P$.

Tre piani distinti determinano una stella di piani: il sistema

$$\begin{cases} \phi(x) = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ \psi(x) = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \\ \chi(x) = c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

ne determina il punto base P e la corrispondenza

$$\mathbb{RP}^2 \ni (u_0 : u_1 : u_2) \to \{u_0\phi(x) + u_1\psi(x) + u_2\chi(x) = 0\} \in \mathscr{S}_P \subset [\mathbb{RP}^3]^* \tag{1.6}$$

descrive la struttura proiettiva della stella.

Due fasci distinti di piani determinano una stella se le loro rette di base hanno un punto in comune.

In rapporto alla polarità definita da $\mathcal{Q}$, una stella $\mathscr{S}_P$ di piani, con $P = pr(\xi)$, si dice:

$$\begin{aligned} &\textit{iperbolica} \text{ se il punto base } P \text{ è esterno a } \mathcal{Q} \ \ ([\xi|\xi] < 0);\\ &\textit{parabolica} \text{ se il punto base } P \text{ appartiene a } \mathcal{Q} \ \ ([\xi|\xi] = 0);\\ &\textit{ellittica} \text{ se il punto base } P \text{ è interno a } \mathcal{Q} \ \ ([\xi|\xi] > 0). \end{aligned}$$

Una stella iperbolica contiene fasci ellittici, parabolici, iperbolici.
Una stella parabolica contiene fasci ellittici e parabolici.
Una stella ellittica contiene solo fasci ellittici.

Chiameremo analogamente ellittica, parabolica, iperbolica la stella di sezioni piane di $\mathcal{Q}$ o di circonferenze di $\mathbb{CP}^1$ che corrispondono a una stella ellittica, parabolica, iperbolica di piani di $\mathbb{RP}^3$. Vedremo nel seguito come si possano considerare le circonferenze di una stella come le *rette* di una geometria piana.

Caratterizziamo geometricamente i diversi tipi di stelle di circonferenze in $\mathbb{CP}^1$.

a) Una *stella parabolica* è l'insieme di tutte le circonferenze che passano per uno stesso punto $\mathfrak{z}_0$.

   Se scegliamo $\mathfrak{z}_0 = \infty$, otteniamo l'insieme di tutte le rette del piano di Gauss.

b) Se P è il punto base di una *stella iperbolica* $\mathscr{S}_P$ di $\mathbb{RP}^3$, il luogo dei punti di contatto delle tangenti a $\mathcal{Q}$ per P è la sezione piana $\kappa_p = H_p \cap \mathcal{Q}$ determinata dal polare di P. Le circonferenze della stella sono tutte e sole quelle ortogonali a κ_P.

   Una *stella iperbolica* di $\mathbb{CP}^1$ è quindi l'insieme di tutte le circonferenze che sono ortogonali a una circonferenza assegnata, che si dice *orizzonte* della stella iperbolica.

c) Il punto base P di una *stella ellittica* è interno alla quadrica $\mathcal{Q}$. Se fissiamo l'iperpiano all'infinito Σ_∞ esterno alla quadrica ed identifichiamo $\mathcal{Q}$ alla sfera $\mathbf{S}^2$ con centro nel suo polare 0, la stella $\mathcal{S}_0$ è formata da tutte e sole le circonferenze massime di $\mathbf{S}^2$.

   Per rappresentarla nel piano di Gauss, possiamo fissare su $\mathcal{Q}$ un *polo nord* N, che facciamo corrispondere al punto all'infinito di $\mathbb{CP}^1$. La retta PN interseca $\mathcal{Q}$ in un punto al finito $\mathfrak{z}_0$ del piano di Gauss. Al fascio di base $r=PN$ corrisponde quello delle rette uscenti da $\mathfrak{z}_0$. La polare H_r è esterna alla quadrica e determina con P un piano α. La sezione $\alpha \cap \mathcal{Q}$ corrisponde all'unica circonferenza

κ_N della stella che abbia centro in $\mathfrak{z}_0$. La chiamiamo l'*equatore*, relativo ad N, della stella.

Su ogni sezione piana di $\mathcal{S}_P$ è determinata un'involuzione ellittica che scambia tra loro gli estremi delle corde passanti per P. Fissata una qualsiasi sezione $\mathscr{C}$ di $\mathcal{Q}$ con un piano passante per P, apparterranno alla stella tutte e sole le sezioni piane che passano per i due estremi di una corda di $\mathscr{C}$ passante per P.

In particolare, le corde che congiungono i punti di intersezione di due circonferenze della stella passano tutte per il punto $\mathfrak{z}_0$.

Verifichiamo che κ_N è l'unica circonferenza della stella con centro in $\mathfrak{z}_0$. Infatti una retta che congiunge un punto Q di r a P interseca $\mathcal{Q}$ in due punti A e B che formano con P e Q una quaterna armonica. La proiezione di centro N sul piano di Gauss trasforma Q in ∞ e perciò $\mathfrak{z}_0$ sarà punto medio tra le immagini di A e di B.

In particolare, possiamo scegliere N in modo che l'equatore κ_N sia la circonferenza unitaria $\mathbf{S}^1 = \{|\mathfrak{z}| = 1\}$ del piano di Gauss. Per ogni $\mathfrak{z}_0 \in \mathbb{C}$, l'unica circonferenza della stella con centro $\mathfrak{z}_0$ è quella di equazione

$$|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0|^2 = 1 + \mathfrak{z}_0\bar{\mathfrak{z}}_0\,, \quad \text{per } \mathfrak{z}_0 \in \mathbb{C}, \tag{1.7}$$

ovvero in coordinate cartesiane:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 1 \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}\,. \tag{1.8}$$

Abbiamo infatti, se $\mathfrak{z}_0 \neq 0$,

$$\left|\frac{\pm i\mathfrak{z}_0}{|\mathfrak{z}_0|} - \mathfrak{z}_0\right|^2 = 1 + |\mathfrak{z}_0|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\frac{i\mathfrak{z}_0\cdot\bar{\mathfrak{z}}_0}{|\mathfrak{z}_0|}\right) = 1 + |\mathfrak{z}_0|^2.$$

e quindi la circonferenza in (1.7) interseca $\mathbf{S}^1$ in $\pm i\mathfrak{z}_0/|\mathfrak{z}_0|$.

2. Prodotti di inversioni rispetto alle circonferenze di una stella

Indichiamo con $\mathcal{S}_P$ la stella di circonferenze di $\mathbb{CP}^1$ corrispondente alla stella di piani $\mathscr{S}_P$ di $\mathbb{CP}^3$ ed indichiamo con $\tilde{\mathbf{G}}_P$ il gruppo formato dai prodotti di inversioni rispetto alle circonferenze circonferenze κ di $\mathcal{S}_P$.

Il fatto che $\tilde{\mathbf{G}}_P$ sia un gruppo è conseguenza del fatto che, detta L è la retta di $\mathbb{R}^4_{1,3}$ corrispondente al punto base P della stella, $\tilde{\mathbf{G}}_P$ è l'immagine isomorfa del sottogruppo $\mathbf{O}^+_L(1,3) = \{T \in \mathbf{O}^+(1,3) \mid T(v) = v,\ \forall\, v {\in} L\}$. Ogni trasformazione di $\mathbf{G}_P$ si può ottenere come prodotto di al più tre simmetrie ortocrone e dunque ogni elemento di $\mathbf{SO}^+_L(1,3)$ è prodotto di esattamente due simmetrie ortocrone.

Il corrispondente sottogruppo di semiproiettività di $\mathbb{CP}^1$, che indichiamo ancora con $\tilde{\mathbf{G}}_P$, è quindi formato da trasformazioni ottenibili come prodotti di al più tre inversioni rispetto a circonferenze della stella $\mathcal{S}_P$, e le trasformazioni di Möbius formano un sottogruppo $\mathbf{G}_P$ di $\tilde{\mathbf{G}}_P$ che consiste delle composizioni di due inversioni rispetto a circonferenze della stella $\mathcal{S}_P$.

Teorema 2.1. *Se la stella $\mathcal{S}_P$ è iperbolica, allora i gruppi $\tilde{\mathbf{G}}_P$ e $\mathbf{G}_P$ sono isomorfi, rispettivamente, ad $\mathbf{O}^+(1,2)$ e ad $\mathbf{SO}^+(1,2)$. Il gruppo $\mathbf{G}_P$ opera transitivamente su ciascuna delle due componenti connesse in cui l'orizzonte divide $\mathbb{CP}^1$.*

Se la stella $\mathcal{S}_P$ è parabolica, allora i gruppi $\tilde{\mathbf{G}}_P$ e $\mathbf{G}_p$ sono isomorfi, rispettivamente, ai gruppi $\mathbf{O}_1(2)$ ed $\mathbf{SO}_1(2)$ (estensioni affini di $\mathbf{O}(2)$ e di $\mathbf{SO}(2)$). Il gruppo $\mathbf{G}_P$ opera transitivamente sull'immagine di $\mathcal{Q}\setminus\{P\}$.

Se la stella $\mathcal{S}_P$ è ellittica, allora $\tilde{\mathbf{G}}_P \simeq \mathbf{O}(3)$ e $\mathbf{G}_P \simeq \mathbf{SO}(3)$. Entrambi operano transitivamente su $\mathbb{CP}^1$. □

Indichiamo con $\mathcal{H}$ l'immagine, mediante la proiezione di Tolomeo, di una delle due componenti connesse in cui il piano polare del punto base di una stella iperbolica divide la quadrica ellittica $\mathcal{Q}$. A meno di una scelta specifica, supporremo nel seguito che $\mathcal{H}$ sia o il disco unitario (aperto) $D=\{|\mathfrak{z}|<1\}$ oppure il semipiano di Poincaré $\mathrm{H}=\{\mathrm{Im}(\mathfrak{z})>0\}$. Indicheremo poi con $\mathfrak{C}$ il piano di Gauss, ovvero $\mathbb{CP}^1\setminus\{\mathfrak{z}_0\}$ per l'immagine $\mathfrak{z}_0$ del punto base $P\in\mathcal{Q}$ di una stella parabolica. Infine, indichiamo con Σ la sfera di Riemann $\mathbb{CP}^1$, su cui facciamo agire il gruppo $\tilde{\mathbf{G}}_P$ relativo a una stella ellittica $\mathcal{S}_P$.

Osservazione 2.2. In tutti e tre i casi, lo stabilizzatore in $\tilde{\mathbf{G}}_P$ di un punto di $\mathcal{H}$, $\mathfrak{C}$, Σ è un sottogruppo isomorfo ad $\mathbf{O}(2)$.

Infatti le corrispondenti trasformazioni di $\mathbf{O}^+(1,3)$ hanno un piano iperbolico di punti fissi (corrispondente alla retta per P e per il punto $Q \in \mathcal{Q}$ corrispondente al punto fisso in $\mathcal{H}$, $\mathfrak{C}$, Σ).

Abbiamo quindi

$$\mathcal{H} \simeq \mathbf{O}^+(1,2)/\mathbf{O}(2) = \text{piano di Lobačevski},$$
$$\mathfrak{C} \simeq \mathbf{O}_1(2)/\mathbf{O}(2) = \text{piano di Euclide},$$
$$\Sigma \simeq \mathbf{O}(3)/\mathbf{O}(2) = \text{rivestimento a due fogli del piano di Riemann}.$$

In ciascuno di questi *piani* chiamiamo *rette* le intersezioni dei corrispondenti domini di $\mathbb{CP}^1$ con le circonferenze della relativa stella.

3. Automorfismi di Möbius del disco

Sia $D = \{|z|<1\} \subset \mathbb{C}$ il disco di centro l'origine e raggio 1 nel piano di Gauss.

Chiamiamo *trasformazione di Möbius del disco D* ogni trasformazione di Möbius $\phi : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ tale che $\phi(D)=D$. Le trasformazione di Möbius del disco D formano un gruppo, che denotiamo con $\mathcal{A}ut(D)$.

Lemma 3.1. *Gli elementi di* $\mathcal{A}ut(D)$ *che lasciano fisso il centro* 0 *sono tutti e soli quelli della forma*

$$w = e^{i\theta} z, \quad con\ \theta \in \mathbb{R}\,. \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Se $\phi \in \mathbf{G}$ e $\phi(D) = D$, allora $\phi(\mathbf{S}^1) = \mathbf{S}^1$ e le circonferenze di $\mathbb{CP}^1$ ortogonali ad $\mathbf{S}^1$ si trasformano in circonferenze di $\mathbb{CP}^1$ ortogonali a $\mathbf{S}^1$. Poiché abbiamo supposto che $\phi(0) = 0$, anche i diametri di D sono trasformati in diametri di D. Quindi anche il loro punto comune ∞ rimane fisso per la ϕ: essa si restringe quindi ad un'applicazione lineare su $\mathbb{C}$, della forma $z \to a \cdot z$, per un numero complesso $a \neq 0$. La condizione $\phi(D) = D$ ci dice infine che $|a| = 1$. □

Lemma 3.2. *Per ogni* $a \in D$, *l'applicazione*

$$\psi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a} \cdot z} \tag{3.2}$$

è un'involuzione in $\mathcal{A}ut(D)$ *che scambia il centro* 0 *di* D *con* a.

Dimostrazione. Per la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ -\bar{a} & 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ associata a ψ_a abbiamo $A^2 = (1 - |a|^2) \cdot \mathrm{I}_2$ e quindi $\psi_a^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{CP}^1}$ e la ψ_a è un'involuzione su $\mathbb{CP}^1$. Se $\bar{a} \cdot z \neq 1$,

$$\left| \frac{a - z}{1 - \bar{a} \cdot z} \right| < 1 \iff |a - z|^2 < |1 - \bar{a} \cdot z|^2 \iff |a|^2 + |z|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\bar{a} \cdot z) < 1 + |a|^2 \cdot |z|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\bar{a} \cdot z)$$
$$\iff |a|^2 + |z|^2 < 1 + |a|^2 \cdot |z|^2 \iff (1 - |a|^2) \cdot (1 - |z|^2) > 0.$$

Quindi $\psi_a(D) \subseteq D$ e, poiché è un'involuzione, vale l'uguaglianza $\psi_a(D) = D$ e perciò $\psi_a \in \mathcal{A}ut(D)$. □

Teorema 3.3. *Gli automorfismi di Möbius di D sono tutte e sole le trasformazioni della forma:*

$$w = e^{i\theta} \frac{a - z}{1 - \bar{a} z}, \quad con\ \theta \in \mathbb{R}\ ed\ a \in D. \tag{3.3}$$

Dimostrazione. Sia ora ϕ una qualsiasi trasformazione di $\mathcal{A}ut(D)$. Se $a = \phi^{-1}(0)$, allora la composizione $\phi \circ \psi_a \in \mathcal{A}ut(D)$ lascia fisso 0 ed è quindi della forma $z \to e^{i\theta} z$. Otteniamo così la (3.3). □

Mostriamo come il disco, con i suoi automorfismi, costituisca un modello di geometria iperbolica, cioè della geometria piana in cui le rette siano sezioni piane in $\mathcal{Q}$ di una stella iperbolica.

Come punto esterno alla quadrica fissiamo $P = (0{:}0{:}0{:}1)$, polare del piano *equatoriale* $\{x_4 = 0\}$ di $\mathcal{Q}$. I piani della stella $\mathscr{S}_P$ hanno equazione

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0, \quad \text{e sono secanti se} \quad \xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 < 0\,. \tag{3.4}$$

Ad essi corrispondono in $\mathbb{CP}^1$ le circonferenze di equazione

$$\xi_0(1 + z\bar{z}) + \xi_1(z + \bar{z}) + i\xi_2(\bar{z} - z) = 0. \tag{3.5}$$

Se $\xi_0 \neq 0$, posto $\alpha = (\xi_1 + i\xi_2)/\xi_0$, abbiamo nel piano di Gauss la circonferenza

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}\, z + \alpha\, \bar{z} + 1 = 0, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| > 1. \tag{3.6}$$

Se $\xi_0 = 0$, otteniamo le rette per l'origine

$$\bar{\alpha}\, z + \alpha\, \bar{z} = 0, \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{C}_* . \tag{3.7}$$

L'inversione rispetto alla (3.7) (che si ottiene formalmente sostituendo w a z nell'equazione) è la

$$w = -\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \cdot \bar{z}. \tag{3.8}$$

Calcoliamo l'inversione rispetto alla (3.6). Da $w\bar{z} + \bar{\alpha}\, w + \alpha\, \bar{z} + 1 = 0$ ricaviamo $w = -(1 + \alpha\bar{z})/(\bar{\alpha} + \bar{z})$, ovvero, posto $a = -1/\alpha$,

$$w = \frac{a - \bar{z}}{1 - \bar{a}\, \bar{z}}. \tag{3.9}$$

La composizione con il coniugio (che è la (3.8) per $\alpha = i$), otteniamo la (3.2). Le trasformazioni (3.1) si ottengono componendo due inversioni rispetto a rette della forma (3.7). Quindi, poiché $\mathbf{G}_P$ è certamente contenuto nel gruppo degli automorfismi di Möbius del disco D, otteniamo:

Teorema 3.4. *Se $P = (0 : 0 : 0 : 1)$, abbiamo $\mathcal{A}ut(D) = \mathbf{G}_P$.* □

4. Modello standard del piano di Lobačewski

Il piano di Lobačewski si può rappresentare come un sottoinsieme dello spazio di Minkowski $\mathbb{R}^3_{1,2}$ nel modo seguente: fissato un vettore e_0 di tipo tempo, si considera la falda dell'iperboloide a due falde:

$$\mathscr{L} = \{x \in \mathbb{R}^3_{1,2} \mid [x|x] = 1\,, \quad [x|e_0] > 0\}\,. \tag{4.1}$$

Il gruppo $\mathbf{O}^+(1,2)$ opera transitivamente su $\mathscr{L}$. Dati due punti ξ, η di $\mathscr{L}$ vi è un'unica rotazione iperbolica che porti il primo sul secondo: il settore di arco iperbolico che determina la rotazione è dato da $\cosh\theta = [\xi|\eta]$ ed abbiamo quindi

$$\tanh^2(\theta/2) = \frac{[\xi|\eta] - 1}{[\xi|\eta] + 1}\,. \tag{4.2}$$

Definiamo la *distanza iperbolica* tra i due punti ξ e η mediante:

$$\operatorname{dist}(\xi, \eta) = \theta = 2\tanh^{-1}\sqrt{\frac{[\xi|\eta] - 1}{[\xi|\eta] + 1}}\,. \tag{4.3}$$

Essa gode delle proprietà della distanza e inoltre vale l'uguaglianza:

$$\operatorname{dist}(\xi,\eta) = \operatorname{dist}(\xi,\tau) + \operatorname{dist}(\tau,\eta)$$

se e soltanto se ξ, η, τ appartengono alla stessa *retta* (intersezione di $\mathscr{L}$ con un piano per l'origine di $\mathbb{R}^3_{1,2}$) e τ si trova sull'arco che congiunge ξ ad η. Questa proprietà segue dal fatto che le funzioni iperboliche definiscono un isomorfismo tra il gruppo additivo dei numeri reali e le rotazioni iperboliche di $\mathbf{SO}^+(1,1)$:

$$\mathbb{R} \ni \theta \to \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \in \mathbf{SO}^+(1,1)\,.$$

5. Isomorfismo del modello di Poincaré con quello standard

Sia Γ il cono dei vettori isotropi di $\mathbb{R}^4_{1,3}$:

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^4_{1,3} \mid [x|x] = 0\}\,. \tag{5.1}$$

Posto $\Gamma_* = \{x \in \Gamma \mid x_3 \neq 0\}$, l'applicazione

$$\Gamma_* \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) \to \left(\frac{x_0}{x_3}, \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) \in \mathscr{L} \tag{5.2}$$

è surgettiva ed induce, per passaggio al quoziente, una bigezione tra

$$Q^- = \{P = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in Q \mid x_0 x_3 < 0\}$$

e il piano di Lobačewski $\mathscr{L}$.

Questa bigezione induce un isomorfismo tra i gruppi $\tilde{\mathbf{G}}_P$ ed $\mathbf{O}^+(1,2)$.

Componendola con l'inversa della proiezione di Tolomeo, otteniamo un'applicazione bigettiva:

$$D \ni z \to \left(\frac{z\bar{z}+1}{z\bar{z}-1}, \frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}-1}, i\frac{\bar{z}-z}{z\bar{z}-1}\right) \in \mathscr{L}\,. \tag{5.3}$$

Dati due punti z, $w \in D$, siano ξ, η i corrispondenti punti di $\mathscr{L}$. Detta θ la distanza tra ξ e η, otteniamo:

$$\cosh\theta = [\xi|\eta] = \frac{(z\bar{z}+1)(w\bar{w}+1) - (z+\bar{z})(w+\bar{w}) - (z-\bar{z})(w-\bar{w})}{(z\bar{z}-1)(w\bar{w}-1)}$$

(5.4)

$$= \frac{z\bar{z}w\bar{w} + z\bar{z} + w\bar{w} + 1 - 2z\bar{w} - 2\bar{z}w}{(z\bar{z}-1)(w\bar{w}-1)}\,,$$

da cui otteniamo:

$$\tanh^2(\theta/2) = \frac{[\xi|\eta]-1}{[\xi|\eta]+1} = \frac{z\bar{z} + w\bar{w} - z\bar{w} - w\bar{z}}{z\bar{z}w\bar{w} - z\bar{w} - w\bar{z} + 1} = \frac{|z-w|^2}{|1-z\bar{w}|^2}$$

e troviamo dunque il significato dell'invariante del gruppo degli autormorfismi di Möbius del disco che avevamo trovato in precedenza. Abbiamo dunque:

$$\tanh\left(\mathrm{dist}(z,w)/2\right) = \left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|, \tag{5.5}$$

ovvero

$$\boxed{\mathrm{dist}(z,w) = 2\tanh^{-1}\left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|.} \tag{5.6}$$

Indicheremo di solito con ϖ la distanza nella *metrica di Poincaré del disco*. Esplicitando l'inversa della tangente iperbolica otteniamo:

$$\boxed{\varpi(z,w) = \log\left(\frac{1+\left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|}{1-\left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|}\right).} \tag{5.7}$$

Posto $\epsilon = \left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|$, calcoliamo lo sviluppo di Taylor di ϖ rispetto ad ϵ. Abbiamo:

$$\log\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right) = \log(1+\epsilon) - \log(1-\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\epsilon^{n+1}}{n+1} + \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\frac{\epsilon^{n+1}}{n+1} = 2\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\frac{\epsilon^{2n+1}}{2n+1}.$$

Qundi, posto $w = z + dz$, otteniamo:

$$\varpi(z, z+dz) = 2\frac{|dz|}{1-z\bar{z}} + o(|dz|)$$

e da questa la formula della *metrica di Poincaré del disco*:

$$\boxed{ds^2 = 4\frac{dz\cdot d\bar{z}}{(1-z\bar{z})^2}} \tag{5.8}$$

che, nelle coordinate cartesiane reali x, y si riscrive:

$$ds^2 = 4\frac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2} \qquad \left(x^2+y^2 < 1\right). \tag{5.9}$$

Ricordiamo che la curvatura di una metrica Riemanniana su una superficie, rappresentata in coordinate nella forma

$$ds^2 = \lambda(x,y)\left(dx^2+dy^2\right),$$

si può calcolare utilizzando la formula:

$$\kappa = \text{curvatura Gaussiana} = -\frac{1}{2\lambda}\Delta\log\lambda = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\log\lambda}{\partial y^2}\right).$$

Nel nostro caso $\lambda = 4(1-x^2-y^2)^{-2}$. Quindi:

$$\frac{\partial \log\lambda}{\partial x} = \frac{4x}{1-x^2-y^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial x^2} = \frac{4}{1-x^2-y^2} + \frac{8x^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

$$\frac{\partial \log\lambda}{\partial y} = \frac{4y}{1-x^2-y^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial y^2} = \frac{4}{1-x^2-y^2} + \frac{8y^2}{(1-x^2-y^2)^2}\,.$$

Otteniamo perciò:

$$\kappa = -\frac{1}{\dfrac{8}{1-x^2-y^2}} \cdot \left(\frac{8}{1-x^2-y^2} + \frac{8x^2+8y^2}{(1-x^2-y^2)^2} \right) = -1\,.$$

Con la metrica di Poincaré, il disco D è una superficie a curvatura costante (-1).

5.1. La metrica sul modello standard. Parametrizziamo il piano $\mathscr{L}$ mediante:

$$\begin{cases} x_0 = \cosh\theta \\ x_1 = \sinh\theta\cos\phi \\ x_2 = \sinh\theta\sin\phi\,. \end{cases} \tag{5.10}$$

La corrispondenza biunivoca con D è data allora da

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sinh\theta\cos\phi}{1+\cosh\theta} = \tanh(\theta/2)\cos\phi \\ y = \dfrac{\sinh\theta\sin\phi}{1+\cosh\theta} = \tanh(\theta/2)\sin\phi \end{cases} \tag{5.11}$$

da cui

$$dx = \frac{1}{2}\left(1+\tanh^2(\theta/2)\right)\cos\phi\, d\theta - \tanh(\theta/2)\ \sin\phi\, d\phi\,,$$
$$dy = \frac{1}{2}\left(1+\tanh^2(\theta/2)\right)\sin\phi\, d\theta + \tanh(\theta/2)\ \cos\phi\, d\phi$$

e quindi, poiché $1-x^2-y^2 = 2/(1+\cosh\theta)$,

$$ds^2 = 4\frac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2} = d\theta^2 + \sinh^2\theta\, d\phi^2\,. \tag{5.12}$$

5.2. Metrica di Poincaré sul semipiano. La trasformazione di Möbius:

$$\mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{z}-i}{\mathfrak{z}+i} \tag{5.13}$$

definisce una corrispondenza biunivoca tra i punti del semipiano

$$\mathrm{H} = \{\mathrm{Im}\mathfrak{z} > 0\} \tag{5.14}$$

e il disco $D = \{|\mathfrak{w}| < 1\}$. Essa fa corrispondere alle *rette di D*, che sono diametri per 0 e archi di circonferenze ortogonali a ∂D, le *rette di* H, che sono semirette perpendicolari all'asse x e semicirconferenze con centro sull'asse x.

Abbiamo

$$d\mathfrak{w} = -\frac{2i d\mathfrak{z}}{(\mathfrak{z}+i)^2},$$
$$1 - \mathfrak{w}\bar{\mathfrak{w}} = \frac{(\mathfrak{z}+i)(\bar{\mathfrak{z}}-i) - (\mathfrak{z}-i)(\bar{\mathfrak{z}}+i)}{|\mathfrak{z}+i|^2},$$

da cui

(5.15)
$$ds^2 = 4\frac{d\mathfrak{w}d\bar{\mathfrak{w}}}{(1-\mathfrak{w}\bar{\mathfrak{w}})^2} = 4 \cdot \frac{4d\mathfrak{z}d\bar{\mathfrak{z}} \Big/ |\mathfrak{z}+i|^4}{-4(\mathfrak{z}-\bar{\mathfrak{z}})^2 \Big/ |\mathfrak{z}+i|^4} = \frac{d\mathfrak{z}d\bar{\mathfrak{z}}}{(\mathrm{Im}\,\mathfrak{z})^2} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2} \quad \text{per } y > 0.$$

6. Trigonometria iperbolica

Siano v_1, v_2, v_3 i tre vertici di un triangolo del piano di Lobačewski $\mathscr{L} \subset \mathbb{R}^4_{1,3}$. Indichiamo con

(6.1)
$$\begin{cases} a_i = \text{lunghezza del lato opposto a } v_i, \\ \alpha_i = \text{ampiezza dell'angolo interno di vertice } v_i, \\ A_i = \pi - \alpha_i = \text{ampiezza dell'angolo esterno di vertice } v_i. \end{cases}$$

Ricordiamo allora che la lunghezza del lato ha l'espressione:

(6.2)
$$\cosh a_i = [v_j|v_k], \qquad \text{se} \quad (i,j,k) \in \mathbf{S}_3.$$

Per calcolare l'angolo α_i, osserviamo che posto

$$w_j = v_j - [v_j|v_i]v_i, \qquad w_k = v_k - [v_k|v_i]v_i,$$

risulta

$$\cos\alpha_i = \frac{-[w_j|w_k]}{\sqrt{[w_j|w_j][w_k|w_k]}} = \frac{[v_i|v_j][v_i|v_k] - [v_j|v_k]}{\sqrt{([v_i|v_j]^2-1)([v_i|v_k]^2-1)}}$$

cioè

(6.3)
$$\cos\alpha = \frac{\cosh a_j \cosh a_k - \cosh a_i}{\sinh a_j \sinh a_k}.$$

Otteniamo quindi il TEOREMA DEL COSENO:

(6.4)
$$\boxed{\sinh a_j \sinh a_k \cos\alpha_i = \cosh a_j \cosh a_k - \cosh a_i}$$

ovvero

(6.5)
$$\boxed{\sinh a_j \sinh a_k \cos A_i = \cosh a_i - \cosh a_j \cosh a_k\,.}$$

Ricordiamo le formule di somma delle funzioni iperboliche:

$$\begin{aligned}
2\cosh a\cosh b &= \cosh(a+b)+\cosh(a-b)\\
2\sinh a\cosh b &= \sinh(a+b)+\sinh(a-b)\\
2\sinh a\sinh b &= \cosh(a+b)-\cosh(a-b)\\
\cosh(a+b) &= \cosh a\cosh b+\sinh a\sinh b\\
\sinh(a+b) &= \sinh a\cosh b+\sinh b\cosh a\,.
\end{aligned}$$

Poiché $\cos A_i = 2\cos^2(A_i/2)-1 = 1-2\sin^2(A_i/2)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
2\sinh a_j\sinh a_k\cos^2(A_i/2) &= \cosh a_i - \big(\cosh a_j\cosh a_k - \sinh a_j\sinh a_k\big)\\
&= \cosh a_i - \cosh(a_j-a_k)\\
&= 2\sinh\big((a_i+a_j-a_k)/2\big)\sinh\big((a_i+a_k-a_j)/2\big)\,.
\end{aligned}$$

Ponendo

$$\begin{cases}
s_0 = \dfrac{a_1+a_2+a_3}{2}\\
s_1 = s_0-a_1 = \dfrac{a_2+a_3-a_1}{2}\\
s_2 = s_0-a_2 = \dfrac{a_1+a_3-a_2}{2}\\
s_3 = s_0-a_3 = \dfrac{a_1+a_2-a_3}{2}
\end{cases} \tag{6.6}$$

otteniamo:

$$\boxed{\sinh a_j\sinh a_k\cos^2(A_i/2) = \sinh s_j\sinh s_k,} \tag{6.7}$$

$$\boxed{\sinh a_j\sinh a_k\sin^2(A_i/2) = \sinh s_0\sinh s_i.} \tag{6.8}$$

Moltiplicando termine a termine le (6.7), otteniamo:

$$\begin{aligned}
\sinh a_j\sinh a_k\sinh^2 a_i\cos^2(A_j/2)\cos^2(A_k/2) &= \sinh s_j\sinh s_k\sinh^2 s_i\\
&= \sinh a_j\sinh a_k\cos^2(A_i/2)
\end{aligned}$$

da cui ricaviamo:

$$\boxed{\sinh a_i\cos(A_j/2)\cos(A_k/2) = \sinh s_i\cos(A_i/2)\,.} \tag{6.9}$$

Analogamente, moltiplicando termine a termine le (6.7) e (6.8), otteniamo

$$\boxed{\sinh a_i\sin(A_j/2)\cos(A_k/2) = \sinh s_j\sin(A_i/2)\,.} \tag{6.10}$$

Infine, moltiplicando termine a termine le (6.8), si ha:

$$\boxed{\sinh a_i\sin(A_j/2)\sin(A_k/2) = \sinh s_0\cos(A_i/2)\,.} \tag{6.11}$$

7. Geometria sferica

Consideriamo ora la geometria che ha come gruppo di trasformazioni il gruppo $\mathbf{G}_P$ relativo a una stella ellittica, avente per equatore la circonferenza $\kappa = \{|z| = 1\}$. Ricordiamo che le circonferenze della stella sono tutte e sole quelle che intersecano κ negli estremi di un diametro. Esse corrispondono, nella proiezione di Tolomeo, alle sezioni piane di Q ottenute con piani passanti per il punto P di coordinate omogenee (1:0:0:0), cioè della forma

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0.$$

Se $\xi_3 \neq 0$, otteniamo, con $a = (\xi_1 + i\xi_2)/\xi_3$, otteniamo le circonferenze del piano di Gauss

$$z\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} = 1, \quad \text{con } a \in \mathbb{C}. \tag{7.1}$$

Se $\xi_3 = 0$, abbiamo in $\mathbb{C}$ le rette

$$\bar{a}z + a\bar{z} = 0. \tag{7.2}$$

L'inversione rispetto alla retta (7.1) è la

$$w = -\frac{a}{\bar{a}} \cdot \bar{z}. \tag{7.3}$$

Per calcolare l'inversione rispetto alla circonferenza (7.1), possiamo risolvere l'equazione che si ottiene sostituendo w a z nell'equazione che la definisce. Da $w\bar{z} + \bar{a}w + a\bar{z} = 1$, ricaviamo che

$$w = \frac{1 - a\bar{z}}{\bar{a} + \bar{z}}. \tag{7.4}$$

Componendo questa con il coniugio $z \mapsto \bar{z}$, otteniamo l'involuzione di Möbius:

$$w = \frac{1 - \bar{a}z}{a + z},$$

che nel caso $a = 0$ ci dà la $w = 1/z$, mentre ad $a = \infty$ corrisponde la $w = -z$. Se $a \neq 0, \infty$, si usa sostituire $1/\bar{a}$ ad a e considerare la

$$w = \frac{a - z}{1 + \bar{a} \cdot z}. \tag{7.5}$$

Osserviamo che la (7.5) è associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & a \\ \bar{a} & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} -1 & a \\ \bar{a} & 1 \end{pmatrix}^2 = (1 + |a|^2) \cdot \mathrm{I}_2$$

ed è quindi un'involuzione di $\mathbb{CP}^1$. Vale quindi il

Lemma 7.1. *La (7.5) è un'involuzione in $\mathbf{G}_P$ che scambia 0 con a ed ∞ con $-\bar{a}^{-1}$.* □

Lemma 7.2. *Ogni trasformazione di Möbius in* $\mathbf{G}_P$ *che lasci fisso* 0 *è della forma*

$$w = e^{i\theta}\cdot z \qquad \text{con } \theta \in \mathbb{R}. \tag{7.6}$$

Dimostrazione. Infatti una tale trasformazione manda diametri di κ in diametri di κ e quindi lascia fissi ∞ e 0. Quindi è lineare, ed essendo ellittica è necessariamente della forma (7.6). □

Da questa otteniamo:

Teorema 7.3. *Le trasformazioni di Möbius generate dalle riflessioni rispetto alle circonferenze di una stella ellittica di equatore* $\kappa = \{|z| = 1\}$ *sono tutte e sole quelle della forma:*

$$\boxed{w = e^{i\theta}\cdot\frac{a-z}{1+\bar{a}z}, \quad \text{oppure} \quad w = \frac{e^{i\theta}}{z}, \qquad a \in \mathbb{C}, \quad \theta \in \mathbb{R}.} \tag{7.7}$$

Calcoliamo la distanza e la metrica della geometria sferica. Possiamo descrivere l'applicazione del piano complesso $\mathbb{C} = \mathbb{CP}^1\setminus\{\infty\}$ sulla sfera $\mathbf{S}^2\subset\mathbb{R}^3$ mediante:

$$\begin{cases} w_1 = \dfrac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} \\ w_2 = \dfrac{i(\bar{z}-z)}{1+z\bar{z}} \\ w_3 = \dfrac{z\bar{z}-1}{1+z\bar{z}}. \end{cases}$$

Se (w_1', w_2', w_3') sono le coordinate di un'altro punto w, la distanza tra z e w sarà misurata dall'arco di cerchio massimo θ, di ampiezza $\le\pi$, tra z e w, dato da:

$$\begin{aligned}\cos\theta = w_1 w_1' + w_2 w_2' + w_3 w_3' &= \frac{2z\bar{w} + 2\bar{z}w + (z\bar{z}-1)(w\bar{w}-1)}{(1+z\bar{z})(1+w\bar{w})} \\ &= \frac{2z\bar{w} + 2\bar{z}w + z\bar{z}w\bar{w} - z\bar{z} - w\bar{w} + 1}{(1+z\bar{z})(1+w\bar{w})}.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}\tan^2(\theta/2) = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} &= \frac{(1+z\bar{z})(1+w\bar{w}) - 2z\bar{w} - 2\bar{z}w - (z\bar{z}-1)(w\bar{w}-1)}{1+z\bar{z})(1+w\bar{w}) + 2z\bar{w} + 2\bar{z}w + (z\bar{z}-1)(w\bar{w}-1)} \\ &= \frac{z\bar{z} + w\bar{w} - z\bar{w} - \bar{z}w}{z\bar{z}w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w + 1} = \frac{|z-w|^2}{|1+z\bar{w}|^2}.\end{aligned}$$

Questa ci dà

$$\tan(\theta/2) = \left|\frac{z-w}{1+z\bar{w}}\right|. \tag{7.8}$$

L'angolo θ misura la distanza tra i due punti nella metrica sferica:

$$\boxed{\theta = \mathrm{dist}(z, w) = 2\arctan\left|\frac{z-w}{1+z\bar{w}}\right|} \tag{7.9}$$

Ricordiamo lo sviluppo di Taylor dell'arcotangente:

$$\arctan(t) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}.$$

Abbiamo quindi, per la forma infinitesimale della metrica:

$$ds = \mathrm{dist}(z, z + dz) = \frac{2|dz|}{1 + z\bar{z}}$$

e quindi la prima forma fondamentale è

$$\boxed{ds^2 = 4 \cdot \frac{dz\,d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}} \tag{7.10}$$

Calcolando la curvatura

$$\kappa = -\frac{\Delta \log \lambda}{2\lambda} \qquad \text{per} \quad \lambda = 4\left(1 + x^2 + y^2\right)^{-2}.$$

Otteniamo:

$$\boxed{\kappa = 1\,.} \tag{7.11}$$

8. Trigonometria sferica

Sia $\mathbf{S}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = \sqrt{(v|v)} = 1\}$. Siano $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbf{S}^2$ i tre vertici di un triangolo sferico. Poniamo:

$$\begin{cases} a_i = \text{lunghezza del lato opposto ad } v_i, \\ \alpha_i = \text{ampiezza dell'angolo interno di vertice } v_i, \\ A_i = \pi - \alpha_i = \text{ampiezza dell'angolo esterno di vertice } v_i\,. \end{cases}$$

Sia (i, j, k) una permutazione di $(1, 2, 3)$ che considereremo fissata nel seguito. Le lunghezze dei lati si esprimono per mezzo del prodotto scalare. Abbiamo quindi:

$$\boxed{a_i = (x_j|x_k)} \tag{8.1}$$

Per calcolare α_i, poniamo $w_j{=}v_j{-}(v_j|v_i)v_i\,,\ w_k{=}v_k{-}(v_k|v_i)v_i$. Abbiamo allora:

(8.2)
$$\cos\alpha_i = \frac{(w_j|w_k)}{|w_j| \cdot |w_k|} = \frac{(v_j|v_k) - (v_j|v_i)(v_k|v_i)}{\sqrt{(1 - (v_j|v_i)^2)(1 - (v_k|v_i)^2)}} = \frac{\cos a_i - \cos a_j \cos a_k}{\sin a_j \sin a_k}.$$

Otteniamo dunque le formule (Teorema del Coseno):

$$\boxed{\sin a_j \sin a_k \cos \alpha_i = \cos a_i - \cos a_j \cos a_k\,.} \tag{8.3}$$

$$\boxed{\sin a_j \sin a_k \cos A_i = \cos a_j \cos a_k - \cos a_i\,.} \tag{8.4}$$

Utilizzando le formule di bisezione abbiamo:

$$\begin{aligned} 2\sin a_j \sin a_k \cos^2(A_i/2) &= \cos(a_j - a_k) - \cos a_i \\ -2\sin a_j \sin a)k \sin^2(A_i/2) &= \cos(a_j + a_k) - \cos a_i \end{aligned}$$

che, per prostaferesi, danno:

$$\begin{aligned} \sin a_j \sin a_k \cos^2(A_i/2) &= \sin\left(\frac{a_i + a_j - a_k}{2}\right)\sin\left(\frac{a_i + a_k - a_j}{2}\right) \\ \sin a_j \sin a_k \sin^2(A_i/2) &= \sin\left(\frac{a_i + a_j + a_k}{2}\right)\sin\left(\frac{a_j + a_k - a_i}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

Poniamo

$$s_0 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2}\,, \qquad s_i = \frac{a_j + a_k - a_i}{2}\,. \tag{8.5}$$

Osserviamo che $s_0 = s_1 + s_2 + s_3$. Le formule ottenute si possono allora scrivere:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin a_j \sin a_k \cos^2(A_i/2) &= \sin s_j\ \sin s_k \\ \sin a_j \sin a_k \sin^2(A_i/2) &= \sin s_0\ \sin s_i \end{aligned}} \tag{8.6}$$

Moltiplicando termine a termine le prime di queste formule (con permutazione ciclica degli indici) otteniamo:

$$\begin{aligned} \sin a_j \sin a_k \sin^2 a_i \cos^2(A_j/2)\cos^2(A_k/2) &= \sin s_j \sin s_k \sin^2 s_i \\ &= \sin a_j \sin a_k \sin^2 s_i \cos^2(A_i/2) \end{aligned}$$

da cui, semplificando ed estraendo la radice quadrata, abbiamo:

$$\boxed{\sin a_i \cos(A_j/2)\cos(A_k/2) = \sin s_i \cos(A_i/2)} \tag{8.7}$$

Analogamente, dalle seconde delle (8.6), otteniamo:

$$\begin{aligned} \sin a_j \sin a_k \sin^2 a_i \sin^2(A_j/2)\sin^2(A_k/2) &= \sin s_j \sin s_k \sin^2 s_0 \\ &= \sin^2 s_0 \sin a_j \sin a_k \cos^2(A_i/2)\,, \end{aligned}$$

e da questa ricaviamo:

$$\boxed{\sin a_i \sin(A_j/2)\sin(A_k/2) = \sin s_0 \cos(A_i/2)} \tag{8.8}$$

Ancora, moltiplicando membro a membro le prime e le seconde delle (8.6) otteniamo:

$$\sin a_j \sin a_k \sin^2 a_i \sin^2(A_k/2)\cos^2(A_j/2) = \sin s_0 \sin s_i \sin^2 s_k$$

$$= \sin a_j \sin a_k \sin^2(A_i/2)$$

da cui:

$$\boxed{\sin a_i \sin(A_k/2)\cos(A_j/2) = \sin s_k \sin(A_i/2)} \tag{8.9}$$

Da queste si possono ricavare varie altre formule per addizione o sottrazione:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(a_i/2)\cos((A_j - A_k)/2) &= \sin((a_j + a_k)/2)\cos(A_i/2) \\ \cos(a_i/2)\cos((A_j + A_k)/2) &= -\cos((a_j + a_k)/2)\cos(A_i/2) \\ \cos(a_i/2)\sin((A_j + A_k)/2) &= \cos((a_j - a_k)/2)\sin(A_i/2) \\ \sin(a_i/2)\sin((A_j - A_k)/2) &= -\sin((a_j - a_k)/2)\sin(A_i/2) \end{aligned}} \tag{8.10}$$

8.1. Formule di Delambre, Mollweide, Gauss. Le equazioni seguenti[1,2] esprimono il questo fatto:

Se vi è un triangolo sferico con lati $a_1,\ a_2,\ a_3$ *ed angoli esterni* $A_1,\ A_2,\ A_3$, *allora vi è anche un triangolo sferico con lati* $A_1,\ A_2,\ A_3$ *ed angoli esterni* $a_1,\ a_2\ a_3$. Poniamo quindi

$$S_0 = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{2}, \qquad S_i = \frac{A_j + A_k + A_i}{2}. \tag{8.11}$$

Valgono allora le formule:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin A_j \sin A_k \cos^2 a_i/2 &= \sin S_j \sin S_k \\ \sin A_j \sin A_k \sin^2 a_i/2 &= \sin S_0 \sin S_i \end{aligned}} \tag{8.12}$$

da cui, dividendo membro a membro, si ottiene:

$$\begin{aligned} \tan^2(a_i/2) &= \frac{\sin S_0 \sin S_i}{\sin S_j \sin S_k} \\ &= -\frac{\cos((\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)/2) \cdot \cos((\alpha_j + \alpha_k - \alpha_i)/2)}{\cos((\alpha_i + \alpha_k - \alpha_j)/2)\cos((\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k)/2)}. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Vale il **Teorema dei seni**:

$$\boxed{\frac{\sin a_1}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin a_2}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin a_3}{\sin \alpha_3}}. \tag{8.14}$$

Utilizzando le formule (8.2), otteniamo:

$$\sin^2 \alpha_i = \frac{\sin^2 a_j \sin^2 a_k - \cos^2 a_j \cos^2 a_k - \cos^2 a_i + 2\cos a_1 \cos a_2 \cos a_3}{\sin^2 a_j \sin^2 a_k}$$

[1] Jean Baptiste Joseph Delambre (1749-1822), matematico e astronomo francese.

[2] Karl Brandan Mollweide (1774-1825) matematico e astronomo tedesco

$$= \frac{-2 + \sin^2 a_1 + \sin^2 a_2 + \sin^2 a_3 + 2\cos a_1 \cos a_2 \cos a_3}{\sin^2 a_j \sin^2 a_k} \,.$$

Poiché il numeratore della frazione a secondo membro è indipendente dall'indice i, otteniamo:

$$\frac{\sin^2 \alpha_j}{\sin^2 \alpha_i} = \frac{\sin^2 a_j \sin^2 a_k}{\sin^2 a_i \sin^2 a_k} = \frac{\sin^2 a_j}{\sin^2 a_i} \,,$$

da cui segue il teorema dei seni.

Parte 2

Elementi di analisi complessa

CAPITOLO IV

Funzioni Olomorfe su un aperto di $\mathbb{C}$

1. Prime definizioni e proprietà

Possiamo identificare il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi allo spazio euclideo $\mathbb{R}^2$, di coordinate reali x, y. Introduciamo gli operatori differenziali a coefficienti complessi costanti in $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{1.1}$$

e le forme differenziali a coefficienti complessi

$$dz = dx + i\,dy \qquad \text{e} \qquad d\bar{z} = dx - i\,dy\,. \tag{1.2}$$

Osserviamo che vale l'uguaglianza

$$dz \wedge d\bar{z} = -2i\,dx \wedge dy, \tag{1.3}$$

ove $dx\wedge dy$ è l'elemento di volume orientato di $\mathbb{R}^2$.

Se $f : \Omega\to\mathbb{C}$ è una funzione di classe $\mathscr{C}^1$, definita su un aperto Ω di $\mathbb{C}$, allora

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\,. \tag{1.4}$$

Teorema 1.1. *Sia $f : \Omega\to\mathbb{C}$ una funzione definita su un aperto Ω di $\mathbb{C}$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) *$f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ e $\partial f/\partial\bar{z} = 0$;*
(2) *$f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ e $df(z) : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ è $\mathbb{C}$-lineare per ogni $z \in \Omega$;*
(3) *$f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ ed $f(z)\,dz$ è una forma differenziale chiusa in Ω;*
(4) *per ogni $z \in \Omega$ esiste il limite:*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \in \mathbb{C}. \qquad \square$$

Osservazione 1.2. Nella (1) si può sostituire all'ipotesi che f sia di classe $\mathscr{C}^1$ l'ipotesi che f ammetta in tutti i punti le derivate parziali rispetto alle coordinate x e y e che esse soddisfino la relazione

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} + i\,\frac{\partial f(z)}{\partial y} = 0 \tag{1.5}$$

in ogni punto $z \in \Omega$. Se supponiamo la f continua, possiamo limitarci a richiedere che esistano in ogni punto le derivate parziali rispetto alle coordinate e che la relazione (1.5) valga per z al di fuori di un insieme di misura nulla in Ω.

Definizione 1.1. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ che soddisfi le condizioni equivalenti del Teorema 1.1, si dice *olomorfa* in Ω.

Osservazione 1.3. Se f è olomorfa in Ω, allora

$$f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} = -i\frac{\partial f(z)}{\partial y}, \quad \forall z \in \Omega.$$

Chiamiamo tale valore comune $f'(z)$ la *derivata* di f in z.

Notazione 1.4. Indichiamo con $\mathscr{O}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni olomorfe definite sull'aperto Ω e con $\mathscr{O}^*(\Omega)$ il sottoinsieme delle $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ che non si annullano in nessun punto di Ω.

Teorema 1.5. *Siano Ω, Ω' aperti non vuoti di $\mathbb{C}$. Allora:*

(1) *$\mathscr{O}(\Omega)$ è un'algebra su $\mathbb{C}$.*
(2) *Se $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ e $g \in \mathscr{O}^*(\Omega)$, allora $f/g \in \mathscr{O}(\Omega)$.*
(3) *Se $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, $g \in \mathscr{O}(\Omega')$ ed $f(\Omega) \subset \Omega'$, allora $g \circ f \in \mathscr{O}(\Omega)$.* □

2. La formula di Cauchy-Martinelli

Dimostriamo in questo paragrafo la formula di rappresentazione di Martinelli[1], che generalizza la formula di Cauchy[2]

Teorema 2.1. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{C}$ con frontiera di classe $\mathscr{C}^1$ a tratti. Se f è una funzione continua di classe $\mathscr{C}^1$ in un intorno aperto di $\overline{\Omega}$, allora vale la formula di rappresentazione*

$$\boxed{f(z) = \tfrac{1}{2\pi i}\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\zeta)\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z} + \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad \forall z \in \Omega.} \tag{2.1}$$

(formula di Cauchy-Martinelli)

Dimostrazione. Fissiamo $z \in \Omega$; sia $r = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) > 0$; per ogni ϵ con $0<\epsilon<r$ poniamo $\Omega_\epsilon = \{\zeta \in \Omega \mid |\zeta - z| > \epsilon\}$. Se $0<\epsilon<r$, allora Ω_ϵ è ancora un aperto con frontiera di classe $\mathscr{C}^1$ a tratti ed $f(\zeta)d\zeta/(\zeta - z)$ una

[1]Enzo Martinelli (1911-1999) fu un matematico italiano, allievo di Francesco Severi. Fu attivo in geometria algebrica edifferenziale e nell'analisi complessa.

[2]Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) matematico francese, tra i più illustri del suo tempo.

forma differenziale di classe $\mathscr{C}^1$ in un intorno di $\overline{\Omega}_\epsilon$. Per la formula di Gauss-Green-Stokes abbiamo:

$$(*)\qquad \iint_{\Omega_\epsilon} d_\zeta\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right) = \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\,.$$

È $$d_\zeta\left(f(\zeta)d\zeta/(\zeta - z)\right) = -\left(\partial f(z)/\partial\bar{z}\right)\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{(\zeta - z)} \quad \text{in } \overline{\Omega}\setminus\{z\}.$$

La singolarità $\zeta \to 1/(\zeta - z)$ è sommabile in un intorno di z. Quindi il primo membro di $(*)$ converge, per $\epsilon \searrow 0$, a

$$-\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(\zeta)\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}.$$

Per quanto riguarda il secondo membro di $(*)$, abbiamo:

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \int_{|\zeta - z| = \epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\,.$$

Calcoliamo il secondo addendo del secondo membro di questa uguaglianza utilizzando le coordinate polari $\zeta - z = \epsilon\cdot e^{it}$. È $d\zeta = i\epsilon\cdot e^{it}dt$ lungo il cerchio $|\zeta - z| = \epsilon$. Quindi:

$$\int_{|\zeta - z| = \epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = i\int_0^{2\pi} f\left(z + \epsilon\cdot e^{it}\right)dt \longrightarrow 2\pi i\cdot f(z) \quad \text{per} \quad \epsilon \searrow 0.$$

La (2.1) si ottiene passando al limite per $\epsilon \searrow 0$ nella $(*)$. □

Corollario 2.2. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{C}$ con frontiera di classe $\mathscr{C}^1$ a tratti. Se $f \in \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{C}\left(\overline{\Omega}\right)$, allora risulta:*

$$(2.2)\qquad \boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad \forall z \in \Omega\,,}$$

(formula di rappresentazione di Cauchy)

$$(2.3)\qquad \boxed{\int_{\partial\Omega} f(\zeta)d\zeta = 0\,.}$$

(formula di Cauchy-Morera)

Se $\phi \in \mathscr{C}_0^k(\mathbb{C})$, con $k \geq 1$, allora

$$(2.4)\qquad F_\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \phi(\zeta)\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}$$

è una funzione di classe $\mathscr{C}^k$ in $\mathbb{C}$ che soddisfa l'equazione

$$(2.5)\qquad \frac{\partial F_\phi(z)}{\partial\bar{z}} = \phi(z) \qquad \text{in} \quad \mathbb{C}\,.$$

In particolare, F_ϕ è olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\mathrm{supp}(\phi)$.

Dimostrazione. La (2.1) si ottiene applicando la formula di Cauchy-Martinelli agli aperti $\Omega_\epsilon = \{z \in \Omega \mid \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) > \epsilon\}$, che per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo hanno frontiera di classe $\mathscr{C}^1$ a tratti e soddisfano: $\Omega_\epsilon \Subset \Omega$ ed $\Omega_\epsilon \nearrow \Omega$ per $\epsilon \searrow 0$.

La (2.2) si ottiene dalla (2.1) applicata alla funzione $\zeta \to (\zeta - z) f(\zeta)$.

Per dimostrare l'ultimo enunciato del corollario, osserviamo che il cambiamento di variabile $w = \zeta - z$ ci dà:

$$F_\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint \phi(z + w) \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w}$$

e quindi per derivazione sotto il segno di integrale verifichiamo che $F_\phi \in \mathscr{C}^k(\mathbb{C})$. Infine, derivando sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\phi(z)}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi(z + w)}{\partial \bar{z}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{D_z} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z} = \phi(z), \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene applicando la formula di Cauchy-Martinelli a un disco D_z che contiene al suo interno $\mathrm{supp}\, \phi \cup \{z\}$. □

Una facile conseguenza della formula di rappresentazione è il

Teorema 2.3 (principio del massimo modulo). *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{C}$. Se $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ e $|f|$ ha un massimo locale in un punto z_0 di Ω, allora f è costante in Ω.*

Dimostrazione. Per ogni $0 < r < \mathrm{dist}(z_0, \complement\Omega)$ abbiamo

$$|f(z_0)| = \left| \tfrac{1}{2\pi i} \oint_{|zeta|=r} \frac{f(z_0 + \zeta) d\zeta}{\zeta} \right| \leq \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta}| d\theta.$$

Poiché f è continua, questo ci dice che $|f|$ è costante su $\{|z - z_0| = r\}$ per ogni $0 < r < \mathrm{dist}(z_0, \complement\Omega)$ e ne segue che $|f|$ è costante su Ω. Allora

$$\frac{\partial}{\partial z} |f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f'(z)} = 0, \ \forall z \in \Omega$$

implica che $f' \equiv 0$ e dunque f è costante in Ω. □

Corollario 2.4. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{C}$. Allora*

$$|f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)|, \quad \forall f \in \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\bar{\Omega}). \tag{2.6}$$
□

Dalla (2.1) ricaviamo, per derivazione sotto il segno di integrale:

Teorema 2.5. *Per ogni aperto Ω di $\mathbb{C}$, $\mathscr{O}(\Omega) \subset \mathscr{C}^\infty(\Omega)$.* □

Corollario 2.6. *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{C}$ *e sia* $f \in \mathscr{O}(\Omega)$. *Allora anche* $f' \in \mathscr{O}(\Omega)$. □

In questo modo possiamo definire tutte le derivate successive:

$$f^{(h)}(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^h f(z), \text{ per } f \in \mathscr{O}(\Omega),\ z \in \Omega\,. \tag{2.7}$$

Ancora dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale, ricaviamo

Teorema 2.7. *Siano* μ *una misura a supporto compatto in* $\mathbb{C}$ *ed* $\Omega = \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}(\mu)$. *Definiamo*

$$F_\mu(z) = \iint_{\mathbb{C}} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}, \quad per\ z \in \Omega. \tag{2.8}$$

Allora $F_\mu \in \mathscr{O}(\Omega)$. □

Possiamo utilizzare questo risultato per dimostrare il *teorema sulle singolarità eliminabili*:

Teorema 2.8. *Siano* Ω *un aperto di* $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ *ed* $f \in \mathscr{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$. *Se*

$$\exists \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z) = 0,$$

allora f *si prolunga in modo unico a una funzione olomorfa su* Ω.

Dimostrazione. Siano ϵ, r numeri reali con $0 < \epsilon < r < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$ ed indichiamo con D il disco $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$. Poiché $\overline{D} \Subset \Omega$, abbiamo, per la formula di Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\epsilon} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Utilizzando coordinate polari $\zeta = z_0 + \epsilon e^{it}$ nell'ultimo integrale, abbiamo:

$$\int_{|z-z_0|=\epsilon} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon\, f\left(z_0 + \epsilon\, e^{it}\right)}{z_0 - z + \epsilon\, e^{it}} dt \longrightarrow 0 \qquad \text{per} \quad \epsilon \searrow 0\,.$$

È dunque:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad \text{per} \quad z \in D \setminus \{z_0\}\,.$$

Per la proposizione precedente, l'integrale a secondo membro definisce una funzione olomorfa in D, che coincide con la f nei punti $z \neq z_0$. La dimostrazione è completa. □

Teorema 2.9. *Se* f *è una funzione continua, a valori complessi, su un aperto* Ω *di* $\mathbb{C}$, *e la forma differenziale* $f(z)\, dz$ *è chiusa, allora* f *è olomorfa su* Ω.

Dimostrazione. Fissiamo $z_0 \in \Omega$ ed un numero reale $r \in (0, \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega))$. Se $|z - z_0| < r$, per ogni numero reale ϵ con $0 < \epsilon < |z - z_0|$, poiché la forma differenziale $(f(\zeta)/(\zeta - z))\, d\zeta$ è chiusa in $\Omega \backslash \{z\}$, abbiamo:

$$\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta - z| = \epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \,.$$

Utilizzando le coordinate polari $\zeta - z = \epsilon\, e^{it}$, si verifica che l'integrale a secondo membro converge a $2\pi i \cdot f(z)$ per $\epsilon \searrow 0$. Otteniamo quindi la formula di rappresentazione:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad \text{per} \quad |z - z_0| < r \,, \tag{2.9}$$

che dimostra, per il Teorema 2.7, che f è olomorfa in $\{z \in \Omega \mid |z - z_0| < r\}$. Quindi f è olomorfa in Ω, essendo olomorfa nell'intorno di ogni punto di Ω. □

Utilizzando la formula di rappresentazione di Cauchy ed il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, ricaviamo

Teorema 2.10 (Regolarità). *Sia Ω un aperto limitato, con frontiera di classe $\mathscr{C}^1$ a tratti, e sia $f \in \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{C}\left(\bar{\Omega}\right)$. Allora $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ e*

$$\boxed{f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} \qquad \forall z \in \Omega \,.} \tag{2.10}$$ □

Dalla formula di rappresentazione delle derivate di una funzione olomorfa, ricaviamo la *diseguaglianza di Cauchy*:

Teorema 2.11. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{C}$ e sia $f \in \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{C}\left(\bar{\Omega}\right)$. Allora:*

$$\left|f^{(m)}(z)\right| \leq m! \sup_{\partial\Omega} |f| \cdot \mathrm{dist}(z, \partial\Omega)^{-m} \qquad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \Omega \,. \tag{2.11}$$ □

Teorema 2.12. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f \in \mathscr{O}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Allora:*

$$\left|f^{(m)}(z)\right| \leq m! \sup_{\Omega} |f| \cdot \mathrm{dist}(z, \partial\Omega)^{-m} \qquad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \Omega \,. \tag{2.12}$$ □

Da questo teorema otteniamo il

Teorema 2.13 (Liouville). *Se $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ ed esistono costanti $C > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, tali che*

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|)^\mu \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

allora f è un polinomio di z di grado minore o uguale alla parte intera $[\mu]$ di μ. In particolare, una funzione olomorfa e limitata su $\mathbb{C}$ è costante.

Dimostrazione. Sia m il più piccolo intero non negativo $> \mu$. Applicando la diseguaglianza di Cauchy alla restrizione di f al disco $|z| < R$, per R reale positivo, abbiamo:

$$|f^{(m)}(z)| \leq C(1+R)^{\mu}(R-z)^{-m} \qquad \text{se} \quad |z| < R\,.$$

Tenendo fisso z, facciamo tendere R a $+\infty$: otteniamo che $f^{(m)}(z) = 0$. Quindi la funzione olomorfa f ha tutte le derivate parziali di ordine m uguali a zero in ogni punto z di $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2_{x,y}$. Essa è quindi un polinomio di grado $\leq(m-1)$ di x, y. Per l'ipotesi d'olomorfia, è un polinomio di grado $\leq(m-1)\leq[\mu]$ della variabile complessa z. □

Come corollario del Teorema di Liouville possiamo dare un'altra dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra (vedi Teorema 2.1 del Cap. I):

Teorema 2.14 (Teorema fondamentale dell'algebra). *Ogni polinomio $p(z)\in\mathbb{C}[z]$, di grado positivo nella variabile complessa z, ammette almeno una radice in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che il polinomio $p(z)$ non ammetta radici complesse. Allora $1/p(z)$ è una funzione olomorfa e limitata su $\mathbb{C}$, quindi costante e dunque anche $p(z)$ è costante. □

3. Il lemma di Schwarz

Indichiamo nel seguito con D il disco unitario di $\mathbb{C}$

$$\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

e con $\mathrm{D}^* = \mathrm{D}\setminus\{0\}$ il disco unitario privato dell'origine.

Teorema 3.1 (Lemma di Schwarz). *Sia $f \in \mathscr{O}(D)$.*
Se $f(0) = 0$ e $|f(z)| < 1$ su D, allora $|f(z)| \leq |z|$ su D e $|f'(0)| \leq 1$.
Se o $|f'(0)|=1$, oppure $|f(z_0)|=|z_0|$ per qualche $z_0\in D^*$, allora $f(z)=e^{i\theta}z$ per ogni $z\in$D, per qualche $\theta \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Se $0<r<1$, la funzione $f_r(z) = f(r\cdot z)$ è olomorfa in un intorno del disco chiuso $\bar{\mathrm{D}}$. Inoltre, per il teorema sulla singolarità eliminabile, la

$$g_r(z) = \begin{cases} f_r(z)/z, & \text{per } z\in\bar{\mathrm{D}}\setminus\{0\},\\ r\cdot f'(0) & \text{per } z=0\end{cases}$$

è olomorfa su D, continua su $\bar{\mathrm{D}}$, e in modulo minore o uguale ad 1 sulla frontiera del disco. Per il principio di massimo (Corollario 2.4) è allora

$$|g_r(z)|\leq 1,\ \forall z\in\mathrm{D} \implies |f(r\cdot z)| = |f(r\cdot z| \leq |z|,\ \forall z\in\mathrm{D},\quad |f'(0)|\leq r^{-1}.$$

Passando al limite per $r\to 1^-$ otteniamo che $|f(z)|\leq 1$ su D e $|f'(0)|\leq 1$.

L'ultima affermazione è il principio di massimo applicato alla funzione

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/z & \text{se } 0<|z|<1, \\ f'(0) & \text{se } z = 0, \end{cases}$$

che è, per il teorema sulle singolarità eliminabili, definita ed olomorfa sul disco D. □

Sia

$$\omega(z, w) = \log\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right) \text{ove} \quad \delta = \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}\cdot w}\right|, \ z, w \in D \tag{3.1}$$

la distanza di Poincaré nel disco. Poiché la funzione reale $\delta \to \log\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)$ è crescente per $\delta \in [0, 1[$, la diseguaglianza $\omega(z', w') < \omega(z, w)$ è equivalente a

$$\left|\frac{z'-w'}{1-\bar{z}'\cdot w'}\right| < \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}\cdot w}\right|.$$

Mediante composizione con automorfismi di Möbius del disco ricaviamo dal Lemma di Schwarz il seguente:

Teorema 3.2 (Pick). *Ogni applicazione olomorfa $f : D \to D$ è una contrazione per la metrica di Poincaré di D.*

Se $f : D \to D$ è olomorfa ed $\omega(f(z_1), f(z_2)) = \omega(z_1, z_2)$ per una coppia z_1, z_2 di punti distinti di D, allora f è un automorfismo di Möbius del disco.

Dimostrazione. Sia $w_i = f(z_i)$, $i = 1, 2$. Posto $z = \dfrac{z_1 - \zeta}{1 - \bar{z}_1 \zeta}$ e $\xi = \dfrac{w_1 - w}{1 - \bar{w}_1 w}$, otteniamo dalla f una funzione olomorfa $D \ni \zeta \to \xi = g(\zeta) \in D$, che soddisfa le ipotesi del Lemma di Schwarz. Allora $|g(\zeta)| \leq |\zeta|$ su D, onde in particolare, posto $\tilde{\zeta} = \dfrac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}$ risulta:

$$|g(\tilde{\zeta})| = \left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)} f(z_2)}\right| \leq \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| .$$

L'ultima osservazione segue dal fatto che, se $|g(\zeta)| = |\zeta|$ per qualche $\zeta \in D^*$, allora g è una rotazione intorno all'origine. □

Per il Lemma di Schwarz, la funzione g nel lemma precedente deve soddisfare la diseguaglianza $|g'(0)| \leq 1$. Vale quindi la *forma differenziale* del Lemma di Pick[3].

[3]Georg Alexander Pick (1859-1942), matematico austriaco.

Teorema 3.3 (Pick). *Se $f : D \to D$ è olomorfa, allora:*

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2} \qquad \forall z \in D\,. \tag{3.2}$$

Se nella (3.2) *vale l'uguaglianza per qualche $z \in D$, allora la f è un automorfismo di Möbius del disco.* □

Il Lemma di Schwarz si generalizza al seguente:

Teorema 3.4. *Sia $f : D \to D$ un'applicazione olomorfa del disco in sé ed m un intero positivo tale che $f(0) = \cdots = f^{(m-1)}(0) = 0$. Allora*

$$|f(z)| \leq |z|^m, \quad \forall z \in D \qquad e \qquad |f^m(0)| \leq m!. \tag{3.3}$$

Se $|f^m(0)| = m!$, oppure se esiste un punto $z \in D^*$ tale che $|f(z)| = |z|^m$, allora $f(z) = e^{i\theta} z^m$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Verifichiamo che $f(z)/z^m$ ha in 0 una singolarità eliminabile. Se $0<\epsilon<r<1$, allora

$$\frac{f(z)}{z^m} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta^m(\zeta - z)} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=\epsilon} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta^m(\zeta - z)}, \ \forall \epsilon<|z|<r.$$

Calcoliamo il secondo addendo a secondo membro utilizzando le coordinate polari.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=\epsilon} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta^m(\zeta - z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\epsilon\, e^{i\theta})\epsilon^{m-1} i e^{-(m-1} i\theta)}{\epsilon\, e^{i\theta} - z}$$

Per ipotesi, $f(\epsilon\, e^{i\theta})\cdot\epsilon^{m-1}$ è uniformemente limitata ed infinitesima per $\epsilon \to 0^+$. Passando al limite sotto il segno d'integrale per $\epsilon \to 0^+$, otteniamo che

$$\frac{f(z)}{z^m} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta^m(\zeta - z)}, \quad \forall 0<|z|<r.$$

Poiché l'integrale a secondo membro ammette limite per $z \to 0$, per il teorema sulla singolarità eliminabile la $f(z)/z^m$ si estende ad una funzione olomorfa sul disco, che vale $(m!)^{-1} f^{(m)}(0)$ in 0.

Si può allora completare la dimostrazione con ragionamento simile a quello utilizzato in quella del Teorema 3.1. □

Da questo teorema ricaviamo la diseguaglianza:

Teorema 3.5. *Siano $z_0 \in \mathbb{C}$ ed $r > 0$. Poniamo $\mathrm{D}_{z_0}(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$. Se $f \in \mathscr{O}(\mathrm{D}_{z_0}(r)) \cap L^\infty(\mathrm{D}_{z_0}(r))$ soddisfa $f(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, allora*

$$|f(z)| \leq \left(\sup_{|z-z_0|<r} |f|\right) \cdot \left(\frac{|z - z_0|}{r}\right)^m \qquad \forall z \in \mathrm{D}_{z_0}(r)\,. \tag{3.4}$$

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente alla funzione
$$D \ni z \to \frac{f(z_0 + rz)}{\epsilon + \sup_{|z-z_0|<r} |f|} \in D\,,$$
ove ϵ è un arbitrario numero reale positivo, e far tendere poi ϵ a zero. □

Abbiamo allora

Teorema 3.6 (continuazione unica forte). *Sia f una funzione olomorfa su un aperto Ω di $\mathbb{C}$. Se la f si annulla con tutte le sue derivate in un punto z_0 di Ω, allora è nulla sulla componente connessa di z_0 in Ω.* □

4. Serie di Taylor

Dalle diseguaglianze di Cauchy e dal teorema della continuazione unica forte ricaviamo il:

Teorema 4.1. *Sia f una funzione definita e olomorfa in un aperto Ω di $\mathbb{C}$. Siano z_0 un punto di Ω ed r la distanza di z_0 dalla frontiera di Ω. Allora la serie di potenze:*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \tag{4.1}$$
converge ad $f(z)$ in tutti i punti di $\mathrm{D}_{z_0}(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$. La convergenza è uniforme su tutti i compatti contenuti in $\mathrm{D}_{z_0}(r)$. □

Corollario 4.2. *Sia f una funzione definita e olomorfa in un aperto Ω di $\mathbb{C}$, non identicamente nulla su nessuna componente connessa di Ω. Allora l'insieme $Z = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ è discreto in Ω. Per ogni punto $z_0 \in Z$ sono univocamente determinati un numero intero positivo m ed una funzione $g \in \mathscr{O}(\Omega)$, tali che*
$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z) \quad \forall z \in \Omega \quad e \quad g(z_0) \neq 0. \tag{4.2}$$
□

Definizione 4.1. L'intero positivo m si dice *l'ordine di zero di f in z_0*.

Da questo corollario e dalla formula di rappresentazione di Cauchy ricaviamo:

Teorema 4.3. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{C}$, con frontiera di classe $\mathscr{C}^1$ a tratti. Sia $f \in \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ una funzione continua sul compatto $\overline{\Omega}$ e olomorfa sull'aperto Ω. Supponiamo che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial\Omega$. Allora*
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)dz}{f(z)} \tag{4.3}$$
è un intero non negativo, uguale alla somma degli ordini di zero di f nei punti $\zeta \in \Omega$ in cui $f(\zeta) = 0$.

Dimostrazione. Per il Corollario 4.2, i punti di Ω in cui f si annulla formano un insieme finito $Z = \{z_1, \ldots, z_\ell\}$. Se $Z = \emptyset$, allora $f'(z)/f(z)$ è olomorfa in Ω e l'integrale (4.3) è uguale a zero per il Teorema di Cauchy-Morera. Altimenti, posto $\Omega' = \Omega \backslash Z$, fissiamo un numero reale positivo r tale che $\bar{\mathrm{D}}_{z_j}(r)=\{z\in\mathbb{C} \,|\, |z - z_j|\leq r\}\subset\Omega'$ per ogni $1\leq j\leq\ell$, Poiché la funzione $f'(z)/f(z)$ è olomorfa sull'aperto $G_\epsilon = \{z \in \Omega \,|\, |z - z_j| > \epsilon \ \forall 1 \leq j \leq \ell\}$ e continua sulla sua chiusura $\overline{G}_\epsilon$, abbiamo per il Teorema di Cauchy-Morera:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{|z-z_j|=\epsilon} \frac{f'(z)dz}{f(z)}, \quad \forall 0<\epsilon<r.$$

Osserviamo ora che, per il Corollario 4.2, per ogni $j = 1, ..., \ell$ la funzione f ammette una rappresentazione della forma: $f(z) = (z - z_j)^{m_j} g_j(z)$, ove m_j è la molteplicità di zero di f in z_j, e $g_j \in \mathscr{O}(\Omega)\cap\mathscr{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ una funzione olomorfa in Ω, diversa da 0 in z_j e quindi, pur di scegliere r sufficientemente piccolo, diversa da zero in tutto il disco chiuso $\bar{\mathrm{D}}_{z_j}(r)$. Otteniamo pertanto:

$$\int_{|z-z_j|=\epsilon} \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \int_{|z-z_j|=\epsilon} \frac{m_j dz}{z - z_j} + \int_{|z-z_j|=\epsilon} \frac{g'(z)dz}{g(z)} = (2\pi i) \cdot m_j,$$

per ogni $1\leq j\leq\ell$ e $0 < \epsilon < r$. Da questa uguaglianza otteniamo la tesi. □

Osservazione 4.4. Se f è olomorfa, il differenziale $f^{-1}(z)f'(z)dz$ è chiuso sull'aperto dei punti in cui $f(z)\neq 0$. Possiamo quindi calcolare l'integrale (4.3), e resta valido il Teorema 4.3 , anche nel caso in cui la frontiera di Ω sia soltanto una curva continua su cui f non si annulla mai.

Teorema 4.5 (dell'applicazione aperta). *Sia f una funzione olomorfa su un aperto Ω di $\mathbb{C}$, non costante su nessuna componente delle sue componenti connesse. Allora $f : \Omega\to\mathbb{C}$ è un'applicazione aperta.*

Dimostrazione. Fissiamo un punto z_0 di Ω. Possiamo supporre, per semplicità, che $z_0=0$ ed $f(0)=0$. Per il corollario precedente, possiamo trovare $r>0$ tale che $f(z)\neq 0$ se $0<|z|<r$. Fissiamo δ con $0<\delta<r$. La funzione $|f(z)|$ ha un minimo $\epsilon> 0$ sulla circonferenza $\{|z|=\delta\}$. Sia $w\in\mathbb{C}$. Se $f(z)\neq w$ per $|z| \leq \delta$, allora, per il principio di massimo,

$$|f(z)-w| < \max_{|\zeta|=\delta}|f(\zeta)-w|, \quad \text{se} \ \ |z| < \delta.$$

Abbiamo

$$|f(z)-w| \geq |f(z)| - |w| \geq \epsilon - |w| > 0, \quad \text{se} \ \ |w| < \epsilon.$$

L'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\delta} \frac{f'(z)dz}{f(z) - w}, \quad \text{per} \ \ |w| < \epsilon,$$

che conta il numero di radici dell'equazione $f(z)=w$ nel disco $D_\delta(0)$, definisce quindi una funzione continua di w a valori interi e quindi costante. Il suo valore è la molteplicità di 0 di f in 0 e dunque positivo. La dimostrazione è completa. □

Possiamo ricavare il teorema dell'applicazione aperta anche dal risultato seguente. Ricordiamo che $D = \{|z|<1\}$ è il disco unitario con centro in 0.

Teorema 4.6 (Hurwitz (1904) - Caratheodory (1907) - Bochner (1926)). *Sia $f \in \mathscr{O}(D)$ con $f(0) = 0$ e $|f'(0)| \neq 0$.*

Se $f(z) \neq 0$ per $z \in D^*$, allora $f(D) \supset \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < |f'(0)|/16\}$. □

Sia $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ una funzione olomorfa sull'aperto Ω di $\mathbb{C}$, non costante sulla componente connessa di $z_0 \in \Omega$ in Ω. Sia $f(z_0)=w_0$ e fissiamo un numero reale positivo $r \leq \operatorname{dist}(z_0, \complement\Omega)$ in modo che $f(z)\neq w_0$ se $0<|z-z_0|<r$. Siano m l'intero positivo e g la funzione olomorfa su Ω con $g(z_0) \neq 0$ e $f(z)-w_0=(z-z_0)^m \cdot g(z)$ in Ω. Possiamo allora scegliere una funzione $h \in \mathscr{O}(D_{z_0}(r))$ tale che $h^m(z) = g(z)$ per ogni $z \in D_{z_0}(r)$. Posto $w(\zeta)=(\zeta \cdot h(z_0+r\zeta))/h(z_0)$, otteniamo, pel Teorema 4.6, che $w(D)\supset D_0(1/16)$, da cui si ricava che

$$f(D_{z_0}(r)) \supset D_{w_0}\left(r^m f^{(m)}(z_0))/(m! \cdot 16^m)\right).$$

5. Topologia dello spazio delle funzioni olomorfe

Sia Ω un qualsiasi aperto di $\mathbb{C}$. Consideriamo su $\mathscr{O}(\Omega)$ la topologia di sottospazio di $\mathscr{C}(\Omega)$. Essa è definita dalla famiglia di seminorme:

(5.1) $$\|f\|_{\infty,K} = \sup\nolimits_{z\in K}|f(z)|, \quad \text{per } K \text{ compatto} \subset \Omega.$$

Teorema 5.1 (Weierstrass[4]). *Con la topologia definita dalle seminorme* (5.1)*, $\mathscr{O}(\Omega)$ è metrizzabile e completo (di Fréchet).* □

Teorema 5.2 (Montel[5]). *La derivazione $\mathscr{O}(\Omega) \ni f \to f' \in \mathscr{O}(\Omega)$ è un'applicazione continua.* □

Teorema 5.3 (Vitali[6]-Montel). *Un sottoinsieme di $\mathscr{O}(\Omega)$ è relativamente compatto se e soltanto se è limitato.* □

La dimostrazione di questi teoremi segue dalla formula di rappresentazione di Cauchy e dal criterio di compattezza di Ascoli-Arzelà.

[4]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass 1815-1897), matematico tedesco, considerato il *padre dell'analisi moderna*.

[5]Paul Antoine Aristide Montel (1876-1975), matematico francese, noto soprattutto per i suoi lavori di analisi complessa.

[6]Giuseppe Vitali (1875-1932), matematico italiano, ha dato contributi notevoli all'analisi e alla teoria della misura.

5.1. Un teorema di Hurwitz.

TEOREMA 5.4 (Hurwitz[7]). *Se* $\{f_n\} \subset \mathscr{O}(\Omega)$ *converge, uniformemente sui compatti di* Ω*, ad una* $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ *non costante su nessuna componente connessa di* Ω*, allora per ogni* $z_0 \in \Omega$ *esiste un intero* $\nu \geq 0$ *tale che l'equazione* $f_n(z) = f(z_0)$ *ammetta una soluzione* $z = z(n, z_0) \in \Omega$ *per ogni* $n > \nu$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché f non è costante su nessuna componente connessa di Ω, fissato un punto $z_0 \in \Omega$ possiamo trovare un numero reale positivo $r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$ tale che $f(z) \neq f(z_0)$ se $|z - z_0| = r$. L'integrale

$$\mathfrak{n}_{|z-z_0|<r}(f, f(z_0)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)dz}{f(z) - f(z_0)} \tag{5.2}$$

conta, con le loro molteplicità, le soluzioni dell'equazione $f(z) = f(z_0)$ nel disco $|z - z_0| < r$. Quindi $\mathfrak{n}_{|z-z_0|<r}(f, f(z_0)) > 0$. Poiché $\{|z - z_0| = r\}$ è un compatto, allora $f_n \to f$ uniformemente su $\{|z - z_0| = r\}$ e perciò possiamo fissare ν in modo tale che $|f(z) - f_n(z)| < \min_{|z-z_0|=r} |f(z) - f(z_0)|$ se $|z - z_0| = r$ ed $n > \nu$. Quindi $\mathfrak{n}_{|z-z_0|<r}(f_n, f(z_0))$ è ben definito per $n > \nu$ e tende al limite $\mathfrak{n}_{|z-z_0|<r}(f, f(z_0)) > 0$ per $n \to \infty$. Quindi

$$\mathfrak{n}_{|z-z_0|<r}(f_n, f(z_0)) = \mathfrak{n}_{|z-z_0|<r}(f, f(z_0)) > 0$$

per n sufficientemente grande. La dimostrazione è completa. □

COROLLARIO 5.5. *Siano* Ω *un aperto connesso di* $\mathbb{C}$ *ed* $\{f_n\} \subset \mathscr{O}^*(\Omega)$ *una successione che converge, uniformemente sui compatti di* Ω*, ad una* $f \in \mathscr{O}(\Omega)$*. Allora: o* $f \in \mathscr{O}^*(\Omega)$*, oppure* $f \equiv 0$ *in* Ω*.* □

DEFINIZIONE 5.1. Chiamiamo *univalente* su Ω una funzione olomorfa e iniettiva sull'aperto Ω di $\mathbb{C}$.

Dal Teorema di Hurwitz ricaviamo:

TEOREMA 5.6. *Sia* $\{f_n\} \subset \mathscr{O}(\Omega)$ *una successione di funzioni olomorfe univalenti, definite su un aperto connesso* Ω *di* $\mathbb{C}$*. Supponiamo che* $f_n \to f$ *in* $\mathscr{O}(\Omega)$*. Allora* f *è o costante, o univalente.* □

OSSERVAZIONE 5.1. Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{C}$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe che sono omeomorfismi locali. Se $f_n \to f$ in $\mathscr{O}(\Omega)$, allora f è o costante, o un omeomorfismo locale.

---

[7]Adolf Hurwitz (1859-1919), matematico tedesco, è una delle figure più importanti della scienza del XIX secolo.

6. Il teorema di uniformizzazione di Riemann

Dimostriamo in questo paragrafo che un aperto connesso e semplicemente connesso di $\mathbb{C}$ è o uguale a $\mathbb{C}$ o biolomorfo al disco $\mathrm{D} = \{|z|<1\}$.

Ricordiamo che, per il teorema di Vitali-Montel (Teorema 5.3), per ogni aperto Ω di $\mathbb{C}$ ed $R>0$ il sottoinsieme $\{f \in \mathscr{O}(\Omega) \mid \sup_{z\in\Omega} |f(z)| \leq R\}$ è compatto in $\mathscr{O}(\Omega)$. Da questo risultato e dai teoremi di Montel (Teorema 5.2) e di Hurwitz (Teorema 5.6) ricaviamo

Proposizione 6.1 (di compattezza di Koebe). *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{C}$, contenente l'origine 0, ed $R > 0$. L'insieme*

$$\mathcal{F}_R = \{f\in\mathscr{O}(\Omega) \mid f \text{ è univalente ed } f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ \sup_\Omega|f(z)| \leq R\}$$

è compatto in $\mathscr{O}(\Omega)$. □

Teorema 6.2 (Riemann (1851), Hilbert, Koebe[8], Caratheodory[9], Fejér[10], Riesz[11]). *Sia $\Omega\neq\mathbb{C}$ un aperto non vuoto, connesso e semplicemente connesso di $\mathbb{C}$. Esiste allora un'applicazione biolomorfa $f : \Omega \to \mathrm{D}$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che $0\in\Omega$. Poniamo

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathscr{O}(\Omega) \mid f \text{ è univalente ed } f(0) = 0,\ \ f'(0) = 1\}.$$

Dividiamo la dimostrazione in diversi passi.

1. *$\mathcal{F}$ è non vuoto e contiene funzioni limitate*. Poiché $\mathbb{C}\setminus\Omega$ non ha componenti connesse compatte, contiene almeno due punti. Siano $a, b \in \mathbb{C}\setminus\Omega$. Allora la $z\mapsto(z-a)/(z-b)$ è definita, olomorfa e diversa da zero in tutti i punti di Ω. Poiché Ω è semplicemente connesso, essa ammette una radice quadrata[12] in $\mathscr{O}^*(\Omega)$. Fissato w_0 con $w_0^2 = a/b$, vi è una e una sola $g \in \mathscr{O}^*(\Omega)$ tale che

$$g(0) = w_0 \ \text{ e }\ g^2(z) = \frac{z-a}{z-b}, \quad \forall z \in \Omega.$$

[8]Paul Koebe (1882-1945), matematico tedesco attivo soprattutto in analisi complessa.

[9]Constantin Carathéodory (1873 -1950), matematico greco. Ha lavorato soprattutto in Germania e negli Stati Uniti. Ha contribuito all'analisi complessa, al calcolo delle variazioni, alla teoria della misura.

[10]Lipót Fejér (1880-1959), matematico ungherese particolarmente attivo in analisi complessa, cui si deve una delle dimostrazioni del Teorema di Riemann.

[11]Frigyes Riesz (1880-1956), matematico ungherese che ha dato importanti contributi all'analisi funzionale.

[12]Se $F \in \mathscr{O}^*(\Omega)$, il differenziale $F^{-1}dF$ è definito e chiuso in Ω. Se Ω è semplicemente connesso, allora possiamo trovare una $\phi \in \mathscr{O}(\Omega)$ per cui $d\phi = F^{-1}dF$. Questa ci dà $e^\phi = c\cdot F$ per una costante complessa $c\neq0$. Scegliendo un logaritmo di c, otteniamo una $\psi \in \mathscr{O}(\Omega)$ con $\exp(\psi) = F$, cioè una determinazione del *logaritmo* di F, che possiamo utilizzare per calcolare, ad esempio, le radici quadrate di F in Ω.

Poiché g^2 è univalente, anche g è univalente e $g(\Omega)\cap(-g(\Omega)) = \emptyset$. In particolare, la funzione

$$\gamma(z) = \frac{g(z) - w_0}{g(z) + w_0}$$

è definita e univalente su Ω. Per il teorema dell'applicazione aperta (Teorema 4.5) possiamo trovare $\delta>0$ tale che $g(\Omega) \supset B_{w_0}(\delta)$. In particolare, $D_{-w_0}(\delta) \cap g(\Omega) = \emptyset$ e quindi $|g(z)+w_0| > \delta$ su Ω. Allora

$$|\gamma(z)| = \left|1 - \frac{2w_0}{g(z) + w_0}\right| \leq \left(1 + \frac{2|w_0|}{\delta}\right) < +\infty.$$

Poiché γ è univalente, risulta $\gamma'(0) \neq 0$ e quindi $h(z)=[\gamma'(0)]^{-1}\cdot\gamma(z)$ appartiene ad $\mathcal{F}$ ed è limitata su Ω.

2. Per la Proposizione 6.1, per ogni $R > 0$ l'insieme $\mathcal{F}_R$ della Proposizione 6.1 è compatto nella topologia di $\mathscr{O}(\Omega)$. Per il punto (1), esso è non vuoto per qualche $R>0$. Ne segue che $\mathcal{F}$ contiene una g con $\sup_{z\in\Omega}|g(z)| = R_0$ minimo. Poiché la g è univalente, $R_0>0$ ed $f(z) = R_0^{-1}\cdot g(z)$ definisce una funzione univalente di Ω a valori in D. Notiamo che $f'(0) = R_0^{-1}$.

3. *Dico che la f del punto (2) è surgettiva.*

Se non lo fosse, $D\setminus f(\Omega)$ conterrebbe un punto $\alpha\neq 0$. Allora la

$$F(z) = \frac{f(z) - \alpha}{1 - \bar{\alpha}f(z)}$$

sarebbe una funzione olomorfa univalente da Ω al D, che non assume mai il valore zero. Poiché Ω è semplicemente connesso, la F ammette una radice quadrata h in $\mathscr{O}(\Omega)$. La h è una funzione olomorfa ed univalente da Ω a D per cui

$$h^2(z) = \frac{f(z) - \alpha}{1 - \bar{\alpha}f(z)} = \frac{1}{\bar{\alpha}}\frac{\bar{\alpha}f(z) - |\alpha|^2}{1 - \bar{\alpha}f(z)} = \frac{1}{\bar{\alpha}}\left(-1 + \frac{1 - |\alpha|^2}{1 - \bar{\alpha}f(z)}\right), \quad \forall z \in \Omega,$$

con $h(0) = \beta$ per un numero complesso β per cui $\beta^2 = -\alpha$. Da

$$2h(z)h'(z) = \frac{(1 - |\alpha|^2)f'(z)}{(1 - \bar{\alpha}f(z))^2} \quad \text{otteniamo} \quad h'(0) = \frac{|\alpha|^2 - 1}{2\beta\cdot R_0}.$$

Consideriamo ora la $k(z) = \dfrac{h(z) - \beta}{1 - \bar{\beta}\cdot h(z)}$. Essendo la composizione di h con una trasformazione di Möbius del disco, k è una trasformazione univalente di Ω a valori nel disco unitario. È

$$k(0) = 0, \quad k'(z) = \frac{(1 - |\beta|^2)\cdot h'(z)}{(1 - \bar{\beta}\cdot h(z))^2}$$

e quindi

$$k'(0) = \frac{|\alpha|^2 - 1}{2\beta \cdot R_0} \cdot \frac{1}{1 - |\beta|^2} = -\frac{1 + |\alpha|}{2\beta \cdot R_0},$$

la funzione

$$\phi(z) = \frac{2\beta R_0}{1 + |\alpha|} \cdot k(z) \in \mathcal{F} \quad \text{e} \quad \sup_{z \in \Omega} |\phi(z)| \leq \frac{2|\beta|}{1 + |\alpha|} \cdot R_0 < R_0$$

contraddice la scelta di g in (2). Questo dimostra che $f(\Omega) = \mathrm{D}$.

La dimostrazione è completa. □

7. Serie di Laurent

La serie di Taylor in un punto z_0 di una funzione olomorfa f, definita in un suo intorno, converge sul più grande disco $\mathrm{D}_{z_0}(r)$ contenuto nel suo dominio di definizione. Una conseguenza di questo fatto è che i polinomi in z, e quindi a maggior ragione le funzioni intere, sono densi nello spazio $\mathscr{O}(\mathrm{D}_{z_0}(r))$ delle funzioni olomorfe nel disco $\mathrm{D}_{z_0}(r)$. D'altra parte, si può verificare facilmente che la funzione $1/z$ non si può approssimare uniformemente con una successione di polinomi su nessun compatto che contenga una circonferenza con centro nell'origine.

Le funzioni olomorfe su un anello $A_{z_0}(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ si possono approssimare con funzioni razionali della forma $p(z)/(z - z_0)^n$, con $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ ed in particolare con funzioni di $\mathscr{O}(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$. Ciò è conseguenza dello sviluppo in serie di Laurent.

Teorema 7.1 (Serie di Laurent). *Ogni funzione complessa f, olomorfa sull'anello*

$$A_0(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}, \quad \text{con} \quad 0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty,$$

è la somma della serie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \quad \text{con} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)\, dz}{z^{n+1}}, \quad \text{per } r_1 < r < r_2, \tag{7.1}$$

con convergenza uniforme sui sottoinsiemi compatti di $A_0(r_1, r_2)$.

Dimostrazione. Per la formula di Cauchy, se $r_1 < r_1' < |z| < r_2' < r_2$, allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial A_0(r_1', r_2')} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \oint_{|z|=r_2'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \oint_{|z|=r_1'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

Abbiamo

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - (z/\zeta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}, \qquad \text{se } |z| < |\zeta|,$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1 - (\zeta/z)} = -\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}}, \qquad \text{se } |\zeta| < |z|,$$

con le serie di funzioni che convergono uniformemente per $|\zeta| = r_2'$ e $|\zeta| = r_1'$, rispettivamente, se z varia in un compatto $\{r_1' < r_1'' \leq |z| \leq r_2'' < r_2'\}$. Utilizzando la convergenza per serie degli integrali, otteniamo la tesi. □

Osservazione 7.2. Con la notazione del Teorema 7.1, le serie

$$f^+(z) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{ed} \quad f^-(z) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$$

definiscono $f^+ \in \mathscr{O}(\mathrm{D}_0(r_2))$ ed $f^- \in \mathscr{O}(\{|z| > r_1\})$ con $f^+ + f^- = f$ in $A_0(r_1, r_2)$.

Corollario 7.3. *Siano* $r_1, r_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *con* $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ *e* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Ogni funzione f olomorfa su* $A_{z_0}(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ *è limite uniforme, sui compatti di* $A_{z_0}(r_1, r_2)$, *di una successione di funzioni olomorfe in* $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. □

8. Il teorema di approssimazione di Runge

Il teorema di Runge dà un criterio generale per stabilire quando, dati due aperti Ω_1 ed Ω_2 in $\mathbb{C}$, con $\Omega_1 \subset \Omega_2$, ogni funzione olomorfa su Ω_1 sia approssimabile, uniformemente sui compatti di Ω_1, da una successione di funzioni olomorfe su Ω_2.

Notazione 8.1. Dato un chiuso F di $\mathbb{C}$, indichiamo con $\mathscr{O}(F)$ lo spazio delle funzioni, definite su F e a valori complessi, che sono restrizioni di funzioni olomorfe definite in un intorno aperto di F.

Teorema 8.2 (Runge). *Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e K un compatto contenuto in Ω. Sono equivalenti le seguenti affermazioni*

(1) *Ogni* $f \in \mathscr{O}(K)$ *è limite uniforme su K di una successione* $\{f_n\} \subset \mathscr{O}(\Omega)$.
(2) *Nessuna componente connessa di* $\Omega \setminus K$ *ha chiusura compatta in* Ω.
(3) *Per ogni* $z \in \Omega \setminus K$ *possiamo trovare una* $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ *con* $|f(z)| > \|f\|_K$.

Dimostrazione. (1)⇒(2) Supponiamo, per assurdo che valga (1), ma che ci sia una componente connessa U di $\Omega \setminus K$ con chiusura compatta in Ω. Fissato un punto $z_0 \in U$, la funzione $f(z) = 1/(z - z_0)$ è olomorfa in un intorno di K e dovrebbe quindi esserci una successione $\{f_n\}$ in $\mathscr{O}(\Omega)$ che converge ad $f(z)$ uniformemente su K. In particolare $\{f_n\}$ è di Cauchy su $\partial U \subset K$ e quindi, per il principio di massimo, la $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy di funzioni olomorfe su U e perciò converge uniformemente su $\overline{U}$ ad una $g \in \mathscr{O}(U) \cap \mathscr{C}^0(\overline{U})$. Poiché $(z - z_0) \cdot f_n(z)$ converge uniformemente ad 1 su K, converge allora uniformemente ad uno su U. Ma questo ci darebbe $(z - z_0) \cdot g(z) \equiv 1$, che non può valere per $z = z_0$.

(2)⇒(1) Sia $f \in \mathscr{O}(U)$ per un aperto U con $K \subset U \Subset \Omega$. Possiamo supporre che la frontiera ∂U sia una somma $\gamma_1 + \cdots + \gamma_s$ di laccetti di classe $\mathscr{C}^1$ a tratti e che f sia olomorfa in un intorno di $\overline{U}$. Per la formula di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum\nolimits_{i=1}^{s} \oint_{\gamma_i} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad \forall z \in K.$$

Gli integrali a secondo membro si possono approssimare mediante le relative somme di Riemann, uniformemente per $z \in K$. Basterà quindi dimostrare che, per ogni fissato $\zeta_0 \in \Omega \setminus K$, la funzione razionale $z \mapsto 1/(z-\zeta_0)$ si può approssimare uniformemente su K con funzioni di $\mathscr{O}(\Omega)$.

Poiché per ipotesi $\Omega \setminus K$ non ha componenti connesse relativamente compatte in Ω, la componente connessa di ζ_0 in $\mathbb{CP}^1 \setminus K$ contiene un punto w che non appartiene ad Ω. Mediante una trasformazione razionale fratta possiamo fare in modo che $\zeta_0, w \in \mathbb{C}$. Costruiamo una spezzata semplice $\ell \subset \mathbb{C} \setminus K$ che congiunga ζ_0 a w e sia $\delta > 0$ la sua distanza da K. Fissiamo su ℓ una sequenza finita di punti $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \ell$ con $\zeta_n = w$ e

$$|\zeta_i - \zeta_{i-1}| < \delta/2, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Basta allora dimostrare che, per $0 \leq i < n$, una funzione razionale che ha come unico polo il punto ζ_i si può approssimare, uniformemente su K, con una sequenza di funzioni razionali che abbiano un unico polo in ζ_{i+1}. Poiché il disco di raggio $2\delta/3$ e centro ζ_i contiene il punto ζ_{i+1} ed è disgiunto da K, questo fatto segue dal Corollario 7.3.

(1)⇒(3) Se $z_0 \in \Omega \setminus K$, allora $K' = K \cup \{z_0\}$ è un compatto di Ω per cui $\Omega \setminus K'$ non ha componenti connesse con chiusura compatta in Ω. Vi è quindi una funzione $f \in \mathscr{O}(K')$ uguale a 0 su K e ad 1 in z_0 ed allora, per (1), una $h \in \mathscr{O}(\Omega)$ con $\|f - h\|_{K'} < \frac{1}{2}$ e quindi $|h(z_0)| > \frac{1}{2} > \|h\|_K$.

(3)⇒(2) Supponiamo per assurdo che ci sia una componente connessa U di $\Omega \setminus K$ con $\overline{U} \Subset \Omega$.

Allora $\partial U \subset K$ e per il principio di massimo $|f(z_0)| \leq \|f\|_{\partial U} \leq \|f\|_K$ per ogni $f \in \mathscr{O}(\Omega)$. Ciò contraddice la (3). □

Definizione 8.1. Dato un sottoinsieme compatto K di un aperto Ω di $\mathbb{C}$, definiamo il suo Ω-*inviluppo di olomorfia* come l'insieme

$$\hat{K}_\Omega = \{z \in \Omega \mid |f(z)| \leq \|f\|_K, \ \forall f \in \mathscr{O}(\Omega)\}. \tag{8.1}$$

Un compatto K di Ω si dice Ω-*olomorficamente convesso* se $\hat{K}_\Omega = K$.

Proposizione 8.3. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e K un compatto contenuto in Ω. Allora*

(1) *$\hat{K}_\Omega$ è il compatto di Ω, che consiste dell'unione di K e di tutte le componenti connesse di $\Omega \setminus K$ relativamente compatte in Ω.*
(2) *Ogni $f \in \mathscr{O}(\hat{K}_\Omega)$ è limite uniforme su $\hat{K}_\Omega$ di una successione in $\mathscr{O}(\Omega)$.*

Dimostrazione. L'identità è olomorfa su Ω. Quindi $\sup_{\hat{K}_\Omega}|z| = \sup_K |z| < \infty$ e $\hat{K}_\Omega$ è limitato. Poiché i moduli delle funzioni olomorfe sono funzioni continue, $\hat{K}_\Omega$ è chiuso in Ω. Questo basta per concludere che $\hat{K}_\Omega$ è compatto se $\Omega = \mathbb{C}$. Nel caso in cui $\mathbb{C}\setminus\Omega \neq \emptyset$, poiché, per ogni $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\Omega$, il modulo della funzione $z \mapsto 1/(z-z_0)$, olomorfa su Ω, assume lo stesso valore massimo sia su K che su $\hat{K}_\Omega$, abbiamo $\operatorname{dist}(\hat{K}_\Omega, \partial\Omega) = \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$. Questo completa la dimostrazione della compattezza di $\hat{K}_\Omega$.

Indichiamo con F l'unione di K e delle componenti connesse di $\Omega\setminus K$ che hanno chiusura compatta in Ω. Queste ultime sono aperti di $\mathbb{C}$ con frontiera contenuta in K. Segue allora dal teorema del massimo modulo che $F \subseteq \hat{K}_\Omega$. Dimostriamo che F è chiuso. Se $z_0 \in \Omega\setminus F$, allora la componente connessa U di z_0 in $\Omega\setminus K$ è un aperto disgiunto da F. Gli z_0 che non appartengono ad Ω hanno intorni aperti disgiunti da $\hat{K}_\Omega$ e quindi, a maggior ragione, da F. Quindi F è un chiuso contenuto nel compatto $\hat{K}_\Omega$ e perciò compatto. Per la definizione di F, nessuna componente connessa di $\Omega\setminus F$ può avere chiusura compatta in Ω. Quindi, per il Teorema 8.2, è $F = \hat{F}_\Omega$. Essendo $\hat{K}_\Omega \subseteq \hat{F}_\Omega$ perché $K \subseteq F$, otteniamo l'uguaglianza $\hat{K}_\Omega = F$. Abbiamo così dimostrato (1). La (2) è conseguenza del fatto che $\hat{\hat{K}}_\Omega = \hat{K}_\Omega$ e del Teorema 8.2. □

Corollario 8.4. *Siano Ω_1, Ω_2 due aperti di $\mathbb{C}$, con $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$. Condizione necessaria e sufficiente affinché le restrizioni ad Ω_1 delle funzioni di $\mathscr{O}(\Omega_2)$ siano dense in $\mathscr{O}(\Omega_1)$ è che $\Omega_2\setminus\Omega_1$ non abbia componenti connesse compatte.* □

Corollario 8.5. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché i polinomi olomorfi siano densi in $\mathscr{O}(\Omega)$ è che $\mathbb{C}\setminus\Omega$ non abbia componenti connesse compatte.* □

Abbiamo definito su $\mathbb{CP}^1$ la distanza[13]

$$\operatorname{dist}(z, w) = 2\arctan\left|\frac{z-w}{1+\bar{z}w}\right|.$$

Un modo di costruire compatti Ω-olomorficamente convessi è il seguente:

Lemma 8.6. *Se $\Omega^{aperto} \subsetneq \mathbb{CP}^1$, allora, per ogni $0 < \delta < \pi$,*

$$\bar{\Omega}_\delta = \{z \in \mathbb{CP}^1 \mid \operatorname{dist}(z, \mathbb{CP}^1\setminus\Omega) \geq \delta\} \tag{8.2}$$

è un compatto Ω-olomorficamente convesso.

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \Omega\setminus\bar{\Omega}_\delta$ ed indichiamo con $w_0 \in \mathbb{CP}^1\setminus\Omega$ un punto che realizza la distanza di z_0 dalla frontiera di Ω. Allora la

$$f(z) = \frac{1+z\cdot\bar{w}_0}{z-w_0}, \text{ se } w_0 \neq \infty, \quad f(z) = z, \text{ se } w_0 = \infty,$$

[13]Conveniamo che $\operatorname{dist}(0,\infty) = \pi$ e, se $z \neq 0$, $\operatorname{dist}(z,\infty) = 2\arctan(|z|^{-1})$ e $\operatorname{dist}(z, -\bar{z}^{-1}) = \pi$.

è olomorfa su Ω, ed assume un valore maggiore di $\tan(\delta^{-1}/2)$ in z_0, mentre è minore o uguale a $\tan(\delta^{-1}/2)$ su $\bar{\Omega}_\delta$. □

9. L'equazione di Cauchy-Riemann non omogenea

Utilizziamo in questo paragrafo il teorema di approssimazione di Runge per studiare l'equazione di Cauchy-Riemann non omogenea sugli aperti di $\mathbb{C}$.

Teorema 9.1. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}$ ed f una funzione definita e di classe $\mathscr{C}^k$ su Ω, con $1\leq k\leq\infty$. Possiamo allora trovare una funzione $u\in\mathscr{C}^k(\Omega)$ che risolva l'equazione differenziale*

$$\frac{du}{d\bar{z}} = f \quad in \quad \Omega. \tag{9.1}$$

Dimostrazione. Fissiamo una successione $\{K_n\}_{n\geq 1}$ di compatti di Ω tali che

$$K_n \subset \mathring{K}_{n+1}, \quad \bigcup_n K_n = \Omega, \quad \hat{K}_{n\,\Omega} = K_n.$$

[Utilizzando il Lemma 8.6, possiamo scegliere $K_n = \bar{\Omega}_{1/n}$.]

Sia $\{\chi_n\}_{n\geq 1}$ una successione di funzioni in $\mathscr{C}^\infty_c(\Omega)$ con $\operatorname{supp}(\chi_n)\subseteq K_{n+1}$ e $\chi_n(z)=1$ per z in un intorno di K_n.

Per le formule di Cauchy-Martinelli, le

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint \phi_n(\zeta)\cdot f(\zeta)\cdot\frac{d\zeta\wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\iint \phi_n(\zeta+z)\cdot f(\zeta+z)\cdot\frac{d\zeta\wedge d\bar{\zeta}}{\zeta}$$

sono funzioni di classe $\mathscr{C}^k$ che verificano l'equazione $\dfrac{du_n}{d\bar{z}} = \phi_n\cdot f$. In particolare, u_n risolve l'equazione (9.1) in un intorno di K_n.

Utilizzando il teorema di approssimazione di Runge, costruiremo ora una successione di funzioni $\{w_n\} \subset \mathscr{C}^1(\Omega)$ tali che, posto $K_0 = \emptyset$ e $w_0 = 0$, risulti, per ogni intero $n\geq 1$,

$$\begin{cases} \dfrac{dw_n}{d\bar{z}} = f \ \text{ in un intorno di } K_n, \\ \|w_n - w_{n-1}\|_{K_{n-1}} < 2^{1-n}. \end{cases} \tag{$*$}$$

Scegliamo $w_1 = u_1$. Supponiamo di esser riusciti, per un $m\geq 1$, a costruire w_n per $n\leq m$ in modo che le condizioni in $(*)$ siano verificate per $n\leq m$. Allora $u_{m+1}-w_m$ è olomorfa in un intorno di K_m, perché sia u_{m+1} che w_m sono soluzioni di (9.1) in un intorno di K_m. Per il teorema di Runge possiamo approssimarla su K_m con funzioni di $\mathscr{O}(\Omega)$. In particolare, potremo trovare una $h_{n+1} \in \mathscr{O}(\Omega)$ tale che

$$\|w_m - u_{m+1} - h_{m+1}\|_{K_m} < 2^{-m}.$$

Posto allora $w_{m+1} = u_{m+1}+h_{m+1}$, le $(*)$ sono valide per $n \leq (m+1)$.

Otteniamo allora una soluzione u di (9.1) su Ω come somma di una *serie telescopica*, ponendo

$$(*) \qquad u = w_m + \sum\nolimits_{n>m}(w_n - w_{n-1}) \ \text{ su } K_m, \text{ per ogni } m \geq 1.$$

Osserviamo infatti che i termini della serie a secondo membro sono funzioni olomorfe e la serie converge uniformemente su K_m perché maggiorata in norma dalla serie geometrica di ragione $1/2$. La sua somma è quindi olomorfa in $\mathring{K}_m$ e perciò il secondo membro dell'uguaglianza è una funzione di classe $\mathscr{C}^k$ in $\mathring{K}_m$. La u è ben definita perché le somme dei secondi membri di $(*)$ non dipendono dalla scelta di m e definiscono quindi una funzione u di classe $\mathscr{C}^k$ su Ω, che risolve (9.1) essendo, nell'intorno di ogni punto di Ω, la somma di una soluzione locale di classe $\mathscr{C}^k$ di (9.1) e di una funzione olomorfa. □

Teorema 9.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, k un intero positivo ed $f \in \mathscr{C}^k_c(\Omega)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione*

$$(9.2) \qquad u \in \mathscr{C}^1_c(\Omega), \quad \frac{du}{d\bar{z}} = f \ \text{ in } \ \Omega$$

abbia una soluzione a supporto compatto è che

$$(9.3) \qquad \iint_\Omega f(z)h(z)dz\wedge d\bar{z} = 0, \quad \forall h \in \mathscr{O}(\Omega).$$

L'equazione (9.2) *ammette al più una soluzione e questa, se esiste, è di classe $\mathscr{C}^k$ ed ha supporto contenuto nell'Ω-inviluppo di olomorfia di* $\operatorname{supp}(f)$.

Dimostrazione. L'unicità è conseguenza della continuazione unica, perché, se u_1 ed u_2 fossero entrambe soluzioni di (9.2), la loro differenza u_1-u_2 sarebbe una funzione olomorfa in Ω con supporto compatto e quindi nulla.

Definiamo $u(z)$ utilizzando l'integrale di Cauchy-Martinelli:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint_\Omega f(\zeta)\cdot\frac{d\zeta\wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}.$$

Per la Proposizione 8.3 l'inviluppo convesso olomorfo K del supporto di f è un compatto di Ω e le funzioni olomorfe su un intorno di K si approssimano, uniformemente su K, con funzioni olomorfe su Ω. Quindi, per ogni $z \notin K$ vi è una successione $\{h_n\}\subset\mathscr{O}(\Omega)$ che converge uniformemente alla $\zeta\mapsto 1/(\zeta-z)$ su K. Per la (9.3) abbiamo

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint_\Omega f(\zeta)\cdot\frac{d\zeta\wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\iint_\Omega f(\zeta)\cdot h_n(\zeta)d\zeta\wedge d\bar{\zeta} = 0, \ \forall z \notin K$$

e quindi il supporto della soluzione u è contenuto in K. Infine, si verifica che u è di classe $\mathscr{C}^k$ utilizzando la derivazione sotto il segno d'integrale. □

10. Funzioni armoniche

Ricordiamo che l'operatore di Laplace Δ in $\mathbb{R}^2$ è definito da

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\,\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

Definizione 10.1. Una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice *armonica* se è di classe $\mathscr{C}^2$ e soddisfa l'equazione omogenea

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Proposizione 10.1. *La parte reale u di una funzione olomorfa f, definita su un aperto Ω di $\mathbb{C}$, è una funzione armonica.*

Viceversa, se Ω è semplicemente connesso, ogni funzione armonica su Ω è la parte reale di una funzione olomorfa.

Una funzione olomorfa è completamente determinata dalla sua parte reale, a meno di una constante additiva su ogni componente connessa del suo dominio di definizione.

Dimostrazione. Se $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, poiché Δ è un operatore differenziale a coefficienti reali, abbiamo:

$$\Delta\,\mathrm{Re}\,(f) = \mathrm{Re}\;(\Delta\, f) = 4\cdot \mathrm{Re}\left(\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f\right) = 0.$$

L'equazione di Cauchy-Riemann $(\partial/\partial\bar{z})f{=}0$ si può riscrivere come un sistema di equazioni differenziali reali

$$\begin{cases} f = u + iv, \quad u, v \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Se $f = u{+}iv$ è olomorfa, allora

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy.$$

Perciò la parte reale u di f determina il differenziale della sua parte immaginaria v e quindi v a meno di una costante additiva su ciascuna delle componenti connesse del dominio di definizione Ω.

Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $u{\in}\mathscr{C}^2(\Omega)$ sia armonica su Ω è che il differenziale

$$\alpha = -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

sia chiuso in Ω. Nel caso lo sia ed Ω sia semplicemente connesso, una primitiva v di α è la parte immaginaria della funzione olomorfa $f=u+iv$. $\square$

Osservazione 10.2. Naturalmente abbiamo anche

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = \frac{\partial v}{\partial y}\,dx - \frac{\partial v}{\partial x}\,dy.$$

e la parte immaginaria di f determina la parte reale, a meno di costanti additive sul dominio di definizione di Ω.

In particolare, *una fuzione olomorfa che assuma solo valori reali (o immaginari) è costante sulle componenti connesse del dominio di definizione.*

Si potrebbe, più in generale, dimostrare che una funzione olomorfa su un dominio connesso a valori nel supporto di una curva di classe $\mathscr{C}^1$ a tratti è costante.

10.1. Il lemma di Borel-Caratheodory. Il Lemma di Borel[14]-Caratheodory[15] esprime, con una stima a priori, un importante legame quantitativo tra i valori di una funzione olomorfa in un disco e quelli della sua parte reale:

Teorema 10.3 (Borel-Caratheodory). *Sia f una funzione complessa, olomorfa sul disco $\mathrm{D}_0(R)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<R\}$ e continua sulla sua chiusura. Poniamo, per $0 \leq r \leq R$,*

$$\begin{cases} M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \\ A(r) = \max_{|z|=r} |\mathrm{Re}\,(f)(z)|\,. \end{cases}$$

Abbiamo allora:

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r}A(R) + \frac{R+r}{R-r}|f(0)| \qquad per \quad 0\leq r<R\,. \tag{10.1}$$

Dimostrazione. La verifica della (10.1) è banale quando f è costante.

Supponiamo che f non sia costante e che $f(0)=0$. In questo caso abbiamo $A(r) > 0$ per ogni $0 < r \leq R$. La funzione $\phi(z) = f(z)/(2A(R)-f(z))$ è olomorfa in $\mathrm{D}_0(R)$ e a valori in $\mathrm{D} = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$. Poiché $\phi(0) = 0$, per il Lemma di Schwarz (Teorema 3.1 del Cap.IV):

$$|\phi(z)| \leq \frac{|z|}{R}, \quad \forall z \in B_0(R).$$

Poiché $f(z) = 2A(R)\phi(z)/(1+\phi(z))$, otteniamo:

$$|f(z)| = 2A(R)\frac{|\phi(z)|}{|1+\phi(z)|} \leq 2A(R)\frac{|z|/R}{1-(|z|/R)} = \frac{2r}{R-r}A(R), \quad \text{per } 0\leq|z|=r<R.$$

[14]Félix Edouard Justin Émile Borel (1871-1956), matematico francese, ha lasciato importanti contributi in topologia, teoria della misura, della probabilit e dei giochi.

[15]Constantin Carathodory (1873-1950), matematico greco che ha contribuito al calcolo delle variazioni ed alla teoria della misura.

Se togliamo l'ipotesi che $f(0)$ sia uguale a 0, otteniamo dalla discussione precedente:

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{2r}{R-r}\,(A(R) - \mathrm{Re}\,(f)(0))\ ,$$

da cui si ha

$$|f(z)| \leq \frac{2r}{R-r} \cdot A(R) + |f(0)| \left(1 + \frac{2r}{R-r}\right),$$

e quindi la tesi. □

10.2. L'integrale di Poisson. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ ed indichiamo con $\mathscr{H}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni *armoniche* su Ω, cioè delle funzioni u, a valori reali e di classe $\mathscr{C}^2$ sull'aperto Ω, che soddisfano l'equazione omogenea:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{in } \Omega. \tag{10.2}$$

Sia $f \in \mathscr{O}(D) \cap \mathscr{C}\left(\overline{D}\right)$. Posto $\zeta = e^{it}$, è $d\zeta = ie^{it}dt$ e possiamo scrivere la formula di rappresentazione di Cauchy nella forma:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\frac{\zeta dt}{\zeta - z}, \quad \text{per} \quad z \in D\,. \tag{10.3}$$

Risulta poi:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\frac{\bar{\zeta}dt}{\bar{\zeta} - \bar{z}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\frac{dt}{1 - \zeta\cdot\bar{z}} = f(0) \tag{10.4}$$

per il teorema della media, perché $\bar{\zeta} = 1/\zeta$ sul bordo di D e, per ogni $z \in D$, la funzione $\zeta \to f(\zeta)/(1-\zeta\cdot\bar{z})$ è olomorfa su D e continua su $\overline{D}$.

Coniugando otteniamo:

$$\overline{f(0)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(\zeta)}\frac{\zeta dt}{\zeta - z}\,. \tag{10.5}$$

Sommando membro a membro questa uguaglianza alla (10.3), ricaviamo

$$f(z) + \overline{f(0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\,f(\zeta)\,\frac{\zeta}{\zeta - z}dt\,. \tag{10.6}$$

Dal teorema della media abbiamo inoltre:

$$2\mathrm{Re}\,f(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\,(f)(\zeta)\,dt \tag{10.7}$$

e quindi si ha finalmente:

$$f(z)-i\cdot\mathrm{Im}\,(f)(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,(f)(\zeta)\left(\frac{2\zeta}{\zeta-z}-1\right)dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,(f)(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}dt.$$

Abbiamo ottenuto

Teorema 10.4 (Formula di Poisson[16]). *Se $f\in\mathscr{O}(D)\cap\mathscr{C}(\overline{D})$, allora vale la formula di rappresentazione:*

$$\boxed{f(z) = i\cdot\mathrm{Im}\,(f)(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\,(f)(\zeta)\cdot\frac{\zeta+z}{\zeta-z}dt \qquad z\in D.} \tag{10.8}$$ □

Teorema 10.5. *Se $u\in\mathscr{H}(D)\cap\mathscr{C}\left(\overline{D}\right)$ è armonica in D e continua su $\overline{D}$, allora vale la formula di rappresentazione:*

$$\boxed{u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)\cdot\mathrm{Re}\,\frac{\zeta+z}{\zeta-z}dt \qquad z\in D.} \tag{10.9}$$

Dimostrazione. Ogni funzione reale u, armonica in D e continua su $\overline{D}$, è in D la parte reale di una funzione olomorfa f, con $\mathrm{Im}\,(f)(0)=0$. La formula di rappresentazione vale allora per tutte le $u_r(z) = u(rz)$ per $0 < r < 1$. Otteniamo la (10.9) passando al limite per $r \nearrow 1$. □

Osservazione 10.6. Nelle coordinate polari, $\zeta = e^{it}$, $z = r\cdot e^{i\theta}$, abbiamo

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{1-r^2+2i\cdot r\sin(\theta-t)}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}.$$

In particolare otteniamo l'espressione in coordinate polari del *nucleo di Poisson*:

$$\boxed{P(\zeta,z) = \mathrm{Re}\,\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}\,.} \tag{10.10}$$

Da questa ricaviamo facilmente

Lemma 10.7. *È*

$$\frac{1-r}{1+r} \leq P(\zeta,z) \leq \frac{1+r}{1-r} \qquad \text{per } |\zeta| = 1 \text{ e } |z| = r < 1\,. \tag{10.11}$$

In particolare il nucleo di Poisson $P(\zeta,z)$ è positivo per $(\zeta,z)\in\partial D\times D$. □

Otteniamo quindi il

[16]Siméon Denis Poisson (1781-1840), matematico, ingegnere e fisico francese.

TEOREMA 10.8. *Data una qualsiasi funzione $\phi \in \mathscr{C}^0(\partial D, \mathbb{R})$ esiste una e una sola funzione $u \in \mathscr{H}(D) \cap \mathscr{C}^0(\overline{D})$ tale che $u|_{\partial D} = \phi$. La u si può rappresentare con la formula integrale di Poisson*

$$\boxed{u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi\left(e^{it}\right) P\left(e^{it}, z\right) dt \qquad \forall z \in D\,.} \tag{10.12}$$

DIMOSTRAZIONE. La $u(z)$, definita dall'integrale di Poisson, è una funzione armonica perché parte reale della funzione olomorfa

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(\zeta)\frac{\zeta + z}{\zeta - z} dt \qquad z \in D\,.$$

Abbiamo:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(e^{it}, z\right) dt = 1 \qquad \forall z \in D\,.$$

Infatti, poiché $dt = (i\zeta)^{-1} d\zeta$ su ∂D,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial \mathrm{D}} \frac{\zeta + z}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial \mathrm{D}} \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{2z}{2\pi i}\oint_{\partial \mathrm{D}} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}.$$

Abbiamo, con la trasformazione $\zeta = w^{-1}$,

$$\frac{2z}{2\pi i}\oint_{\partial \mathrm{D}} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} = \frac{-2z}{2\pi i}\oint_{\partial \mathrm{D}} \frac{dw}{1 - z \cdot w} = 0$$

perché la funzione $w \mapsto (1 - z \cdot w)^{-1}$ è olomorfa in $\bar{\mathrm{D}}$. Allora

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(e^{it}, z\right) dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial \mathrm{D}} \frac{d\zeta}{\zeta} = 1.$$

Quindi, se $\epsilon_1 \leq \phi \leq \epsilon_2$ su ∂D, abbiamo anche $\epsilon_1 \leq u \leq \epsilon_2$ su D per la positività del nucleo di Poisson.

Se la $\phi\left(e^{it}\right)$ fosse nulla per $-\epsilon \leq t \leq \epsilon$, poiché la $P(\zeta, z)$ è limitata quando $\zeta = e^{it}$ con $\epsilon < |t| \leq \pi$ e $z \in D \cap \{|z - 1| < \epsilon/2\}$, avremmo $u(z) \to 0$ per $z \to 1$ per il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Da queste considerazioni segue la tesi. □

TEOREMA 10.9 (Principio della media forte). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ ed $u \in \mathscr{C}^0(\Omega; \mathbb{R})$ una funzione reale continua in Ω. Condizione necessaria e sufficiente affinché u sia armonica in Ω è che valga:*

$$\boxed{u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z + re^{it}\right) dt \qquad \forall z \in \Omega\,, \forall 0 < r < \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)\,.} \tag{10.13}$$

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare la sufficienza. Siano $z \in \Omega$ ed $r > 0$ tali che il disco chiuso $\overline{B} = \{\zeta \mid |\zeta - z| \leq r\}$ sia contenuto in Ω. Per la formula di Poisson, possiamo costruire una funzione $w \in \mathscr{H}(B) \cap \mathscr{C}^0\left(\overline{B}\right)$ tale che

$w = u$ su ∂B. La differenza $w - u$ è nulla su ∂B e soddisfa la proprietà della media in B: per il principio di massimo essa è allora nulla in B. Ciò dimostra che u è armonica in B. In questo modo verifichiamo che è armonica in Ω, perché è armonica in un intorno di qualsiasi punto $z \in \Omega$. □

Da questo ricaviamo:

Teorema 10.10. *Se Ω è un aperto di $\mathbb{C}$, allora $\mathscr{H}(\Omega)$ è un sottospazio chiuso di $\mathscr{C}^0(\Omega)$ (per la topologia della convergenza uniforme sui compatti).* □

10.3. Principio di riflessione di Schwarz per le funzioni armoniche.

Teorema 10.11 (Principio di riflessione di Schwarz[17]). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$, simmetrico rispetto all'asse reale ($z \in \Omega \iff \bar{z} \in \Omega$). Poniamo:*

$$\begin{cases} \Omega^+ = \{z \in \Omega \mid \operatorname{Im} z > 0\}, \\ \Omega^- = \{z \in \Omega \mid \operatorname{Im} z < 0\}, \\ \omega = \{z \in \Omega \mid \operatorname{Im} z = 0\}. \end{cases}$$

Se $u \in \mathscr{H}(\Omega^+) \cap \mathscr{C}^0(\Omega^+ \cup \omega)$ e $u(z) = 0$ per ogni $z \in \omega$, allora la funzione

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} u(z) & \text{se} \quad \operatorname{Im} z \geq 0 \\ -u(\bar{z}) & \text{se} \quad \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

è armonica in Ω.

Dimostrazione. La funzione $\tilde{u}$ definita nell'enunciato è continua in Ω ed armonica in $\Omega^+ \cup \Omega^-$. Basta quindi dimostrare che è armonica in un intorno di ω. Fissiamo un punto $z_0 \in \omega$ e sia $0 < R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. L'integrale di Poisson:

$$w(z) = w\left(z_0 + re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}\left(z_0 + Re^{it}\right) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - t)} dt$$
$$\text{per } z = z_0 + re^{i\theta},\ 0 \leq r < R,\ \theta \in \mathbb{R}$$

definisce una funzione armonica sul disco $B = \mathrm{D}_{z_0}(R) = \{|z - z_0| < R\}$, e continua sulla sua chiusura. Poiché per la simmetria $w = 0$ su $B \cap \omega$, la w è uguale alla u sulla frontiera del semidisco $B \cap \Omega^+$. Per il principio di massimo, $w = u$ sul semidisco $B \cap \Omega^+$. Allo stesso modo verifichiamo che $w(z) = -u(\bar{z})$ su $B \cap \Omega^-$. La dimostrazione è completa. □

10.4. Principio di Harnack. Dalle maggiorazioni relative al nucleo di Poisson, otteniamo:

Teorema 10.12 (Principio di Harnack[18]). *Siano $B = \mathrm{D}_0(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$*

[17] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), tedesco, analista complesso.

[18] Carl Gustav Axel von Harnack (1851-1888) matematico tedesco, che ha lasciato importanti risultati in teoria del potenziale.

il disco di centro 0 *e raggio* $R>0$ *di* $\mathbb{C}$ *ed* $u \in \mathscr{H}(B)$.

Se $u>0$ *su* B*, allora valgono le diseguaglianze:*

$$\frac{R-|z|}{R+|z|}\,u(0) \;\leq\; u(z) \;\leq\; \frac{R+|z|}{R-|z|}\,u(0) \qquad \forall z \in B\,. \tag{10.14}$$

Dimostrazione. Fissiamo $z \in B$. Se r è un numero reale con $|z| < r < R$, per la formula di Poisson è

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(re^{it}\right)\frac{r^2-|z|^2}{r^2+|z|^2-2r|z|\cos(\theta-t)}dt, \quad \text{ove } \theta \text{ è l'argomento di } z.$$

Poiché

$$\frac{r-|z|}{r+|z|} \leq \frac{r^2-|z|^2}{r^2+|z|^2-2r|z|\cos(\theta-t)} \leq \frac{r+|z|}{r-|z|}\,,$$

e $u\left(re^{it}\right) \geq 0$, otteniamo per la monotonia dell'integrale:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(re^{it}\right)\frac{r-|z|}{r+|z|}dt \\
&\quad\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(re^{it}\right)\frac{r^2-|z|^2}{r^2+|z|^2-2r|z|\cos(\theta-t)}dt \\
&\quad\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(re^{it}\right)\frac{r+|z|}{r-|z|}dt\,,
\end{aligned}$$

che ci dà le diseguaglianze di Harnack (10.14). □

Dal principio di Harnack ricaviamo il teorema di approssimazione:

Teorema 10.13. *Siano* Ω *un aperto connesso di* $\mathbb{C}$ *ed* $\{u_n\}$ *una successione crescente di funzioni armoniche in* Ω*. Allora* $u(z)=\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n(z)$ *è o identicamente uguale a* $+\infty$*, oppure è una funzione finita e armonica in* Ω*. In quest'ultimo caso* $u_n \to u$ *uniformemente sui compatti di* Ω*.*

Dimostrazione. Per ipotesi,

$$u_n \in \mathscr{H}(\Omega) \;\text{ ed }\; u_n(z) \leq u_{n+1}(z) \quad \forall z \in \Omega\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Siano $z_0 \in \Omega$ ed R un numero reale con $0<R<\text{dist}(z_0,\partial\Omega)$. Se $|z-z_0| < R$, allora per ogni coppia di interi non negativi m,n:

$$\begin{aligned}
\frac{R-|z-z_0|}{R+|z-z_0|}\,(u_{n+m}(z_0)-u_n(z_0)) &\leq (u_{n+m}(z)-u_n(z)) \\
&\leq \frac{R+|z-z_0|}{R-|z-z_0|}\,(u_{n+m}(z_0)-u_n(z_0))\,.
\end{aligned}$$

Da questa diseguaglianza si deduce facilmente (facendo tendere $m \to +\infty$) che gli insiemi $\{z \in \Omega \mid u(z)=+\infty\}$ e $\{z \in \Omega \mid u(z)<+\infty\}$ sono entrambi aperti. Poiché Ω è connesso, ne segue che u è o finita o infinita in tutti i punti di Ω. Anche la convergenza uniforme sui compatti, nel caso in cui u sia finita, segue dalla diseguaglianza di Harnack. □

Teorema 10.14. *Se $u \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ non è costante, allora $u(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $u(\mathbb{C})$ è connesso in $\mathbb{R}$. Quindi, se fosse $u(\mathbb{C}) \neq \mathbb{R}$, allora o u o $-u$ sarebbe limitata inferiormente su $\mathbb{C}$. Supponiamo u limitata inferiormente e sia $\mu = \inf_{\mathbb{C}} u$. Abbiamo allora

$$u(z) - \mu \leq \frac{R + |z|}{R - |z|}\,(u(w) - \mu) \qquad \forall z \neq w \in \mathbb{C} \quad \text{ed} \quad R > |z - w|.$$

Passando al limite per $R \to +\infty$, troviamo che $u(z) \leq u(w)$. Scambiando tra loro z e w troviamo allora che u è costante su $\mathbb{C}$. □

CAPITOLO V

Funzioni meromorfe, intere, univalenti

Sia Ω un aperto di $\mathbb{CP}^1$. Useremo la notazione

$\mathscr{O}^*(\Omega) = \{f \in \mathscr{O}(\Omega) \mid f(z)\neq 0,\ \forall z \in \Omega\}$,

$\mathscr{O}^*_0(\Omega) = \{f \in \mathscr{O}(\Omega) \mid \forall$ componente connessa U di $\Omega\ \ \exists\, w\in U$ t.c $f(w)\neq 0\}$.

Osserviamo che $\mathscr{O}^*(\Omega)$ è un gruppo moltiplicativo ed $\mathscr{O}^*_0(\Omega)$ l'inisieme degli elementi dell'*anello* $\mathscr{O}(\Omega)$ che non sono divisori di zero.

Per la continuazione unica, se Ω è connesso, allora $\mathscr{O}(\Omega)$ è un dominio d'integrità, cioè un anello commutativo e unitario in cui il prodotto di due elementi non nulli è non nullo. Infatti, per il Corollario 4.2 del Cap.IV, se Ω è connesso, allora gli zeri di una funzione olomorfa non nulla sono isolati e quindi anche quelli del prodotto di due funzioni olomorfe non nulle. Come vedremo, nel caso di un aperto connesso Ω, le funzioni meromorfe si possono considerare gli elementi del campo quoziente $\mathcal{M}(\Omega)$ di $\mathscr{O}(\Omega)$.

Indicheremo con $\mathring{\mathrm{D}}_z(r)=\{\zeta\in\mathbb{C} \mid 0<|\zeta-z|<r\}$ il disco privato del centro. Poniamo per semplicità $\mathring{\mathrm{D}}=\mathring{\mathrm{D}}_0(1)$.

1. Singolarità isolate

Sia Ω un aperto di $\mathbb{CP}^1$ ed f una funzione definita e olomorfa su Ω.

Definizione 1.1. Un punto isolato di $\mathbb{CP}^1\setminus\Omega$ si dice una *singolarità isolata* di f. Una singolarità isolata z_0 di f è

- *eliminabile* se esiste finito $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.
- *polare*, o un *polo*, se $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ in $\mathbb{CP}^1$.
- *essenziale* se la $f(z)$ non ammette limite in $\mathbb{CP}^1$ per $z\to z_0$.

Una $f\in\mathscr{O}(\Omega)$ che ha una singolarità isolata z_0 al finito si rappresenta vicino a z_0 con uno sviluppo di Laurent (vedi il Teorema 7.1 del Cap.IV)

$$(1.1)\qquad f(z) = \sum\nolimits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \text{con} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n-1}},$$

la cui somma converge uniformemente ad $f(z)$ sugli anelli chiusi

$$\bar{A}_{z_0}(r_1, r_2) = \{r_1\leq|z-z_0|\leq r_2\}\subset\Omega.$$

Il *tipo* della singolarità è completamente determinato dai coefficienti con indice negativo della serie di Laurent.

Proposizione 1.1. *La f ha in z_0*

$$\begin{aligned}\textit{una singolarità eliminabile} &\iff a_n = 0 \ \ \forall n < 0;\\ \textit{una singolarità polare} &\iff \exists\, m \geq 1 \ \textit{t.c.}\ a_{-m} \neq 0, \ \ a_{-n} = 0 \ \ \forall n > m;\\ \textit{una singolarità essenziale} &\iff \forall m \in \mathbb{N}, \ \ \exists\, n > m \ \ \textit{t.c} \ \ a_{-n} \neq 0.\end{aligned}$$

Dimostrazione. La prima affermazione si riconduce al fatto che, per una funzione olomorfa in z_0 le sue serie di Taylor e di Laurent coincidono.

Chiaramente, se la serie di Laurent di f ha un numero finito di termini con indice negativo, allora $|f(z)| \to \infty$ per $z \to z_0$. Viceversa, se f ha in z_0 una singolarità polare, allora è diversa da zero in tutti i punti di $U \setminus \{z_0\}$ per un intorno U di z_0 con $U \setminus \{z_0\} \subseteq \Omega$ e la $F = 1/f$ è olomorfa in $U \setminus \{z_0\}$ ed ha in z_0 una singolarità isolata eliminabile. La F ha in z_0 uno zero d'ordine finito e si può perciò decomporre in un prodotto $F(z) = (z-z_0)^m \cdot g(z)$ per una funzione $g \in \mathscr{O}^*(U)$. La $G = 1/g$ è olomorfa in U ed ha quindi in z_0 uno sviluppo di Taylor

$$G(z) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n.$$

Allora la serie di Laurent

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \cdot G(z) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^{n-m}$$

di f ha nulli tutti i coefficienti dei termini $(z-z_0)^{-n}$ con $n > m$.

Abbiamo così dimostrato che la serie di Laurent di f ha un numero finito di termini non nulli con esponente negativo se e soltanto se $f(z)$ ha un limite, finito o infinto, per $z \to \infty$. La dimostrazione è completa. □

Osservazione 1.2. Il comportamento di una funzione olomorfa f nell'intorno di una sua singolarità essenziale $z_0 \in \mathbb{C}$ è caotico: un teorema di Weierstrass[1]-Casorati[2]-Sokhotski[3] ci dice che, per ogni intorno U di z_0, l'immagine $f(U \setminus \{z_0\})$ è densa in $\mathbb{C}$. Il *Teorema grande di Picard*[4] precisa che, con la possibile eccezione di un valore $w_0 \in \mathbb{C}$, $f(U \setminus \{z_0\}) \supseteq \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$ e che, per ogni $w \neq w_0$, $f^{-1}(w) \cap U$ è infinito.

Ad esempio, la funzione $e^{1/z}$ ha in 0 una singolarità essenziale ed, in ogni intorno di 0, assume tutti i valori complessi tranne 0.

---

[1] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), matematico tedesco che si può considerare il fondatore dell'analisi matematica moderna.

[2] Felice Casorati (1835-1890), matematico italiano che ha dato contribui importanti allo studio delle equazioni alle differnze finite lineari.

[3] Julian Karol Sochocki (1842-1927) matematico russo-polacco, pioniere dello studio in Russia dell'analisi complessa.

[4] Charles Émile Picard (1856-1941), matematico francese cui si devono risultati fondamentali sia in analisi complessa che nello studio delle equazioni differenziali e nella geometria algebrica (gruppo di Picard).

DEFINIZIONE 1.2. Il coefficiente

$$\text{res}_{z_0}(f) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\epsilon} f(z)\,dz, \quad \text{se } D_{z_0}(\epsilon)\setminus\{z_0\}\Subset\Omega, \tag{1.2}$$

si dice il *residuo* di f in z_0.

Osserviamo che

$$\oint_{|\zeta|=\epsilon} \zeta^{-m} d\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} \epsilon^{-m} e^{-imt}\, d(\epsilon\cdot e^{it}) = i\,\epsilon^{1-m}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(1-m)t} dt = \begin{cases} 2\pi i, & \text{se } m = 1,\\ 0, & \text{se } m \neq 1.\end{cases}$$

Il residuo di f in z_0 è quindi il coefficiente del termine di grado (-1) della sua serie di Laurent in z_0.

DEFINIZIONE 1.3. Se f ha una singolarità polare in z_0, allora il più grande intero positivo n per cui il coefficiente a_{-n} della serie di Laurent (1.1) è diverso da zero si dice l'*ordine di polo* di f in z_0.

OSSERVAZIONE 1.3. Il *metodo dei residui* è molto efficace nel calcolo di integrali definiti. Calcoliamo ad esempio

$$c_m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2m}}.$$

Osserviamo che, se $S^+(r) = \{|z| = r,\ \text{Im}\,(z) \geq 0\}$, allora, per $r > 1$,

$$I(r) = \int_{-r}^{r} \frac{dx}{1+x^{2m}} + \int_{S^+(r)} \frac{dz}{1+z^{2m}}$$

è il prodotto di $2\pi i$ per la somma dei residui della $f(z) = (1+z^{2m})^{-1}$ nel semipiano superiore. Le radici di $z^{2m}=-1$ sono le $\exp(i(1+2h)\pi/2m)$, al variare dell'intero h e queste appartengono al semipiano superiore se $0\leq h < m$. È

$$1 + z^{2m} = \prod_{h=0}^{2m-1}\left(z - e^{\pi i \frac{2h+1}{2m}}\right).$$

Quindi il residuo di $f(z)$ in $e^{\pi i \frac{2s+1}{2m}}$ è

$$\text{res}_{e^{\pi i \frac{2s+1}{2m}}}(f) = \left(\prod_{\substack{0\leq h<2m\\ h\neq s}}\left(e^{\pi i \frac{2s+1}{2m}} - e^{\pi i \frac{2h+1}{2m}}\right)\right)^{-1}.$$

L'integrale cercato è il limite di $I(r)$ per $r \to \infty$ ed è dunque uguale ad uno qualsiasi dei valori di $I(r)$ per $r > 1$. Si ottiene

$$c_m = \frac{\pi}{m}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2m}\right)\right]^{-1}.$$

Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$.

DEFINIZIONE 1.4. Chiamiamo *meromorfa* in Ω una funzione f definita e olomorfa sul complemento in Ω di un suo sottoinsieme discreto Z e che non abbia in qualche punto di Z una singolarità essenziale.

Proposizione 1.4. *Sia Z un sottoinsieme discreto di un aperto Ω di $\mathbb{C}$ ed F una funzione complessa definita su $\Omega\setminus Z$. Condizione necessaria e sufficiente affinché F sia meromorfa in Ω è che, per ogni $z \in Z$, si possa trovare un intorno aperto U_z di z in Ω e due funzioni $f_z, g_z \in \mathscr{O}(U_z)$, con $g(\zeta)\neq 0$ se $\zeta\in U_z\setminus Z$, tali che*

$$F(\zeta) = f_z(\zeta)/g_z(\zeta) \text{ per ogni } \zeta \in U_z\setminus\{z\}.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $z\in Z$ sia una singolarità polare di F. Se m è il suo ordine di polo, allora $\zeta \mapsto f(\zeta) = (\zeta-z)^m F(\zeta)$ ha in ζ una singolarità eliminabile e si può quindi considerare come una funzione olomorfa f in un intorno di z. Allora $F(\zeta) = f(\zeta)/(\zeta-z)^m$ è la rappresentazione cercata.

Viceversa, se $F(\zeta) = f(\zeta)/g(\zeta)$ in $U\setminus\{z\}$ con $f, g \in \mathscr{O}(U)$ e $g(\zeta) \neq 0$ in $U\setminus\{z\}$ per un intorno aperto U di z in Ω, allora $g(\zeta)$ ha in z uno zero d'ordine finito m e quindi F ha in z una singolarità polare d'ordine al più m. □

2. Il teorema di Mittag-Leffler

Il teorema di Mittag-Leffler[5] ci permette di costruire funzioni meromorfe con parti polari assegnate. Più in generale, dato un aperto Ω di $\mathbb{C}$ ed un suo sottoinsieme discreto Z si possono assegnare arbitrariamente le singolarità nei punti di Z di una funzione olomorfa su $\Omega\setminus Z$.

Teorema 2.1. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e Z un suo sottoinsieme discreto. Per ogni punto z di Z siano assegnati un intorno aperto U_z di z in Ω ed una funzione $\phi_z \in \mathscr{O}(U_z\setminus\{z\})$. Possiamo allora trovare una funzione $f \in \mathscr{O}(\Omega\setminus Z)$ tale che*

(2.1) $\forall\, z \in Z, \quad (f-\phi_z)\in\mathscr{O}(U_z\setminus\{z\})$ *abbia in z una singolarità eliminabile.*

Dimostrazione. Poiché Z è discreto in Ω, possiamo costruire un ricoprimento aperto localmente finito $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ di Ω tale che, per ogni indice i, U_i contenga al più un elemento z di Z ed, in tal caso, sia $U_i\subseteq U_z$. Definiamo $h_i=\phi_z$ se $U_i\cap Z=\{z\}$, $h_i=0$ se $U_i\cap Z=\emptyset$. Allora $h_{i,j} = h_i-h_j\in\mathscr{O}(U_i\cap U_j)$. Naturalmente le $\{h_{i,j}\}$ soddisfano le *condizioni di cociclo*

$$h_{i,j}(\zeta) + h_{j,k}(\zeta) + h_{k,i}(\zeta) = 0 \quad \forall\zeta \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Fissiamo ora una partizione $\mathscr{C}^\infty$ dell'unità $\{\chi_i\}$ subordinata[6] al ricoprimento $\mathcal{U}$. Per ogni indice i, il prodotto $\chi_j{\cdot}h_{i,j}$ è ben definito su $U_i\cap U_j$, perché

[5]Magnus Gustaf Mittag-Leffler (1846-1927), matematico svedese, fondatore degli Acta Mathematica, fu un personaggio importante della matematica europea tra il XIX e XX secolo.

[6]Ciò significa che $\begin{cases} \chi_i \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{C}), \quad \forall i \in I, \\ \operatorname{supp}(\chi_i) \Subset U_i, \quad \forall i \in I, \\ \forall\, z \in \Omega, \ \exists\, W^{\text{aperto}} \ni z \ \text{ t.c. } \ \#\{i \in I \mid \operatorname{supp}(\chi_i)\cap W \neq \emptyset\} < \infty, \\ \sum_{i\in I}\chi_i(z) = 1, \quad \forall z \in \Omega. \end{cases}$

né h_i, né h_j hanno singolarità sull'intersezione. Inoltre il prodotto è nullo fuori da $\mathrm{supp}(\chi_j) \cap U_i$ e quindi otteniamo una funzione di classe $\mathscr{C}^\infty$ in U_i prolungandolo uguale a zero fuori da $\mathrm{supp}(\chi_j) \cap (U_i)$. Poniamo

$$\widetilde{\chi_j \cdot h_{i,j}}(\zeta) = \begin{cases} \chi_j \cdot h_{i,j}(\zeta), & \text{se } \zeta \in \mathrm{supp}(\chi_j) \cap (U_i), \\ 0 & \text{se } \zeta \in U_i \setminus \mathrm{supp}(\chi_j). \end{cases}$$

Possiamo ora definire delle funzioni di classe $\mathscr{C}^\infty$ sugli aperti U_i del ricoprimento $\mathcal{U}$ ponendo

$$\psi_i(\zeta) = \sum\nolimits_{j \in I} \widetilde{\chi_j \cdot h_{i,j}}(\zeta), \quad \forall \zeta \in U_i.$$

Osserviamo che

$$\psi_i(\zeta) - \psi_j(\zeta) = \sum\nolimits_{k \in I} \chi_k(\zeta)([h_i - h_k] - [h_j - h_k]) = \sum\nolimits_{k \in I} \chi_k(\zeta)(h_i - h_j) = h_i - h_j \quad \text{su } U_i \cap U_j.$$

In particolare, poiché $h_i - h_j$ è olomorfa su $U_i \cap U_j$, ricaviamo che

$$\frac{d\psi_i(\zeta)}{d\bar{\zeta}} = \frac{d\psi_j(\zeta)}{d\bar{\zeta}} \quad \text{su} \quad U_i \cap U_j$$

e quindi

$$g(z) = \frac{d\psi_i(\zeta)}{d\bar{\zeta}} \quad \text{su} \quad U_i$$

definisce una funzione di classe $\mathscr{C}^\infty$ su Ω. Per il Teorema 9.1 del Cap.IV, possiamo trovare una soliuzione $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ di

$$\frac{du}{d\bar{\zeta}} = g \quad \text{in} \quad \Omega.$$

In particolare $\psi_i - u \in \mathscr{O}(U_i)$ e, poiché

$$h_i - (\psi_i - u) = h_j - (\psi_j - u) \quad \text{su} \quad U_i \cap U_j,$$

la $f(\zeta)$, definita mediante $h_i - (\psi_i - u)$ su $U_i \setminus Z$, è una funzione olomorfa su $\Omega \setminus Z$ che verifica la tesi del teorema. □

Osservazione 2.2. Le $\{\phi_z\}$ nell'enunciato del Teorema 2.1 si dicono anche *dati di Cousin additivi* e la f *soluzione del primo problema di Cousin*[7].

Osservazione 2.3. I dati di Cousin additivi possono essere anche descritti dai dati di serie di Laurent della forma

$$\phi_z(\zeta) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(z)}{(\zeta - z)^n},$$

che si richiedono convergenti per qualche $\zeta \neq z$. Nel caso particolare in cui tutte queste somme siano finite, si parla di *parti polari*.

[7]Pierre Cousin (1867-1933), matematico francese attivo in analisi complessa.

Esempio 2.1. *La funzione* $f(z) = \pi^2/\sin^2(\pi z)$ *è olomorfa su* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ *ed ha per ogni intero* n *un polo di ordine due, con parte polare* $(z-n)^{-2}$*. Essa ammette lo sviluppo in serie*

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Indichiamo con $h(z)$ la somma della serie a secondo membro. Essa converge per ogni $z \notin \mathbb{Z}$ e quindi definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$, che differisce dalla $f(z)$ per una funzione intera. È $h{=}f$, perché la loro differenza è una funzione intera semplicemente periodica di periodo 1 che tende a zero uniformemente per $|\mathrm{Im}\,(z)|\to\infty$.

Come applicazione di questa uguaglianza, otteniamo

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\pi^2 z^2 - \sin^2(\pi z)}{z^2\sin^2(\pi z)} = \frac{\pi^2}{6},$$
$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi}{6}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Esempio 2.2. Mostriamo che

$$\pi\cdot\cot(\pi\cdot z) = \frac{1}{z} + \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}_*}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}. \tag{2.2}$$

Il secondo membro di questa uguaglianza è una funzione olomorfa $f(z)$ su $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, che definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli semplici negli interi. Abbiamo

$$f'(z) = -\sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2} = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}.$$

Quindi $f(z) = \pi\cdot\cot(\pi z)$ perché i due membri di quest'uguaglianza sono entrambe funzioni olomorfe dispari che hanno la stessa derivata sul connesso $\mathbb{C}\setminus Z$.

Esempio 2.3. È $\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)} = \dfrac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}_*}(-1)^n\dfrac{2z}{z^2-n^2}.$

Infatti, indicando con $f(z)$ la somma della serie a secondo membro, otteniamo

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}_*}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n}-\frac{1}{n}\right) = \lim\nolimits_{m\to+\infty}\sum\nolimits_{n=-m}^{m}(-1)^n\frac{1}{z-n}$$
$$= \lim\nolimits_{m\to+\infty}\left(\sum_{n=-m}^{m}\frac{1}{z-2n} - \sum_{n=-m}^{m}\frac{1}{z-2n-1}\right) = \frac{\pi}{2}\cot(\pi z/2) - \frac{\pi}{2}\cot(\pi(z-1)/2)$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\cos(\pi z/2)}{\sin(\pi z/2)} + \frac{\sin(\pi z/2)}{\cos(\pi z/2)}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin(\pi z/2)\cos(\pi z/2)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

3. Il teorema di Weierstass

Indichiamo con $\mathcal{M}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni meromorfe sull'aperto Ω di $\mathbb{C}$. Con le usuali operazioni di somma e di prodotto di funzioni, $\mathcal{M}(\Omega)$ è un anello commutativo, una $\mathbb{C}$-algebra ed un $\mathscr{O}(\Omega)$-modulo unitarii. Indicheremo con $\mathcal{M}^*(\Omega)$ il gruppo moltiplicativo delle funzioni meromorfe su Ω che non sono identicamente nulle su nessuna delle sue componenti connesse.

Se $f \in \mathcal{M}^*(\Omega)$, allora anche la sua *derivata logaritmica* $f'(\zeta)/f(\zeta)$ è una funzione di $\mathcal{M}^*(\Omega)$. Abbiamo

LEMMA 3.1. *Se* $f \in \mathcal{M}^*(\Omega)$, *allora i residui della sua derivata logaritmica*

$$div(f)(z) := \operatorname{res}_z(f'/f) = \lim\nolimits_{t\to 0^+} \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta - z| = t} \frac{f'(\zeta)\,d\zeta}{f(\zeta)} \tag{3.1}$$

sono tutti numeri interi.

- *Se* $div(f)(z)<0$, *allora* f *ha in* z *un polo di ordine* $|div(f)(z)|$.
- *Se* $div(f)(z)=0$, *allora* f *ha al più in* z *una singolarità rimovibile e si estende ad una funzione olomorfa e diversa da zero in un intorno di* z.
- *Se* $div(f)(z)>0$, *allora* f *ha in* z *al più una singolarità rimovibile e si estende ad una funzione olomorfa in* z *che ha in* z *uno zero d'ordine* $div(f)(z_0)$.

DIMOSTRAZIONE. Se $f(\zeta) = (\zeta - z)^m \cdot g(\zeta)$ su $\mathring{\mathrm{D}}_z(\epsilon)$, con $g \in \mathscr{O}^*(\mathrm{D}_z(\epsilon))$, allora

$$f'(\zeta) = m \cdot (\zeta - z)^{m-1} \cdot g(\zeta) + (\zeta - z)^m \cdot g'(\zeta) \quad \text{in } \mathring{\mathrm{D}}_\zeta(\epsilon)$$

e quindi, se $0 < t < \epsilon$,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta - z| = t} \frac{f'(\zeta)\,d\zeta}{f(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta - z| = t} \frac{m\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta - z| = t} \frac{g'(\zeta)\,d\zeta}{g(\zeta)} = m. \qquad \square$$

DEFINIZIONE 3.1. Chiamiamo *divisore* di $f \in \mathcal{M}^*(\Omega)$ la funzione

$$div(f) : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z} \tag{3.2}$$

che associa ad ogni punto z di Ω il residuo della sua derivata logaritmica.

Il *supporto*, cioè la chiusura dell'insieme dei punti in cui è diverso da zero, del divisore di una $f \in \mathcal{M}^*(\Omega)$ è un sottoinsieme discreto (cioè privo di punti di accumulazione) in Ω.

Il teorema di Weierstrass ci dice che, viceversa, ogni funzione $\mathcal{D}$ a valori interi, definita su un aperto Ω di $\mathbb{C}$, con supporto discreto in Ω, è il divisore di una $f \in \mathcal{M}^*(\Omega)$.

Premettiamo un lemma sull'esistenza di determinazioni del logaritmo.

LEMMA 3.2. *Siano z_0, z_1 gli estremi di un arco aperto γ di $\mathbb{C}$. Possiamo allora definire una funzione $\log_\gamma(\zeta) \in \mathscr{O}(\mathbb{C}\setminus|\gamma|)$ tale che*

$$\exp(\log_\gamma(\zeta)) = \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z_1}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}\setminus|\gamma|. \tag{3.3}$$

DIMOSTRAZIONE. La funzione

$$\log_+(z) = \log(r) + i\theta, \quad \text{se } z = re^{i\theta} \text{ con } |\theta| < \pi,$$

definita e olomorfa su $A = \mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq 0\}$, è la primitiva su A del differenziale chiuso dz/z, che coincide con il logaritmo reale sul semiasse reale positivo.

Se z_0, z_1 sono due punti distinti di $\mathbb{C}$, allora $\log_+((z-z_0)/(z-z_1))$ è definita e olomorfa su $\mathbb{C}\setminus[z_0, z_1]$ (dove $[z_0, z_1] = \{z_0+r(z_1-z_0) \mid 0\leq t\leq 1\}$ è il segmento reale di estremi z_0, z_1) ed ha derivata $f(\zeta) = \dfrac{1}{\zeta-z_0} - \dfrac{1}{\zeta-z_1}$. La funzione f è definita e olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{z_0, z_1\}$ ed

$$\omega = f(\zeta)d\zeta$$

è quindi una forma differenziale chiusa su $\mathbb{C}\setminus\{z_0, z_1\}$.

La ω è esatta su $\Omega = \mathbb{C}\setminus|\gamma|$, perché il gruppo fondamentale di Ω è generato da una qualsiasi circonferenza $[0, 1] \ni t \mapsto R\exp(2\pi i t)$ con $R > \sup_{\zeta\in|\gamma|} |\zeta|$ ed

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=R} f(\zeta)d\zeta = \operatorname{res}_{z_0}(f) + \operatorname{res}_{z_1}(f) = 1-1 = 0.$$

Siano $R>1$ un numero reale per cui $z_R = z_0+R(z_1-z_0)\notin|\gamma|$ e $\log_\gamma(\zeta)$ la primitiva di ω su Ω che assume in z_R il valore $\log(R)$.

Allora $\log_\gamma(\zeta) = \log_+((\zeta-z_0)/(\zeta-z_1))$ sul complementare E un disco sufficientemente grande di $\mathbb{C}$ ed in particolare la (3.3) vale su E. Per il principio di continuazione unica la (3.3) vale sul complemento del supporto di γ. $\square$

TEOREMA 3.3 (Weierstrass). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$. Per ogni funzione*

$$\mathcal{D} : \Omega \ni \mathfrak{z} \to m_{\mathfrak{z}} \in \mathbb{Z}$$

con supporto discreto, possiamo trovare una $f\in\mathcal{M}^*(\Omega)$ per cui $\mathit{div}(f)=\mathcal{D}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\operatorname{dist}(z, w) = 2\arctan[(|z - w|/(1 + z\cdot\bar{w})]$ la distanza di Riemann su $\mathbb{CP}^1$. Allora (vedi il Lemma 8.6 del Cap. IV) i

$$K_n = \{\zeta \in \Omega \mid \operatorname{dist}(\zeta, \mathbb{CP}^1\setminus\Omega) \geq 2^{-n}\}$$

formano una successione di compatti Ω-olomorficamente convessi di Ω.

Indichiamo con Z il supporto di $\mathcal{D}$.

Dico che possiamo costruire una successione di funzioni razionali $\{f_n\}$ su $\mathbb{C}$ ed una successione di funzioni olomorfe $\{g_n\in\mathscr{O}(\Omega)\}$ tali che, per una successione ϵ_n di reali positivi con $0<\epsilon_n<1$ e $\sum_n \epsilon_n<\infty$ valgano le

$$(\dagger)\qquad \begin{cases} f_n \in \mathscr{O}^*(\mathring{K}_{n+1}\setminus Z), \\ \forall\, z{\in}Z{\cap}K_n, \quad \exists\ \lim_{\zeta\to z}(\zeta - z)^{-m_z}{\cdot}f_n(\zeta) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \\ \|1 - (f_{n+1}/f_n){\cdot}g_n\|_{K_n} < \epsilon_n. \end{cases}$$

Possiamo fissare $f_0(\zeta) = \prod_{z\in Z\cap K_0}(\zeta - z)^{m_z}$. Mostriamo per ricorrenza che, dati gli f_j per $j{\leq}n$, possiamo costruire f_{n+1} e g_n che verifichino le (†). A questo scopo, fissiamo una qualsiasi funzione razionale f con gli zeri e i poli prescritti su K_{n+1}. Allora

$$\frac{f(\zeta)}{f_n(\zeta)} = c{\cdot}\prod\nolimits_{i=1}^{k}(\zeta - z_i)^{m_i} \tag{3.4}$$

è una funzione razionale su $\mathbb{C}$ che ha poli e zeri in punti $z_1, \ldots, z_k$ che non appartengono a K_n. Per ipotesi, $\Omega\setminus K_n$ non ha componenti connesse relativamente compatte in Ω. Quindi, nella componente connessa di z_i in $\Omega\setminus K_n$ c'è un punto z'_i che non appartiene a K_{n+1}. Sia γ_i un arco in $\Omega\setminus K_n$ che congiunge z_i a z'_i. Posto

$$f_{n+1} = c^{-1}{\cdot}f(\zeta){\cdot}\prod\nolimits_{i=1}^{k}(\zeta - z'_i)^{-m_i}$$

abbiamo

$$\frac{f_{n+1}(\zeta)}{f_n(\zeta)} = \prod\nolimits_{i=1}^{k}\left(\frac{\zeta - z_i}{\zeta - z'_i}\right)^{m_i}.$$

Per il Lemma 3.2, la

$$h(\zeta) = \sum\nolimits_{i=1}^{k} m_i \log_{\gamma_i}(\zeta)$$

è olomorfa in un intorno di K_n, in cui $\exp(h(\zeta)) = f_{n+1}(\zeta)/f_n(\zeta)$. Possiamo allora trovare, fissato $0 < \delta_n < \log[1/(1 - \epsilon_n)]$, una $g_n \in \mathscr{O}(\Omega)$ tale che

$$\|h + g_n\|_{K_n} < \delta_n.$$

Allora[8]

$$\|1 - (f_{n+1}/f_n)\exp(g)\|_{K_n} = \|1 - \exp(h + g_i)\|_{K_n} < 1 - e^{-\delta_n} < \epsilon_n.$$

Otteniamo la f desiderata come *prodotto infinito* (vedi §4.1)

$$f(z) = f_1(z){\cdot}\prod\nolimits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}{\cdot}g_n(z)\right) \tag{3.5}$$

□

Corollario 3.4. *Ogni funzione meromorfa su un aperto Ω di $\mathbb{C}$ si può scrivere come rapporto di due funzioni olomorfe su Ω.*

[8] Abbiamo infatti $1{-}e^{-\delta_n}{\leq}e^{\delta_n} - 1$ perché $\cosh(\delta) = \frac{1}{2}(e^{\delta}{+}e^{-\delta}) \geq 1$.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo limitarci a dimostrare il corollario nel caso in cui Ω sia connesso. Sia $F \in \mathcal{M}(\Omega)$. Se $F \equiv 0$, la tesi è banalmente verificata. Se $F \in \mathcal{M}^*(\Omega)$, per il Teorema 3.3 possiamo trovare una funzione olomorfa $g(z)$ con $\mathit{div}(g)(z) = \max\{0, -\mathit{div}(F)(z)\}$. Allora $f = g \cdot F$ ha soltanto singolarità eliminabili ed è quindi olomorfa in Ω ed $F = f/g$. □

PROPOSIZIONE 3.5. *Se* $\Omega^{aperto} \subset \mathbb{C}$, *allora possiamo trovare una funzione* $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ *che non si possa estendere analiticamente, neppure localmente come funzione meromorfa, su un aperto di* $\mathbb{CP}^1$ *che contenga propriamente* Ω.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo costruire una successione divergente in Ω tale che ogni intorno di un punto di $\partial\Omega$ in $\mathbb{CP}^1$ ne contenga infiniti punti. A questo scopo, fissiamo una successione $\{z_n\}$ che contenga infinite volte ogni punto con parte reale ed immaginaria razionale di Ω. Fissiamo poi una successione di compatti $\{K_n\}$ con $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ ed $\bigcup K_n = \Omega$ e la distanza dist su $\mathbb{CP}^1$. Costruiamo una nuova successione $\{z'_n\}$, scegliendo per ogni n uno $z'_n \in \Omega \setminus K_n$ con $|z_n - z'_n| < \mathrm{dist}(z_n, \mathbb{CP}^1 \setminus \Omega)$. Per il Teorema 3.3 possiamo trovare una $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ con $\mathrm{supp}(\mathit{div}(f)) = \{z'_n\}$ e $\mathit{div}(f)(z'_n) = n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Un qualsiasi prolungamento meromorfo di f nell'intorno $V \subset \mathbb{CP}^1$ di un punto p di $\partial\Omega$ dovrebbe essere identicamente nullo in un intorno di p, ma questo non è possibile perché la f non si annulla identicamente su nessun aperto di Ω. □

4. Funzioni intere

Si chiamano *intere* le funzioni olomorfe definite su tutto il piano di Gauss $\mathbb{C}$.

LEMMA 4.1. *Se* Ω *è un aperto semplicemente connesso di* $\mathbb{C}$, *allora ogni* $f \in \mathscr{O}^*(\Omega)$ *è l'esponenziale* ($f = \exp(g)$) *di una funzione* $g \in \mathscr{O}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. Basta scegliere come g un'opportuna primitiva di $\dfrac{df(z)}{f(z)}$. □

Fissata una $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, indichiamo con $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$ il supporto del suo divisore. È un insieme discreto e quindi al più numerabile e possiamo allora, per ogni numero reale s, considerare la serie a termini di segno positivo

$$\sum_{0 \neq z \in D(f)} \frac{\mathit{div}(f)(z)}{|z|^{s+1}} \tag{4.1}$$

DEFINIZIONE 4.1. Se la serie (4.1) diverge per ogni s, diciamo che f ha *genere infinito*. Altrimenti, chiamiamo *genere* di f *il più piccolo intero non negativo* s per cui (4.1) converge.

4.1. Prodotti infiniti. Sia $\{p_n\}$ una successione di numeri complessi.

Definizione 4.2. Diciamo che il prodotto infinito $\prod_{n=0}^{\infty} p_n$ converge se

(i) esiste un intero n_0 tale che $p_n \neq 0$ oer ogni $n > n_0$;
(ii) per ogni intero $\nu \geq 0$, posto $P_n^{(\nu)} = \prod_{h=\nu}^{n} p_h$, la successione $\{P_n^{(\nu)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un numero complesso P_∞^ν, che è diverso da zero se $\nu \gg 1$.

In questo caso chiamiamo $P^{(0)} = \prod_{n=0}^{\infty} p_n$ il *prodotto infinito* della successione $\{p_n\}$ e lo indichiamo con

$$P = \prod_{n=0}^{\infty} p_n. \tag{4.2}$$

Lemma 4.2. *Se* $\prod_{n=0}^{\infty} p_n$ *converge, allora* $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$.

Dimostrazione. Infatti, poiché i p_n sono tutti diversi da zero per $n \gg 1$, abbiamo, per un $n_0 \gg 1$, per cui $P_\infty^{(n_0)} \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n^{(n_0)}}{P_{n-1}^{(n_0)}} = 1. \qquad \square$$

Per questo si usano scrivere i fattori di un prodotto infinito nella forma

$$p_n = 1+a_n$$

per una successione $\{a_n\}$ infinitesima. In particolare, $\operatorname{Re}(1+a_n) > 0$ per ogni $n \gg 1$.

La serie

$$\log_+\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \tag{4.3}$$

converge sul disco D alla determinazione del logaritmo di $(1-z)^{-1}$ che assume valori reali per $z\in[-1,1]$. I valori del logaritmo così definito coincidono con quelli della funzione, olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, con $\mathbb{R}_-=\{t\in\mathbb{R} | t\leq 0\}$, definita sui numeri comlessi non nulli da

$$\log_+(z) = \log(r) + i\cdot\theta, \quad \text{se } 0 \neq z = r\cdot e^{i\theta} \text{ con } r,\theta\in\mathbb{R},\ r>0,\ -\pi<\theta\leq\pi. \tag{4.4}$$

Proposizione 4.3. *Sia* $\{a_n\}$ *una successione infinitesima di numeri complessi per cui* $\operatorname{Re}(1+a_n)>0$. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il prodotto infinito* $\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ *sia convergente è che sia convergente la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log_+(1+a_n). \tag{4.5}$$

In questo caso, il prodotto infinito è l'esponenziale della somma della serie.

Dimostrazione. Poiché i prodotti parziali $P_n=\prod_{h=0}^{n}(1+a_h)$ sono gli esponenziali delle somme parziali $S_n=\sum_{h=0}^{n}\log_+(1+a_h)$, la convergenza della serie implica quella del prodotto infinito.

Resta da dimostrare il viceversa. Supponiamo esista, finito e non nullo, il limite $P=\lim_{n\to\infty}P_n$. Poiché $P\neq 0$, lo possiamo scrivere nella forma $P=|P|\cdot\exp(i\theta)$ con $-\pi<\theta\leq\pi$. Possiamo allora trovare un intero positivo n_0 tale che ogni P_n con $n>n_0$ si scriva nella forma $P_n=|P_n|\cdot\exp(i\theta_n)$ con $|\theta-\theta_n|<\pi/2$. Poiché $P_n=\exp(S_n)$, abbiamo

$$S_n=\log_(|P_n|)+i\theta_n+2\pi i h_n,\quad \text{con } h_n\in\mathbb{Z}.$$

Allora

$$\log_+(1+a_{n+1})=S_{n+1}-S_n=\log(|P_{n+1}/P_n|)+i(\theta_{n+1}-\theta_n)+2\pi i(h_{n+1}-h_n),$$

da cui

$$2\pi\cdot|h_{n+1}-h_n|\leq|\theta_{n+1}-\theta_n|+\pi<3\pi/2<2\pi\quad \text{per } n>n_0.$$

Questo implica che $h_n=h_{n_0+1}$ per ogni $n>n_0$. Quindi

$$\exists\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\log(|P_n|)+i\theta_n+2\pi i h_n)=\log(|P|)+i\theta+ih_{n_0+1}.$$

Ciò dimostra la convergenza della serie (4.5) e completa la dimostrazione della proposizione. □

Esempio 4.1. Abbiamo $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$. Infatti

$$P_n=\prod_{h=2}^{n}\left(1-\frac{1}{h^2}\right)=\prod_{h=2}^{n}\frac{(h-1)(h+1)}{h^2}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\dots\cdot\frac{(n-2)\cdot n}{(n-1)\cdot(n-1)}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Per la Proposizione 4.3, questo di dà anche

$$\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)=-\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\log(2).$$

Definizione 4.3. Diciamo che il prodotto infinito (4.2) converge *assolutamente*

se possiamo trovare un intero $n_0\geq 0$ tale che $\begin{cases}\mathrm{Re}\,(p_n)>0, & \forall n\geq n_0,\\ \sum_{n=n_0}^{\infty}|\log_+(p_n)|<+\infty.\end{cases}$

Lemma 4.4. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il prodotto infinito $\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ converga assolutamente è che*

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<+\infty. \tag{4.6}$$

DIMOSTRAZIONE. È, per $|z| < 1$,

$$\frac{\log_+(1+z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n+1}$$

e quindi

$$\left|1 - \frac{\log_+(1+z)}{z}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n+1}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n+1} \le \frac{1}{2}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} |z|^n = \frac{|z|}{2(1-|z|)}.$$

Abbiamo perciò, se $|z| < \frac{1}{2}$,

$$\left|1 - \frac{\log_+(1+z)}{z}\right| < \frac{1}{2} \implies \frac{|z|}{2} \le |\log_+(1+z)| \le 2\cdot|z|$$

e da questa osservazione segue la tesi. □

LEMMA 4.5. *Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni olomorfe su un aperto Ω di $\mathbb{C}$ e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge assolutamente ed uniformemente sui compatti di Ω, allora $\prod_{n=0}^{\infty}(1+f_n(z))$ converge per ogni z di Ω ed il prodotto infinito è ancora una funzione olomorfa su Ω.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni aperto ω relativamente compatto in Ω, possiamo trovare un intero positivo n_0 tale che $\|f_n\|_{\bar{\omega}}<1$ per $n \ge n_0$. Per il Lemma 4.4, la serie $\sum_{n=n_0}(1+f_n)$ converge allora uniformemente su $\bar{\omega}$ e, per il teorema di Vitali-Montel (Teorema 5.3 del Cap.IV) la sua somma definisce una funzione olomorfa $g(z)$ su ω. La $\prod_{n=0}^{n_0-1}(1+f_n(z))\cdot e^{g(z)}$ è olomorfa in ω e coincide puntualmente con il prodotto infinito $\prod_{n=0}^{\infty}(1+f_n(z))$ nei punti di $\bar{\omega}$. Poiché possiamo ripetere questo argomento per tutti gli aperti relativamente compatti di Ω, otteniamo la tesi. □

ESEMPIO 4.2. È

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+z^{2^n}\right) = \frac{1}{1-z} \quad \text{se } |z| < 1.$$

Abbiamo infatti

$$P_n = \prod_{h=0}^{n}\left(1+z^{2^h}\right) = \sum\nolimits_{h=0}^{2^{n+1}-1} z^h.$$

Ciò è vero per n=0. Se supponiamo la formula vera per $n \ge 0$, allora

$$P_{n+1} = \left(1+z^{2^{n+1}}\right)\cdot P_n = \left(1+z^{2^{n+1}}\right)\sum\nolimits_{h=0}^{2^{n+1}-1} z^h = \sum\nolimits_{h=0}^{2^{n+1}-1} z^h + \sum\nolimits_{h=0}^{2^{n+1}-1} z^{h+2^{n+1}}$$
$$= \sum\nolimits_{h=0}^{2^{n+2}-1} z^h.$$

Quindi $\lim_{n\to\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ per $|z| < 1$.

4.2. Prodotti canonici.

LEMMA 4.6. *Siano z_0, z_1 due numeri complessi distinti ed indichiamo con $[z_0, z_1]$ il segmento $\{(1-t)z_0 + tz_1 \mid 0\leq y\leq 1\}$. Allora $\log_+\left(\dfrac{z-z_0}{z-z_1}\right)$ è olomorfa su $\mathbb{C}\setminus[z_0, z_1]$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti la $w = \dfrac{z-z_0}{z-z_1}$ trasforma $\mathbb{C}\setminus[z_0, z_1]$ in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. □

LEMMA 4.7. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$. Dati due punti distinti z_0, z_1 in una stessa componente connessa di $\mathbb{C}\setminus\bar{\Omega}$, possiamo trovare una funzione olomorfa g in $\mathscr{O}(\Omega)$ tale che*

$$\exp(g(z)) = \frac{z-z_0}{z-z_1}, \quad \forall z \in \Omega. \tag{4.7}$$

La $g(z)$ è una determinazione del logaritmo di $(z-z_0)/(z-z_1)$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché z_0 e z_1 appartengono alla stessa componente connessa di $\mathbb{C}\setminus\bar{\Omega}$, possiamo trovare una spezzata

$$[z_0, w_1] \cup [w_1, w_2] \cup \cdots \cup [w_{n-1}, w_n] \cup [w_n, z_1] \subset \mathbb{C}\setminus\bar{\Omega}$$

che li congiunge. Possiamo scegliere allora

$$g(z) = \log_+\left(\frac{z-z_0}{z-w_1}\right) + \log_+\left(\frac{z-w_1}{z-w_2}\right) + \cdots + \log_+\left(\frac{z-w_{n-1}}{z-w_n}\right) + \log_+\left(\frac{z-w_n}{z-z_1}\right).$$

Per il Lemma 4.6 ogni addendo, e quindi la somma, è olomorfa su Ω. □

Abbiamo definito sopra la determinazione del logaritmo $\log_+(z) = \log(r) + i\theta$ se $z = r\cdot\exp(i\theta)$ con $r > 0$ e $|\theta|<\pi$. La funzione complessa $\log_+\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$ è allora olomorfa sul disco $D = \{|z|<1\}$ e, per ogni intero positivo s, il suo polinomio di Taylor di grado s in 0 è

$$p_s(z) = z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^s}{s}. \tag{4.8}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}\left|\log\left(\frac{1}{1-z}\right) - p_s(z)\right| &= \left|\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+s+1}}{n+s+1}\right| \leq \frac{|z|^{s+1}}{s+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s+1}{n+s+1}|z|^n \\ &\leq \frac{|z|^{s+1}}{s+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{|z|^{s+1}}{s+1} \cdot \frac{1}{1-|z|}\end{aligned}$$

e quindi

$$\left|\log\left(\frac{1}{1-z}\right) - p_s(z)\right| \leq \frac{1}{s+1} \cdot \frac{R^{s+1}}{1-R}, \quad \forall\, |z| \leq R < 1. \tag{4.9}$$

PROPOSIZIONE 4.8. *Siano s un intero positivo ed $\{a_n\}$ una successione di numeri complessi non nulli per cui*

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} |a_n|^{-1-s} < +\infty. \tag{4.10}$$

Allora il prodotto infinito

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_s\left(\frac{z}{a_n}\right)} \right) \tag{4.11}$$

converge su $\mathbb{C}$ e definisce una funzione intera di genere s, i cui zeri z sono gli a_n, ciascuno con la molteplicità indicata dal numero di indici n per cui $a_n = z$.

DEFINIZIONE 4.4. Chiamiamo (4.11) il *prodotto canonico* associato alla successione $\{a_n\}$ ed al genere s.

DIMOSTRAZIONE. La convergenza della serie (4.10) ci dice che la successione $\{a_n\}$ è divergente. Quindi, fissato $R > 0$, potremo trovare un intero positivo n_0 tale che $|a_n| > 2R$ per $n \geq n_0$. Allora

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left| \log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + p_s\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \leq \frac{1}{s+1} \sum\nolimits_{n=n_0}^{\infty} \frac{(R/|a_n|)^{s+1}}{1 - (R/|a_n|)} \leq \frac{2\,R^{s+1}}{s+1} \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|^{-1-s}$$
$$\text{se } |z| \leq R.$$

Ciò dimostra che il prodotto infinito converge su ogni limitato di $\mathbb{C}$. La funzione intera da esso definita ha le proprietà desiderate. □

TEOREMA 4.9 (Weierstrass). *Ogni funzione intera f di genere finito s si rappresenta in modo unico nella forma*[9]

$$f(z) = z^m \cdot e^{g(z)} \cdot \prod_n \left(\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_s\left(\frac{z}{a_n}\right)} \right), \tag{4.12}$$

ove $m = \mathit{div}(f)(0)$, $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ ed $\{a_n\}$ la successione degli zeri di f in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ripetuti con le loro molteplicità.

DIMOSTRAZIONE. Detto $F(z)$ il prodotto canonico (4.11) associato alla successione degli zeri di f in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ripetuti con le loro molteplicità, la $f(z)/(z^m \cdot F(z))$ è una funzione intera priva di zeri in $\mathbb{C}$ e quindi, per il Lemma 4.1, l'esponenziale di una funzione intera. □

Più in generale, con la stessa dimostrazione fatta nel caso di funzioni di genere finito, vale il

[9]Nota che $g(z)$ è definita univocamente a meno dell'addizione di un multiplo di $2\pi i$.

Teorema 4.10 (Weierstrass). *Sia f una funzione intera, $\{a_n\}$ la successione dei suoi zeri in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, ripetuti con le loro molteplicità. Se $\{s_n\}$ è una successione d'interi non negativi per cui*

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} |a_n|^{-1-s_n} < +\infty, \tag{4.13}$$

allora

$$f(z) = z^m \cdot e^{g(z)} \cdot \prod_n \left(\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_{s_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)} \right), \tag{4.14}$$

ove $m = div(f)(0)$, $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$. □

4.3. Ordine e tipo. Data una funzione intera $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, la

$$M_f(r) = \|f\|_{D_0(r)} = \sup_{|z|<r} |f(z)| \tag{4.15}$$

è, per il principio del massimo modulo, una funzione reale non decrescente su $\mathbb{R}_+ = \{t \geq 0\} \subset R$. Se f non è costante, la M_f è strettamente crescente ed in particolare positiva per $r>0$. Vale il teorema[10]

Teorema 4.11 (Liouville). *Se $M_f(r) \leq cost \cdot (1+r)^\alpha$, per un numero reale $\alpha \geq 0$, allora f è un polinomio di grado minore o uguale alla parte intera di α.*

Dimostrazione. Sia $m \geq 0$ la parte intera di α e $p(z)$ il polinomio di Taylor di grado m di f in z. Poiché la differenza $f(z) - p(z)$ ha in 0 uno zero di ordine $\geq (m+1)$, il quoziente $g(z) = (f(z) - p(z))/z^{m+1}$ ha in 0 una singolarità rimovibile e definisce perciò una funzione intera con $|g(z)| \to 0$ per $z \to \infty$. La $g(z)$ è quindi identicamente nulla e questo ci dice che $f(z) = p(z)$ è un polinomio di grado $\leq m$. □

Definizione 4.5. Chiamiamo *ordine* di una funzione intera non costante f il limite

$$\rho(f) := \limsup_{r \to \infty} \frac{\log(|\log(M_f(r))|)}{\log r} \tag{4.16}$$

Se $\rho(f) = +\infty$, diciamo che f ha *ordine infinito*, se $0 \leq \rho(f) < +\infty$, che ha *ordine finito*.

Se f ha ordine finito $\rho = \rho(f)$, allora per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare un $R_0 \geq 0$ tale che

$$\frac{\log(|\log(M_f(r))|)}{\log r} < \rho + \epsilon, \quad \text{cioè} \quad M_f(r) < e^{r^{\rho+\epsilon}} \quad \forall r > R_0$$

[10] Joseph Liouville (1809-1882), matematico francese, che ha lasciato contributi in analisi complessa, geometria differenziale, fisica matematica e teoria dei numeri. Ha per primo dimostrato l'esistenza di numeri trascendenti.

e, per ogni $R_1 \geq 0$ fissato, un $r' > R_1$ per cui

$$\frac{\log(|\log(M_f(r'))|)}{\log r'} > \rho - \epsilon, \quad \text{cioè} \quad M_f(r') > e^{r'^{\rho-\epsilon}}.$$

Definizione 4.6. Definiamo il *tipo* della funzione intera f, di ordine finito ρ, come il limite

$$\sigma_\rho(f) := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M_f(r)}{r^\rho}. \tag{4.17}$$

Se f è una funzione intera di ordine e tipo finiti ρ, σ, allora

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists cost(\epsilon) > 0 \;\text{ t.c. }\; |f(z)| \leq cost(\epsilon) e^{(\sigma+\epsilon)\cdot|z|^\rho}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

inoltre, possiamo trovare una successione divergente $\{z_n\}$ tale che

$$|f(z_n)| > e^{(\sigma-\epsilon)\cdot|z_n|^\rho}, \quad \forall n.$$

Definizione 4.7. Una funzione intera f di ordine finito ρ si dice di tipo

- *minimale* se $\sigma_\rho(f) = 0$,
- *normale* se $0 < \sigma_\rho(f) < \infty$,
- *massimale* se $\sigma_\rho(f) = \infty$.

Esempio 4.3.
(1) Se n è un intero positivo ed α un numero complesso non nullo, allora $f(z) = e^{\alpha\cdot z^n}$ ha ordine finito n e tipo normale $|\alpha|$.
(2) La funzione
$$\cos(\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{(2n)!}$$
ha ordine $\frac{1}{2}$ e tipo normale 1.
(3) la funzione $f(z) = \exp(\exp(z))$ ha ordine infinito.

Osseriamo che in generale *l'ordine della somma di due funzioni intere è minore o uguale del massimo dei loro ordini*.

Per la costruzione di funzioni intere con ordine e tipo assegnati è importante il seguente teorema.

Teorema 4.12. *Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ lo sviluppo di Taylor in 0 di una funzione intera. Allora*

$$\rho(f) = \limsup_{n\to\infty} \frac{n\cdot \log n}{|\log(|a_n|)|}. \tag{4.18}$$

Inoltre, se f ha ordine ρ finito, allora il tipo $\sigma = \sigma_\rho(f)$ soddisfa la relazione

$$(\sigma\cdot\rho\cdot e)^{1/\rho} = \limsup_{n\to\infty} \left[n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|} \right]. \tag{4.19}$$

Dimostrazione. Indichiamo con ℓ il secondo membro di (4.18).

Supponiamo che f abbia ordine finito ρ. Se $\tau > \rho$, allora possiamo trovare una costante $cost_\tau > 0$ tale che

$$M_f(r) < cost_\tau \cdot \exp(r^\tau), \quad \forall r \in \mathbb{R}_+.$$

Abbiamo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}$$

e quindi si ottiene la diseguaglianza di Cauchy

$$(4.20) \qquad |a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(r\,e^{i\theta}) r e^{i\theta}}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} \right| d\theta \leq \frac{M_f(r)}{r^n},$$

da cui ancora si ha

$$|a_n| < cost_\tau \cdot \frac{\exp(r^\tau)}{r^n}, \quad \forall r \geq 0$$

da cui, passando ai logaritmi,

$$\log(|a_n|) < \log(cost_\tau) + r^\tau - n \cdot \log(r).$$

La funzione a secondo membro ha un minimo quando

$$\tau \cdot r^{\tau-1} - \frac{n}{r} = 0, \quad \text{cioè per} \quad r = \left(\frac{n}{\tau}\right)^{1/\tau}.$$

Otteniamo allora

$$\log(|a_n|) < \log(cost_\tau) + \frac{n}{\tau} - \frac{n}{\tau}(\log(n) - \log(\tau)),$$

da cui

$$|\log(|a_n|)| > -cost_\tau + \frac{n \cdot \log(n) - n - n \cdot \log(\tau)}{\tau}$$

da cui otteniamo che

$$\ell = \limsup_{n\to\infty} \frac{n \cdot \log(n)}{|\log(|a_n|)|} \leq \tau.$$

Poiché questo vale per tutti i $\tau > \rho$, otteniamo la diseguaglianza $\ell \leq \rho$.

Supponiamo viceversa che

$$\ell = \limsup_{n\to\infty} \frac{n \cdot \log(n)}{|\log(|a_n|)|} < \infty.$$

Allora, per ogni $\tau > \ell$, possiamo trovare un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n| < 1, \quad \tau \cdot |\log(|a_n|)| > n \cdot \log(n), \quad \text{cioè} \quad |a_n| < n^{-n/\tau}, \quad \text{per } n \geq n_0.$$

È

$$M_f(r) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n \leq \sum\nolimits_{n=0}^{n_0} |a_n| \cdot r^n + \sum\nolimits_{n=n_0+1}^{\infty} n^{-n/\tau} r^n.$$

Per ogni $r > 0$ indichiamo con m_r la parte intera di $2{\cdot}r^\tau$. Allora $r{\cdot}n^{-1/\tau} \leq \frac{1}{2}$ per $n > m_r$ e quindi

$$M_f(r) \leq 2 + \sum_{n=o}^{n_0} |a_n|{\cdot}r^n + \sum_{n=n_0+1}^{m_r} n^{-n/\tau} r^n.$$

Se $r \geq 1$, otteniamo allora

$$M_f(r) \leq 2 + r^{n_0} \left(\sum_{n=0}^{n_0} |a_n| \right) + r^{2\cdot r^\tau} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n/\tau} \right).$$

Se $\tau' > \tau$, è $r^{2\cdot r^\tau} < \exp(r^{\tau'})$ se $r \gg 1$. Otteniamo così, con una costante $C_{\tau'} > 0$,

$$M_f(r) \leq C_{\tau'} \exp(r^{\tau'}), \quad \forall r > 0.$$

Da

$$\frac{\log(\log(M_f(r)))}{\log r} \leq \frac{\log(r^{\tau'} + \log(C_{\tau'})}{\log r}$$

e questo ci dice che $\rho(f) \leq \tau'$ e dunque, poiché τ' è un qualsiasi numero reale maggiore di ℓ, che $\rho = \rho(f) \leq \ell$.

Questo completa la dimostrazione della (4.18).

Supponiamo che f abbia ordine finito $\rho > 0$. Se ha tipo finito σ, allora per ogni $A > \sigma$ possiamo trovare una costante C_A tale che

$$M_f(r) \leq C_A{\cdot} \exp(A{\cdot}r^\rho), \quad \forall r \geq 0.$$

Per la maggiorazione di Cauchy,

$$|a_n| \leq C_A \frac{\exp(A{\cdot}r^\rho)}{r^n}, \quad \forall n.$$

Calcolando i logaritmi di ambo i membri otteniamo

$$\log(|a_n|) \leq \log(C_A) + A{\cdot}r^\rho - n \log r, \quad \forall r \geq 0.$$

Il secondo membro di questa diseguaglianza ha minimo per

$$\rho A r^{\rho-1} - \frac{n}{r} = 0, \quad \text{cioè} \quad r = \left(\frac{n}{r{\cdot}A} \right)^{1/\rho}.$$

Sostituendo otteniamo

$$\log(|a_n|) \leq \log(C_A) + A{\cdot}\frac{n}{\rho{\cdot}A} - \frac{n{\cdot}\log(n)}{\rho} + \frac{n{\cdot}\log(\rho{\cdot}A)}{\rho},$$

da cui

$$\log\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \leq \frac{\log(C_A)}{n} + \frac{1}{\rho}\left(1 - \log(n) + \log(\rho) + \log(A)\right),$$

che ci dà

$$n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \exp\left(\frac{\log(C_A)}{n} + \log(A^{1/\rho}) + \frac{1 + \log \rho}{\rho} \right).$$

Passando al limite per $n \to \infty$, otteniamo che

$$\limsup_{n\to\infty} \left[n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|}\right] \le (A{\cdot}\rho{\cdot}e)^{1/\rho}.$$

Questa vale per tutti gli $A > \sigma$ ed abbiamo perciò la maggiorazione

$$\limsup_{n\to\infty} \left[n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|}\right] \le (\sigma{\cdot}\rho{\cdot}e)^{1/\rho}.$$

Supponiamo ora che $L = \limsup_{n\to\infty} \left[n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|}\right] < \infty$. Se $A > L$, potremo fissare un numero naturale n_0 per cui

$$n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|} < A, \quad \text{cioè} \quad |a_n| < A^n{\cdot}n^{-n/\rho}, \quad \text{per } n \ge n_0.$$

Allora

$$M_f(r) \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|{\cdot}r^n \le \sum_{n=0}^{n_0} |a_n|{\cdot}r^n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (Ar)^n{\cdot}n^{-n/\rho}.$$

Se n è maggiore o uguale della parte intera μ_r di $(2Ar)^\rho$, allora $(A{\cdot}r{\cdot}n^{-1/\rho}) < \frac{1}{2}$. Otteniamo perciò

$$M_f(r) \le 2 + \sum_{n=0}^{\mu_r} |a_n|{\cdot}r^n.$$

Consideriamo, per $r > 0$ fissato, la funzione reale positiva

$$\phi(t) = (Ar)^t{\cdot}t^{-t/\rho}, \quad \text{definita per } t > 0.$$

È

$$\log(\phi(t)) = t{\cdot}\log(Ar) - \frac{t}{r}\log(t).$$

Questa ha limite 0 sia per $t \to 0^+$ e $-\infty$ per $t \to \infty$. La sua derivata

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \log(Ar) - \frac{1 + \log(t)}{\rho}$$

è una funzione decrescente e quindi la $\phi(t)$ un unico massimo interno, per

$$\log(t) = \rho{\cdot}\log(Ar) - 1, \quad \text{cioè} \quad t = e^{-1}{\cdot}(Ar)^\rho.$$

Sostituendo, otteniamo

$$M_f(r) \le 2 + (2Ar)^\rho{\cdot}\exp\left(\frac{(Ar)^\rho}{e{\cdot}\rho}\right), \quad \text{per } r \gg 1$$

e quindi

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log(M_f(r))}{r^\rho} \le \frac{A^\rho}{e{\cdot}\rho}.$$

Quindi f è di tipo finito σ, con $\sigma{\cdot}\rho{\cdot}e \le A^\rho$ per tutti gli $A > L$. Da questo segue che vale anche la diseguaglianza opposta $(\sigma{\cdot}\rho{\cdot}e) \le L^\rho$ e quindi la (4.19). La dimostrazione è completa. □

Esempio 4.4. Applicando la (4.18) alla funzione intera di ordine uno $\exp(z)$, otteniamo il limite notevole

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot \log(n)}{\log(n!)} = 1.$$

Infatti

$$\frac{n\cdot \log(n)}{\log(n!)} > 1, \quad \forall n \geq 2 \Longrightarrow 1 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{n\cdot \log(n)}{\log(n!)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{n\cdot \log(n)}{\log(n!)} = 1$$

implica che il limite esiste ed è uguale ad uno.

La (4.18), applicata ancora alla funzione esponenziale complessa, ci permette di ricavare un altro limite notevole. Poiché il *tipo* di $z \mapsto \exp(z)$ è uno, abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

La (4.18) ci dice che e è il limite superiore della successione a primo membro. Che ne sia effettivamente il limite, si può ricavare dalla *formula di Stirling*[11]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n \cdot e^{-n}}{n!} = 1. \tag{4.21}$$

Esempio 4.5. Fissati due numeri reali positivi ρ, σ, la serie

$$f(z) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sigma\cdot\rho\cdot e}{n}\right)^{n/\rho} \cdot z^n$$

definisce una funzione intera, di ordine ρ e di tipo σ.

5. La funzione Gamma

La funzione $z \mapsto \sin(\pi z)$ è intera ed ha zeri semplici sugli interi. Per il teorema di rappresentazione di Weiestrass, possiamo fattorizzarla, utilizzando il prodotto canonico. Otteniamo l'espressione

$$\sin(\pi z) = z \cdot e^{g(z)} \prod_{n\in\mathbb{Z}_*} \left[\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}\right],$$

per una funzione $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$. Calcolando la derivata logaritmica dei due membri dell'uguaglianza, troviamo che

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n\in\mathbb{Z}_*} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

[11]James Stirling (1692-1770), matmatico scozzese. La formula è contenuta nel suo libro *Methodus Differentialis* del 1730. La formula fu enunciata ed utilizzata nello stesso periodo anche dal matematico francese Abraham de Moivre (1667-1754)

Confrontando con lo sviluppo di Mittag-Leffler (2.2) della cotangente, ricaviamo che $g'(z) \equiv 0$. Quindi g è costante e, poiché $\lim_{z\to 0}(\sin(\pi z)/z) = \pi$, è $e^g = \pi$. Abbiamo ottenuto la formula

$$\sin(\pi z) = \pi\cdot z\cdot \prod_{n\in\mathbb{Z}_*}\left[\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}\right] = \pi\cdot z\cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \tag{5.1}$$

Il prodotto canonico

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right]. \tag{5.2}$$

definisce una funzione intera con zeri semplici negli interi negativi $-1, -2, -3, \ldots$ ed abbiamo, per (5.1),

$$z\cdot G(z)\cdot G(-z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}.$$

Le funzioni intere $G(z-1)$ e $z\cdot G(z)$ hanno gli stessi zeri semplici. Avremo dunque, per una $\gamma \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$,

$$G(z-1) = z\cdot e^{\gamma(z)}\cdot G(z).$$

Calcoliamo le derivare logaritmiche dei due membri di quest'uguaglianza. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{G'(z-1)}{G(z-1)} &= \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n}-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Poiché la serie numerica all'ultimo addendo converge ad 1, è $\gamma' \equiv 0$, la γ è cioè una costante e vale la formula

$$G(z-1) = z\cdot e^{\gamma}\cdot G(z), \quad \forall z\in\mathbb{C}.$$

Posto $H(z) = e^{\gamma z}\cdot G(z)$, otteniamo

$$H(z-1) = z\cdot H(z), \quad \forall z\in\mathbb{C}.$$

La costante γ si può ricavare dalla relazione

$$1 = G(0) = e^{\gamma}G(1) = e^{\gamma}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-1/n}\right]$$

da cui

$$e^{-\gamma} = \lim_{n\to\infty} \prod_{h=1}^{n} \left(\frac{h+1}{h} \cdot e^{-1/h} \right) = \lim_{n\to\infty} \left[(n+1) \exp\left(-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} \right) \right]$$

onde[12], calcolando i logaritmi,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(-\log n + \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h} \right) \simeq 0,5772156649....$$

(COSTANTE DI EULERO-MASCHERONI).

Insieme a π ed alla base e dei logaritmi naturali, la γ forma la cosiddetta "santa trinità" delle costanti matematiche. Mentre è nota la trascendenza delle prime due, il problema dell'algebricità o trascendenza della γ è ancora aperto.

Ci sarà utile nel seguito un'espressione della γ per mezzo di un integrale definito. A questo scopo, osserviamo che

$$\sum\nolimits_{h=1}^{n} \frac{1}{h} = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t} dt = \int_0^n \left[1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right] \frac{dt}{t} \quad \text{e quindi}$$

$$\sum\nolimits_{h=1}^{n} \frac{1}{h} - \log(n) = \int_0^n \left[1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right] \frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^1 \left[1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right] \frac{dt}{t} - \int_1^n \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \frac{dt}{t}, \quad \text{da cui, passando al limite,}$$

$$\gamma = \int_0^1 (1-e^{-t}) \frac{dt}{t} - \int_1^\infty \frac{e^{-t}dt}{t} = \lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_\epsilon^1 \frac{dt}{t} - \int_\epsilon^\infty \frac{e^{-t}dt}{t} \right)$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_{1-e^{-\epsilon}}^\infty \frac{e^{-s}ds}{1-e^{-s}} - \int_\epsilon^\infty \frac{e^{-t}dt}{t} \right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t} dt.$$

Abbiamo così ottenuto la rappresentazione

$$\boxed{\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t} dt} \tag{5.3}$$

DEFINIZIONE 5.1. Definiamo la *funzione Gamma* come la funzione meromorfa

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n} \right)^{-1} e^{z/n} \right] = \frac{1}{z \cdot H(z)} = \frac{1}{H(z-1)}. \tag{5.4}$$

[12] Lorenzo Mascheroni (1750-1800), matematico italiano, ha calcolato la costante nel 1790.

Utilizzando i risultati precedenti per le funzioni $G(z)$ ed $H(z)$ si ricavano facilmente le formule seguenti.

$$\begin{aligned}
&\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z),\\
&\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},\\
&\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\\
&\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi},\\
&\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right),\\
&\frac{d}{dz}\left[\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}.
\end{aligned}$$

Proposizione 5.1 (Eulero). *Abbiamo, per $z \neq 0, -1, -2, \dots$,*

(5.5)
$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right\}, \quad \textit{cioè} \quad \Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\cdot n^{z}.$$

Dimostrazione. Utilizzando la definizione della costante γ, abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)} &= z\cdot e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right] = z\cdot\lim_{n\to\infty} e^{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n))z}\left\{\lim_{n\to\infty}\prod_{h=1}^{n}\left[\left(1+\frac{z}{h}\right)e^{-\frac{z}{h}}\right]\right\}\\
&= z\cdot\lim_{n\to\infty}\left\{e^{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n))z}\prod_{h=1}^{n}\left[\left(1+\frac{z}{h}\right)e^{-\frac{z}{h}}\right]\right\} = z\cdot\lim_{n\to\infty}\left[n^{-z}\prod_{h=1}^{n}\left(1+\frac{z}{n}\right)\right]\\
&= z\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\prod_{h=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{-z}\prod_{h=1}^{n}\left(1+\frac{z}{n}\right)\right] = z\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\prod_{h=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{1}{h}\right)^{-z}\left(1+\frac{z}{n}\right)\right\}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\right],
\end{aligned}$$

da cui segue la formula di Eulero (5.5). $\square$

Possiamo utilizzare la (5.5) per dedurre le formule di moltiplicazione per la funzione gamma.

Proposizione 5.2 (Gauss-Legendre). *Per ogni intero positivo n vale la formula*

$$(2\pi)^{(n-1)/2} n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz) = \Gamma(z)\cdot\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) \tag{5.6}$$

Dimostrazione. Utilizzando l'espressione della $\Gamma(z)$ come limite nella (5.5), si verifica che

$$\phi(z) = \frac{n^{nz}\cdot\Gamma(z)\cdot\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)}{n\cdot\Gamma(nz)}$$

è costante. Il suo valore è quindi quello che essa assume per $z = \frac{1}{n}$. Otteniamo così

$$\phi(z) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Longrightarrow (\phi(z))^2 = \prod_{h=1}^{n-1}\left(\Gamma\left(\frac{h}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{h}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{\pi^{n-1}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)} = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}.$$

Da questa si ricava la tesi, utilizzando il prodotto notevole (5.7), perché $\phi(z) > 0$.

Abbiamo

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{1}{[2i]^{n-1}}\prod_{h=1}^{n-1}\left(e^{h\pi i/n} - e^{-h\pi i/n}\right)$$
$$= \frac{1}{[2i]^{n-1}}\left(\prod_{h=1}^{n-1} e^{ih\pi/n}\right)\cdot\left(\prod_{h=1}^{n-1}\left(1-e^{-2h\pi i/n}\right)\right).$$

Abbiamo

$$\prod_{h=1}^{n-1} e^{h\pi i/n} = \exp\left(i\frac{\pi}{n}\sum_{h=1}^{n-1} h\right) = \exp(\pi i(n-1)/2) = i^{n-1}.$$

Poiché i numeri complessi $\exp(2h\pi i/n)$, al variare di h tra 1 ed $n-1$ sono le radici n-esime diverse da 1 dell'unità, il prodotto $\prod_{h=1}^{n-1}\left(z - e^{-2h\pi i/n}\right)$ è il polinomio $\dfrac{1-z^n}{1-z}$. Il suo valore nel punto 1 è uguale a quello della derivata in 1 di $z \mapsto z^n$, cioè n. Otteniamo in questo modo il prodotto notevole

$$\prod_{h=1}^{n-1}\sin\left(\frac{h\pi}{n}\right) = \frac{1}{[2i]^{n-1}}\cdot i^{n-1}\cdot n = \frac{n}{2^{n-1}}. \tag{5.7}$$ □

Proposizione 5.3 (Gauss). *Vale la rappresentazione integrale*

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right)dt, \quad \textit{per}\ \mathrm{Re}\,(z) > 0. \tag{5.8}$$

Dimostrazione. Poiché

$$\frac{1}{z+n} = \int_0^\infty e^{-t(z+n)}dt, \quad \text{se } \mathrm{Re}\,(z+n) > 0,$$

utilizzando la rappresentazione della γ della (5.3), abbiamo, se $\mathrm{Re}\,(z) > 0$,

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right) = -\gamma - \int_0^\infty e^{-zt}dt + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty\left(e^{-nt} - e^{-(n+z)t}\right)dt$$

$$= -\gamma - \int_0^\infty e^{-zt}dt + \int_0^\infty (1-e^{-zt})\cdot\sum\nolimits_{n=1}^\infty e^{-nt}dt$$

$$= -\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)e^{-t}dt - \int_0^\infty e^{-zt}dt + \int_0^\infty (1-e^{-zt})\cdot\frac{e^{-t}dt}{1-e^{-t}}$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right)dt.$$

□

Ricaviamo ora le formule di Binet[13] per lo studio dell'andamento asintotico della funzione Γ per $\operatorname{Re}(z) \mapsto +\infty$.

Lemma 5.4. *Se* $\operatorname{Re}(z) > 0$, *allora*

$$\int_0^{+\infty} (e^{-t} - e^{-z\cdot t})\,\frac{dt}{t} = \log(z). \tag{5.9}$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$\int_0^{+\infty} (e^{-t} - e^{-z\cdot t})\,\frac{dt}{t} = \lim_{\substack{r\to 0^+\\ \mathbb{R}\to\infty}} \left[\int_r^R \frac{e^{-t}\,dt}{t} - \int_r^R \frac{e^{-z\cdot t}dt}{t}\right]$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0^+\\ \mathbb{R}\to\infty}} \left[\int_r^R \frac{e^{-t}\,dt}{t} - \int_{rz}^{Rz} \frac{e^{-t}dt}{t}\right] = \lim_{\substack{r\to 0^+\\ \mathbb{R}\to\infty}} \left[\int_r^{rz} \frac{e^{-t}\,dt}{t} - \int_R^{Rz} \frac{e^{-t}dt}{t}\right],$$

perché la funzione $\zeta \mapsto e^{-\zeta}/\zeta$ è analitica dentro il rettangolo di vertici r, rz, Rz, R. Chiaramente, il secondo integrale dentro le parentesi quadre dell'ultimo membro delle uguaglianze tende 0 per $R \mapsto +\infty$ e $\operatorname{Re}(z) > 0$. Per quanto riguarda il primo,

$$\int_r^{rz} \frac{e^{-t}dt}{t} = \int_r^{rz} \frac{dt}{t} - \int_r^{rz} \frac{(1-e^{-t})dt}{t} = \log(z) + 0(r).$$

Passando al limite per $r \mapsto 0^+$, otteniamo la tesi. □

Utilizzando la rappresentazione di Gauss (5.8), otteniamo, per $\operatorname{Re}(z) > 0$,

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}e^{-t}}{1-e^{-t}}\right)dt = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{e^t-1}\right)dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{t}\right)dt + \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t-1}\right)e^{-zt}dt$$

$$= \frac{1}{2z} + \log(z) - \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right)e^{-z\cdot t}dt,$$

[13] Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856), matematico francese noto anche per i suoi contributi alla teoria dei determinanti. Questi risultati relativi alla funzione *Gamma* furono pubblicati nel 1839.

ove abbiamo utilizzato la (5.9) ed il fatto che $\int_0^\infty e^{-zt}dt = (1/z)$ se $\mathrm{Re}\,(z) > 0$. Integrando da 1 a z sotto il segno d'integrazione (lungo ad esempio il cammino $\tau \mapsto (1+\tau(z-1))$ otteniamo allora, poiché $\Gamma(2)=1$,

$$\log(\Gamma(z+1)) = \left(z + \frac{1}{2}\right) - z + 1 + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) \frac{e^{-tz} - e^{-t}}{t}\, dt.$$

Poiché $\log(\Gamma(z+1)) = \log(z \cdot \gamma(z)) = \log(\Gamma(z)) + \log(z)$, otteniamo

$$\log(\Gamma(z)) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log(z) - z + 1 + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) \frac{e^{-z\cdot t}}{dt}$$
$$- \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) \frac{e^{-t}}{dt}$$

Per calcolare l'ultimo integrale a secondo membro, poniamo

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) \frac{e^{-t}}{dt}, \quad J = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right) \frac{e^{-t/2}}{dt},$$

dimodoché

$$\log\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\log(\pi) = \frac{1}{2} + J - I.$$

Poiché

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{t} + \frac{1}{e^{t/2} - 1}\right) \frac{e^{-t/2}}{dt},$$

otteniamo

$$J - I = \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{t/2}}{e^t - 1}\right) \frac{e^{-t/2}dt}{t} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t/2}}{t} - \frac{1}{e^t - 1}\right) \frac{dt}{t},$$

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t/2}}{t} - \frac{1}{e^t - 1} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{e^{-t}}{t} + \frac{e^{-t}}{e^t - 1}\right) \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t/2} - e^{-t}}{t} - \frac{1}{2}e^{-t}\right) \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty \left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-t/2} - e^{-t}}{t}\right) - \frac{\frac{1}{2}e^{-t/2} - e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2t}\right] dt \\
&= \left[-\frac{e^{-t/2} - e^{-t}}{t}\right]_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-t/2}}{t} dt \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Otteniamo allora

$$I = 1 - \frac{1}{2}\log(2\pi)$$

e ciò dimostra che vale il seguente teorema di Binet

Teorema 5.5 (Binet). *Se* $\mathrm{Re}(z) > 0$, *vale la formula di rappresentazione*
(5.10)
$$\log(\Gamma(z)) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \cdot \log(z) + z - \frac{1}{2}\log(2\pi) + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right)\frac{e^{-z\cdot t}}{t}dt,$$
con
$$\left|\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right)\frac{e^{-z\cdot t}}{t}dt\right| < cost\cdot(\mathrm{Re}\,(z))^{-1}, \quad per\ \mathrm{Re}\,(z) > 0. \tag{5.11}$$

Dimostrazione. La funzione $\phi(t) = ([1/2] - [1/t] + 1/(e^t - 1))/t$ tende ad $\frac{1}{6}$ per $t \mapsto 0$ ed a 0 per $t \mapsto +\infty$. È quindi limitata in valore assoluto da una costante postiva $cost$ su $[0, +\infty)$. Abbiamo allora
$$\left|\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right)\frac{e^{-z\cdot t}}{t}dt\right| < \int_0^\infty cost \cdot e^{-\mathrm{Re}\,(z)\cdot t}dt = cost\cdot(\mathrm{Re}\,(z))^{-1}. \quad \square$$

Osservazione 5.6. Vale la formula di duplicazione[14] di Legendre
$$\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z + \tfrac{1}{2}).$$

Si può anche introdurre la funzione Γ per mezzo della rappresentazione integrale di Eulero[15], descritta dal seguente

Teorema 5.7 (Eulero-Legendre). *Vale la formula*
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \quad se\ \mathrm{Re}\,(z) > 0. \tag{5.12}$$

Dimostrazione. Consideriamo l'integrale
$$\Pi(z, n) := \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = n^z \int_0^1 (1 - t)^n t^{z-1}dt, \quad \text{per } \mathrm{Re}(z) > 0.$$
Mediante integrazione per parti otteniamo, se $n > 1$,
$$Int(z, n) := \int_0^1 (1 - t)^n t^{z-1}dt = \left[\frac{1}{z}t^z(1-t)^n\right]_0^1 + \frac{n}{z}\int_0^1 (1-t)^{n-1}t^z = \frac{n}{z}Int(z+1, n-1).$$
Otteniamo allora per ricorrenza che
$$\begin{aligned} Int(z, n) = \int_0^1 (1 - t)^n t^{z-1}dt &= \frac{n(n - 1)\cdots 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\int_0^1 t^{z+n-1}dt \\ &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \end{aligned}$$

[14]Adrien-Marie Legendre (1752-1833), matematico francese, che ha dato contributi importanti alla teoria delle equazioni differenziali, delle funzioni speciali, della teoria dei numeri. Ha dato il nome di "funzione gamma" alla funzione meromorfa qui descritta.

[15]Leonhard Euler (1707-1783), svizzero, è considerato il maggior matematico dell'illuminismo.

È perciò

$$\Pi(z,n) = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} \cdot n^z.$$

Per la (5.8), il secondo membro di questa uguaglianza converge a $\Gamma(z)$ per $n\mapsto\infty$, mentre il primo converge al secondo membro di (5.12). Ciò completa la dimostrazione. □

Nota che, integrando per parti, abbiamo

$$(*) \qquad \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt = z^{-1}\left[t^z e^{-t}\right]_0^\infty + \frac{1}{z}\int_0^\infty t^z e^{-t}dt.$$

Utilizzando per la Γ la definizione (5.12) per $\operatorname{Re}(z) > 0$, poiché il primo addendo a secondo membro della $(*)$ è nullo, otteniamo la relazione funzionale

$$\Gamma(z+1) = z\cdot\Gamma(z).$$

Questa formula permette di estendere olomorficamente la Γ a tutto il piano complesso tranne che sui numeri interi non positivi, e mostra che negli interi non positivi la $\Gamma(z)$ ha poli semplici. Si ricava ancora facilmente che

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = -\left[e^{-t}\right]_0^\infty = 1,$$

da cui $\Gamma(n) = (n-1)!$ Abbiamo poi (utilizzando la sostituzione $t = s^2$)

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt = 2\int_0^\infty e^{-s^2}ds.$$

Poiché

$$\left(\int_0^\infty e^{-s^2}ds\right)^2 = \tfrac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \tfrac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2}dr^2 = \frac{\pi}{4},$$

si ottiene in questo modo

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

CAPITOLO VI

Rappresentazioni conformi

Due domini Ω, Ω' di $\mathbb{C}$ si dicono *conformi* o *biolomorficamente equivalenti* se esiste un'applicazione olomorfa invertibile $f : \Omega \to \Omega'$.

Abbiamo dimostrato, nel §6 del Cap.IV, che ogni dominio connesso e semplicemente connesso Ω di $\mathbb{C}$ con $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ è conforme al disco unitario $\mathrm{D} = \{|z|<1\}$.

1. Alcuni esempi

1.1. La lente (intersezione di due dischi). Siano dati due dischi D_1, D_2, i cui contorni si intersechino in due punti distinti w_0, w_1, formando un angolo $k\pi$, con $0 < k < 1$. Sia $\Omega = \mathrm{D}_1 \cap \mathrm{D}_2$. La trasformazione di Möbius

$$\mathfrak{z} = e^{i\theta} \frac{w - w_0}{w - w_1},$$

per una scelta opportuna dell'angolo $\theta \in \mathbb{R}$, trasforma Ω in un angolo Ω' di ampiezza $k\pi$, con vertice in 0 ed un lato sul semiasse reale positivo.

Su Ω' possiamo definire la funzione olomorfa

$$\zeta = \mathfrak{z}^{1/k}$$

in modo che ζ sia un numero reale positivo per $\mathfrak{z}$ reale e positivo. Quando $\mathfrak{z}$ descrive l'angolo Ω', ζ descrive il semipiano positivo $\mathrm{H} = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \zeta > 0\}$.

La trasformazione di Möbius

$$z = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$$

trasforma H nel disco $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Componendo quindi le diverse applicazioni, abbiamo trovato un'applicazione conforme $w \mapsto z$ di Ω sul disco D.

1.2. Sia Ω il dominio ottenuto togliendo da un disco D_1 la chiusura $\overline{\mathrm{D}_2}$ di un disco D_2 ad esso tangente internamente in un punto $w_0 \in \partial\mathrm{D}_1 \cap \partial\mathrm{D}_2$.

Una trasformazione di Möbius della forma

$$\mathfrak{z} = \frac{\alpha w + \beta}{w - w_0}$$

fa corrispondere ad Ω una striscia Ω', compresa tra due rette parallele. Scegliendo α e β in modo opportuno possiamo fare in modo che

$$\Omega' = \{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}(\mathfrak{z}) < \pi\}.$$

La trasformazione esponenziale

$$\zeta = e^{\mathfrak{z}}$$

manda allora Ω' nel semipiano di Poincaré $\mathrm{H} = \{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$, e questo si trasforma in modo conforme nel disco D mediante la $z = \dfrac{\zeta - i}{\zeta + i}$.

1.3. Lo spicchio. Siano $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2$ due dischi le cui frontiere si intersechino in due punti distinti w_1, w_2 e sia $\Omega = \mathrm{D}_1 \backslash \overline{\mathrm{D}}_2$. Fissiamo un punto w_0 in $\mathrm{D}_2 \backslash \overline{\mathrm{D}}_1$. Allora la trasformazione di Möbius:

$$w' = \frac{1}{w - w_0}$$

trasforma D_1 in un nuovo disco D_1' e $\mathbb{CP}^1 \backslash \overline{\mathrm{D}}_2$ in un disco D_2', la cui frontiera interseca quella di D_1' in due punti distinti $w_i' = 1/(w_i - w_0)$. La $w \to w'$ è quindi una trasformazione conforme dello spicchio Ω sulla lente $D_1' \cap D_2'$; questa (vedi 1.1) è conformemente equivalente al disco D.

2. Funzioni univalenti sul disco

I domini connessi e semplicemente connessi Ω di $\mathbb{C}$ distinti da $\mathbb{C}$ sono biolomorfi al disco D. L'inversa di un biolomorfismo $\Omega \mapsto \mathrm{D}$ è una funzione univalente su D. Qindi, lo studio delle applicazioni conformi di domini di $\mathbb{C}$ sul disco porta in modo naturale a considerare la classe delle funzioni univalenti su D. Uno dei vantaggi di questo approccio è che una funzione univalente su D si esprime mediante una serie di potenze con centro in 0 e possiamo quindi mettere in relazione le proprietà della funzione con il dato numerico dei coefficienti della serie.

Definizione 2.1. Si dicono *univalenti* le funzioni olomorfe iniettive.

Teorema 2.1 (Teorema dell'area). *Sia*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2.1}$$

la serie di Taylor in 0 *di una funzione* f, *definita e univalente sul disco di centro* 0 *e raggio* R. *Allora*

$$Area(f(\mathrm{D}_0(R)) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(n\,|a_n|^2 R^{2n}\right). \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Per le formule di cambiamento di variabili negli integrali doppi abbiamo (indicando con $d\lambda$ la misura di Lebesgue del piano)

$$\begin{aligned}\text{Area}(f(\mathrm{D}_0(R)) &= \iint_{\mathrm{D}_0(R)} |f'(z)|^2 d\lambda(z)\\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} m\cdot n\cdot a_n \bar{a}_m \int_0^R r^{n-m-1}\cdot dr \int_0^{2\pi} a_n\cdot \bar{a}_m \cdot e^{i(n-m)\theta} d\theta\\ &= 2\pi \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \int_0^R r^{2n-1} dr = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(n\,|a_n|^2\, R^{2n}\right),\end{aligned}$$

perché le funzioni $(2\pi)^{-1/2}e^{ni\theta}$ formano un sistema ortonormale in $L^2(0, 2\pi)$.
□

Notazione 2.2. Indicheremo con

$$\mathcal{S}(\mathrm{D}) = \{f \in \mathscr{O}(\mathrm{D}) \mid f \text{ è univalente ed } f(0) = 0,\ f'(0) = 1\} \tag{2.3}$$

la famiglia delle funzioni univalenti nel disco D=$\{|z|<1\}$ che mandano 0 in 0 ed hanno nell'origine derivata 1.

Le funzioni f di $\mathcal{S}(\mathrm{D})$ hanno nell'origine una serie di Taylor della forma

$$f(z) = z + \sum\nolimits_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \tag{2.4}$$

convergente per $|z|<1$. In particolare,

Corollario 2.3. *Vale la formula*

$$Area(f(\mathrm{D})) = \pi\cdot\left(1 + \sum\nolimits_{n=2}^{\infty} n\cdot|a_n|^2\right),\ \forall f\in\mathcal{S}(\mathrm{D}),\ \textit{con } a_n{=}f^{(n)}(0)/n!. \tag{2.5}$$
□

Notazione 2.4. Indichiamo con $\check{\mathrm{D}} = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|>1\}$ il complemento del disco chiuso unitario e con

$$\Sigma(\check{\mathrm{D}}) = \{f \in \mathscr{O}(\check{\mathrm{D}}) \mid f \text{ è univalente ed } \exists \lim_{z\to\infty} z^{-1}\cdot f(z) = 1\} \tag{2.6}$$

lo spazio delle funzioni meromorfe su $\mathbb{CP}^1\backslash\bar{\mathrm{D}}$ che sono olomorfe su $\mathbb{C}\backslash\bar{\mathrm{D}}$ ed hanno all'infinito un polo semplice con parte principale z.

Le $f \in \Sigma(\check{\mathrm{D}})$ hanno, nell'anello $A_0(1,\infty)$, uno sviluppo di Laurent

$$f(z) = z + \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \tag{2.7}$$

convergente per $|z|>1$.

Lemma 2.5. (a) *Se* $f \in \mathcal{S}(\mathrm{D})$, *allora* $g(z) = 1/f(1/z) \in \Sigma(\check{\mathrm{D}})$.
(b) *Se* $g \in \Sigma(\check{\mathrm{D}})$, *allora* $g(\check{\mathrm{D}}) \neq \mathbb{C}$.
(c) *Se* $g \in \Sigma(\check{\mathrm{D}})$ *e* $\mathbb{C}\ni w_0 \notin g(\check{\mathrm{D}})$, *allora* $f(z) = 1/(g(1/z)-w_0) \in \mathcal{S}(\mathrm{D})$.

Dimostrazione. (a) Se $f \in \mathcal{S}(\mathrm{D})$, allora $f(1/z)$ è definita e univalente in $\check{\mathrm{D}}$ ed ha in ∞ uno zero semplice, con $f(1/z) - (1/z) = 0(1/z^2)$. Da questo segue che $g = 1/f(1/z) \in \Sigma(\check{\mathrm{D}})$.

(b) Una $g \in \Sigma(\check{\mathrm{D}})$ definisce un omeomorfismo di $\check{\mathrm{D}}$ con l'immagine $g(\check{\mathrm{D}})$. In particolare, questa non è semplicemente connessa e non può quindi essere uguale a $\mathbb{C}$.

(c) Se $g \in \Sigma(\check{D})$ e w_0 un numero complesso che non appartiene a $g(\check{\mathrm{D}})$, allora la $f(z) = 1/(g(1/z)-w_0)$ definisce una funzione univalente sul disco D. Da

$$g(1/z) = (1/z) + \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

otteniamo che

$$\frac{1}{g(1/z)-w_0} = \frac{1}{-w_0+(1/z)+\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n} = \frac{z}{1+(b_0-w_0)z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n+1}} = z+0(z^2)$$

e quindi $f(z) = 1/(g(1/z)-w_0) \in \mathcal{S}(\mathrm{D})$. □

Teorema 2.6 (Gronwall[1]). *Se* $g = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \in \Sigma(\check{\mathrm{D}})$, *allora*

$$\operatorname{Area}(\mathbb{C}\setminus g(\check{\mathrm{D}})) = \pi\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot|b_n|^2\right). \tag{2.8}$$

Dimostrazione. Per ogni $r>1$ sia $\Omega_r = \mathbb{C}\setminus g(\bar{B}_0(r))$. L'elemento di volume su $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2_{x,y}$ è $dx\wedge dy = \frac{i}{2} dz\wedge d\bar{z} = \frac{i}{2} d(z\cdot d\bar{z})$. Per la formula di Green abbiamo allora

$$\operatorname{Area}(\Omega_r) = \frac{i}{2}\iint_{\Omega_r} dz\wedge d\bar{z} = \frac{i}{2}\oint_{\partial\Omega_r} z\cdot d\bar{z}.$$

Poniamo $z = g(\zeta) = g(r\,e^{i\theta})$ su $\partial\Omega_r$. Poiché

$$g(r\,e^{i\theta}) = r\,e^{i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-n}\,e^{-in\theta},$$

abbiamo

$$\frac{dg(r\,e^{i\theta})}{d\theta} = ire^{i\theta} - i\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} n\,b_n r^{-n}\,e^{-in\theta}.$$

Allora

$$\begin{aligned}\operatorname{Area}(\Omega_r) &= \frac{i}{2}\oint_{\partial\Omega_r} z\cdot d\bar{z} = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} g(r\,e^{i\theta})\cdot d\,\overline{g(r\,e^{i\theta})}\\ &= \frac{i}{2}\int_0^{2\pi}\left(r\,e^{i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-n}\,e^{-in\theta}\right)\cdot\left(-ire^{-i\theta} + i\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} n\,\bar{b}_n r^{-n}\,e^{+in\theta}\right)d\theta\end{aligned}$$

[1]Thomas Hakon Grönwall (1077-1932), matematico e fisico svedese-americano (cambiò il cognome in Gronwall). Dimostrò questo teorema dell'area nel 1914.

$$= \pi \left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |\, b_n|^2 \cdot r^{-2n} \right)$$

perché le funzioni $(2\pi)^{-1/2}$ e $\pi^{-1/2} e^{in\theta}$ per $n \in \mathbb{Z}_*$ formano un sistema ortonormale in $L^2(0, 2\pi)$. Passando al limite per $r \to 1^-$ otteniamo la tesi. □

Corollario 2.7. *Se* (2.7) *è lo sviluppo di Laurent nell'anello* $A_0(1, \infty)$ *di una* $g \in \Sigma(\check{\mathrm{D}})$, *allora* $|b_n| \leq n^{-1}$ *per ogni* $n \geq 1$.

Dimostrazione. Ciò è conseguenza della formula (2.8) e del fatto che l'area di $\mathbb{C} \backslash g(\check{\mathrm{D}})$ è ≥ 0. □

Teorema 2.8 (Bieberbach[2]). *Se* (2.4) *è la serie di Taylor nell'origine di una* $f \in \mathcal{S}(\mathrm{D})$, *allora*

$$|a_2| \leq 2.$$

Dimostrazione. È $f(z^2) = z^2 \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{2n-2}\right)$ ed il secondo fattore è diverso da zero per $|z| < 1$ perché la f è univalente su D. Possiamo allora definire la radice quadrata

$$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \tfrac{1}{2} a_2 z^3 + \cdots$$

che è una funzione dispari, perché lo sviluppo di Taylor in 0 di $f(z^2) = [F(z)]^2$ non contiene termini non nulli di grado dispari. Dico che F è univalente. Infatti, se fosse $F(z_1) = F(z_2)$ per una coppia di punti distinti z_1, z_2 in D, poiché f è univalente, dovrebbe essere $z_1^2 = z_2^2$. Quindi $z_2 = \pm z_1$. Poiché F è dispari, se fosse $z_2 = -z_1$, dovrebbe essere $F(z_1) = F(z_2) = F(-z_1) = -F(z_1)$ e quindi, da $F(z_1) = 0$ seguirebbe che $f(z_1^2) = 0$, da cui $z_1 = z_2 = 0$.

Quindi $F(z) \in \mathcal{S}(\mathrm{D})$ e di conseguenza, per il Lemma 2.5, abbiamo $g(z) = [1/f(1/z)] \in \Sigma(\check{\mathrm{D}})$. Poiché

$$g(z) = \cfrac{1}{\cfrac{1}{z} + \cfrac{1}{2} a_2 \cfrac{1}{z^3} + \cdots} = z - \frac{1}{2} a_2 \cdot \frac{1}{z} + \cdots,$$

per il Torema di Gronwald (Teorema 2.6) è $\left|\frac{1}{2} \cdot a_2\right| \leq 1$ e dunque $|a_2| \leq 2$. □

Il teorema seguente mostra che la diseguaglianza ottenuta è la migliore possibile.

Teorema 2.9. *Se* (2.4) *è la serie di Taylor nell'origine di una* $f \in \mathcal{S}(\mathrm{D})$ *e* $|a_2| = 2$, *allora*

$$f(z) = K_\theta(z) := \frac{z}{(1 + z \cdot e^{i\theta})^2}, \quad \text{con } \theta \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

[2]Ludwig Georg Elias Moses Bieberbach (1886-1982), analista complesso tedesco.

Dimostrazione. Sia infatti $g(z) \in \Sigma(\check{\mathrm{D}})$ la funzione associata ad f come nella dimostrazione del Teorema 2.8. Abbiamo osservato che allora la serie di Laurent di $g(z)$ nell'anello $A_0(1, \infty)$ è la

$$g(z) = z - \frac{a_2}{2} \cdot \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^{-n}.$$

Per il Torema di Gronwald (Teorema 2.6)

$$\frac{|a_2|^2}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot |b_n|^2 \leq 1.$$

Quindi, se $|a_2| = 2$, tutti i coefficienti b_n con $n \geq 2$ sono nulli e dunque

$$g(z) = z - \frac{e^{i\theta}}{z}, \quad \text{con } \theta \in \mathbb{R}.$$

Allora, continuando ad usare la notazione introdotta nella dimostrazione del Teorema 2.8, abbiamo

$$F(z) = \frac{1}{g(1/z)} = \frac{z}{1 - z^2 \cdot e^{i\theta}} = \sqrt{f(z^2)} \Longrightarrow f(z^2) = \frac{z^2}{(1 - z^2 \cdot e^{i\theta})^2}$$
$$\Longrightarrow f(z) = \frac{z}{(1 - z \cdot e^{i\theta})^2}$$

(a meno di cambiare θ in $\pi + \theta$). In effetti, la $f(z)$ della forma (2.9) è una funzione di $\mathcal{S}(\mathrm{D})$ la cui serie di Taylor (2.4) ha $|a_2| = \left|2 \cdot e^{i\theta}\right| = 2$.

Verfichiamo l'univalenza. Se $z_1, z_2 \in \mathrm{D}$ ed $h_\theta(z_1) = h_\theta(z_2)$, allora

$$z_1 \cdot \left(1 - z_2 \cdot e^{i\theta}\right)^2 = z_2 \cdot \left(1 - z_1 \cdot e^{i\theta}\right)^2 \Longleftrightarrow z_1 + z_1 z_2^2 \cdot e^{2i\theta} = z_2 + z_1^2 z_2 \cdot e^{2i\theta}$$
$$\Longleftrightarrow (z_1 - z_2)\left(1 - z_1 z_2 \cdot e^{2i\theta}\right) = 0$$

e l'ultima uguaglianza non può valere se $z_1 \neq z_2$ quando $|z_1 z_2| < 1$. □

Osservazione 2.10. Le funzioni K_θ introdotte nel Teorema 2.9 si dicono *funzioni di Koebe*. È

$$K_\theta(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2} = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} n\, e^{i(n-1)\theta} z^n, \quad (\theta \in \mathbb{R}). \tag{2.10}$$

Per le funzioni di Koebe vale $|a_n| = n$ per ogni intero positivo n. Bieberbach aveva congetturato che, se $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}$, allora $|a_n| \leq n$ per ogni intero positivo n. Questa congettura, formulata nel 1916, è stata dimostrata vera nel 1985 da Louis De Branges[3].

Utilizzando il teorema precedente, possiamo dimostrare il

---

[3] *A proof of the Bieberbach conjecture.* Acta Math. **154** (1985), no. 1-2, 137-152.

Teorema 2.11 (Teorema di distorsione di Bieberbach). *Se* $f \in \mathcal{S}(\mathrm{D})$*, allora valgono le diseguaglianze:*

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \quad \forall z \in \mathrm{D}, \tag{2.11}$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1+|z|)^3}, \quad \forall z \in \mathrm{D}. \tag{2.12}$$

Dimostrazione. Fissato $z_0 \in \mathrm{D}$,. la funzione $g(z) = f\left(\dfrac{z+z_0}{1+z\bar{z}_0}\right)$ è univalente su D e abbiamo:

$$g(z) = f(z_0) + f'(z_0)(1-z_0\bar{z}_0)z + \frac{1}{2}\left(f''(z_0)(1-z_0\bar{z}_0)^2 - 2f'(z_0)(1-z_0\bar{z}_0)\bar{z}_0\right)z^2 + o(z^2)\,.$$

Quindi $h(z) = \dfrac{g(z)-f(z_0)}{f'(z_0)(1-z_0\bar{z}_0)} \in \mathcal{S}(\mathrm{D})$. Consideriamo il suo sviluppo di Taylor $h(z) = z + \alpha_2 z^2 + \cdots$. Poiché

$$\alpha_2 = \frac{f''(z_0)(1-z_0\bar{z}_0)}{2f'(z_0)} - \bar{z}_0,$$

per la diseguaglianza di Bieberbach risulta

$$|\alpha_2| = \left|\frac{f''(z_0)(1-z_0\bar{z}_0)}{2f'(z_0)} - \bar{z}_0\right| \leq 2\,.$$

Da questa ricaviamo:

$$\left|\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}z_0 - \frac{2z_0\bar{z}_0}{1-z_0\bar{z}_0}\right| \leq \frac{4|z_0|}{1-z_0\bar{z}_0}\,.$$

Da questa relazione, considerando la parte reale del numero complesso di cui a primo membro si calcola il modulo, e scrivendo z invece di z_0, otteniamo:

$$\frac{2|z|^2-4|z|}{1-|z|^2} \leq \mathrm{Re}\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \leq \frac{2|z|^2+4|z|}{1-|z|^2}, \quad \forall z \in \mathrm{D}\,.$$

Osserviamo ora che

$$\mathrm{Re}\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) = r\frac{d}{dr}\log|f'(z)|, \quad \text{ove si è posto } z = r\,e^{i\theta},$$

e dunque:

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{d}{dr}\log\left|f'\left(r\,e^{i\theta}\right)\right| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}\,.$$

Integrando sull'intervallo $0 \leq r \leq |z|$, troviamo:

$$\log\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq \log|f'(z)| \leq \log\frac{1+|z|}{(1+|z|)^3}$$

da cui segue la (2.12). Per dimostrare la (2.11), usiamo l'integrazione:

$$|f(z)| = \left|\int_0^z f'(z)\,dz\right| \leq \int_0^{|z|} \frac{1+r}{(1-r)^3} dr = \frac{|z|}{(1-|z|)^2}\,.$$

□

Dal teorema di distorsione di Bieberbach segue immediatamente il

Teorema 2.12 (di compattezza di Koebe). *$\mathcal{S}(\mathrm{D})$ è compatto in $\mathscr{O}(\mathrm{D})$.* □

Il teorema seguente, congetturato nel 1907 da Koebe[4], fu dimostrato da Bieberbach[5] nel 1916.

Teorema 2.13 (Koebe, Bieberbach). *Se $f \in \mathcal{S}(\mathrm{D})$, allora $f(\mathrm{D}) \supseteq B_0(\frac{1}{4})$.*

Dimostrazione. Se w_0 è un numero complesso che non appartiene all'immagine $f(\mathrm{D})$, allora

$$F(z) = \frac{w_0 f(z)}{w_0 - f(z)} \in \mathcal{S}(\mathrm{D}).$$

Se (2.4) è la serie di Taylor di f in 0, allora

$$F(z) = \frac{w_o z + \sum_{n=2}^{\infty} w_0 a_n z^n}{w_0 - z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n} = z + \left(a_2 + \frac{1}{w_0}\right) \cdot z^2 + \cdots$$

Per il Teorema 2.8 deve essere quindi

$$\left|a_2 + \frac{1}{w_0}\right| \leq 2 \Longrightarrow \left|\frac{1}{w_0}\right| \leq 2 + |a_2|.$$

Poiché, sempre per il Teorema 2.8, è $|a_2| \leq 2$, otteniamo la tesi. □

Corollario 2.14. *Sia $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ una funzione olomorfa, univalente su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Siano $z_0 \in \Omega$ e $w_0 = f(z_0)$. Allora, posto $r = \frac{1}{4}|f'(z_0)| \cdot \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$, abbiamo $f(\Omega) \supset B(w_0, r) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - w_0| < r\}$.*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema di Koebe-Bieberbach alla funzione

$$g(z) = \frac{f(z_0 + z \cdot \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega))}{f'(z_0) \cdot \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega))}.$$

□

[4]Paul Koebe (1882-1945), matematico tedesco: ha dimostrato tra il 1907 e il 1909 il teorema di uniformizzazione di Riemann.

[5]Ludwig Georg Elias Moses Bieberbach (1886-1982), matematico tedesco, attivo soprattutto in analisi complessa. La h_θ sopra introdotta è detta *funzione di Koebe*. Formulò una congettura sulle serie di Taylor per le funzioni univalenti che fu risolta da Louis de Branges de Bourcia(1932–), matematico franco-americano, nel 1986.

3. Metrica iperbolica su domini di $\mathbb{C}$

Il teorema di uniformizzazione di Riemann ci permette di estendere i risultati del §3 del Cap. IV ai domini connessi e semplicemente connessi $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$.

Osserviamo che, se f_1, f_2 sono biolomorfismi di Ω sul disco D, allora $f_1 \circ f_2^{-1}$ è biolomorfa dal disco in sé ed è quindi la restrizione di una trasformazione di Möbius del disco. In particolare, se ω è la distanza della metrica di Poincaré del disco,

$$\mathrm{d}_\Omega(z_1, z_2) = \omega(f_i(z_1), f_i(z_2)) \tag{3.1}$$

non dipende dalla scelta del biolomorfismo f_i. Indicando con $g_{\mathrm{D}} = \dfrac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$ la metrica di Poincaré, la metrica corrispondente

$$g_\Omega = f_i^* g_{\mathrm{D}} = \frac{4|f_i'(z)|^2|dz|^2}{(1-|f_i(z)|^2)^2} = \eta_\Omega^2(z) \cdot |dz|^2 \tag{3.2}$$

non dipende dalla scelta di f_i ed è una metrica invariante per biolomorfismi di Ω in sé.

Definizione 3.1. Chiamiamo g_Ω *metrica iperbolica*, o *di Poincaré* di Ω.

Se f è un qualsiasi biolomorfismo di Ω su D, abbiamo posto

$$\boxed{\eta_\Omega(z) = \frac{2|f'(z)|}{(1-|f(z)|^2)}, \qquad ds^2 = \eta_\Omega^2\, dz\, d\bar{z}} \tag{3.3}$$

Lemma 3.1 (di comparazione). *Se $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subsetneqq \mathbb{C}$ sono due aperti connessi e semplicemente connessi, allora*

$$\eta_{\Omega_1}(z) \geq \eta_{\Omega_2}(z), \quad \forall z \in \Omega_1, \tag{3.4}$$

e vale la diseguaglianza stretta se $\Omega_1 \subsetneqq \Omega_2$.

Dimostrazione. Siano $f_i : \Omega_i \to$ D biolomorfismi. Allora $f_2 \circ f_1^{-1}$ è un'applicazione olomorfa univalente di D in D e quindi, per il teorema di Pick (Teorema 3.2)

$$\frac{|(f_2 \circ f_1^{-1})'(z)|}{1 - |f_2 \circ f_1(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}, \quad \forall z \in \mathrm{D}.$$

Posto $f_1^{-1}(z) = w$, otteniamo allora

$$\frac{|f_2'(w)|/|f_1'(w)|}{1-|f_2(w)|^2} \leq \frac{1}{1-|f_1(w)|^2},$$

da cui otteniamo che

$$\eta_{\Omega_2}(w) \leq \eta_{\Omega_1}(w), \quad \forall w \in \Omega_1.$$

Nota che, se fosse $\eta_{\Omega_2}(w_0) \leq \eta_{\Omega_1}(w_0)$ per qualche $w_0 \in \Omega_1$, sempre per il teorema di Pick avremmo $\eta_{\Omega_2}(w) = \eta_{\Omega_1}(w)$ per ogni $w \in \Omega_1$ e quindi $\Omega_2 = \Omega_1$. □

TEOREMA 3.2. *Se* Ω *è un dominio di* $\mathbb{C}$ *conformemente equivalente a* D*, allora*

$$\frac{1}{4}\,[\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)]^{-1} \leq \eta_\Omega(z) \leq 2\,[\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)]^{-1}\ . \tag{3.5}$$

DIMOSTRAZIONE. Siano δ=dist$(z,\partial\Omega)$ ed $f : \Omega \to$ D un'applicazione conforme. Allora la $g(\zeta)=f(z+\delta\zeta)$ è un'applicazione olomorfa di D in sé. Per il teorema di Pick (Teorema 3.2 del Cap.IV) abbiamo $|g'(0)|/(1-|g(0)|^2)\leq 1$, da cui $\delta|f'(z)|/(1-|f(z)|^2) \leq 1$ e quindi otteniamo la diseguaglianza:

$$\eta_\Omega(z) \leq 2\,[\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)]^{-1}\ .$$

Sia ora $g :$ D$\to\Omega$ un'applicazione biolomorfa con $g(z_0) = 0$. Allora la $G(z) = (g(z) - z_0)/g'(0)$ appartiene alla classe $\mathcal{S}$(D) e quindi per il Teorema di Koebe dist$(0,\partial G(\mathrm{D})) \geq \frac{1}{4}$. È poi $\eta_\Omega(z_0) = 1/|g'(0)|$ ed abbiamo $\liminf_{|z|\to 1} |G(z)| = \mathrm{dist}(z_0,\partial\Omega)/|g'(0)| \geq \frac{1}{4}$.

La dimostrazione è completa. □

4. Un teorema di compattezza

Un risultato fondamentale per lo studio delle trasformazioni conformi di domini di $\mathbb{C}$ è il seguente:

TEOREMA 4.1 (Teorema di compattezza di Koebe). *Sia* Ω *un dominio connesso e semplicemente connesso di* $\mathbb{C}$ *e sia* z_0 *un punto di* Ω*. Allora l'insieme*

$$\mathcal{S}_{z_0}(\Omega) = \{f \in \mathscr{O}(\Omega) \mid f \text{ è univalente, } f(z_0)=0 \text{ ed } f'(z_0)=1\} \tag{4.1}$$

è compatto in $\mathscr{O}(\Omega)$*.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo osservato che, come conseguenza del teorema di distorsione di Bieberbach (Teorema 2.11), il teorema di compattezza vale quando Ω=D e z_0=0. Fissiamo ora numeri reali positivi a, b, B, r, con $b < B$. È chiaro allora che, per ogni $z \in \mathbb{C}$, l'insieme E delle funzioni olomorfe sul disco $\mathrm{D}_z(r) = \{\zeta\in\mathbb{C} \mid |\zeta - z|<r\}$, tali che $|f(z)|\leq a$, $b\leq|f'(z)|\leq B$, è compatto in $\mathscr{O}(\mathrm{D}_z(r))$. Ricopriamo ora Ω con una successione di dischi $\{\mathrm{D}_{z_i}(r_i)\}_{i=0,1,\ldots}$, il primo dei quali con centro in z_0. Fissato un qualsiasi indice n, poiché Ω è connesso, possiamo trovare degli indici $i_1,\ldots,i_m$ tali che, posto $i_0 = 0$, sia $z_{i_j}\in\mathrm{D}_{z_{i_{j-1}}}(r_{i_{j-1}})$ per ogni $j = 1,\ldots,m$ e $i_m = n$. Per

la compattezza dello spazio delle funzioni olomorfe f su $\mathrm{D}_{z_i}(r_i)$ che soddisfino delle stime uniformi per $f(z_i)$ ed $f'(z_i)$, deduciamo per ricorrenza l'esistenza di numeri reali positivi a_n, b_n, B_n tali che

$$|f(z_n)| \leq a_n \quad \text{e} \quad b_n \leq |f'(z_n)| \leq B_n \qquad \forall f \in \mathcal{S}_{z_0}(\Omega)\,.$$

Ne segue che la restrizione $\mathcal{S}_{z_0}(\Omega) \ni f \to f\big|_{B(z_n,r_n)} \in \mathscr{O}(\mathrm{D}_{z_n}(r_n))$ ha per ogni intero n immagine relativamente compatta. Ciò implica che $\mathcal{S}_{z_0}(\Omega)$ è relativamente compatto in $\mathscr{O}(\Omega)$. Infine, $\mathcal{S}_{z_0}(\Omega)$ è compatto in $\mathscr{O}(\Omega)$ per il teorema di Hurwitz sul limite di successioni di funzioni univalenti. □

5. Regolarità al bordo

Siano Ω un dominio di $\mathbb{C}$ e $z_0 \in \partial\Omega$. Diciamo che Ω è *localmente connesso in* z_0 se esiste una successione di intorni aperti $\{U_n\}$ di z_0 in $\mathbb{C}$ tale che, per ogni intero positivo n, l'aperto $U_n \cap \Omega$ sia connesso.

Esempio 5.1. Il dominio $\Omega = \{z{=}x{+}iy{\in}\mathbb{C}\,|\,x,y{\in}\mathbb{R},\ \ x{>}0,\ \ y{<}\sin^2(1/x)\}$ *non è* localmente connesso in $0 \in \partial\Omega$.

Teorema 5.1 (Caratheodory-Osgood[6]). *Siano Ω_1, Ω_2 due aperti limitati non vuoti, connessi, semplicemente connessi e localmente connessi in ogni punto delle loro frontiere. Allora ogni applicazione conforme $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ si estende a un omeomorfismo $\tilde{f} : \overline{\Omega}_1 \to \overline{\Omega}_2$ delle loro chiusure.*

In particolare, ogni aperto connesso Ω di $\mathbb{C}$ che sia connesso, semplicemente connesso, localmente connesso in ogni punto della frontiera e limitato, ha per frontiera una curva chiusa di Jordan.

Dimostrazione. Possiamo limitarci a considerare il caso in cui Ω_1 sia il disco unitario D. Scriviamo per semplicità Ω al posto di Ω_2. Dimostriamo in primo luogo che un'applicazione conforme f di D su Ω è uniformemente continua. Se non lo fosse, ci sarebbe un punto $\mathfrak{z}{\in}\overline{\mathrm{D}}$ e due successioni $\{z_n\}, \{w_n\}$ di punti di D, entrambe convergenti a $\mathfrak{z}$, con $|f(z_n){-}f(w_n)|{\geq}2\epsilon > 0$ per ogni n. Il punto $\mathfrak{z}$ appartiene alla frontiera $\mathbf{S}^1$ di D. Per ogni $r{>}0$ indichiamo con γ_r l'arco di circonferenza $\{z \mid |z{-}\mathfrak{z}|{=}\epsilon\}{\cap}\mathrm{D}$. La composizione $f{\circ}\gamma_r$ è un arco in Ω, di lunghezza

$$\ell(f{\circ}\gamma_r) = \int_{\gamma_r} |f'(z)|{\cdot}|dz| \leq \left(\int_{\gamma_r} |dz|\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{|\mathfrak{z}+re^{i\theta}|<1\}} |f'(\mathfrak{z} + r{\cdot}e^{i\theta})r\, d\theta\right)^{1/2}$$
$$\leq (2\pi r)^{1/2} \cdot \left(\int_{|\mathfrak{z}+re^{i\theta}|<1\}} |f'(\mathfrak{z} + r{\cdot}e^{i\theta})r\, d\theta\right)^{1/2}$$

[6] William Fogg Osgood (1864-1943), analista complesso americano. Ha congetturato questo teorema nel 1901.

Moltiplicando per r^{-1} ed integrando rispetto ad r otteniamo (indicando con λ la misura di Lebesgue nel piano)

$$\int_0^1 [\ell(f\circ\gamma_r)]^2 \frac{dr}{r} \leq \int_0^1 r^{-1}(2\pi r)\cdot \int_{|\mathfrak{z}+re^{i\theta}|<1\}} |f'(\mathfrak{z}+r\cdot e^{i\theta})r\,d\theta$$
$$\leq 2\pi \int_{\mathrm{D}} |f'(z)|d\lambda(z) = 2\pi\cdot \mathrm{Area}(\Omega) < +\infty.$$

Quindi l'integrale a primo membro ha somma finita e perciò vi è una successione infinitesima $\{r_n\}$ di numeri reali positivi per cui $\ell(f\circ\gamma_{r_n})$ sia infinitesima. In particolare, le curve $f\circ\gamma_{r_n}$ hanno punti limite a_n, b_n ai due estremi con $|a_n-b_n| \leq \ell(f\circ\gamma_{r_n}) \mapsto 0$. A meno di passare ad una sottosuccessione, possiamo allora supporre che le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergano ad uno stesso punto $\mathfrak{w} \in \partial\Omega$. Poiché le lunghezze delle curve $f\circ\gamma_{r_n}$ sono infinitesime, avremo allora $\mathrm{dist}(\mathfrak{w}, |f\circ\gamma_{r_n}|) \mapsto 0$. Per l'ipotesi che Ω sia localmente connesso in $\mathfrak{w}$, vi è una successione fondamentale di intorni aperti $\{U_n\}$ di $\mathfrak{w}$ in $\mathbb{C}$ tali che $U_n\cap\Omega$ sia connesso per ogni indice n. Fissato un indice ν, possiamo trovare n_ν tale che $|f\circ\gamma_{r_n}| \subset U_\nu$ se $n \geq n_\nu$. Dico che allora $f(\mathrm{D}_\mathfrak{z}(r_n)\cap\mathrm{D}) \subset U_\nu$. Infatti, $f(\mathrm{D}_\mathfrak{z}(r_n)\cap\mathrm{D})$ è un connesso di Ω contenuto in $\Omega\setminus|f\circ\gamma_n|$ che contiene punti di U_ν e qualsiasi arco i cui punti interni stiano in Ω e che connetta $\mathfrak{w}$ ad un punto fuori da U_ν interseca il supporto di $f\circ\gamma_n$. Questo ci dice che gli U_ν contengono i punti z_n, w_n per $n \gg 1$ e dimostra quindi che la f si estende ad una applicazione continua di $\bar{\mathrm{D}}$ su $\bar{\Omega}$, uniformemente continua perché i due insiemi sono compatti. □

Un dominio Ω di $\mathbb{C}$ si dice *localmente semplicemente connesso* in un punto z_0 della sua frontiera $\partial\Omega$ se esiste un sistema fondamentale $\{U_n\}$ di intorni aperti di z_0 in $\mathbb{C}$ tali che $U_n\cap\Omega$ sia un aperto connesso e semplicemente connesso. Vale il

Teorema 5.2. *Siano Ω_1, Ω_2 due domini di $\mathbb{C}$. Supponiamo che Ω_2 sia localmente semplicemente connesso in ogni punto $z \in \partial\Omega_2$, e sia $a \in \partial\Omega_1$ un punto della frontiera di Ω_1 in cui Ω_1 è localmente semplicemente connesso. Allora, se $f : \Omega_1\to\Omega_2$ è un'applicazione conforme, esiste un intorno aperto U di a in $\mathbb{C}$ e un intorno aperto V di $f(a)$ in $\mathbb{C}$, tali che la f si estende a un omeomorfismo $\tilde{f} : \Omega_1 \cup \left(U\cap\overline{\Omega}_1\right)\to\Omega_2\cup\left(V\cap\overline{\Omega}_2\right)$.* □

6. Il principio di riflessione di Schwarz

Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e z_0 un punto della sua frontiera.

Definizione 6.1. Diciamo che una funzione $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ *si estende olomorficamente su z_0* se esistono un intorno aperto connesso U di z_0 in $\mathbb{C}$ e una funzione $\tilde{f} \in \mathscr{O}(U)$ tale che $\tilde{f} = f$ su un aperto non vuoto $U' \subset U\cap\Omega$.

Esempio 6.1. Sia $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ e consideriamo una determinazione del logaritmo definita su $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, ad esempio quella caratterizzata da:

$$df = dz/z, \qquad f(1) = 0\,.$$

Allora la f ammette un'estensione olomorfa sopra ogni punto di $\mathbb{R}^- = \partial\Omega$, ma non esiste un aperto $\tilde{\Omega}$ che contenga propriamente Ω tale che vi sia una $\tilde{f} \in \mathscr{O}(\tilde{\Omega})$ con $\tilde{f}|_{\Omega} = f$.

Il principio di riflessione di Schwarz[7], riguarda l'estendibilità di funzioni olomorfe. Esso si basa sul seguente

Lemma 6.1. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e $|\gamma| \subset \Omega$ il sostegno di una curva semplice continua $\gamma \in \mathscr{C}^0((a,b),\Omega)$. Allora una funzione f, continua su Ω ed olomorfa su $\Omega \setminus |\gamma|$, è olomorfa su Ω.*

Dimostrazione. Utilizzando il teorema di Cauchy, si verifica immediatamente che $f(z)dz$ è una forma differenziale chiusa su Ω, con la possibile eccezione dei punti estremi di $|\gamma|$. La f è perciò olomorfa in Ω, con l'eccezione al più degli estremi di $|\gamma|$. Essendo per ipotesi continua in tutto Ω, essa risulta olomorfa in tutto Ω per il teorema sulle singolarità eliminabili. $\square$

Corollario 6.2. *Siano Ω un aperto connesso di $\mathbb{C}$ e $\gamma \in \mathscr{C}^0((a,b),\Omega)$ una curva semplice. Se $f \in \mathscr{O}(\Omega \setminus |\gamma|) \cap \mathscr{C}^0(\Omega)$ si annulla in tutti i punti del supporto di γ, allora f è identicamente nulla in Ω.*

Dimostrazione. Per il Lemma 6.1, una $f \in \mathscr{O}(\Omega \setminus |\gamma|) \cap \mathscr{C}^0(\Omega)$ è olomorfa in tutti i punti di Ω. La tesi segue dal fatto che una funzione olomorfa non nulla su un connesso ha solo zeri isolati. $\square$

Una curva $\gamma \in \mathscr{C}^\infty((-\epsilon,\epsilon),\mathbb{C})$ è *analitica reale in* 0 se, in un intorno di 0, è uguale alla somma della sua serie di Taylor; se cioè, per un ϵ' con $0 < \epsilon' \leq \epsilon$,

$$\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\gamma^{(n)}(0) \cdot t^n, \quad \text{per } |t| < \epsilon'.$$

In particolare, sull'intervallo $(-\epsilon', \epsilon')$ la γ è la restrizione della funzione

$$g(\mathfrak{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\gamma^{(n)}(0) \cdot \mathfrak{z}^n \in \mathscr{O}(\mathrm{D}_0(\epsilon')),$$

olomorfa sul disco $\mathrm{D}_0(\epsilon') = \{|\mathfrak{z}| < \epsilon'\}$. Se la γ è *regolare* in 0, se cioè $\gamma'(0) \neq 0$, allora la g è univalente su un disco $\mathrm{D}_0(\delta)$, per un numero reale $\delta \in (0, \epsilon']$ e definisce quindi un biolomorfismo di $\mathrm{D}_0(\delta)$ su un intorno aperto U_{z_0} di

[7] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) matematico tedesco, attivo soprattutto in analisi complessa.

$z_0=\gamma(0)$. Poiché $D_0(\delta)$ è trasformato in sé dal coniugio, possiamo definire un'involuzione antiolomorfa di U_{z_0} in sé ponendo

$$R_\gamma : U_{z_0} \ni z \longrightarrow g\left(\overline{g^{-1}(z)}\right) \in U_{z_0}. \tag{6.1}$$

Osserviamo che $R_\gamma^2 =$ identità su U e che la R_γ è univocamente determinata dal supporto di γ, in quanto è l'unica funzione antiolomorfa in U che sia l'identità sul supporto di γ. Abbiamo ottenuto:

Proposizione 6.3. *Se γ è un arco analitico regolare aperto in $\mathbb{C}$ con supporto $|\gamma|$ possiamo trovare un suo intorno aperto U in $\mathbb{C}$ ed un'involuzione antiolomorfa $R_\gamma:U\to U$ che si restringa all'identità su $|\gamma|$. La R_γ è essenzialmente unica, nel senso che due tali involuzioni coincidono sulla componente connessa di $|\gamma|$ dei rispettivi domini di definizione.* □

Dal Lemma 6.1 e dalla Proposizione 6.3 ricaviamo il

Teorema 6.4 (Principio di riflessione di Schwarz). *Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e γ, γ' due archi analitici regolari aperti di $\mathbb{C}$, con $|\gamma| \subset \partial\Omega$.*
Se $f \in \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\Omega \cup |\gamma|)$ ed $f(|\gamma|) \subset |\gamma'|$, allora f si estende olomorficamente sopra ogni punto di $|\gamma|$.

Dimostrazione. Indichiamo con R_γ ed $R_{\gamma'}$ le riflessioni rispetto ad un punto z_0 di $|\gamma|$ ed al corrispondente punto $z_0'=f(z_0)$ di $|\gamma'|$, definite negli intorni U_{z_0} ed $U'_{z_0'}$, rispettivamente. Allora la

$$\tilde{f}(z) = R_{\gamma'}\left(f\left(R_\gamma(z)\right)\right)$$

definisce l'estensione di f nell'intersezione di un intorno di z_0 con $U_{z_0}\setminus\overline{\Omega}$. □

Corollario 6.5. *Siano Ω un dominio in $\mathbb{CP}^1$, simmetrico rispetto all'inversione rispetto a una circonferenza κ di $\mathbb{CP}^1$, A uno dei due aperti connessi in cui κ divide $\mathbb{CP}^1$ ed $\Omega' = A \cap \Omega$. Sia $f \in \mathscr{O}(\Omega') \cap \mathscr{C}^0(\Omega' \cup (\kappa \cap \Omega))$. Se $f(\kappa \cap \Omega)$ è tutta contenuta in una circonferenza κ' di $\mathbb{CP}^1$, allora f si estende a una $\tilde{f} \in \mathscr{O}(\Omega)$.* □

In modo analogo (utilizzando l'integrale di Poisson invece dell'integrale di Cauchy) si dimostra il:

Teorema 6.6 (Principio di riflessione di Schwarz per le funzioni armoniche). *Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e γ una curva analitica regolare aperta, con supporto contenuto nella frontiera $\partial\Omega$ di Ω. Se u è armonica in Ω, continua su $\Omega \cup |\gamma|$ e $u(z) = 0$ per ogni $z \in |\gamma|$, allora u si estende armonicamente sopra ogni punto di $|\gamma|$.* □

Applicando il principio di riflessione di Schwarz, otteniamo:

Teorema 6.7. *Sia $f : \Omega \to \mathbb{D}$ un'applicazione conforme di un dominio semplicemente connesso di $\mathbb{C}$ sul disco unitario. Se $\partial\Omega$ è analitica in un punto $z_0 \in \partial\Omega$, allora f si continua olomorficamente sopra z_0.*

Dimostrazione. Fissiamo un intorno aperto U di z_0 in $\mathbb{C}$ con le proprietà: (*i*) $f^{-1}(0) \notin U$; (*ii*) su U è definita l'inversione σ rispetto all'arco analitico $\partial\Omega$; (*iii*) $U \cap \bar{\Omega}$ è diffeomorfo a un semidisco; (*iv*) U è diffeomorfo a un disco. Allora la funzione $\log|f(z)|$ è definita e armonica su $U \cap \Omega$ e tende a zero quando $z \to U \cap \partial\Omega$. Per il principio di riflessione di Schwarz per le funzioni armoniche, $\log|f(z)|$ si estende a una funzione armonica u definita in U. Ne segue che, scelta una determinazione del $\log(f(z))$ su $U \cap \Omega$, essa si estende in modo unico a una funzione olomorfa su U, e quindi anche f si estende olomorficamente a tutto U. $\square$

7. Applicazioni conformi di domini poligonali

Sia Ω un dominio piano, semplicemente connesso, limitato da una spezzata polinomiale di vertici $a_1, a_2, \ldots, a_k$, con angoli interni $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \ldots, \pi\alpha_k$ (con $0<\alpha_i<2$ per $i=1,2,\ldots,k$).

Per il teorema di Riemann esiste un'applicazione conforme F:$\mathrm{H}\to\Omega$ del semipiano di Poincaré $\mathrm{H}=\{\mathrm{Im}\,(z)>0\}$ su Ω. Per il Teorema di Caratheodory-Osgood, la F si estende a un'applicazione continua $\tilde{F} : \overline{\mathrm{H}} \to \overline{\Omega} \setminus \{p\}$, ove p è il punto di $\overline{\Omega}$ corrispondente al punto all'infinito di $\overline{\mathrm{H}}$.

Supponiamo per il momento che nessuno dei vertici di Ω sia immagine del punto all'infinito. Possiamo allora trovare numeri reali

$$A_1 < A_2 < \cdots < A_k \tag{7.1}$$

tali che $\tilde{F}(A_i) = a_i$ per $i = 1, 2, \ldots, k$.

Per il principio di riflessione di Schwarz, $\tilde{F}$ si estende in modo olomorfo in un intorno aperto W di $\mathrm{H} \cup (\mathbb{R} \setminus \{A_1, A_2, \ldots, A_k\})$ in $\mathbb{C}$. In un intorno del punto A_j, la F definisce un'applicazione conforme di un semidisco $\omega_j=\{|z-A_j|<R_j\} \cap \mathrm{H}$ sull'intersezione di un intorno aperto U_j di a_j con un angolo con vertice in a_j di ampiezza $\pi\alpha_j$; essa applica il centro del semidisco nel vertice dell'angolo. Poiché H è semplicemente connesso, è possibile scegliere su H una determinazione di $\log\big(F(z) - a_j\big)$, e quindi definire una funzione $G_j = \big(F(z)-a_j\big)^{1/\alpha_j}$. La G_j è un'applicazione conforme del semidisco ω_j sull'intersezione di un intorno di 0 con un semipiano limitato da una retta passante per 0. Per il principio di riflessione di Schwarz, la G_j si estende allora a una funzione olomorfa in un intorno di A_j, che indicheremo ancora con G_j. Inoltre $G_j'(A_j) \neq 0$ perché la G_j è univalente in un intorno di A_j. Avremo quindi uno sviluppo di Taylor:

$$G_j(z) = c_{j1}(z - A_j) + c_{j2}(z - A_j)^2 + \cdots \qquad \text{con} \quad c_j \neq 0. \tag{7.2}$$

Poiché
$$F(z) = a_j + G_j^{\alpha_j}(z),$$
otteniamo:
$$\begin{aligned} F'(z) &= \alpha_j G_j'(z) G_j^{\alpha_j - 1}(z) \\ F''(z) &= \alpha_j G_j''(z) G_j^{\alpha_j-1}(z) + \alpha_j(\alpha_j - 1)\left(G_j'(z)\right)^2 G_j^{\alpha_j-2}(z) \end{aligned}$$
e quindi:
$$\begin{aligned} \frac{F''(z)}{F'(z)} &= \frac{G_j''(z)}{G_j'(z)} + (\alpha_j - 1)\frac{G_j'(z)}{G_j(z)} \\ &= \frac{\alpha_j - 1}{z - A_j} + G_j(z) \end{aligned} \tag{7.3}$$
con G_j olomorfa in un intorno di A_j.

Da questo deduciamo che
$$\frac{F''(z)}{F'(z)} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j - 1}{z - A_j}$$
si estende, per il teorema di riflessione di Schwarz, a una funzione intera H su $\mathbb{C}$. Ma la F, e quindi la H, sono regolari all'infinito. Dunque la H è una costante. Ancora, dal fatto che F è regolare all'infinito, segue che $\lim_{z\to\infty} F'(z)/F''(z) = 0$ e dunque $H = 0$. Abbiamo perciò ottenuto:
$$\boxed{\frac{F''(z)}{F'(z)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j - 1}{z - A_j}\,.} \tag{7.4}$$
Integrando, abbiamo
$$\log F'(z) = \sum_{j=1}^{k} (\alpha_j - 1)\log(z - A_j) + \text{cost} \tag{7.5}$$
e dunque:
$$F'(z) = \text{Cost}_1 \cdot \prod (z - A_j)^{\alpha_j - 1} \tag{7.6}$$
da cui otteniamo la **formula di Schwarz-Christoffel**:
$$\boxed{F(z) = \text{Cost}_1 \cdot \int_{z_0}^{z} (z - A_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (z - A_k)^{\alpha_k - 1}\, dz + \text{Cost}_2\,.} \tag{7.7}$$
Nota che, se $A_j = \infty$ per qualche indice j, la formula per la F si ottiene omettendo, nel prodotto integrando, il fattore corrispondente.

Mediante l'applicazione conforme $w = (z-i)/(z+i)$ del semipiano H sul disco D, troviamo l'espressione della formula di Schwarz-Christoffel per il disco:

$$\boxed{F(w) = \mathrm{Cost}_1 \cdot \int_{w_0}^{w} (w - B_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (w - B_k)^{\alpha_k - 1}\, dw + \mathrm{Cost}_2\,,} \tag{7.8}$$

ove $B_j = (A_j - i)/(A_j + i)$.

A meno di composizione con un automorfismo di Möbius del semipiano, tre dei punti $A_1, \ldots, A_k$ possono essere fissati arbitrariamente. Possiamo quindi, ad esempio, nel caso di un triangolo con angoli interni $\pi\alpha_1$, $\pi\alpha_2$, $\pi\alpha_3$, ottenerne una mappa conforme mediante

$$F(z) = \mathrm{Cost}_1 \int_{z_0}^{z} z^{\alpha_1 - 1}(z-1)^{\alpha_2 - 1} dz + \mathrm{Cost}_2\,.$$

In generale, rimane il problema di calcolare gli ulteriori punti $A_4, \ldots, A_k$.

Esempio 7.1. Se Ω è un poligono regolare di n lati, gli angoli interni hanno ampiezza $\frac{n-2}{n}\pi$ e dunque otteniamo:

$$F(w) = F(w) = \mathrm{Cost}_1 \cdot \int_{w_0}^{w} \prod_{h=0}^{n-1} \left(w - e^{2\pi h i/n}\right)^{-2/n} dw + \mathrm{Cost}_2\,. \tag{7.9}$$

8. Il teorema dell'anello

Definizione 8.1. Un dominio Ω di $\mathbb{CP}^1$ si dice *doppiamente connesso* se $\mathbb{CP}^1 \setminus \Omega$ ha due componenti connesse.

Tutti i domini doppiamente connessi del piano sono omeomorfi al piano puntato $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, ma, come vedremo, possono non essere biolomorfi tra loro. Ciascuno è biolomorfo o a $\mathbb{C}^*$, o al disco puntato $\mathrm{D}^* = \{0<|z|<1\}$, o a una corona circolare $A_0(r,R) = \{r<|z|<R\}$ (con $0<r<R<+\infty$) e due corone circolari sono biolomorfe tra loro se e soltanto se hanno uguali il rapporto tra raggio interno e raggio esterno.

Otteniamo la caratterizzazione utilizzando i rivestimenti universali olomorfi. Ricordiamo che il semipiano di Poincaré $\mathrm{H} = \{\mathrm{Im}(z)>0\}$ è biolomorfo al disco mediante la trasformazione di Möbius

$$\mathrm{H} \ni z \longrightarrow \frac{z-i}{z+i} \in \mathrm{D}, \text{ con inversa } \mathrm{D} \ni w \longrightarrow i \cdot \frac{1+w}{1-w} \in \mathrm{H} \tag{8.1}$$

Lemma 8.1. *Sia* $\alpha>0$. *Abbiamo i seguenti rivestimenti universali olomorfi*

$$\mathbb{C} \ni z \longrightarrow \exp(2\pi i z) \in \mathbb{C}^*, \tag{8.2}$$

$$\mathrm{H} \ni z \longrightarrow \exp(2\pi i z) \in \mathrm{D}^*, \tag{8.3}$$

$$\mathrm{H} \ni z \longrightarrow (-iz)^{i\alpha} = \exp(i\alpha \log_+(-iz)) \in A_0(e^{-\alpha\pi/2}, e^{\alpha\pi/2}) \tag{8.4}$$

□

Ricordiamo che $\log_+$ è la determinazione del logaritmo complesso, definita sul piano $\mathbb{C}$ privato del semiasse reale negativo, che assume valori reali sul semiasse reale positivo. Se $z{=}x{+}iy$, allora $\log_+(-iz)$ è ben definito su H perché $\operatorname{Re}(-iz){=}y{>}0$ ed è uguale ad $[\arctan(x/y){+}i\log(|z|)]$. In particolare, se $\log_+(-iz_1)$ e $\log_+(-iz_2))$ hanno la stessa parte immaginaria, allora z_1 e z_2 hanno lo stesso argomento. Quindi, se $z_1, z_2{\in}$H, allora

$$\begin{aligned}(-iz_1)^{i\alpha} = (-iz_2)^{i\alpha} &\Leftrightarrow \alpha(\log_+(-iz_1) - \log_+(-iz_2)) \in 2\pi\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow (z_1/z_2) \in \{\exp([2\pi/\alpha]m) | \, m \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

In particolare

Lemma 8.2. *Il gruppo degli automorfismi del rivestimento* (8.4) *è generato dalla trasformazione di Möbius iperbolica* $S(z){=}e^{2\pi/\alpha}{\cdot}z$. □

Sia X un aperto di $\mathbb{C}$ e $\pi{:}X{\to}\Omega$ un rivestimento olomorfo di un dominio Ω doppiamente connesso. Il gruppo fondamentale di Ω è isomorfo a $\mathbb{Z}$ ed è generato da un laccetto γ. Il gruppo $\mathbf{G}$ degli automorfismi del rivestimento è allora generato dalla trasformazione $z' = S(z)$ che fa corrispondere al punto z di X il secondo estremo z' del cammino $\tilde{\eta}$ che si ottiene rialzando, con punto iniziale z, un laccetto η di Ω omotopo a γ e di punto iniziale $\pi(z)$. Se X è $\mathbb{C}$ od H, la S è una trasformazione di Möbius

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

e

$$\lambda(S) = \frac{(a+d)^2}{4(ad-bc)}$$

è un invariante conforme del rivestimento. Nel caso del Lemma 8.2 esso è uguale a

$$\lambda(S) = \frac{(1+e^{2\pi/\alpha})^2}{4e^{2\pi/\alpha}} = \cosh(\pi/\alpha).$$

Lemma 8.3. *Se* $0{<}r{<}R{<}{+}\infty$ *e* $0{<}r'{<}R'{<}{+}\infty$, *allora condizione necessaria e sufficiente affinché le due corone circolari* $A_0(r,R)$ *ed* $A_0(r',R')$ *siano biolomorficamente equivalenti è che* $(r'/R') = (r/R)$.

Dimostrazione. Mediante una dilatazione $z{\mapsto}k{\cdot}z$ possiamo definire un biolomorfismo tra l'anello $A_0(r,R)$ e l'anello $A_0(\rho^{-1},\rho)$ con $\rho{=}\sqrt{R/r}$. Per completare la dimostrazione, basta osservare che ρ è completamente determinato dall'invariante $\lambda(S)$ di un generatore del gruppo degli automorfismi del suo rivestimento universale olomorfo. □

Osservazione 8.4. Si può dare un'altra dimostrazione del Lemma (8.3) utilizzando il principio di riflessione di Schwarz: ogni applicazione biolomorfa $A_0(r,R){\to}A_0(r',R')$ si estende a una trasformazione di Möbius di $\mathbb{CP}^1$.

Lasciando fissi (o scambiando tra loro) 0 e ∞, essa deve essere o della forma $z \mapsto k \cdot z$, oppure $z \mapsto k \cdot z^{-1}$, con $k \in \mathbb{C}^*$ ed il lemma segue allora facilmente.

Teorema 8.5 (dell'anello). *Ogni dominio doppiamente connesso Ω di $\mathbb{CP}^1$ è conforme ad uno e uno solo dei seguenti domini di $\mathbb{C}$:*

(*i*) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *se $\mathbb{CP}^1 \setminus \Omega$ consiste di due punti;*

(*ii*) $\mathrm{D}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid 0<|z|<1\}$, *se una sola delle due componenti connesse di $\mathbb{CP}^1 \setminus \Omega$ consiste di un solo punto;*

(*iii*) *ad un anello $A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid 1<|z|<r\}$, con $r > 1$, se ciascuna delle due componenti connesse di $\mathbb{CP}^1 \setminus \Omega$ contiene più di un punto.*

Il numero $r > 1$ è un invariante conforme: due anelli A_{r_1} ed A_{r_2} con $1 < r_1 < r_2$ non sono biolomorficamente equivalenti.

Dimostrazione. Distinguiamo i tre divesi casi, che due a due non possono essere tra loro biolomorfi.

(*i*) Mediante una trasformazione di Möbius, i due punti $\{a, b\} = \mathbb{CP}^1 \setminus \Omega$ si trasformano in $\{0, \infty\}$ e quindi Ω in $\mathbb{C}^*$.

(*ii*) Mediante una trasformazione di Möbius possiamo supporre che una delle due componenti connesse di $\mathbb{CP}^1 \setminus \Omega$ sia $\{0\}$ e che l'altra contenga ∞. Allora $\Omega \cup \{0\}$ è un dominio semplicemente connesso di $\mathbb{C}$ e per il teorema di uniformizzazione di Riemann esiste un biolomorfismo $f : \Omega \cup \{0\} \to \mathrm{D}$ tale che $f(0) = 0$. La restrizione di f ad Ω definisce una trasformazione conforme di Ω su D^*.

(*iii*) Siano K_1 e K_2 le due componenti connesse di $\mathbb{CP}^1 \setminus \Omega$, entrambe contenenti più di un punto. Possiamo supporre che il punto all'infinito appartenga a K_1. Allora $\Omega' = \Omega \cup K_2$ è un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{C}$, biolomorfo al disco D per il teorema di uniformizzazione di Riemann (vedi §6 del Cap.IV).

Ci siamo così ricondotti al caso in cui $\Omega = \mathrm{D} \setminus K$, per un compatto K di D.

Possiamo supporre, a meno di una trasformazione di Möbius del disco, che $0 \in K$. L'aperto Ω è perciò contenuto nell'immagine del rivestimento $\pi : \mathrm{H} \to \mathrm{D}^*$ (definito da $\pi(z) = \exp(2\pi i z)$) del disco puntato ed $\Omega' = \pi^{-1}(\Omega)$ è un dominio semplicemente connesso. La restrizione di π definisce un rivestimento $\varpi : \Omega' \to \Omega$ ed il gruppo del rivestimento è formato dalle traslazioni $z \mapsto z + k$, al variare di k in $\mathbb{Z}$.

Per il teorema di uniformizzazione di Riemann il dominio piano Ω', essendo semplicemente connesso, è biolomorfo al semipiano di Poincaré H. La composizione

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H} \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\psi"] & \Omega' \arrow[r, "\varpi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

definisce un rivestimento di Ω mediante il semipiano di Poincaré. Ricordiamo che gli automorfismi del semipiano di Poincaré formano un sottogruppo del gruppo di Möbius che contiene soltanto trasformazioni ellittiche, paraboliche ed iperboliche [la restrizione alla frontiera è una trasformazione proiettiva associata a una matrice di $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ ed in particolare il suo invariante λ è reale]. Il generatore S del gruppo degli automorfismi di $\psi{:}\mathrm{H}\to\Omega$ non può essere ellittico, perché non ha punti fissi in H. Se S fosse parabolico, per (8.3) avremmo $\mathrm{H}/\langle S\rangle \simeq \mathrm{D}^*$. Allora S dev'essere iperbolica e dalla (8.4) il dominio Ω risulterà biolomorfo ad una corona circolare. $\square$

Parte 3

Superfici di Riemann

CAPITOLO VII

Analisi sulle superfici di Riemann

In questo capitolo, dopo aver definito nel primo paragrafo la nozione di *superficie di Riemann*, richiamiamo nei successivi alcune nozioni di analisi che ci saranno utili nello studio delle loro proprietà geometriche.

1. Superfici di Riemann

Sia X una varietà topologica paracompatta[1] di dimensione due.

Definizione 1.1. Un *atlante olomorfo* su X è il dato di una famiglia $\mathscr{A}=\{U_i, \phi_i\}_{i\in I}$ di aperti U_i di X e di omeomorfismi $\phi_i \ni p \to \phi_i(p) \in V_i \subset \mathbb{C}$ tali che:

(*i*) $\bigcup_{i\in I} U_i = X$;
(*ii*) $\phi_{i,j} : \phi_i(U_i \cap U_j) \ni z \to \phi_j \circ \phi_i^{-1}(z) \in \phi_j(U_j \cap U_i)$ è olomorfa per ogni coppia di indici $i, j \in I$ tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Due atlanti olomorfi $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$ si dicono *equivalenti* se $\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$ è ancora un atlante olomorfo. Questa relazione è una relazione di equivalenza nella famiglia degli atlanti olomorfi di X. Una classe di equivalenza J di atlanti olomorfi su X si dice una *stuttura complessa* su X.

Una *superficie di Riemann* è una varietà topologica X di dimensione reale due su cui sia stata fissata una struttura complessa J.

Una $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{C}$ che appartenga a un atlante olomorfo di J si dice una *carta locale olomorfa*, o semplicemente *carta locale*, in X.

Dall'identificazione $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ segue che ogni superficie di Riemann ha un'unica struttura di varietà differenziabile reale di dimensione due.

Definizione 1.2. Una metrica Riemanniana g su una superficie di Riemann X si dice *compatibile con la struttura complessa*, o *conforme*, se in ogni coordinata locale olomorfa $z=x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ su un aperto U di X risulta:

$$g = g(z)\,(dx^2+dy^2) = g(z)\cdot dz\cdot d\bar{z}\,. \tag{1.1}$$

[1] Ciò equivale a richiedere che ogni componente connessa di X sia unione numerabile di compatti.

Per il teorema di Korn-Lichtenstein (Teorema 2.10), ogni varietà riemanniana di dimensione due *orienta* ammette un'unica struttura complessa compatibile con la metrica e l'orientazione.

Definizione 1.3. Una funzione complessa f, definita su un aperto Y di X, si dice *olomorfa* in Y se per una (e quindi per ogni) carta locale olomorfa $\phi : U \to V \subset \mathbb{C}$ con $U \subset Y$ la funzione $f \circ \phi^{-1}$ è olomorfa su V.

In generale, diremo che un'applicazione $f: X_1 \to X_2$ tra due superfici di Riemann è *olomorfa* nel punto p di X_1 se, per due carte locali olomorfe (U, z) in X e (V, w) in X_2, con $p \in U$ ed $f(p) \in V$, risulta $f(U) \subset V$ e $w \circ f \circ z^{-1}$ olomorfa su $z(U)$.

Esempio 1.1. Un aperto X di $\mathbb{C}$ è una superficie di Riemann con la struttura complessa descritta dall'atlante $\{X, \mathrm{id}_X\}$, dove id_X è la funzione identità su X.

Esempio 1.2. La retta proiettiva complessa $\mathbb{P} = \mathbb{CP}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è una superficie di Riemann con la struttura complessa descritta dall'atlante che consiste dei due aperti $U_0 = \mathbb{C}$ e $U_\infty = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ con le funzioni coordinate $\phi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ e $\phi_\infty : U_\infty \to \mathbb{C}$ definita da:

$$\phi_\infty(z) = \begin{cases} 1/z, & \text{se} \quad z \neq \infty \\ 0, & \text{se} \quad z = \infty \,. \end{cases}$$

Le funzioni di transizione dell'atlante $\mathscr{A} = \{(U_0, \phi_0), (U_1, \phi_1)\}$ sono $\phi_{0,\infty}(z) = \phi_{\infty,0}(z) = 1/z$, olomorfe su $\phi_0(U_0 \cap U_\infty) = \phi_\infty(U_0 \cap U_\infty) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Esempio 1.3. Consideriamo il toro $\mathbf{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ e sia $\pi : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \mathbf{T}^2$ la proiezione sul quoziente. C'è un'unica struttura complessa su $\mathbf{T}^2$ che rende la π un'applicazione olomorfa tra superfici di Riemann. Come vedremo nel Cap. IX si possono definire sul toro $\mathbf{T}^2$ diverse strutture di superficie di Riemann tra loro non equivalenti.

Esempio 1.4. Un aperto Y di una superficie di Riemann X ha un'unica struttura di superficie di Riemann che renda l'inclusione $Y \ni p \to p \in X$ olomorfa.

2. Laplaciano su una superficie di Riemann

Sia X una varietà reale di dimensione 2, su cui sia assegnata una metrica Riemanniana g. In coordinate locali x^1, x^2 scriviamo[2] $g = g_{ij} dx^i dx^j$ e poniamo $\left(g^{ij}\right) = \left(g_{ij}\right)^{-1}$, cioè

$$g^{ij} = (-1)^{i+j} g_{3-j,3-i} / (g_{11} g_{22} - g_{12}^2)\,, \quad i, j = 1, 2.$$

[2]Useremo nel seguito la convenzione che indici ripetuti in alto e in basso si intendono sommati.

Poniamo ancora:

$$|g| = \det(g) = \det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2, \quad d\lambda = \sqrt{|g|} \cdot |dx^1 \wedge dx^2|. \tag{2.1}$$

Se X è orientata, e $dx^1 \wedge dx^2$ è positivo rispetto all'orientazione prescelta, associamo alla metrica g la 2-forma ω_g che, nelle coordinate locali, si scrive

$$\omega_g = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge dx^2.$$

Date due funzioni $u, v \in \mathscr{C}^2(X)$ le espressioni

$$\begin{cases} \varDelta_2 u = \dfrac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j=1}^2 \dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\, g^{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x^j}\right), \\ \varDelta_1 u = \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x^i} \dfrac{\partial u}{\partial x^j}, \\ \nabla(u, v) = \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x^i} \dfrac{\partial v}{\partial x^j}, \end{cases} \tag{2.2}$$

non dipendono dalla scelta delle coordinate: essi si chiamano i *parametri differenziali di Beltrami*[3]. In particolare $\varDelta_2$ si dice l'*operatore di Laplace-Beltrami* sulla varietà Riemanniana (X, g).

I parametri di Beltrami sono legati dalla relazione:

Teorema 2.1. *Se $u \in \mathscr{C}^2(X)$, $v \in \mathscr{C}^1(X)$ ed $u{\cdot}v$ ha supporto compatto in X, allora:*

$$\iint_X \varDelta_2 u \cdot v\, d\lambda = - \iint_X \nabla(u, v)\, d\lambda. \tag{2.3}$$

□

Se X è una superficie di Riemann e la metrica g è compatibile con la struttura complessa, allora la parte reale e la parte immaginaria di una coordinata locale complessa z definiscono *coordinate isoterme* e dunque è:

$$\begin{cases} g = h\, dz{\cdot}d\bar{z}, \quad \text{cioè} \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} = (h\, \delta_{ij}) \\ (g^{ij}) = \begin{pmatrix} h^{-1} & 0 \\ 0 & h^{-1} \end{pmatrix} = (h^{-1}\, \delta^{ij}) \\ |g| = h^2, \quad \omega_g = \frac{i}{2} h\, dz \wedge d\bar{z}. \end{cases} \tag{2.4}$$

[3]Eugenio Beltrami (1835-1900), matematico italiano, ha lasciato contributi importanti in geometria differenziale e fisica matematica.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827), matematico, fisico e astronomo francese. Fu uno dei maggiori scienziati dell'età napoleonica.

Nella coordinata olomorfa i parametri di Beltrami hanno le espressioni (se u, v sono funzioni reali)

$$(2.5)\qquad \begin{cases} \varDelta_2 u = \dfrac{1}{h}\Delta u = \dfrac{4}{h}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial\bar z}, \\ \varDelta_1 u = \dfrac{4}{h}\left|\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|^2 = \dfrac{4}{h}\left|\dfrac{\partial u}{\partial \bar z}\right|^2 = \dfrac{2}{h}\left(\left|\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|^2 + \left|\dfrac{\partial u}{\partial \bar z}\right|^2\right), \\ \nabla(u,v) = \dfrac{4}{h}\mathrm{Re}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial v}{\partial \bar z}\right) = \dfrac{4}{h}\mathrm{Re}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \bar z}\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) = \dfrac{2}{h}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial v}{\partial \bar z} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial u}{\partial \bar z}\right). \end{cases}$$

Le formule d'integrazione per parti del Teorema 2.1 si semplificano in una carta locale olomorfa nelle formule usuali per il Laplaciano su un aperto di $\mathbb{C}$. Abbiamo cioè, se (U, z) è una carta locale ed $u, v \in \mathscr{C}^2(X)$ con $\mathrm{supp}(u\cdot v) \Subset U$,

$$\begin{aligned} \iint_X \varDelta_2 u \cdot v\, d\lambda &= \iint_{\mathbb{C}} 2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar z}\cdot v\, dz\wedge d\bar z \\ &= -\iint_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial \bar z} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right) dz\wedge d\bar z = -\iint_X \nabla(u,v)\, d\lambda. \end{aligned}$$

Fissato un aperto $Y \subset X$, introduciamo gli spazi di Hilbert:

$$(2.6)\qquad L^2(Y) = \left\{ f : Y \to \mathbb{R} \quad d\lambda\text{−misurabile con} \quad \iint_Y |f|^2 d\lambda < +\infty \right\},$$

con la norma

$$(2.7)\qquad \|f\|_{0,Y} = \left(\iint_Y |f|^2 d\lambda\right)^{1/2}$$

e lo spazio

$$(2.8)\qquad H^1_0(Y) = \text{completamento di } \mathscr{C}^1_0(Y,\mathbb{R}) \text{ rispetto alla norma}$$

$$(2.9)\qquad \|f\|_{1,Y} = \left(\iint_Y \varDelta_1(f)\, d\lambda + \iint_Y |f|^2 d\lambda\right)^{1/2}$$

Per ogni intero $m \geq 0$, possiamo poi definire gli spazi di Sobolev $H^m(Y)$ di funzioni misurabili che sono di quadrato sommabile con le loro derivate (distribuzionali) fino all'ordine m. Nel caso in cui Y sia un aperto relativamente compatto di X, essi consistono dell'insieme di tutte le (classi di equivalenza di) funzioni f definite in Y tali che, per ogni aperto coordinato $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^2$ ed ogni $V' \Subset V$, le restrizioni delle $f\circ\phi^{-1}$ a $\phi(U\cap Y)\cap V'$ appartengano allo spazio di Sobolev $H^m(\phi(U\cap Y)\cap V')$.

Ricordiamo che $H^m_0(Y)$ è la chiusura, nella norma di $H^m(Y)$, del sottospazio $\mathscr{D}(Y) = \mathscr{C}^\infty_0(Y)$ delle funzioni di classe $\mathscr{C}^\infty$ che hanno supporto compatto in Y.

Indicheremo poi con $\mathscr{C}^{k,\alpha}(Y)$ lo spazio delle funzioni continue su $\bar{Y}$ con le loro derivate fino all'ordine k e con le derivate k-esime Hölderiane di esponente α.

Ricordiamo, che poiché X ha dimensione due, il teorema d'immersione di Sobolev dà l'inclusione:

$$H^m(Y) \hookrightarrow \mathscr{C}^{m-2,\alpha}(Y) \quad \forall m \geq 2,\ \forall 0 \leq \alpha < 1\,. \tag{2.10}$$

Infine, definendo mediante partizione dell'unità e coordinate locali una norma Hilbertiana sugli spazi $H^m(Y)$, otteniamo per il *teorema di Rellich* inclusioni compatte $H^m(Y) \hookrightarrow H^{m'}(Y)$ se $0 \leq m' < m$.

Sia Y un aperto di X.

Definizione 2.1. Chiamiamo *armoniche* in Y le funzioni u di $\mathscr{C}^2(Y)$ che soddisfino l'equazione di Laplace-Beltrami omogenea $\Delta_2 u=0$. Indicheremo con $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}(Y)$ lo spazio vettoriale reale delle funzioni armoniche su Y.

Per l'operatore Δ_2 valgono i risultati della teoria ellittica variazionale, che richiamiamo qui nel seguito. Molti di essi sono validi, in generale, per il Laplaciano di una varietà Riemanniana di dimensione arbitraria.

Teorema 2.2. *Siano X una superficie di Riemann ed Y un suo aperto relativamente compatto. Allora il sottospazio*

$$\mathcal{N}(Y) = \mathcal{H}^{\mathbb{R}}(Y) \cap H^1_0(Y)$$

ha dimensione finita e per ogni $f \in L^2(Y)$ tale che $\iint_Y f \cdot v\, d\lambda = 0$ per ogni $v \in \mathcal{N}(Y)$ esiste $u \in H^1_0(Y)$ tale che

$$-\iint_Y \nabla(u, w)\, d\lambda = \iint_Y f \cdot w\, d\lambda \qquad \forall w \in H^1_0(Y). \tag{2.11}$$

È allora $u \in H^2_{loc}(Y)$ e $\Delta_2 u = f$ nel senso delle distribuzioni.

Inoltre, se m è un intero ≥ 0 ed α un numero reale con $0<\alpha<1$, ed $f \in H^m_{loc}(Y)$, (risp. $f \in \mathscr{C}^{m,\alpha}_{loc}(Y)$) allora ogni soluzione $u \in H^2_{loc}(Y)$ di $\Delta_2 u = f$ sta in $H^{2+m}_{loc}(Y)$ (risp. in $\mathscr{C}^{2+m,\alpha}_{loc}(Y)$).

Supponiamo poi che Y sia connesso e che ∂Y sia non vuoto ed unione finita di curve regolari di classe $\mathscr{C}^1$ a tratti (in particolare richiediamo che ogni componente di ∂Y contenga almeno due punti, e dunque infiniti punti). Allora $\mathcal{N}(Y) = \{0\}$.

Vale inoltre, sotto queste ipotesi, il risultato di regolarità per l'unica soluzione $u \in H^1_0(Y) \cap H^2(Y)$ di $\Delta_2 u = f$: se $f \in H^m(Y)$, allora $u \in H^{2+m}(Y)$ e, se $f \in \mathscr{C}^{m,\alpha}(Y)$, allora $u \in \mathscr{C}^{k+2,\alpha}(Y)$. □

Sia Y un aperto relativamente compatto di X, localmente connesso in ogni punto di ∂Y, con $\partial Y \neq \emptyset$ unione disgiunta di un numero finito di curve regolari di classe $\mathscr{C}^\infty$. Allora chiamiamo $\bar{Y} = Y \cup \partial Y$ una *sottovarietà con bordo di X*.

Possiamo quindi trarre dal teorema precedente l'enunciato:

Corollario 2.3. *Se $\bar{Y}$ è una sottovarietà con bordo di X, connessa e compatta, con $\partial Y \neq \emptyset$, allora*

$$\Delta_2 : H^2(Y) \cap H^1_0(Y) \ni u \to \Delta_2 u \in L^2(Y) \tag{2.12}$$

è un isomorfismo lineare. Per dualità ricaviamo che anche la sua aggiunta:

$$\Delta_2^* : L^2(Y) \to \left(H^2(Y) \cap H^1_0(Y)\right)^* \tag{2.13}$$

è un isomorfismo. □

Per i teoremi di inclusione di Sobolev, poiché X ha dimensione due, le funzioni di $H^2(Y)$ sono continue in Y. In particolare, per ogni punto $p \in Y$ l'applicazione

$$\delta_p : H^2(Y) \cap H^1_0(Y) \ni v \to v(p) \in \mathbb{R} \tag{2.14}$$

è lineare e continua. Quindi esiste una funzione $\gamma_p \in L^2(Y)$ tale che

$$\iint_Y \gamma_p(x) \Delta_2 u(x)\, d\lambda(x) = u(p), \quad \forall u \in H^2(Y) \cap H^1_0(Y)\,. \tag{2.15}$$

Per il teorema di regolarità, la γ_p, poiché risolve l'equazione $\Delta_2 \gamma_p = \delta_p$ nel senso delle distribuzioni, è di classe $\mathscr{C}^\infty$ e armonica nell'aperto $Y \setminus \{p\}$.

Da queste considerazioni deduciamo il teorema relativo all'esistenza di funzioni di Green[4].

Teorema 2.4. *Sia $\bar{Y}$ una sottovarietà con bordo, compatta e connessa, di X, con $\partial Y \neq \emptyset$. Allora, per ogni punto $p \in Y$, esiste una funzione G_p, armonica in $Y \setminus \{p\}$ e di classe $\mathscr{C}^\infty$ su $\bar{Y} \setminus \{p\}$, tale che $G_p = 0$ su ∂Y e $\Delta_2 G_p = \delta_p$.*

Dimostrazione. Sia Y_1 un intorno aperto di Y tale che $\bar{Y}_1$ sia ancora una sottovarietà con bordo compatta e connessa di X. Sia γ_p la soluzione dell'equazione variazionale $\Delta_2 \gamma_p = \delta_p$ costruita, come in precedenza, per l'aperto Y_1. La sua restrizione a ∂Y è una funzione di classe $\mathscr{C}^\infty$ e possiamo quindi prolungarla ad una ψ di classe $\mathscr{C}^\infty$ in un intorno di $\bar{Y}$. Se w è la soluzione del problema di Dirichelet:

$$\begin{cases} w \in H^2(Y) \cap H^1_0(Y) \\ \Delta_2 w = \Delta_2 \psi \quad \text{in} \quad Y, \end{cases} \tag{2.16}$$

allora $G_p = \gamma_p + w - \psi$ soddisfa tutte le condizioni richieste. □

[4]George Green (1793-1841) fu un fisico-matematico inglese, che si può considerare l'iniziatore della teoria del potenziale.

Se X è una superficie di Riemann e la metrica è compatibile con la struttura complessa di X, possiamo costruire direttamente la funzione di Green, senza fare uso della dualità. Infatti, in una carta olomorfa locale (U, z) con centro in p, poiché $g = h(z)\, dz\, d\bar{z}$, la $u = (h(0)/2\pi)\cdot \log|z|$ è soluzione locale di $\varDelta_2 u = \delta_p$. Sia $\tilde{u}$ una funzione di classe $\mathscr{C}^\infty$ su $X\backslash\{p\}$, che coincida con u in un intorno di p ed abbia supporto compatto in Y. Allora $\varDelta_2 \tilde{u} = f + \delta_p$, ove $f \in \mathscr{C}_0^\infty(Y)$ è identicamente nulla in un intorno di p. Sia w la soluzione del problema di Dirichelet

$$(2.17) \qquad \begin{cases} w \in \mathscr{C}^\infty(\bar{Y}) \\ w = 0 \ \text{ su } \partial Y \\ \varDelta_2 w = f \ \text{ in } Y\,. \end{cases}$$

Allora $G_p = \tilde{u} - w$ è la funzione di Green cercata.

Ancora, nel caso delle superficie di Riemann, è facile ricondurre il principio di continuazione unica al risultato analogo per le funzioni olomorfe su aperti di $\mathbb{C}$. Esso è anche conseguenza del fatto che l'operatore di Laplace-Beltrami è ellittico del second'ordine[5].

Teorema 2.5. *Sia Y un aperto connesso di X e sia $u \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}(Y)$, nulla con tutte le sue derivate parziali (rispetto a un qualsiasi sistema di coordinate locali) nel punto $p \in Y$. Allora $u = 0$ in Y.* □

Dalla costruzione delle funzioni γ_p traiamo il:

Teorema 2.6. *Siano $\bar{Y}$ una sottovarietà con bordo connessa e compatta di X, con $\partial Y \neq \emptyset$ ed $f \in \mathscr{C}_0^\infty(Y)$ tale che*

$$(2.18) \qquad \iint_Y f \cdot v\, d\lambda = 0 \qquad \forall v \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}(Y)\,.$$

Allora esiste una e una sola $u \in \mathscr{C}_0^\infty(Y)$ tale che $\varDelta_2 u = f$.

Dimostrazione. Siano $\bar{Y}'$ una sottovarietà con bordo connessa e compatta di X, con $\bar{Y} \subset Y'$ ed $u \in H^2(Y') \cap H_0^1(Y')$ la soluzione del problema di

[5] cf. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III.*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 274. Springer-Verlag, Berlin, 1994. viii+525 pp. ISBN 3-540-13828-5 Springer], Theorem 17.2.6, p.14 e le indicazioni storico-bibliografiche alla fine del Capitolo 17 dell'op.cit. Nel caso delle due variabili, possiamo comunque ricondurci sempre - localmente - al caso delle superfici di Riemann mediante la scelta di coordinate isoterme (Teorema di Korn-Lichtenstein).

Dirichelet[6]

$$\begin{cases} \Delta_2 u = f & \text{in } Y' \\ u = 0 & \text{su } \partial Y' . \end{cases}$$

La funzione di Green G_p relativa ad Y' e ad un punto $p \in Y' \setminus Y$ è armonica su Y e quindi

$$\iint_Y f(x) G_p(x)\, d\lambda(x) = 0.$$

Sia $\phi \in \mathscr{C}_0^\infty(Y')$, uguale a 1 in un intorno di p. Abbiamo allora:

$$\iint_{Y'} \Delta_2(\phi(x)u(x))\, G_p(x) d\lambda(x) = u(p)$$

perché G_p risolve $\Delta_2 G_p = \delta_p$ nel senso delle distribuzioni. D'altra parte, poiché $(1-\phi)$ è nulla in un intorno di p, detta ω una palla coordinata tale che $\phi = 1$ in un intorno di $\overline{\omega}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \iint_{Y'} \Delta_2\left((1-\phi)\, u\right)\, G_p\, d\lambda &= \iint_{Y' \setminus \omega} \Delta_2\left((1-\phi)\, u\right)\, G_p\, d\lambda \\ &= \iint_{Y' \setminus \omega} (1-\phi)\, u\, \Delta_2 G_p\, d\lambda \;=\; 0 \end{aligned}$$

mediante integrazione per parti, in quanto $(1-\phi)\, u$ si annulla con tutte le derivate su $\partial\omega$ e G_p ed u si annullano su $\partial Y'$. Sommando otteniamo $u(p)=0$ e dunque, essendo $u=0$ su $Y' \setminus \bar{Y}$, per il principio di continuazione unica è anche $u=0$ sulla componente connessa di $Y' \setminus Y$ in $Y' \setminus \operatorname{supp} f$, onde u ha supporto compatto in Y. □

Da questo teorema ricaviamo il

Teorema 2.7 (teorema di approssimazione di Runge). *Siano $Y \subset Y'$ due aperti connessi di X, tali che $\bar{Y}$ e $\bar{Y}'$ siano sottovarietà con bordo compatte di X e $Y' \setminus Y$ non abbia componenti connesse compatte. Allora le restrizioni ad Y delle funzioni di $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}(Y')$ formano un sottospazio denso di $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}(Y)$.*

Dimostrazione. La tesi segue dal teorema di Hahn-Banach: infatti ogni funzionale lineare e continuo su $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}(Y)$ si può rappresentare mediante

$$\mathcal{H}^{\mathbb{R}}(Y) \ni u \to \iint_Y f\, u\, d\lambda \qquad \text{con} \quad f \in \mathscr{C}_0^\infty(Y).$$

Per dimostrare il teorema di densità è sufficiente allora verificare che

$$(*) \qquad \iint_{Y'} f\, u\, d\lambda = 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}(Y') \implies \iint_Y f\, u\, d\lambda = 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}(Y).$$

[6] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), matematico tedesco. Contribuì alla teoria dei numeri e all'analisi.

Questo segue dal Teorema 2.6. Infatti possiamo trovare una soluzione $v \in \mathscr{C}_0^\infty(Y')$ di $\Delta_2 v = f$. La v è armonica fuori dal supporto di f ed ha supporto compatto in Y'. Per il principio di continuazione unica si annulla sulle componenti connesse non relativamente compatte di $Y' \backslash Y$ e quindi, per l'ipotesi, ha supporto compatto in Y. Otteniamo allora il secondo membro dell'implicazione $(*)$ usando l'integrazione per parti:

$$\iint_Y f\, u\, d\lambda = \iint_Y \Delta_2(v) \cdot u\, d\lambda = \iint_Y v \cdot \Delta_2 u\, d\lambda = 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}(Y). \qquad \square$$

Come conseguenza abbiamo:

Teorema 2.8. *Sia X una superficie di Riemann connessa e non compatta. Allora per ogni* $f \in \mathscr{C}^\infty(X)$ *esiste una* $u \in \mathscr{C}^\infty(X)$ *tale che* $\Delta_2 u = f$ *in* X.

Dimostrazione. Fissiamo una successione crescente di aperti $\{X_n\}$ in X tali che, (i) per ogni n, $\overline{X}_n$ sia una sottovarietà con bordo compatta di X; (ii) per ogni n sia $X_n \Subset X_{n+1}$; (iii) per ogni n, l'aperto $X_{n+1} \backslash \overline{X}_n$ non abbia componenti connesse compatte.

Per ogni n sia u_n la soluzione del problema di Dirichelet:

$$\begin{cases} u_n \in H^2(X_n) \cap H_0^1(X_n) \\ \Delta_2 u_n = f \quad \text{su} \quad X_n\,. \end{cases}$$

Dico che allora possiamo trovare una successione $\{v_n\}$ con $v_n \in \mathscr{C}^\infty(X_n)$, $\Delta_2 v_n = f$ su X_n e $\sup_{X_{n-1}} |v_{n+1} - v_n| < 2^{-n}$.

Infatti, possiamo porre $v_1 = u_1$. Supponiamo per ricorrenza di aver già definito $v_1, v_2 \dots v_n$. Osserviamo allora che $u_{n+1} - v_n$ è armonica in X_n. Per il teorema di approssimazione di Runge possiamo trovare allora una funzione w, armonica in X_{n+1}, tale che $|u_{n+1} - v_n - w| < 2^{-(n+1)}$ in tutti i punti di $\overline{X}_{n-1}$. Poniamo allora $v_{n+1} = u_{n+1} - w$.

Costruita la successione $\{v_n\}$, definiamo la u ponendo

$$u = v_n + \sum\nolimits_{h>0} (v_{n+h} - v_{n+h-1}) \quad \text{su} \quad X_n. \qquad \square$$

Corollario 2.9. *Per ogni* $f \in \mathscr{E}'(X)$ *tale che* $\langle f | u \rangle = 0$ *per ogni* $u \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}(X)$, *esiste* $g \in \mathscr{E}'(X)$ *tale che* $\Delta_2 g = f$ *nel senso delle distribuzioni.*

Dimostrazione. Questo corollario è conseguenza del teorema appena dimostrato nel caso in cui X sia una superficie di Riemann connessa non compatta e del primo teorema di esistenza nel caso in cui X sia compatta. Infatti in entrambi i casi si conclude che $\Delta : \mathscr{C}^\infty(X) \to \mathscr{C}^\infty(X)$ ha immagine chiusa e quindi anche la sua aggiunta $\Delta_2 : \mathscr{E}'(X) \to \mathscr{E}'(X)$ ha immagine chiusa, che coincide con l'annullatore in $\mathscr{E}'(X)$ del nucleo di $\Delta : \mathscr{C}^\infty(X) \to \mathscr{C}^\infty(X)$. $\square$

Da questo corollario possiamo ricavare una dimostrazione del[7]

Teorema 2.10 (Korn-Lichtenstein). *In una varietà Riemanniana X di dimensione due possiamo definire in ogni punto coordinate isoterme.*

Dimostrazione. Sia p un qualsiasi punto di X. Dico che possiamo trovare un intorno aperto U di p in X ed una funzione armonica u in U con $du(p) \neq 0$. Infatti, se $\bar{U} \Subset Y$ è una sottovarietà compatta a bordo in Y, con $\partial U{\neq}\emptyset$, e per assurdo tutte le funzioni armoniche in U avessero differenziale nullo in p, allora, fissata una qualsiasi derivazione D_p nel punto p, la distribuzione $D_p(\delta_p)(\phi) = -D_p(\phi)$, essendo ortogonale a tutte le funzioni armoniche, si potrebbe, per il Corollario 2.9, rappresentare come $D_p(\delta_p) = \varDelta_2(T)$, per una distribuzione T con supporto compatto in U. Per il principio di continuazione unica, poiché T è armonica al di fuori di p, avremmo allora $\operatorname{supp}(T) = \{p\}$. Questo implica che, in coordinate locali x, y, con centro in p, la T è della forma $P(D_x, D_y)\delta_p$, ove $P \in \mathbb{R}[\xi, \eta]$ è un polinomio di grado $m{\geq}0$. Possiamo trovare allora un monomio $\mu(x, y) = x^{m_1}y^{m_2}$, con interi non negativi m_1, m_2 per cui $m_1{+}m_2 = m{+}2$, per cui $\varDelta_2T(\mu(x, y)){\neq}0$. Poiché $D_p\delta$ si annulla su tutti i monomi di x, y di grado ≥ 2, questo ci dà una contraddizione. Abbiamo così dimostrato che vi è in U una funzione armonica u con $du(p) \neq 0$.

Possiamo, a meno di prendere un intorno più piccolo, supporre che U sia il dominio, connesso e semplicemente connesso, su cui è definito un sistema di coordinate locali x^1, x^2 con centro in p. Possiamo allora trovare in U la primitiva v della forma differenziale chiusa

$$\sqrt{|g|}\left(g^{2j}\frac{\partial u}{\partial x^j}dx^1 - g^{1j}\frac{\partial u}{\partial x^j}dx^2\right).$$

Allora u, v sono coordinate isoterme in un intorno di p. □

Osservazione 2.11. Si può dare una dimostrazione più generale del teorema di Korn-Lichtenstein sotto l'ipotesi che la varietà X sia solo di classe $\mathscr{C}^1$.

Corollario 2.12. *Su ogni varietà di Riemann orientata di dimensione reale due si può definire un'unica struttura complessa compatibili sia con la metrica Riemanniana che con l'orientazione di X.*

[7]Korn, A. (1916), Zwei Anwendungen der Methode der sukzessiven Annäherungen, Schwarz Abhandlungen, pp. 215-219,

Arthur Korn (1870-1945) matematico e fisico tedesco.

Lichtenstein, L. (1916), "Zur Theorie der konformen Abbildung", Bull. Internat. Acad. Sci. Cracovie. Cl. Sci. Math. Nat. Sér. A.: 192-217.

Leon Lichtenstein (1878-1933) matematico tedesco di origine polacca, contribuì allo studio delle equazioni differenziali, delle applicazioni conformi e alla teoria del potenziale. Si interessò anche di idrodinamica ed astronomia.

Osservazione 2.13. Sulle superficie di Riemann valgono il teorema di Stokes e quindi tutti i risultati della teoria delle funzioni olomorfe di una variabile complessa e delle funzioni meromorfe legate al calcolo dei residui.

Teorema 2.14. *Sia Y un aperto relativamente compatto con bordo non vuoto di classe $\mathscr{C}^\infty$ di una superficie di Riemann X. Allora, date $\phi\in\mathscr{C}^\infty(\partial Y)$ ed $f\in\mathscr{C}^\infty(\bar{Y})$, vi è una ed una sola $u\in H^2(Y)\cap H^1_0(Y)$ che risolva il problema di Dirichelet*[8]

$$\begin{cases} \Delta_2 u = f, & in \quad Y \\ u = \phi, & su \quad \partial Y\,. \end{cases} \tag{2.19}$$

La soluzione u di (2.19) *è di classe $\mathscr{C}^\infty$ fino al bordo.* □

3. Il complesso di de Rham

Sia X una superficie di Riemann. Indichiamo con $\mathscr{E}^{(j)}(X)$ lo spazio delle forme differenziali esterne, a coefficienti complessi, di classe $\mathscr{C}^\infty$ e di grado j su X. Il complesso di de Rham[9] si può allora scrivere

$$0 \dashrightarrow \mathbb{C} \dashrightarrow \mathscr{E}^{(0)}(X) \xrightarrow{\ d\ } \mathscr{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{\ d\ } \mathscr{E}^{(2)}(X) \to 0\,. \tag{3.1}$$

Data una 1-forma α, la condizione che

$$d\alpha = 0 \tag{3.2}$$

è necessaria perché l'equazione

$$du = \alpha \tag{3.3}$$

possa avere soluzione. Condizione necessaria e sufficiente affinché una uno-forma α sia esatta (cioè che la (3.3) ammetta soluzione) è che sia verificata la:

$$\oint_\gamma \alpha = 0 \tag{3.4}$$

per ogni laccetto γ in X.

Se X è connessa e non compatta, allora l'equazione

$$d\alpha = \omega \tag{3.5}$$

ammette una soluzione $\alpha\in\mathscr{E}^{(1)}(X)$ per ogni assegnata $\omega\in\mathscr{E}^{(2)}(X)$.

---

[8]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), matematico tedesco. A lui si deve la moderna definizione di "funzione".

[9]Georges de Rham (1903-1990), matematico svizzero, che ha dato contributi importanti alla topologia differenziale.

Se X è connessa e compatta, allora l'equazione (3.5) ammette soluzione se, e soltanto se,

$$\iint_X \omega = 0\,. \tag{3.6}$$

Definizione 3.1. Posto $\mathscr{E}^{(j)}(X) = 0$ per $j \neq 0, 1, 2$, i quozienti

$$\mathrm{H}^j(X) = \frac{\ker\left(d : \mathscr{E}^{(j)}(X) \to \mathscr{E}^{(j+1)}(X)\right)}{d\left(\mathscr{E}^{(j-1)}(X)\right)}, \quad \text{per } j \in \mathbb{Z}, \tag{3.7}$$

si dicono *gruppi di coomologia di de Rham* di X.

In particolare $\mathrm{H}^0(X)=\{u \in \mathscr{E}^{(0)}(X) \mid du=0\}$ è il sottospazio delle funzioni localmente costanti su X. Se X è connesso, $\mathrm{H}^0(X) \simeq \mathbb{C}$ ed, in genereale, $\mathrm{H}^0(X) \simeq \mathbb{C}^{\pi_0(X)}$, ove $\pi_0(X)$ indica l'insieme delle componenti connesse di X. Abbiamo poi $H^2(X)=\{0\}$ se X non è compatta ed $H^2(X) \simeq \mathbb{C}$ se X è compatta.

4. Il complesso di de Rham a supporti compatti

La coomologia di de Rham definita nel paragrafo precedente è isomorfa alla coomologia singolare a coeffienti in $\mathbb{C}$ (teorema di de Rham). In questo paragrafo definiamo la coomologia di de Rham a supporti compatti e dimostriamo un risultato che indica come essa si colleghi all'omologia singolare a coefficienti in $\mathbb{C}$.

Lemma 4.1. *Sia κ una curva chiusa semplice regolare*[10] *sulla superficie di Riemann X. Possiamo costruire una 1-forma differenziale chiusa $\eta = \eta_\kappa \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$, con supporto compatto in X, tale che*

$$\iint_X \eta \wedge \alpha = \int_\kappa \alpha \qquad \forall \alpha \in \mathscr{E}^{(1)}(X) \quad \text{con} \quad d\alpha = 0\,. \tag{4.1}$$

La 1-forma a supporto compatto η è univocamente determinata, modulo il differenziale di una funzione a supporto compatto.

Dimostrazione. Poiché κ ha supporto in una componente connessa di X, possiamo supporre nel seguito che X sia connessa. Inoltre, poiché l'integrale a secondo membro in (4.1) dipende solo dalla classe di omotopia di κ, possiamo ancora supporre che κ sia regolare di classe $\mathscr{C}^\infty$.

Fissiamo su X una metrica Riemanniana g compatibile con la struttura complessa ed indichiamo con dist_g la distanza su X associata alla metrica. Fissiamo un numero reale positivo ϵ tale che $Y_\epsilon=\{p \in X \mid \mathrm{dist}_g(p, |\kappa|)<\epsilon\}$ sia un aperto relativamente compatto di X, con frontiera regolare, ed $Y_\epsilon \setminus |\kappa|$ consista di due componenti connesse $Y_\epsilon^\pm$, di cui κ rappresenti la frontiera comune.

[10] Supponiamo cioè che κ sia di classe $\mathscr{C}^1$, con differenziale diverso da zero in tutti i punti.

Possiamo supporre che la curva orientata κ sia una parte della frontiera di Y_ϵ^-. Scegliamo una funzione reale f, di classe $\mathscr{C}^\infty$ in X, con supporto in Y_ϵ che sia uguale a 1 in un intorno di $|\kappa|$ e consideriamo la forma differenziale

$$\eta_\kappa = \begin{cases} df & \text{in} \quad Y_\epsilon^- \\ 0 & \text{in} \quad X\backslash Y_\epsilon^- . \end{cases} \tag{4.2}$$

Allora $\eta_\kappa \in \mathscr{E}_c^{(1)}(X)$ e, per ogni 1-forma chiusa α, di classe $\mathscr{C}^\infty$ in X, abbiamo

$$\iint_X \eta_\kappa \wedge \alpha = \iint_{Y_\epsilon^-} \eta_\kappa \wedge \alpha = \iint_{Y_\epsilon^-} df \wedge \alpha = \iint_{Y_\epsilon^-} d(f\cdot\alpha) = \int_\kappa f\alpha = \int_\kappa \alpha .$$

Se $\eta' \in \mathscr{E} + c^{(1)}(X)$ è un'altra forma a supporto compatto che soddisfa (4.1), allora la differenza $\beta = \eta - \eta'$ soddisfa:

$$\iint_X \beta \wedge \alpha = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathscr{E}^{(1)}(X) \quad \text{con} \quad d\alpha = 0 .$$

Se γ è una qualsiasi curva semplice chiusa, regolare di classe $\mathscr{C}^\infty$, in X, possiamo costruire, nello stesso modo in cui abbiamo costruito la η_κ nella prima parte della dimostrazione, una forma chiusa a supporto compatto η_γ per cui risulti

$$\int_\gamma \beta = \iint_X \eta_\gamma \wedge \beta = 0 .$$

Questa condizione ci dice che esiste una funzione $u \in \mathscr{E}^{(0)}(X)$ tale che $\beta = du$. Se X è compatta, non c'è altro da dimostrare. Se X non è compatta, osserviamo che la u è localmente costante sul complementare del compatto $\text{supp}(\beta) \subset X$. Possiamo scegliere la u uguale a zero su una delle componenti connesse non relativamente compatte di $X\backslash\text{supp}(\beta)$. Se $X\backslash\text{supp}(\beta)$ ha una sola componente connessa non relativamente compatta, la u ha supporto compatto e non c'è altro da dimostrare. Consideriamo quindi il caso in cui $X\backslash\text{supp}(\beta)$ abbia almeno due componenti connesse non relativamente compatte e fissiamo due punti p e q che appartengano a due componenti connesse non relativamente compatte distinte. Possiamo allora trovare una curva $\gamma : \mathbb{R}\to X$, regolare di classe $\mathscr{C}^\infty$, con $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e $\gamma(t)$ divergente per $t\to \pm\infty$. Ripetiamo ora per la curva γ una costruzione analoga a quella che abbiamo fatto all'inizio della dimostrazione per la κ: costruiamo un intorno tubolare U di γ in X:

$$U = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{p \in X \,|\, \text{dist}_g(p, \gamma(t)) < \epsilon(t)\}$$

per una funzione $\epsilon(t) > 0$ tale che, per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato, la curva γ divida il disco $B_t = \{p \in X \,|\, \text{dist}_g(p, \gamma(t)) < \epsilon(t)\}$ in due componenti connesse $B_t^\pm$, in modo tale che $B_t\backslash|\gamma| = B^+ \cup B^-$ e B_t^- contenga nella sua frontiera la curva orientata $\gamma \cap B_t$. Possiamo ancora supporre che B_0 e B_1 siano contenuti, con le loro chiusure, in $X\backslash\text{supp}(\beta)$. L'intorno tubolare U risulterà diviso dalla curva γ in due componenti connesse $U^{\pm}$. Fissiamo a questo punto una funzione $F \in \mathscr{E}^{(0)}(X)$ con $\text{supp}(F) \subset U$ e $F(x) = 1$ in un intorno U' di $|\gamma|$ in U. Allora

$$\alpha = \begin{cases} dF & \text{in} \quad U^- \\ 0 & \text{in} \quad X\backslash U^- \end{cases}$$

è una 1-forma differenziale chiusa, di classe $\mathscr{C}^\infty$, in X. Possiamo supporre che U abbia frontiera regolare di classe $\mathscr{C}^\infty$. Consideriamo ora un dominio D^-, con frontiera regolare a tratti, contenuto in U^-, tale che δD^- consista dell'arco di γ che congiunge p a q, di un arco della frontiera di U, e di due archi che congiungano rispettivamente p e q alla frontiera di U e non intersechino il supporto di β. Otteniamo allora

$$\begin{aligned}
0 &= \iint_X \beta\wedge\alpha = \iint_{D^-}\beta\wedge\alpha && \text{perché } \text{supp}(\beta\wedge\alpha)\subset D^-,\\
&= \iint_{D^-}\beta\wedge dF && \text{perché } \alpha = dF \text{ in } D^-\subset U^-,\\
&= -\int_{\gamma\cap\delta D^-}\beta && \text{perché } F\cdot\beta = 0 \text{ su } \delta D^-\backslash|\gamma| \text{ e } F = 1 \text{ su } |\gamma|,\\
&= -\int_{\gamma\cap\delta D^-} du = u(p)-u(q)\,.
\end{aligned}$$

Questo dimostra che u è costante su $X\backslash\text{supp}(\beta)$ e quindi, poiché è nulla su una delle componenti non relativamente compatte di $X\backslash\text{supp}(\beta)$, è nulla su tutte le componenti connesse non relativamente compatte di $X\backslash\text{supp}(\beta)$ ed ha quindi supporto compatto. □

Indichiamo con $\mathscr{E}_c^{(j)}(X)$ il sottospazio di $\mathscr{E}^{(j)}(X)$ delle forme che hanno supporto compatto in X. Abbiamo il *complesso di de Rham a supporti compatti*:

$$0\to\mathscr{E}_c^{(0)}(X) \xrightarrow{\ d\ } \mathscr{E}_c^{(1)}(X) \xrightarrow{\ d\ } \mathscr{E}_c^{(2)}(X)\to 0\,. \tag{4.3}$$

Poniamo $\mathscr{E}_c^{(j)}(X) = 0$ se $j{\neq}0, 1, 2$. I quozienti

$$\mathrm{H}_c^j(X) = \frac{\ker\left(d : \mathscr{E}_c^{(j)}(X) \to \mathscr{E}_c^{(j+1)}(X)\right)}{d\mathscr{E}_c^{(j-1)}(X)}, \quad \text{per } j\in\mathbb{Z},$$

si dicono i *gruppi di coomologia di de Rham a coefficienti compatti*.

Il Lemma precedente si può quindi riformulare nel modo seguente:

Proposizione 4.2. *Una curva semplice chiusa κ di classe $\mathscr{C}^\infty$ di una superficie di Riemann X determina un'unica classe di coomologia di de Rham a coefficienti compatti* $[\kappa] \in \mathrm{H}_c^1(X)$ *tale che la* (4.1) *valga per ogni* $\eta{\in}[\kappa]$. □

Osserviamo che $\mathrm{H}^0_c(X)$ è la somma diretta di tante copie di $\mathbb{C}$ quante sono le componenti connesse compatte di X. Se X non ha componenti connesse compatte, allora $\mathrm{H}^0_c(X) = \{0\}$, mentre in generale $\mathrm{H}^0_c(X) = \coprod_{\{K\in\pi_0(X),\, K\Subset X\}} \mathbb{C}$.

I risultati di questo paragrafo e quelli richiamati nel paragrafo precedente si possono riassumere nel seguente :

Teorema 4.3 (Teorema di dualtità). *Siano X una superficie di Riemann, j un intero con $0 \leq j \leq 2$ e $\xi \in \mathrm{H}^j(X)$, $\mu \in \mathrm{H}^{2-j}_c(X)$ due classi di coomologia di de Rham, di cui la seconda con supporto compatto. Allora il valore dell'integrale*

$$(*) \qquad \iint_X \alpha \wedge \beta, \quad \text{con} \quad \alpha \in \xi,\ \beta \in \mu$$

è indipendente dalla scelta dei rappresentanti $\alpha \in \xi$ e $\beta \in \mu$.

L'applicazione

(4.4)

$$\mathrm{H}^j(X) \times \mathrm{H}^{2-j}_c(X) \ni (\xi, \mu) \to \langle \xi \mid \mu \rangle := \iint_X \alpha \wedge \beta \in \mathbb{C}, \quad (\alpha \in \xi,\ \beta \in \mu)$$

è un accoppiamento di dualità[11]*. In particolare :*

(i) *Se $\alpha \in \mathscr{E}^j(X)$ e $d\alpha = 0$, condizione necessaria e sufficiente affinché esista $u \in \mathscr{E}^{(j-1)}(X)$ tale che $du = \alpha$ è che*

$$(4.5) \qquad \iint_X \alpha \wedge \beta = 0, \quad \forall \beta \in \mathscr{E}^{2-j}_c(X) \text{ con } d\beta = 0\,.$$

(ii) *Se $\beta \in \mathscr{E}^j_c(X)$ e $d\beta = 0$, condizione necessaria e sufficiente affinché esista $v \in \mathscr{E}^{(j-1)}_c(X)$ tale che $dv = \beta$ è che*

$$(4.6) \qquad \iint_X \alpha \wedge \beta = 0, \quad \forall \alpha \in \mathscr{E}^{2-j}(X) \text{ con } d\alpha = 0\,. \qquad \square$$

5. Forme differenziali complesse su una superficie di Riemann

La struttura complessa di una superficie di Riemann X determina una decomposizione dello spazio $\mathscr{E}^{(1)}(X)$ delle sue forme differenziali complesse nella somma diretta di due sottospazi, che indicheremo rispettivamente con $\mathscr{E}^{(1,0)}(X)$ ed $\mathscr{E}^{(0,1)}(X)$. Essi contengono le sezioni $\mathscr{C}^\infty$ dei fibrati $T^*_{1,0}X$ e $T^*_{0,1}X$ dei covettori complessi rispettivamente $\mathbb{C}$-lineari ed anti-$\mathbb{C}$-lineari. Possiamo anche caratterizzare $\mathscr{E}^{(1,0)}(X)$ (risp. $\mathscr{E}^{(0,1)}(X)$) come il sottospazio di $\mathscr{E}^{(1)}(X)$ che contiene tutte le $\alpha \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ tali che, per ogni aperto U di X ed ogni $u \in \mathscr{O}(U)$, risulti $\alpha \wedge d\bar{u} = 0$ (risp. $\alpha \wedge du = 0$).

[11] Ciò significa che è bilineare e che (i): $\langle \xi | \mu \rangle = 0$ per ogni $\mu \in \mathrm{H}^{2-j}_c(X)$ se e soltanto se $\xi = 0$, (ii) $\langle \xi | \mu \rangle = 0$ per ogni $\xi \in \mathrm{H}^j(X)$ se e soltanto se $\mu = 0$.

Se z è una coordinata locale su un aperto U di X, abbiamo

$$\mathscr{E}^{(1,0)}(U) = \mathscr{E}^{(0)}(U)\, dz \quad \text{ed} \quad \mathscr{E}^{(0,1)}(U) = \mathscr{E}^{(0)}(U)\, d\bar{z}$$

(ove, se $z = x+iy$, è $dz = dx+idy$, e $d\bar{z} = dx-idy$).

Risultano così definiti due operatori

$$\partial : \mathscr{E}^{(0)}(X) \to \mathscr{E}^{(1,0)}(X) \quad \text{e} \quad \bar{\partial} : \mathscr{E}^{(0)}(X) \to \mathscr{E}^{(0,1)}(X) \tag{5.1}$$

che decompongono il differenziale:

$$d = \partial + \bar{\partial}. \tag{5.2}$$

I due operatori ∂ e $\bar{\partial}$ si esprimono, in una coordinata olomorfa locale z, mediante:

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial z} dz, \ \bar{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \quad \text{se} \quad u \in \mathscr{E}^{(0)}(X), \tag{5.3}$$

ove

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché una $f \in \mathscr{E}^{(0)}(U)$ sia olomorfa su un aperto U di X è che $\bar{\partial} f = 0$ in U.

Una 1-forma si esprime in coordinate locali mediante

$$\alpha = a\, dx + b\, dy = u\, dz + v\, d\bar{z}, \text{ con } a = u + v,\ b = i(u - v).$$

La definizione degli operatori ∂ e $\bar{\partial}$ si estende alle uno-forme, ponendo

$$\begin{cases} \partial\alpha = \dfrac{\partial a}{\partial z} dz \wedge dx + \dfrac{\partial b}{\partial z} dz \wedge dy = \dfrac{\partial v}{\partial z}\, dz \wedge d\bar{z} \\ \bar{\partial}\alpha = \dfrac{\partial a}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dx + \dfrac{\partial b}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dy = -\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}}\, dz \wedge d\bar{z}. \end{cases} \tag{5.4}$$

In particolare, per ogni funzione $u \in \mathscr{E}^{(0)}(X)$, risulta:

$$\partial\bar{\partial} u = -\bar{\partial}\partial u = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dz \wedge d\bar{z} = -\frac{i}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy. \tag{5.5}$$

Quindi, per ogni aperto Y di X, avremo la caratterizzazione dello spazio delle funzioni armoniche (a valori complessi)

$$\mathcal{H}(Y) := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{\mathbb{R}}(Y) = \{u \in \mathscr{E}^{(0)}(Y) \mid \partial\bar{\partial} u = 0\}. \tag{5.6}$$

In particolare, la definizione delle funzioni armoniche dipende dalla struttura complessa e non dalla scelta di una particolare metrica compatibile.

Indichiamo con $\Delta : \mathscr{E}^{(0)}(X) \to \mathscr{E}^{(2)}(X)$ l'operatore differenziale alle derivate parziali del secondo ordine definito da:

$$\Delta u = 2i\, \partial\bar{\partial}\, u \qquad \forall u \in \mathscr{E}^{(0)}(X). \tag{5.7}$$

Poiché, fissata una metrica Riemanniana g compatibile con la struttura complessa, con 2-forma associata ω_g, risulta:

$$\Delta u = (\Delta_2 u)\, \omega_g \qquad \forall u \in \mathscr{E}^{(0)}(X), \tag{5.8}$$

per la discussione svolta nel paragrafo precedente, vale il

Teorema 5.1. *Se X è connesso e compatto, una $u \in \mathscr{E}^{(0)}(X)$ che soddisfi $\partial\bar{\partial}u = 0$, cioè $\Delta\, u = 0$, è costante, e l'equazione*

$$\begin{cases} u \in \mathscr{E}^{(0)}(X) \\ \Delta\, u = 2i\,\partial\bar{\partial}u = \eta \in \mathscr{E}^{(2)}(X) \end{cases} \tag{5.9}$$

ammette soluzione se e soltanto se

$$\iint_X \eta = 0. \tag{5.10}$$

Se invece X è una superficie di Riemann connessa e non compatta, allora per ogni $\eta \in \mathscr{E}^{(2)}(X)$ esiste una $u \in \mathscr{E}^{(0)}(X)$ tale che $\Delta u = 2i\,\partial\bar{\partial}u = \eta$. □

Ricordiamo che per le 1-forme vale il:

Teorema 5.2 (Formula di Stokes). *Se ω è una 1-forma in X e D è una due-catena, allora*

$$\int_{\delta D} \omega = \iint_D d\omega. \tag{5.11}$$ □

Come conseguenza della formula di Stokes, elenchiamo nella proposizione seguente alcune formule utili di integrazione per parti.

Proposizione 5.3. *Siano X una superficie di Riemann ed $Y \subset X$ un aperto relativamente compatto, con frontiera di classe $\mathscr{C}^1$ a tratti.*

(I) *Siano $\alpha \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ ed $f \in \mathscr{E}^{(0)}(X)$. Allora:*

$$\int_{\delta Y} f\alpha = \iint_Y f\, d\alpha + \iint_Y (df) \wedge \alpha\,. \tag{5.12}$$

(II) *Se $\alpha \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ è chiusa, allora:*

$$\int_{\delta Y} \alpha \;=\; 0\,. \tag{5.13}$$

(III) *Siano $\alpha \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ ed $f \in \mathscr{E}^{(0)}(X)$. Se* $\operatorname{supp}(\alpha) \cap \operatorname{supp}(f)$ *è compatto in X, allora*

$$\iint_Y f\, d\alpha = \iint_Y \alpha \wedge df \tag{5.14}$$ □

Teorema 5.4. *Siano $\phi, \psi \in \mathscr{E}^{(0)}(X)$, con* $\operatorname{supp}(\phi) \cap \operatorname{supp}(\psi)$ *compatto in X. Allora*

$$\iint_X \phi\Delta\psi = \iint_X \psi\Delta\phi\,. \tag{5.15}$$

Dimostrazione. Abbiamo infatti :

$$\begin{aligned}\psi\,\partial\bar\partial\phi - \phi\,\partial\bar\partial\psi &= \psi\,\partial\bar\partial\phi + \phi\,\bar\partial\partial\psi\\ &= \psi\,d\bar\partial\phi + \phi\,d\partial\psi\\ &= d(\psi\,\bar\partial\phi + \phi\,\partial\psi) - d\psi\wedge\bar\partial\phi - d\phi\wedge\partial\psi\\ &= d(\psi\,\bar\partial\phi + \phi\,\partial\psi) - \partial\psi\wedge\bar\partial\phi - \bar\partial\phi\wedge\partial\psi\\ &= d(\psi\,\bar\partial\phi + \phi\,\partial\psi)\,.\end{aligned}$$

La tesi è allora una conseguenza del teorema di Stokes: poiché il differenziale $\psi\,\bar\partial\phi + \phi\,\partial\psi$ ha supporto compatto, otteniamo

$$\iint_X \psi\Delta\phi - \iint_X \phi\Delta\psi = 2i\iint_X d(\psi\,\bar\partial\phi + \phi\,\partial\psi) = 0, \qquad \square$$

Da questa formula, e dal teorema di regolarità per le soluzioni deboli (cioè nel senso delle distribuzioni) delle equazioni ellittiche, ricaviamo :

Teorema 5.5 (Lemma di Weyl). *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione (a valori complessi) $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ sia armonica (coincida cioè quasi ovunque con una funzione di $\mathcal{H}(X)$) è che*

$$\iint_X u\Delta\phi = 0, \quad \forall\phi\in\mathscr{E}^{(0)}_c(X). \tag{5.16}$$ $\square$

Teorema 5.6. *Sia X una superficie di Riemann connessa e non compatta. Allora l'equazione*

$$u\in\mathscr{E}^{(0)}(X),\quad \bar\partial u = \alpha \tag{5.17}$$

ammette soluzione per ogni $\alpha\in\mathscr{E}^{(0,1)}(X)$.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema sotto l'ulteriore ipotesi che X sia semplicemente connessa. Per il Teorema 5.1, possiamo trovare $v\in\mathscr{E}^{(0)}(X)$ tale che $\partial\bar\partial v=\partial\alpha$ su X. La forma differenziale $\alpha-\bar\partial v\in\mathscr{E}^{0,1}(X)$ è chiusa, perché

$$d(\alpha-\bar\partial v) = \partial(\alpha-\bar\partial v) = 0.$$

Per l'ipotesi che X fosse semplicemente connesso, possiamo allora trovare $w\in\mathscr{E}^{(0)}(X)$ per cui $d(w) = \alpha-\bar\partial v$. Questa ci dà $\alpha = \bar\partial u$, con $u=v+w$.

La dimostrazione del teorema nel caso generale si può ottenere nel modo seguente. Si introduce in X una metrica Riemanniana compatibile con la struttura complessa e si definisce un operatore differenziale

$$\mathfrak{d} : \mathscr{E}^{(0,1)}(X)\to\mathscr{E}^{(0)}(X) \;\text{ tale che }\; \iint_X(\bar\partial u|\alpha)d\lambda = \iint u\cdot\overline{\mathfrak{d}\alpha}d\lambda,$$
$$\forall u\in\mathscr{E}^{(0)}(X),\;\alpha\in\mathscr{E}^{(0,1)}(X),\;\text{con supp}(u\cdot\alpha)\Subset X.$$

Si considera l'operatore differenziale

$$\Delta' : \mathscr{E}^{(0,1)}(X) \ni \alpha \longrightarrow \bar{\partial}\mathfrak{d}\alpha \in \mathscr{E}^{(0,1)}(X).$$

Questo è un operatore ellittico per cui si possono dimostrare teoremi di esistenza e di approssimazione analoghi a quelli dimostrati per l'operatore di Laplace-Beltrami sulle funzioni. In particolare si dimostra che, se X è connessa e non compatta, allora $\Delta' : \mathscr{E}^{(0,1)}(X) \to \mathscr{E}^{(0,1)}(X)$ è surgettivo. Chiaramente, se $\beta = \Delta'\alpha$, allora $u = \mathfrak{d}(\alpha)$ è soluzione di $\bar{\partial}u = \beta$. □

6. Operatore $*$, forme armoniche e forme olomorfe

Sia X una superficie di Riemann, su cui fissiamo una metrica conforme g. Poiché X è orientata, possiamo associare a g la *forma d'area orientata* ω_g. Se $z{=}x{+}iy$ è una coordinata locale olomorfa in $U{\subset}X$, allora

$$h(z) = g\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = \tfrac{1}{4}\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\right), \tag{6.1}$$

$$g = 2 \cdot h(z) \cdot dz{\cdot}d\bar{z} = 2 \cdot h(z) \cdot (dx^2 + dy^2), \tag{6.2}$$

$$\omega_g = 4 \cdot h(z) \cdot dx \wedge dy = 2i \cdot h(z) \cdot dz \wedge d\bar{z}. \tag{6.3}$$

La forma ω_g è ben definita: non dipende cioè dalla scelta della coordinata locale. Infatti, se $\mathfrak{z} = \phi(z)$, con ϕ olomorfa, allora

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{z}) = g\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}}, \frac{\partial}{\partial \bar{\mathfrak{z}}}\right) = g\left(\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{z}}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\mathfrak{z}}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = \left|\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{z}}\right|^2 h(z) \quad \text{e}$$

$$d\mathfrak{z} \wedge d\bar{\mathfrak{z}} = \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}dz\right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{\mathfrak{z}}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) = \left|\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}\right|^2 dz \wedge d\bar{z}.$$

La metrica g induce prodotti scalari, che indichiamo con $(\cdot\,|\,\cdot)_g$, sulle fibre degli $\mathscr{E}^{(j)}$. Definiamo l'operatore:

$$* : \mathscr{E}^{(m)}(X) \to \mathscr{E}^{(2-m)}(X), \quad m = 0, 1, 2 \tag{6.4}$$

mediante:

$$\beta \wedge (*\alpha) = (\alpha \,|\, \beta)_g \omega_g, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathscr{E}^{(j)}(X) \;\; j = 0, 1, 2\,. \tag{6.5}$$

Fissiamo una carta locale olomorfa $z = x{+}iy$.

(6.6)

$$\begin{cases} *u \;=\; u \cdot \omega_g \quad \text{se} \quad u \in \mathscr{E}^{(0)}(X)\,, \\ *(a\,dx + b\,dy) \;=\; -b\,dx + a\,dy \quad \text{se} \quad \alpha = a\,dx + b\,dy \in \mathscr{E}^{(1)}(X)\,, \\ *\eta = v/\sqrt{|g|} \quad \text{se} \quad \eta = v\,dx \wedge dy \in \mathscr{E}^{(2)}(X)\,. \end{cases}$$

Osserviamo che $* : \mathscr{E}^{(1)}(X) \to \mathscr{E}^{(1)}(X)$ dipende solo dalla struttura complessa e non dalla metrica conforme g fissata.

Vale inoltre la formula

$$\Delta u = d(*(du)) = 2i\partial\bar{\partial}u, \quad \forall u \in \mathscr{E}^{(0)}(X)\,. \tag{6.7}$$

Definizione 6.1. Una 1-forma $\alpha \in \mathscr{E}^{(1)}$ si dice

- *esatta* se $\alpha = du$ per qualche $u \in \mathscr{E}^{(0)}(X)$;
- *coesatta* se $*\alpha = dv$ per qualche $v \in \mathscr{E}^{(0)}(X)$;
- *chiusa* se $d\alpha = 0$;
- *cochiusa* se $d(*\alpha) = 0$;
- *armonica* se per ogni punto $p \in X$ possiamo trovare un intorno aperto Y di p e una funzione $u \in \mathbb{C} \otimes \mathcal{H}(Y)$ tale che $\alpha|_Y = du$.

Indicheremo con $\mathcal{H}^{(1)}(X)$ lo spazio vettoriale delle forme armoniche su X.

Proposizione 6.1. *Una 1-forma $\alpha \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ è armonica se e solo se è chiusa e cochiusa.*

Dimostrazione. Infatti, se α è armonica, $d\alpha = 0$ perché α è localmente esatta. La formula (6.7) ci dice poi che α è cochiusa.

Viceversa, se α è chiusa, abbiamo localmente $\alpha = du$. Essendo anche cochiusa, avremo anche $d(*(du)) = 0$ e, per la (6.7), la u risulta armonica dov'è definita. □

Sia Y un aperto di X.

Definizione 6.2. Chiamiamo *differenziali olomorfi* i differenziali chiusi di $\mathscr{E}^{(1,0)}(Y)$. Indichiamo con $\Omega^1(Y)$ il sottospazio dei differenziali olomorfi di $\mathscr{E}^{(1,0)}(Y)$.

Proposizione 6.2. *Sia X una superficie di Riemann ed Y un aperto di X.*

(*a*) *Sia $\alpha \in \mathscr{E}^{(1,0)}(Y)$. Allora α è un differenziale olomorfo in Y se e soltanto se per ogni $p \in Y$ possiamo trovare un intorno aperto U di p in Y ed una $f \in \mathscr{O}(U)$ tale che $\alpha|_U = df$.*

(*b*) *Sia $u \in \mathscr{E}^{(0)}(Y)$. Allora $u \in \mathcal{H}(Y)$ se e soltanto se $\partial u \in \Omega^1(Y)$.*

(*c*) *Se $u, v \in \mathscr{O}(Y)$, allora $u \cdot dv \in \Omega^{(1)}(Y)$.*

(*d*) *Sia z una coordinata olomorfa su Y. Il differenziale $\alpha = udz + vd\bar{z}$ in $\mathscr{E}^{(1)}(Y)$ è olomorfo se e soltanto se*

$$v = 0 \ \text{ ed } \ u \in \mathscr{O}(Y).$$

(*e*) *Una forma $\alpha \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ è olomorfa se e soltanto se*

$$\alpha \in \mathscr{E}^{(1,0)}(X) \ \text{ e } \ d\alpha = 0.$$

Dimostrazione. (*a*) Una forma chiusa è localmente esatta. Se $\alpha = df$ su un aperto coordinato (U, z) in Y, allora

$$\alpha = a \cdot dz = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \ \Leftrightarrow \ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow f \in \mathscr{O}(U).$$

(b) Sia $u \in \mathscr{E}^{(0)}(Y)$. Se z è una coordinata locale su un aperto U di Y, allora $\partial u = u_z dz = u_z \partial z$, ove $u_z = \partial u/\partial z$. La condizione che ∂u sia un differenziale olomorfo equivale perciò al fatto che $d\partial u{=}\bar\partial\partial u{=}0$, cioè che $u{\in}\mathcal{H}(Y)$.

(b) Se $u, v \in \mathscr{O}(Y)$, abbiamo $d(u\,dv) = 0$. Infatti, se z è una coordinata locale su un aperto $U \subset Y$, $u\,dv = u\,(\partial v/\partial z)\,dz$ e quindi $d\,(u\,dv) = \bar\partial\,(u\,(\partial v/\partial z)){\wedge}dz$ e il secondo membro è uguale a zero in quanto $\bar\partial\,(u\,(\partial v/\partial z)) = 0$ perché $u\,(\partial v/\partial z)$ è olomorfa in U. Poiché $u\,dv$ è chiusa, essa è localmente esatta. Ma se $u\,dv = df$ su un aperto $U \subset Y$, con $f \in \mathscr{E}^{(0)}(U)$, avremo $\partial f = u\,dv$ e $\bar\partial f = 0$. Quindi f è olomorfa in U e ciò dimostra che $u\,dv$ è un differenziale olomorfo.

(c) Supponiamo ora che su Y sia definita una coordinata locale z. Se la forma $\alpha = u\,dz + v\,d\bar z \in \mathscr{E}^{(1)}(Y)$ è un differenziale olomorfo, allora per ogni punto p di Y possiamo trovare un intorno aperto U di p in Y ed una $f \in \mathscr{O}(U)$ tale che $df = \alpha$. Poiché $df = (\partial f/\partial z)\,dz$, avremo $u|_U = (\partial f/\partial z) \in \mathscr{O}(U)$ e $v|_U = 0$. Poiché una funzione localmente olomorfa è olomorfa e una funzione localmente nulla è nulla, concludiamo che $v = 0$ e $u \in \mathscr{O}(Y)$. Per la (b), le (i) e (ii) sono anche sufficienti affinché α sia un differenziale olomorfo.

(d) Sia Y un qualsiasi aperto di X. Se $u \in \mathscr{O}(Y)$, chiaramente $du \in \mathscr{E}^{(1,0)}(Y)$ ed è esatta. Quindi una forma olomorfa appartiene ad $\mathscr{E}^{(1,0)}(Y)$ ed è chiusa perché localmente esatta. Viceversa, una $\alpha \in \mathscr{E}^{(1,0)}(X)$ chiusa è localmente esatta. Fissiamo un qualsiasi aperto U di X su sui α sia esatta. Se $u \in \mathscr{E}^{(0)}(U)$ soddisfa $du = \alpha$, abbiamo $\partial u = du = \alpha$ e $\bar\partial u = 0$. Quindi $u \in \mathscr{O}(U)$. Per l'arbitrarietà di U questo dimostra che $\alpha \in \Omega(X)$. □

Proposizione 6.3. *Sia X una superficie di Riemann. Una 1-forma α è armonica se e soltanto se esistono due forme olomorfe α_1 e α_2 tali che*

$$\alpha = \alpha_1 + \overline{\alpha}_2\,. \tag{6.8}$$

Le forme $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega(X)$ in (6.8) *sono univocamente determinate.*

Dimostrazione. Osserviamo che, se $\alpha = \alpha^{(1,0)} + \alpha^{(0,1)}$ è la decomposizione di α nelle sue componenti in $\mathscr{E}^{(1,0)}(X)$ ed $\mathscr{E}^{(0,1)}(X)$, abbiamo :

$$*\,\alpha = -i\,\alpha^{(1,0)} + i\,\alpha^{(0,1)}\,. \tag{6.9}$$

La forma α è armonica se e soltanto se è al tempo stesso chiusa e cochiusa. Queste condizioni sono equivalenti al fatto che sia $\alpha^{(1,0)}$ che $\alpha^{(0,1)}$ siano forme chiuse. Per il punto (d) della Proposizione 6.2, $\alpha_1 = \alpha^{(1,0)}$ ed $\alpha_2 = \overline{\alpha^{(0,1)}}$ sono olomorfe. L'unicità segue dal fatto dall'unicità della decomposizione $\mathscr{E}^{(1)}{=}\mathscr{E}^{(1,0)}(X){\oplus}\mathscr{E}^{(0,1)}(X)$. □

Osserviamo che $*^2 = *{\circ}* : \mathscr{E}^{(1)}{\to}\mathscr{E}^{(1)}$ è l'applicazione che fa corrispondere ad ogni forma α la sua opposta $(-\alpha)$. Possiamo quindi caratterizzare i sottospazi $\mathscr{E}^{(1,0)}(X)$ e $\mathscr{E}^{(0,1)}(X)$ di $\mathscr{E}^{(1)}$ come gli autospazi relativi rispettivamente agli autovalori $(-i)$ e i dell'operatore $*$. Otteniamo in particolare la caratterizzazione :

Proposizione 6.4. *Sia X una superficie di Riemann. Una* 1*-forma* α *è olomorfa se una delle condizioni seguenti è soddisfatta :*

(1) *Esiste una forma armonica* β *tale che* $\alpha = \beta + i(*\beta)$*;*
(2) $d\alpha = 0$ *e* $*\alpha = -i\alpha$.

Dimostrazione. Il fatto che la (2) sia necessaria e sufficiente segue subito dal fatto che $\mathscr{E}^{(1,0)}$ è l'autospazio relativo all'autovalore $(-i)$ dell'operatore $*$ su $\mathscr{E}^{(1)}(X)$ e dalla (d) della Proposizione 6.2.

Supponiamo ora che β sia armonica. Allora è chiusa e cochiusa e quindi $\alpha = \beta+i(*\beta)$ è chiusa. Inoltre $*(\beta+i(*\beta)) = (*\beta)-i\beta = (-i)(\beta+i(*\beta))$ implica che $\alpha \in \mathscr{E}^{(1,0)}(X)$ e quindi $\alpha \in \Omega(X)$ per la (d) della Proposizione 6.2.

Viceversa, se $\alpha \in \Omega(X)$, allora sia α che $\bar{\alpha}$ sono differenziali armonici. Poniamo $\beta = (\alpha-\bar{\alpha})/2$. Allora β è un differenziale armonico, $*\beta = -i(\alpha+\bar{\alpha})$ e quindi $\alpha = \beta + i(*\beta)$ è la decomposizione in (1). □

7. Spazi di Hilbert di forme differenziali

Sia X una superficie di Riemann. Abbiamo osservato che l'applicazione $* : \mathscr{E}^{(1)}(X) \to \mathscr{E}^{(1)}(X)$ è definita in modo invariante a partire dalla struttura complessa di X.

Sia Y un qualsiasi aperto di X e indichiamo con $\mathscr{E}^{(1)}_c(Y)$ lo spazio delle 1-forme di $\mathscr{E}^{(1)}(X)$ che hanno supporto compatto contenuto in Y. Su di esso possiamo considerare la norma pre-Hilbertiana $\|\ \cdot\ \|_Y$ definita da :

$$\|\alpha\|^2_Y := \iint_Y \alpha \wedge (*\overline{\alpha}) \qquad \text{per} \quad \alpha \in \mathscr{E}^{(1)}_c(Y)\,. \tag{7.1}$$

Indichiamo con $\mathscr{L}^{(1)}(Y)$ il completamento di $\mathscr{E}^{(1)}_c(Y)$ rispetto a questa norma. Gli elementi di $\mathscr{L}^{(1)}(Y)$ sono le 1*-forme di quadrato sommabile* su Y. Osserviamo che, se $z = x + iy$ è una coordinata locale in un aperto $U \subset Y$, allora la restrizione ad U di una 1-forma $\alpha \in \mathscr{L}^{(1)}(Y)$ si può rappresentare come una 1-forma $u\,dz + v\,d\bar{z}$, con u e v funzioni (a valori complessi) misurabili e

$$\alpha \wedge (*\overline{\alpha}) = i\,(u\bar{u} + v\bar{v})\,dz \wedge d\bar{z} = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right) dx \wedge dy \qquad \text{in} \quad U\,. \tag{7.2}$$

Lo spazio $\mathscr{L}^{(1)}(Y)$ è uno spazio di Hilbert per il prodotto scalare :

$$(\alpha_1|\alpha_2)_Y = \iint_Y \alpha_1 \wedge (*\overline{\alpha}_2) \qquad \text{per} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{L}^{(1)}(Y)\,. \tag{7.3}$$

Osserviamo che l'operatore $*$ si estende con continuità a una isometria dello spazio di Hilbert $\mathscr{L}^{(1)}(Y)$. Si verifica infatti facilmente che $((*\alpha_1)|(*\alpha_2))_Y = (\alpha_1|\alpha_2)_Y$ per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{E}_c^{(1)}(Y)$ e quindi per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{L}^{(1)}(Y)$.

Proposizione 7.1. *Sia Y un aperto relativamente compatto della superficie di Riemann X, con frontiera ∂Y di classe $\mathscr{C}^1$ a tratti, e siano $\alpha \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$, $f \in \mathscr{E}^{(0)}(X)$. Allora:*

$$(df \mid *\,\alpha)_Y = \iint_Y f\, d\overline{\alpha} - \int_{\partial Y} f\, \overline{\alpha}\,. \tag{7.4}$$

Dimostrazione. Il primo membro della (7.4) è l'integrale su Y della forma differenziale $-(df) \wedge \overline{\alpha}$. Osserviamo che $-(df) \wedge \overline{\alpha} = -d(f\,\overline{\alpha}) + f\, d\overline{\alpha}$, ed applichiamo la formula di Stokes per ottenere (7.4) □

Proposizione 7.2. *Sia Y un aperto relativamente compatto della superficie di Riemann X, con frontiera ∂Y di classe $\mathscr{C}^1$ a tratti, e siano $\phi, \psi \in \mathscr{E}^{(0)}(X)$. Allora:*

$$(d\phi|d\psi)_\omega = \iint_Y \phi\, \Delta\bar{\psi} + \int_{\partial Y} *(\phi\, d\bar{\psi}) \tag{7.5}$$

$$= \iint_Y (\Delta\phi)\, \bar{\psi} + \int_{\partial Y} *(\bar{\psi}\, d\phi)\,. \tag{7.6}$$

Dimostrazione. Applichiamo la formula di Stokes, tenendo presente che

$$d\phi \wedge (*d\bar{\psi}) = d\left(\phi\,(*d\bar{\psi})\right) - \phi\, d(*d\bar{\psi}) \quad \text{e} \quad d(*d\bar{\psi}) = \Delta\bar{\psi}.$$

La seconda uguaglianza si ottiene dalla prima coniugando ambo i membri e scambiando tra loro ϕ e ψ. □

Proposizione 7.3. *Sia Y un aperto relativamente compatto della superficie di Riemann X, con frontiera ∂Y di classe $\mathscr{C}^1$ a tratti, e siano $\phi, \psi \in \mathscr{E}^{(0)}(X)$. Allora:*

$$(d\phi| *d\psi)_Y \;=\; -\int_{\partial Y} \phi\,(d\bar{\psi}) \;=\; \int_{\partial Y} \bar{\psi}\,(d\phi)\,. \tag{7.7}$$

Dimostrazione. Il primo membro della (7.7) è l'integrale su Y della forma

$$-d\phi \wedge d\bar{\psi} = -d(\phi\, d\bar{\psi}) = d(\bar{\psi}\, d\phi).$$

La (7.7) è quindi conseguenza della formula di Stokes. □

Proposizione 7.4. *Sia Y un aperto relativamente compatto della superficie di Riemann X, con frontiera ∂Y di classe $\mathscr{C}^1$ a tratti, sia $f \in \mathscr{E}^{(0)}(X)$ e sia $\alpha \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ una 1-forma chiusa. Allora:*

$$\int_{\partial Y} f\,\alpha \;=\; \iint_Y df \wedge \alpha\,. \tag{7.8}$$

Dimostrazione. La (7.8) segue dalla formula di Stokes e dal fatto che $d(f\,\alpha) = df \wedge \alpha$ perché abbiamo supposto che α sia chiusa. $\square$

Proposizione 7.5. *Sia Y un aperto relativamente compatto della superficie di Riemann X, con frontiera ∂Y di classe $\mathscr{C}^1$ a tratti, e siano $f \in \mathscr{O}(X)$ una funzione olomorfa ed $\alpha \in \Omega(X)$ una forma olomorfa su X. Allora:*

$$\iint_Y df \wedge \overline{\alpha} = 2\int_{\partial Y} (\operatorname{Re} f)\,\overline{\alpha} = 2i\int_{\partial Y} (\operatorname{Im} f)\,\overline{\alpha}\,. \tag{7.9}$$

Dimostrazione. Osserviamo che $f\,\alpha \in \Omega(X)$. In particolare $f\,\alpha$ è una 1-forma chiusa e quindi anche $\bar{f}\,\overline{\alpha}$ è chiusa e $\int_{\partial Y} \bar{f}\,\overline{\alpha} = 0$. Questa relazione si può scrivere:

$$2\int_{\partial Y} (\operatorname{Re} f)\,\overline{\alpha} = 2i\int_{\partial Y} (\operatorname{Im} f)\,\overline{\alpha} = \int_{\partial Y} f\,\overline{\alpha}\,.$$

La tesi segue allora dalla (7.8) (con $\overline{\alpha}$ al posto di α). $\square$

8. Forme armoniche e coomologia di de Rham

In questo paragrafo studieremo in particolare la coomologia di de Rham delle superficie di Riemann compatte.

Vale il seguente:

Teorema 8.1. *Sia X una superficie di Riemann compatta. L'applicazione:*

$$\mathcal{H}^{(1)}(X) \ni \alpha \to [\alpha] \in \mathrm{H}^1(X)\,, \tag{8.1}$$

che associa ad ogni 1-forma armonica in X la sua classe di coomologia di de Rham, è un isomorfismo lineare.

Dimostrazione. Mostriamo innanzi tutto che l'applicazione è iniettiva. Se $\alpha \in \mathcal{H}^{(1)}(X)$ ed esiste una $u \in \mathscr{E}^{(0)}(X)$ tale che $\alpha = du$, allora abbiamo:

$$\begin{aligned}
\|\alpha\|_X^2 &= \iint_X \alpha \wedge (*\bar{\alpha}) = \iint du \wedge (*\bar{\alpha}) \\
&= \iint d(u \wedge (*\bar{\alpha})) && \text{perché } \bar{\alpha} \text{ è cochiusa} \\
&= 0 && \text{per la formula di Stokes}
\end{aligned}$$

e quindi $\alpha = 0$.

Sia ora $\alpha \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ una 1-forma chiusa. Osserviamo ora che, sempre per la formula di Stokes, risulta

$$\iint_X d(*\alpha) = 0\,.$$

Per i risultati sull'operatore di Laplace che abbiamo richiamato nel §5, esiste una $u \in \mathscr{E}^{(0)}(X)$ tale che $d(*du) = \varDelta u = d(*\alpha)$. Allora $\alpha - du$ è una forma armonica, coomologa ad α in $\mathrm{H}^1(X)$. □

Una curva semplice chiusa γ su X *separa* X se $X\setminus|\gamma|$ non è connesso. Abbiamo :

Teorema 8.2. *Se esiste sulla superficie di Riemann X una curva semplice chiusa che non la separa, allora la classe di coomologia* $[\gamma]$ *di* γ *è* $\neq 0$. *Quindi esiste su X un differenziale armonico* $\neq 0$.

Dimostrazione. Poiché γ non separa X, vi è una curva semplice chiusa κ che interseca γ in un solo punto p. Sia U un intorno tubolare di $|\gamma|$ in X, che $|\gamma|$ divide in due componenti connesse $U^{\pm}$, con γ parte della frontiera orientata di U^-. Se f è una funzione di $\mathscr{E}^{(0)}(X)$ con supporto in un intorno tubolare U di $|\gamma|$, uguale a 1 in un intorno tubolare $U' \subset U$ di $|\gamma|$, e poniamo

$$\eta_\gamma = \begin{cases} df & \text{in} \quad U^- \\ 0 & \text{in} \quad X\setminus U^- . \end{cases}$$

Allora :

$$\langle[\kappa], [\gamma]\rangle = \int_\kappa \eta_\gamma = 1 \neq 0$$

dimostra che le classi di coomologia $[\kappa]$ e $[\gamma]$ non sono nulle. □

9. Esistenza di funzioni meromorfe

In questo paragrafo studiamo l'esistenza di funzioni meromorfe su superfici di Riemann compatte.

Siano X ed Y due superfici di Riemann.

Definizione 9.1. Un'applicazione continua $f : X \to Y$ è *olomorfa* se, per ogni punto p_0 possiamo trovare una carta coordinata (U, z) con centro p_0 in X ed una carta coordinata (V, w) di centro $q_0 = f(p_0)$ in Y tali che $f(U) \subset V$ e la funzione $w = F(z)$ definita dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ z(U) & \xrightarrow{F} & w(V) \end{array} \tag{9.1}$$

sia olomorfa.

Lemma 9.1. *Sia X una superficie di Riemann ed A un sottoinsieme discreto di X. Per una funzione $f \in \mathscr{O}(X\setminus A)$ sono equivalenti:*

(i) *Per ogni punto* $p_0 \in A$ *possiamo trovare un intorno aperto* U *di* p_0 *e due funzioni* $g, h \in \mathscr{O}(U)$, *con* $h(p) \neq 0$ *se* $p \in U \backslash A$, *tale che*

$$f(p) = \frac{g(p)}{h(p)}, \quad \forall p \in U \backslash A.$$

(ii) *La* f *è la restrizione ad* $X \backslash A$ *di un'applicazione olomorfa* $\tilde{f}: X \to \mathbb{CP}^1$ *con* $\tilde{f}^{-1}(\infty) \subseteq A$. □

Definizione 9.2. Una funzione f che soddisfi le condizioni equivalenti del Lemma 9.1 si dice *meromorfa* su X. Chiamiamo $f^{-1}(0)$ l'insieme degli *zeri* ed $\tilde{f}^{-1}(\infty)$ quello dei *poli* di f.

Indichiamo con $\mathfrak{M}(X)$ lo spazio delle funzioni meromorfe su X e con $\mathfrak{M}^*(X)$ quello delle funzioni meromorfe che non sono nulle su nessuna componente connessa di X.

Osserviamo che $\mathfrak{M}(X)$ è un anello ed un'algebra complessa unitaria e commutativa con le usuali operazioni di somma e prodotto di funzioni e di prodotto di una funzione per uno scalare e che $\mathfrak{M}^*(X)$ è un gruppo abeliano con l'operazione di moltiplicazione di funzioni.

Se X è connessa, allora $\mathfrak{M}(X)$ è un campo.

Siano $f \in \mathfrak{M}^*(X)$, p_0 un punto di X ed (U, z) una carta locale con centro p_0.

Definizione 9.3. Se $f(p_0) = 0$, chiamiamo *ordine di zero* di f in p_0 il più grande intero positivo ν per cui $z^{-\nu} \cdot f$ sia limitata in un intorno di p_0.

Se $\tilde{f}(p_0) = \infty$, chiamiamo *ordine di polo* di f in p_0 il più piccolo intero positivo per cui $z^{\nu} \cdot f$ sia limitata in un intorno di p_0.

Una funzione meromorfa f su X definisce una distribuzione su X. Vale infatti

Lemma 9.2. *La*

$$T : \mathscr{D}(\mathbb{C}) \ni \phi \longrightarrow \iint_{\mathbb{C}} \phi \cdot \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z} \in \mathbb{C} \tag{9.2}$$

definisce una distribuzione su $\mathbb{C}$ *con*

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = 2\pi i \delta_0. \tag{9.3}$$

Dimostrazione. La funzione z^{-1} è localmente integrabile in $\mathbb{C}$ e definisce quindi una distribuzione su $\mathbb{C}$. Abbiamo

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{z}}(\phi) = -\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z} = \lim_{r \to 0^+} \iint_{|z|>r} d\left(\frac{\phi \cdot dz}{z}\right) = \lim_{r \to 0^+} \oint_{|z|=r} \frac{\phi \cdot dz}{z}$$
$$= i \lim_{r \to 0^+} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(r \cdot \exp(it))\, dt = 2\pi i \cdot \phi(0) = 2\pi i \cdot \delta_0(\phi).$$

□

Corollario 9.3. *Ogni funzione meromorfa f su X definisce una distribuzione su X per cui $\partial f/\partial\bar{z}$ ha supporto discreto.*

Dimostrazione. Poiché $z^{-m} = m! \cdot (-\partial/\partial z)^m(z^{-1})$, una funzione meromorfa è localmente la derivata di una distribuzione e quindi una distribuzione. □

Consideriamo il quoziente

$$\mathrm{H}^1_{\bar\partial}(X) = \mathscr{E}^{0,1}(X)/(\bar\partial\mathscr{E}^{(0)}(X)), \tag{9.4}$$

conucleo del differenziale antiolomorfo $\bar\partial : \mathscr{E}^{(0)}(X) \to \mathscr{E}^{0,1}(X)$. Ricordiamo che si tratta di un operatore ellittico.

Proposizione 9.4. *Se X è una superficie di Riemann, abbiamo una successione esatta di spazi vettoriali ed applicazioni $\mathbb{C}$-lineari:*

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(X) \longrightarrow \mathfrak{M}(X) \xrightarrow{\partial/\partial\bar{z}} \mathcal{D}^{-}(X) \xrightarrow{\vartheta} \mathrm{H}^1_{\bar\partial}(X) \tag{9.5}$$

ove abbiamo indicato con $\mathcal{D}^-(X)$ lo spazio vettoriale delle distribuzioni su X il cui supporto è discreto e che sono, nell'intorno di un punto del loro supporto, combinazioni lineari complesse di derivate olomorfe della delta di Dirac.

Dimostrazione. L'applicazione $\mathscr{O}(X) \to \mathfrak{M}(X)$ è l'inclusione e chiaramente la (9.5) è ben definita ed esatta in $\mathscr{O}(X)$ ed in $\mathfrak{M}(X)$. Ci resta da definire ϑ in modo che la (9.5) sia esatta anche in $\mathcal{D}^-(X)$. Sia $T \in \mathcal{D}^-(X)$ ed $A = \mathrm{supp}(T)$. Per ogni punto $a \in A$ possiamo trovare una funzione meromorfa f_a, definita in un intorno U_a di a che non contenga altri punti di A, tale che $\bar\partial f_a = T$ su U_a. Possiamo trovare funzioni χ_a, i cui supporti formano un sistema localmente finito di chiusi due a due disgiunti, con $\chi_a(p) = 1$ in un intorno del punto a. La $h{=}\sum_{a\in A}\chi_a f_a$ è definita e di classe $\mathscr{C}^\infty$ su $X\backslash A$. Inoltre, per ogni $a{\in}\mathcal{R}$ v'è un intorno W_a di a tale che $\bar\partial h = 0$ su $W_a\backslash\{a\}$. Possiamo allora definire una forma $\bar\partial$-chiusa $\psi{\in}\mathscr{E}^{0,1}(X)$, ponendola uguale a $\bar\partial h$ su $X\backslash A$ ed uguale a zero nei punti di A. Si verifica facilmente che la classe α di ψ in $\mathrm{H}^1_{\bar\partial}(X)$ non dipende dalle scelte delle $\{f_a\}$ e delle χ_a. Se si potesse trovare una funzione $u{\in}\mathscr{C}^\infty(X)$ tale che $\bar\partial u{=}\alpha$, allora la $f{=}(\sum_{a\in A}\chi_a f_a){-}u$ sarebbe olomorfa su $X\backslash A$ e definirebbe una funzione meromorfa $\tilde{f}$ con $\bar\partial\tilde{f}{=}T$. □

Teorema 9.5 (Mittag-Leffler). *Se X è una superficie di Riemann connessa e non compatta, allora per ogni elemento T di $\mathcal{D}^-(X)$ esiste una funzione meromorfa f su X con $\bar\partial f = T$.*

Dimostrazione. Il teorema è conseguenza della Proposizione 9.4 e del fatto che, per il Teorema 5.6, $H^1_{\bar\partial}(X){=}0$ quando X è una superficie di Riemann connessa e non compatta. □

CAPITOLO VIII

Il teorema di uniformizzazione

Il teorema di uniformizzazione stabilisce che ogni varietà riemanniana si può mettere in bigezione conforme con una superficie riemanniana a curvatura gaussiana costante. Questo enunciato, congetturato da Felix Klein ed Henri Poincaré nel 1883-84, fu dimostrato da Felix Klein[1], Paul Koebe[2] ed Henri Poincaré[3] in una serie di successivi lavori, dal 1883 al 1907.

1. Il caso compatto

Teorema 1.1. *Ogni superficie di Riemann connessa, compatta e semplicemente connessa è biolomorfa alla sfera di Riemann* $\mathbb{CP}^1$.

Dimostrazione. Siano X una superficie di Riemann connessa, compatta e semplicemente connessa. Fissiamo su X una metrica riemanniana compatibile g e due punti distinti p, q, che appartengano a uno stesso aperto coordinato (U, z). Possiamo supporre che $\{|z|\leq 4\} \subset U$ e che $z(p)=0$, $z(q)=1$.

Vogliamo costruire una funzione meromorfa su X che abbia uno zero semplice in p, un polo semplice in q e che sia olomorfa e non nulla in tutti i punti di $X\setminus\{p, q\}$.

Sia χ una funzione $\mathscr{C}^\infty_0(\mathbb{R})$, con $\chi(t)=1$ se $|t|\leq 4$ e $\chi(t)=0$ se $|t|\geq 9$. Allora $\bar\partial\chi(z\bar z) = z\,\chi'(z\bar z)\,d\bar z$ e $\partial\chi(z\bar z) = \bar z\,\chi'(z\bar z)\,dz$. Definiamo una forma $\alpha\in\mathscr{E}^{(0,1)}(X)$ scegliendo una determinazione del logaritmo di $z/(1-z)$ su $D_0(4)\setminus[0,1]$ e ponendo

$$\alpha = \begin{cases} z\cdot \log[z/(1-z)]\,\chi'(z\bar z)\,d\bar z & \text{se } 2\leq|z|\leq 3,\\ 0, & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Osserviamo che $\partial\alpha \in \mathscr{E}^{1,1}(X)$ è ortogonale alle costanti. Infatti

$$\iint_X \partial\alpha = \iint_{2\leq|z|\leq 3} d\alpha = \oint_{|z|=3}\alpha - \oint_{|z|=2}\alpha = 0$$

---

[1]Felix Klein, *Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie*, Mathematische Annalen, (1883), pp. 21141-218

[2]Paul Koebe, *Über die Uniformisierung reeller analytischer Kurven*, Göttinger Nachrichten (1907), pp.177-190, 191-210, 633-669.

[3]Henri Poincaré, *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques*, Acta Math., vol. 31, (1907), pp. 1-64

perché α è nulla sui bordi della corona circolare $\{2\leq|z|\leq 3\}$. Per il Teorema 5.1 del Cap. VII possiamo allora trovare una funzione $w \in \mathscr{E}^{(0,0)}(X)$ per cui $\partial\bar{\partial}w = \partial\alpha$. Possiamo rileggere questa uguaglianza come

$$d(\alpha - \bar{\partial}w) = 0.$$

Poiché abbiamo supposto che X fosse semplicemente connesso, possiamo allora trovare una funzione $v \in \mathscr{E}^{(0,0)}(X)$ tale che $dv = \alpha - \bar{\partial}w$. Abbiamo allora $\partial v = 0$ e, con $u = v+w \in \mathscr{E}^{(0,0)}(X)$, otteniamo che

$$\bar{\partial}u = \alpha \quad \text{in } X.$$

Allora la funzione

$$f(\mathfrak{z}) = \begin{cases} \dfrac{z}{z-1}\exp(-u), & \text{se } \mathfrak{z} \in U \text{ e } |z(\mathfrak{z})|\leq 2, \\ \exp(\chi(z)\log[z/(z-1)] - u), & \text{se } \mathfrak{z}\in U \text{ e } 2<|z(\mathfrak{z})|\leq 3, \\ \exp(-u), & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

è meromorfa, con un unico polo semplice in q, un unico zero semplice in p, ed è olomorfa e diversa da zero nei punti di $X\setminus\{p, q\}$.

Verifichiamo che essa è una bigezione di X su $\mathbb{CP}^1$.

Poiché f è meromorfa non costante su X, per ogni $w\in\mathbb{C}^*$ il sottoinsieme $f^{-1}(w)$ di X è discreto ed il differenziale $df/(f-w)$ è definito e chiuso su $X\setminus f^{-1}(w)$. Se γ è un cammino chiuso che borda un dominio di X contenente $f^{-1}(w)$, allora

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{df}{f-w}$$

conta, con la loro molteplicità, le radici dell'equazione $f(\mathfrak{z})=w$ in X. Poiché $f(\mathfrak{z})\to\infty$ per $\mathfrak{z}\to q$ ed f è limitata su $X\setminus U$, possiamo fissare un numero reale ϵ, con $0<\epsilon<1$, tale che $\mu=\min_{|z-1|\geq\epsilon}|f(z)|>2|w|$. Quindi, la frontiera ∂G di $G=\{z\in U \,|\, |z-1|\leq\epsilon\}$, che è la circonferenza $|z-1| = \epsilon$, percorsa in senso antiorario, è la frontiera di un dominio che contiene tutte le radici di $f(\mathfrak{z})=w$. Il loro numero è dato dall'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=\epsilon}\frac{f'(z)}{f(z)-w}dz\,.$$

Ora, questo integrale vale 1 se $w = 0$ e si mantiene costante se $|w|<\mu$. Questo ci dice che vi è una e una sola soluzione dell'equazione $f(\mathfrak{z}) = w$ in X. La dimostrazione è completa. □

COROLLARIO 1.2. *Sia X una varietà Riemanniana orientabile, connessa, compatta e semplicemente connessa. Allora la metrica g di X è conforme a una metrica g′ con curvatura positiva costante uguale ad* 1. □

2. Il teorema dell'anello su una superficie di Riemann

Nella dimostrazione del teorema di uniformizzazione per il caso non compatto utilizzeremo un *teorema dell'anello* (cf. Teorema 8.5 del Cap.VI) per varietà riemanniane astratte.

Teorema 2.1 (dell'anello). *Siano X una superficie di Riemann ed Ω un suo aperto relativamente compatto tale che*

(i) *$\partial\Omega$ è unione di due curve di Jordan $\gamma_1,\ \gamma_2$ regolari di classe $\mathscr{C}^\infty$:*

$$\partial\Omega = \gamma_1\ -\ \gamma_2\,.$$

(ii) *$\bar{\Omega}$ è diffeomorfo al cilindro* $[-1,1]\times\mathbf{S}^1$.

Risulta univocamente determinato un numero reale $R{>}1$ per cui esista un'applicazione conforme $f:\Omega\to A_0(1,R){=}\{w{\in}\mathbb{C}\mid 1{<}|w|{<}R\}$.

Dimostrazione. Fissiamo una metrica Riemanniana g su X, compatibile con la struttura complessa. Sia $u\in\mathscr{C}^\infty(\bar{\Omega})$ la soluzione del problema di Dirichelet:

$$\begin{cases} \varDelta_2 u = 0, & \text{in} \quad \Omega\,, \\ u = 0, & \text{su} \quad \gamma_1\,, \\ u = 1, & \text{su} \quad \gamma_2\,. \end{cases}$$

Consideriamo la forma differenziale[4]

$$\eta = d^c u = i(\bar{\partial}-\partial)u,$$

Essa è chiusa in Ω. L'immagine γ di $\{0\}\times\mathbf{S}^1$ nel diffeomorfismo del punto (ii) genera il gruppo fondamentale di $\bar{\Omega}$. Abbiamo:

$$\oint_{\partial\Omega}\eta = \oint_{\gamma_2}\eta = \oint_{\gamma_2} u\cdot\eta - \oint_{\gamma_1} u\cdot\eta = \iint_{\Omega} d(u\cdot\eta) > 0$$

in quanto, in coordinate locali,

$$d(u\cdot\eta) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\wedge dy$$

ed u non è costante in Ω. Moltiplicando u per una costante reale k positiva, possiamo fare in modo che

$$\oint_{\gamma} k\cdot\eta = 2\pi.$$

[4]In una qualsiasi coordinata olomorfa $z = x + iy$ la $d^c u$ ha l'espressione

$$d^c u = -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy.$$

Indichiamo con v la primitiva della forma $k{\cdot}\eta$ definita sulla controimmagine di $[-1,1]\times\left(\mathbf{S}^1\setminus\{i\}\right)$ in $\bar{\Omega}$ mediante il diffeomorfismo in (*ii*). La $f = \exp(k{\cdot}u + iv)$ si estende a una funzione olomorfa in Ω e continua su $\bar{\Omega}$, a valori nell'anello $\{1\leq|w|\leq e^k\}$. Per il principio di massimo è $0<u<1$ su Ω e dunque la f è un'applicazione propria di Ω sull'anello $\{1<|w|<e^k\}$. Ne segue che è aperta e chiusa e quindi surgettiva. Poniamo $R = e^k$. Il numero di volte in cui un valore $w\in\mathbb{C}$, con $1<|w|<R$, è assunto dalla f, è dato dall'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{\gamma_2}\frac{df}{f-w} - \oint_{\gamma_1}\frac{df}{f-w}\right).$$

Poiché $(df/f){=}k(du + i\eta)$, per $w = 0$, otteniamo

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_i}\frac{df}{f} = \frac{k}{2\pi}\oint_{\gamma_i}\eta = 1, \quad \text{per} \quad i = 1, 2,$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{df}{f-w} = 1 \quad \text{per} \quad |w| < R\,.$$

D'altra parte, se $|w| > R$, la $f(p)-w$ assume su Ω valori tutti contenuti in un semipiano di $\mathbb{C}$ non contenente 0 e quindi è possibile definire la funzione $\log(f-w)$ su Ω. Otteniamo perciò

$$\oint_{\gamma_1}\frac{df}{f-w} = \oint_{\gamma_1} d\log(f-w) = 0, \quad \text{se} \quad |w| > R.$$

Ne segue che

$$\oint_{\gamma_1}\frac{df}{f-w} = 0 \qquad \text{se} \quad |w| > 1.$$

Otteniamo perciò:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega}\frac{df}{f-w} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 1 < |w| < R. \\ 0, & \text{se} \quad |w|<1 \ \text{ oppure } \ |w|>R. \end{cases}$$

Ciò mostra che f è un'applicazione conforme di Ω sull'anello $\{1<|w|<R\}$. □

3. Il teorema di uniformizzazione nel caso non compatto

Osserviamo preliminarmente che, con dimostrazione analoga a quella svolta nel caso di aperti della sfera di Riemann $\mathbb{CP}^1$, vale il teorema di compattezza di Koebe:

Teorema 3.1. *Sia X una superficie di Riemann connessa. Fissati $p_0\in X$ ed $\alpha_0\in\mathbb{C}\otimes T^*_{p_0}X$, l'insieme*

(3.1) $\mathcal{S}(p_0,\alpha_0,X) = \{f \in \mathcal{O}(X) \mid f \text{ è univalente e } f(p_0) = 0,\ df(p_0) = \alpha_0\}$

è compatto. □

Dimostriamo ora il teorema di uniformizzazione:

Teorema 3.2. *Sia X una superficie di Riemann connessa, semplicemente connessa e non compatta. Allora esiste un'applicazione conforme di X su un aperto Ω di $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Per l'ipotesi che X non sia compatta, possiamo trovare un'applicazione $\rho \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ con $\sup_X \rho{=}+\infty$ ed $X_r{=}\{p{\in}X \mid \rho(p){<}r\}{\Subset}X$ per ogni $r{\in}\mathbb{R}$.

Sia $\mu = \min_{p\in X} \rho(p)$. Per il teorema di Sard, l'insieme dei valori critici di ρ, cioè dei numeri reali $\{r{=}f(p) \,|\, df(p){=}0\}$, ha misura nulla ed è di prima categoria: in particolare per quasi tutti i valori di r l'aperto X_r ha frontiera regolare di classe $\mathscr{C}^\infty$. Fissiamo un punto p_0 di X con $\rho(p_0) = \mu$ e per ogni $r{>}\mu$ indichiamo con Y_r la componente connessa di p_0 in X_r. In questo modo otteniamo una famiglia a un parametro di aperti connessi $\{Y_r \,|\, r{>}\mu\}$ tale che $Y_r \Subset Y_{r'}$ se $r < r'$ ed $X = \bigcup_{r>\mu} Y_r$.

Dimostriamo che, per ogni $r{>}\mu$, è possibile definire un'applicazione olomorfa univalente f_r di Y_r in $\mathbb{C}$. Chiaramente è sufficiente considerare il caso in cui Y_r abbia frontiera regolare di classe $\mathscr{C}^\infty$. Fissiamo un tale r e siano $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ le componenti connesse della sua frontiera. Fissato un numero reale positivo ϵ sufficientemente piccolo, possiamo trovare intorni aperti U_j di γ_j (per $1{\le}j{\le}t$) tali che gli aperti $A_j = U_j \cap \{r{-}\epsilon{<}\rho{<}r{+}\epsilon\}$ soddisfino le ipotesi del teorema dell'anello. Possiamo allora definire applicazioni conformi $f_j : A_j \to \{1{<}|w|{<}R_j\}$, che si estendono ad applicazioni continue $f_j : \overline{A}_j \to \{1{\le}|w|{\le}R_j\}$, per $1{\le}j{\le}t$, in modo che risulti $f_j(U_j \cap \{\rho{=}r{-}\epsilon\}) = \{|w|{=}R_j\}$ ed $f_j(U_j \cap \{\rho{=}r{+}\epsilon\}) = \{|w|{=}1\}$.

Sia $D_j{=}\{|w|{<}r_j\}$ un disco con $1{<}r_j{<}R_j$ tale che $f_j(\gamma_j)$ sia contenuto nell'anello $\{1{<}|w|{<}r_j\}$.

Definiamo allora $\tilde{Y}_r$ mediante incollamento, identificando, nell'unione disgiunta $Y \sqcup D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_t$ i punti p di $A_j \cap Y_r$ con le loro immagini mediante f_j in D_j. Su $\tilde{Y}_r$ è definita in modo naturale una struttura di superficie di Riemann compatta.

Verifichiamo che $\tilde{Y}_r$ è semplicemente connessa. A questo scopo è sufficiente mostrare che ogni 1-forma chiusa su $\tilde{Y}_r$ è esatta.

Indichiamo con $\tilde{\mathrm{D}}_j$ l'immagine di D_j in $\tilde{Y}_r$ e identifichiamo Y_r alla sua immagine dentro $\tilde{Y}_r$. Se η è una 1-forma chiusa in $\tilde{Y}_r$, possiamo trovare funzioni $\phi_j \in \mathscr{C}^\infty(\tilde{\mathrm{D}}_j)$ tali che $d\phi_j = \eta$ in $\tilde{\mathrm{D}}_j$. Fissate delle $\chi_j \in \mathscr{C}^\infty_0(\tilde{\mathrm{D}}_j)$ che siano uguali a 1 in un intorno del compatto $\tilde{\mathrm{D}}_j \backslash Y_r$, consideriamo la forma $\eta_1 = \eta - \sum_{j=1}^t d(\chi_j \phi_j)$. Essa è chiusa e ha supporto compatto in Y_r: in particolare definisce una forma chiusa su X. Poiché X è semplicemente connesso, possiamo trovare una funzione $v \in \mathscr{C}^\infty(X)$ tale che $dv = \eta_1$ in

X. La funzione $\lambda = 1-\chi_1-\cdots-\chi_t$ è uguale ad 1 in un intorno di $\overline{Y}_r$ in $\tilde{Y}_r$ e quindi $\lambda{\cdot}v$ è una funzione di classe $\mathscr{C}^\infty$ su $\tilde{Y}_r$. Ne segue che $\eta_1 - d(\lambda v) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_t$ con α_j una 1-forma chiusa a supporto compatto in $\tilde{\mathrm{D}}_j$. Ma abbiamo allora $\alpha_j = d\beta_j$ per funzioni β_j in $\mathscr{C}_0^\infty(\tilde{\mathrm{D}}_j)$. Quindi

$$\eta = d\left(\sum_{j=1}^{t}\left(\chi_j\phi_j + \beta_j\right) + \lambda v\right)$$

è esatta. Ciò dimostra che $\tilde{Y}_r$ è semplicemente connessa e quindi, per il teorema di uniformizzazione nel caso compatto, è biolomorfa a $\mathbb{CP}^1$. Da questo segue che esiste un'applicazione olomorfa univalente $f_r : Y_r \to \mathbb{C}$.

Fissiamo adesso un covettore $\alpha_0 \neq 0$ in p_0. A meno di cambiare f_r in $af_r + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$ opportuni, possiamo fare in modo che $f(p_0) = 0$ e $df(p_0) = \alpha_0$. Per il teorema di compattezza di Koebe, le $\{f_r\}_{r>s}$ formano allora, per ogni $s > \mu$, un sottoinsieme relativamente compatto di $\mathscr{O}(Y_s)$. Possiamo allora trovare una successione $\{f_{r_n}\}$ che converge ad una funzione olomorfa univalente su X. □

4. Il teorema di uniformizzazione di Riemann

I risultati dei paragrafi precedenti si riassumono nel *Teorema di uniformizzazione di Riemann*:

Teorema 4.1. *Sia X una superficie di Riemann connessa e semplicemente connessa. Allora si possono dare i tre casi seguenti, e ciascuno esclude gli altri due:*

(A) *X è compatta e biolomorfa a $\mathbb{CP}^1$;*
(B) *X non è compatta ed è biolomorfa a $\mathbb{C}$;*
(C) *X non è compatta ed è biolomorfa a* D. □

Osserviamo che una X connessa, semplicemente connessa e non compatta è biolomorfa a D se e soltanto se $\mathscr{O}(X)$ contiene funzioni olomorfe limitate non costanti.

Consideriamo ora il caso di superfici di Riemann che non siano necessariamente semplicemente connesse. Vale il:

Teorema 4.2. *Siano X una superficie di Riemann, Σ uno spazio topologico di Hausdorff e $\sigma : \Sigma \to X$ un omeomorfismo locale. Allora vi è un'unica struttura complessa su Σ che renda la σ olomorfa.* □

In particolare otteniamo:

Teorema 4.3. *Siano X una superficie di Riemann connessa ed $\tilde{X}$ il suo rivestimento universale. Vi è allora un'unica struttura di superficie di Riemann su $\tilde{X}$ per cui la proiezione canonica $\pi : \tilde{X} \to X$ sia olomorfa. Per ogni $p \in X$, la fibra $\pi^{-1}(p)$ è finita o, al più, numerabile.* □

Ogni rivestimento connesso di una superficie di Riemann ha al più un'infinità numerabile di fogli. Ciò è conseguenza del risultato generale:

TEOREMA 4.4 (Poincaré-Volterra). *Siano Σ ed X due spazi di Hausdorff connessi e $\sigma : \Sigma \to X$ un omeomorfismo locale. Se X è localmente connesso per archi e a base numerabile, anche Σ è a base numerabile.* □

Siano X uno spazio topologico e $\mathbf{G}$ un gruppo che opera su X come gruppo di omeomorfismi.

DEFINIZIONE 4.1. Diciamo che $\mathbf{G}$ opera *in modo propriamente discontinuo* se per ogni punto $p \in X$ esiste un intorno U di p tale che

$$g_1, g_2 \in \mathbf{G} \quad \text{e} \quad g_1 \neq g_2 \Longrightarrow g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset. \tag{4.1}$$

Se X è localmente compatto ciò equivale a:

(*i*) $\mathbf{G}$ opera *liberamente* su X (cioè, se $g \in \mathbf{G}$ e $g(x) = x$ per un $x \in X$, allora $g = e =$ identità);
(*ii*) per ogni coppia di compatti K_1, K_2 di X l'insieme delle trasformazioni g di $\mathbf{G}$ per cui $g(K_2) \cap K_1 \neq \emptyset$ è finito.

Vale il

TEOREMA 4.5. *Siano X una superficie di Riemann e $\mathbf{G}$ un gruppo propriamente discontinuo di biolomorfismi di X. Allora vi è una ed una sola struttura di superficie di Riemann sul quoziente $\hat{X} = X/\mathbf{G}$ che renda la proiezione nel quoziente $\pi : X \to \hat{X}$ olomorfa.* □

Nel seguito, quando parleremo di *rivestimenti* di superfici di Riemann, supporremo sempre definita sullo spazio del rivestimento la struttura di superficie di Riemann che rende la proiezione olomorfa.

Per il teorema di uniformizzazione di Riemann abbiamo allora:

TEOREMA 4.6 (Riemann). *Ogni superficie di Riemann connessa ammette come rivestimento universale una delle tre superfici di Riemann seguenti (con esclusione delle altre due):* $\mathbb{CP}^1$, $\mathbb{C}$, D. □

DEFINIZIONE 4.2. Una superficie di Riemann X si dice:

- *ellittica*, se ammette come rivestimento universale $\mathbb{CP}^1$;
- *parabolica*, se ammette come rivestimento universale $\mathbb{C}$;
- *iperbolica*, se ammette come rivestimento universale D.

TEOREMA 4.7 (di rappresentazione). *Ogni superficie di Riemann connessa X è biolomorfa a $\Sigma/\mathbf{G}$, ove Σ è una delle superfici di Riemann connesse e semplicemente connesse* $\mathbb{CP}^1$, $\mathbb{C}$, D, *e $\mathbf{G}$ è un gruppo propriamente discontinuo di trasformazioni di Möbius di Σ.* □

Corollario 4.8. *A meno di equivalenza conforme, $\mathbb{CP}^1$ è l'unica superficie di Riemann ellittica.*

Dimostrazione. Infatti ogni trasformazione di Möbius ha in $\mathbb{CP}^1$ almeno un punto fisso e quindi non ci sono sottogruppi non banali di trasformazioni di Möbius che operino su $\mathbb{CP}^1$ in modo propriamente discontinuo. □

Teorema 4.9 (del sollevamento). *Siano X_1, X_2 due superfici di Riemann ed $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ i loro rivestimenti universali. Allora ogni applicazione olomorfa $f : X_1 \to X_2$ si solleva a un'applicazione olomorfa $\tilde{f} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, in modo tale che il diagramma*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \tilde{X}_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ X_1 \arrow[r, "f"'] & X_2 \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

risulti commutativo.

Inoltre: se f è conforme, anche $\tilde{f}$ è conforme; se f è univalente, anche $\tilde{f}$ è univalente; se f è surgettiva, anche $\tilde{f}$ è surgettiva. □

CAPITOLO IX

Superfici di Riemann paraboliche

Ricordiamo che le superfici di Riemann paraboliche hanno metriche conformi di curvatura nulla e quindi, per il terema di uniformizzazione, rivestimento $\mathbb{C}$.

1. Classificazione topologica

Siano X una superficie di Riemann parabolica e $\pi : \mathbb{C} \to X$ il suo rivestimento universale. Il gruppo Ω degli automorfismi del rivestimento è un gruppo propriamente discontinuo di trasformazioni di Möbius di $\mathbb{C}$, e quindi un sottogruppo discreto del gruppo delle traslazioni. Identifichiamo quest'ultimo al gruppo additivo $\mathbb{C}$, facendo corrispondere ad $a \in \mathbb{C}$ la traslazione $z \to z + a$. Quindi $X \simeq \mathbb{C}/\Omega$, dove Ω è un sottogruppo discreto del gruppo $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

I gruppi abeliani sono $\mathbb{Z}$-moduli ed in particolare si può definire il loro prodotto tensoriale su $\mathbb{Z}$.

Definizione 1.1. Il *rango* di un gruppo abeliano Ω è la dimensione su $\mathbb{Q}$ dello spazio vettoriale $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega$.

Per un sottogruppo discreto Ω del gruppo additivo $\mathbb{C}$, il *rango* coincide con la dimensione del sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{C}$ da esso generato.

Lemma 1.1. *Sia Ω un sottogruppo additivo discreto di $\mathbb{C}$.*

(*i*) *Se Ω ha rango 0, allora $\Omega = \{1\}$;*
(*ii*) *Se Ω ha rango 1, allora $\Omega = \{k \cdot \omega \mid k \in \mathbb{Z}\}$, con $\omega \in \mathbb{C}_*$;*
(*iii*) *Se Ω ha rango 2, allora esistono $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$, tali che $\Omega = \{k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$.*

Dimostrazione. Poiché Ω opera in modo propriamente discontinuo, vi è un numero reale positivo r talche che $B(0, r) \cap (\alpha + B(0, r)) = \emptyset$ per ogni $\alpha \in \Omega \setminus \{0\}$.

Discutiamo ora i diversi casi. Il caso (*i*) è ovvio. Nel caso (*ii*), osserviamo che $|\alpha| > r$ se $\alpha \in \Omega\setminus\{0\}$, e potremo quindi fissare ω con la condizione che $|\omega|$ realizzi il minimo di $|\alpha|$, per $\alpha \in \Omega\setminus\{0\}$.

Consideriamo ora il caso (*iii*). Per ipotesi, Ω contiene elementi ω_1, ω_2, linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$. Se $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$, allora il parallelogrammo $P(\omega_1, \omega_2) = \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mid -1 \leq t_1, t_2 \leq 1\}$

contiene[1] il disco $B(0,r)$ ed ha quindi area maggiore di πr^2. Possiamo supporre che $|\omega_1|$ sia minimo tra gli elementi della retta reale $\mathbb{R}\cdot\omega_1$ che appartengono a Ω, e sia quindi un generatore del sottogruppo $\mathbb{R}\cdot\omega_1 \cap \Omega$. Per ogni $\omega \in \Omega\backslash\mathbb{R}\omega_1$ risulta

$$\text{Area}(P(\omega_1,\omega)) = |\text{Im}\,(\bar{\omega}_1 \cdot \omega)| > \pi r^2.$$

Quindi

$$\Omega \ni \omega \to \text{Im}\,(\bar{\omega}_1 \cdot \omega) \in \mathbb{R}$$

è un omomorfismo di gruppi additivi che ha per immagine un sottogruppo discreto di $\mathbb{R}$. Possiamo quindi fissare $\omega_2 \in \Omega$ in modo che

$$0 < |\text{Im}\,(\bar{\omega}_1 \cdot \omega_2)| \leq |\text{Im}\,(\bar{\omega}_1 \cdot \omega)|\,, \quad \forall \omega \in \Omega\backslash\mathbb{R}\cdot\omega_1.$$

Vogliamo dimostrare che $\Omega = \{k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Un qualsiasi $\omega\in\Omega$ è una combinazione lineare $\omega = t_1\omega_1 + t_2\omega_2$ di ω_1, ω_2 a coefficienti reali. Dette k_i le parti intere di t_i, per i=1,2, abbiamo

$$\omega' = \omega - k_1\omega_1 - k_2\omega_2 \in \Omega \quad \text{ed} \quad |\text{Im}\,(\bar{\omega}_1 \cdot \omega')| = (t_2 - k_2)\,|\text{Im}\,(\bar{\omega}_1 \cdot \omega_2)|,$$

da cui ricaviamo che $t_2 = k_2$. Ma allora è anche $t_1 = k_1$, perché $(t_1 - k_1)\omega_1 \in \Omega \cap \mathbb{R}\omega_1$ e $0 \leq t_1 - k_1 < 1$. Ciò completa la dimostrazione. □

Osservazione 1.2. Se ω_1, ω_2 sono i generatori di Ω, allora il numero reale $\frac{1}{2}|\text{Im}\,(\bar{\omega}_1 \cdot \omega_2)|$ è la minima area di un triangolo non degenere i cui tre vertici appartengano a Ω.

Teorema 1.3. *Siano X una superficie di Riemann parabolica e Ω il gruppo degli automorfismi del suo rivestimento universale $\pi : \mathbb{C} \to X$. Si possono dare le seguenti possibilità:*

(*i*) *$\Omega = \{1\}$ ed $X \simeq \mathbb{C}$;*

(*ii*) *$\Omega = \{k\omega \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ha rango uno e X è biolomorfa al cilindro $\mathbb{C}/\{k\omega \mid k\in\mathbb{Z}\}$. In questo caso l'applicazione Ω-invariante*

$$\mathbb{C} \ni z \to \exp(2\pi\, i\, z/\omega) \in \mathbb{C}^* \tag{1.1}$$

definisce un biolomorfismo tra X e $\mathbb{C}^*$;

(*iii*) *Se $\Omega = \mathbb{Z}[\omega_1, \omega_2] = \{k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$, ha rango due, allora $\mathbb{C}/\Omega$ è omeomorfo al toro $\mathrm{T}^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$.*

Notazione 1.4. Dato un sottogruppo discreto Ω di rango due di $\mathbb{C}$, indicheremo con T_Ω il *toro complesso* $\mathbb{C}/\Omega$.

[1]Il parallelogrammo $P(\omega_1, \omega_2)$ ha centro 0 ed i suoi lati e le sue semi-diagonali hanno lunghezze maggiori di r. Il raggio della circonferenza di centro 0 in esso inscritta è l'altezza di uno dei triangoli formato da un lato e due semi-diagonali e quindi maggiore di r perché l'altezza di un triangolo è sempre minore o uguale alla lunghezza di uno dei suoi lati.

2. Tori complessi e gruppo modulare

I tori complessi sono tra loro omeomorfi, ma le loro strutture complesse possono non essere equivalenti.

Teorema 2.1. *Siano* $\Omega = \mathbb{Z}[\omega_1, \omega_2]$ *e* $\Omega' = \mathbb{Z}[\omega'_1, \omega'_2]$ *due sottogruppi additivi di rango due di* $\mathbb{C}$. *Condizione necessaria e sufficiente affinché i tori complessi* T_Ω *e* $\mathrm{T}_{\Omega'}$ *siano biolomorficamente equivalenti è che risulti*

$$\frac{\omega'_1}{\omega'_2} = \frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2}, \quad \textit{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad \textit{ed} \quad |ad - bc| = 1. \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Supponiamo vi sia un'applicazione biolomorfa

$$f : \mathrm{T}_\Omega \to \mathrm{T}_{\Omega'}.$$

Per l'uniformizzazione, questa si rialza ad un'applicazione biolomorfa $\tilde{f}$ di $\mathbb{C}$ in sé con la proprietà:

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \ \ \exists h_1, h_2 \in \mathbb{Z} \ \text{ tali che } \ \tilde{f}(z + k_1\omega_1 + k_2\omega_2) = \tilde{f}(z) + h_1\omega'_1 + h_2\omega'_2. \tag{2.2}$$

Differenziando questa relazione troviamo che

$$\tilde{f}'(z + k_1\omega_1 + k_2\omega_2) = \tilde{f}'(z) \quad \forall k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Quesato ci dice che la $\tilde{f}'$ è una funzione intera doppiamente periodica su $\mathbb{C}$ e quindi, per il teorema di Liouville, costante. Allora

$$\tilde{f}(z) = \alpha\, z + \beta \tag{2.4}$$

con opportuni $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$. Possiamo scegliere $\tilde{f}$ con $\tilde{f}(0) = 0$, in modo che sia $\beta = 0$. Abbiamo allora in particolare

$$\begin{cases} \alpha\cdot\omega_1 = a'\omega'_1 + b'\omega'_2 \\ \alpha\cdot\omega_2 = c'\omega'_1 + d'\omega'_2 \\ \text{per opportuni } \ a', b', c', d' \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Analogamente risulterà:

$$\begin{cases} \alpha^{-1}\omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2 \\ \alpha^{-1}\omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2 \\ \text{per opportuni } \ a, b, c, d \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Le due matrici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ essendo a coefficienti interi e l'una inversa dell'altra devono avere determinante uguale a ± 1.

Viceversa, se vale la (2.1), allora, posto $\alpha = \omega'_1/(a\omega_1 + b\omega_1)$, la $\tilde{f}(z) = \alpha\cdot z$ definisce per passaggio al quoziente un biolomorfismo f di T_Ω su $\mathrm{T}_{\Omega'}$. Infatti, segue dalla definizione che

$$\alpha \cdot \mathbb{Z}[\omega_1, \omega_2] \subseteq \mathbb{Z}[\omega'_1, \omega'_2] \quad \text{ed} \quad \alpha^{-1}\cdot\mathbb{Z}[\omega'_1, \omega'_2] \subseteq \mathbb{Z}[\omega_1, \omega_2]$$

e che quindi valgono le uguaglianze. □

Definizione 2.1. Il gruppo $\mathbf{\Gamma} \simeq \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm I_2\}$ delle trasformazioni di Möbius

$$\mathfrak{w} = \frac{a\mathfrak{z} + b}{c\mathfrak{z} + d}, \quad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad \text{ed} \quad ad - bc = 1, \tag{2.7}$$

si dice il *gruppo modulare*.

Lemma 2.2. *Il gruppo modulare* $\mathbf{\Gamma}$ *è generato dalle due trasformazioni*

$$z \to \alpha(z) = z + 1, \quad z \to \beta(z) = -\frac{1}{z}. \tag{2.8}$$

Dimostrazione. Le trasformazioni α, β in (2.8) corrispondono alle matrici $\pm A$, $\pm B$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Moltiplicare a destra o a sinistra una $X \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ per la matrice A corrispondere a sommare alla prima la seconda riga o colonna, rispettivamente, mentre moltiplicarla a destra o a sinistra per B vuol dire scambiare le righe o le colonne, cambiando di segno una di esse in modo da preservare il determinante. Possiamo quindi, utilizzando A e B, effettuare le operazioni elementari per l'eliminazione di Gauss, che ci permettono di trasformare una qualsiasi X di $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ in I_2. Da questo segue la tesi. □

Osservazione 2.3. Possiamo rappresentare $\mathbf{\Gamma}$ in termini di generatori e relazioni, mediante

$$\mathbf{\Gamma} = \langle \alpha, \beta \mid \beta^2 = \mathrm{id}, \ \ (\beta \circ \alpha)^3 = \mathrm{id} \rangle. \tag{2.9}$$

Questa presentazione ci mostra che $\mathbf{\Gamma}$ è isomorfo al prodotto libero dei gruppi ciclici di ordine due e di ordine tre.

Lemma 2.4. *Ogni toro complesso* $\mathbb{C}/\Omega$ *è biolomorfo a un toro complesso* $\mathbb{C}/\Omega_\tau$ *con* $\Omega_\tau = \{k_1 + k_2\tau \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$*, per un numero complesso* $\tau \in \mathrm{H}$.

Dimostrazione. Se infatti ω_1, ω_2 generano Ω, sarà sufficiente, per il Teorema 2.1, scegliere $\tau = \pm\omega_1/\omega_2$. □

Osservazione 2.5. Il gruppo $\mathbf{\Gamma}$ opera *in modo propriamente discontinuo* sul semipiano di Poincaré $\mathrm{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, ma non in modo *libero* perché contiene trasformazioni ellittiche (la $z \to -1/z$, la $z \to -1/(z+1)$ e le loro coniugate).

Indichiamo con T_τ il toro complesso $\mathbb{C}/\Omega_\tau$, corrispondente al gruppo

$$\Omega_\tau = \{k_1 + k_2\tau \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Vale il

Teorema 2.6. *Ogni toro complesso è biolomorfo a un toro* T_τ *con*

$$\tau \in \mathbf{F} = \left\{ z \in \mathrm{H} \,\middle|\, -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\,,\ |z| \geq 1 \right\}. \tag{2.10}$$

Dimostrazione. Fissato $z \in \mathrm{H}$, possiamo trovare $m \in \mathbb{Z}$ tale che, posto $z_1 = z + m$, sia $|\mathrm{Re}(z_1)| \leq \frac{1}{2}$. Se $|z_1| \geq 1$, abbiamo finito, altrimenti poniamo $z_2 = -\dfrac{1}{z_1} + m_1$ con $m_1 \in \mathbb{Z}$ tale che $|\mathrm{Re}(z_2)| \leq \frac{1}{2}$. Se $|z_2| \geq 1$, abbiamo finito, altrimenti osserviamo che

$$|z_2| = \left|\frac{m_1 z_1 - 1}{z_1}\right| \text{ ed } \mathrm{Im}\,(z_2) = \mathrm{Im}\left(\frac{m_1 z_1 - 1}{z_1}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{|z_1|^2}\right).$$

La condizione $|z_1| < 1$ ci dice che $\mathrm{Im}\,(z_2) > \mathrm{Im}\,(z_1)$.

Se $|z_2| < 1$, ripetiamo la costruzione precedente, in modo da ottenere un nuovo elemento z_3; dico che dopo un numero finito di iterazioni otterremo uno $z_n \in \mathbf{F}$ equivalente a z. Se cosí non fosse, infatti, otterremmo una successione $z_1, z_2, ..., z_n, z_{n+1}, ...$ con

$$\mathrm{Im}\, z_1 < \mathrm{Im}\, z_2 < \cdots < \mathrm{Im}\, z_n < \mathrm{Im}\, z_{n+1} < \cdots < 1$$

e $|\mathrm{Re} z_n| \leq \frac{1}{2}$ per ogni n, di punti tutti equivalenti a z modulo $\mathbf{\Gamma}$. Allora

$$z_n = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} = \frac{a_n c_n |z|^2 + b_n c_n + a_n d_n z + b_n c_n \bar{z}}{|c_n z + d_n|^2},$$

con $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{Z}$ ed $ad - bc = 1$. Poiché

$$\mathrm{Im}\, z_n = \frac{\mathrm{Im}\, z}{|c_n z + d_n|^2}\,,$$

la diseguaglianza $\mathrm{Im}\,(z_n) > \mathrm{Im}\,(z)$ ci dà allora:

$$|c_n z + d_n| < 1\,.$$

Ancora, la $|z_n| < 1$ ci dà

$$|a_n z + b_n| < |c_n z + d_n| < 1.$$

Ma ci possono essere al più un numero finito di trasformazioni in $\mathbf{\Gamma}$ che soddisfino queste condizioni: questo ci dà una contraddizione e dimostra la tesi. □

3. Automorfismi delle superfici di Riemann paraboliche

Siano X una superficie di Riemann parabolica e $\pi : \mathbb{C} \to X$ il suo rivestimento universale olomorfo. Ci proponiamo di descrivere il gruppo $\mathcal{A}ut(X)$ delle applicazioni biolomorfe di X in sé.

Abbiamo suddiviso le superficie di Riemann paraboliche in tre classi:

I. $X \simeq \mathbb{C}$. In questo caso $\mathcal{A}ut(\mathbb{C})$ è il gruppo delle trasformazioni conformi

$$\mathfrak{w} = a\mathfrak{z} + b \qquad \text{con} \quad a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C} \tag{3.1}$$

che ha la rappresentazione matriciale:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}. \tag{3.2}$$

II. $X \simeq \mathbb{C}^*$. Consideriamo il rivestimento universale olomorfo

$$\pi : \mathbb{C} \ni z \to e^{2\pi i z} \in \mathbb{C}^*, \tag{3.3}$$

corrispondente al sottogruppo additivo $\mathbb{Z}$ di $\mathbb{C}$. Un automorfismo T di $\mathbb{C}^*$ si rialza a un'applicazione olomorfa $\tilde{T}(z) = a{\cdot}z{+}b$ di $\mathbb{C}$, per cui ak e k/a sono interi per ogni k intero. La condizione necessaria e sufficiente affinché ciò avvenga è che $a = \pm 1$. Quindi $\mathcal{A}ut(\mathbb{C}^*)$ è il gruppo delle trasformazioni della forma

$$w = \lambda \cdot z \qquad \text{oppure} \qquad w = \frac{\lambda}{z} \qquad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{C}^*, \tag{3.4}$$

isomorfo quindi a $\mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{Z}_2$, con il prodotto definito da:

$$(\lambda_1, \epsilon_1) \cdot (\lambda_2, \epsilon_2) = (\lambda_1 \lambda_2^{(-1)^{\epsilon_1}}, \epsilon_1 + \epsilon_2). \tag{3.5}$$

III. $X \simeq \mathrm{T}_\tau$, con $\tau \in \mathbf{F}$. Ricordiamo che $\mathrm{T}_\tau = \mathbb{C}/\Omega_\tau$ con $\Omega_\tau = \{h{+}k\tau | h, k{\in}\mathbb{Z}\}$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un automorfismo $w{=}a{\cdot}z{+}b$ di $\mathbb{C}$ definisca un automorfismo di T_τ, è che $a \cdot \Omega_\tau = \Omega_\tau$. Questa condizione implica che $a \in \Omega_\tau$ e $|a| = 1$. Osserviamo che

$$|h + k\tau|^2 = h^2 + k{\cdot}|\tau|^2 + 2\,h\,k\,\mathrm{Re}(\tau) \geq 1, \quad \forall h, k \in \mathbb{Z} \ \text{ con } \quad h^2 + k^2 \neq 0.$$

Abbiamo quindi le possibilità:

(*i*) Se $|\tau| > 1$, oppure $0 < |\mathrm{Re}\tau| < \frac{1}{2}$, allora i soli elementi di Ω_τ che hanno modulo 1 sono 1 e -1: quindi

$$\mathcal{A}ut(\mathrm{T}_\tau) \simeq \mathrm{T}_\tau \ltimes \mathbb{Z}_2. \tag{3.6}$$

Infatti, due trasformazioni $w{=}\epsilon_i{\cdot}z{+}b_i$, con $\epsilon_i = \pm 1$ e $b \in \mathbb{C}$ definiscono la stessa trasformazione di T_τ se e soltanto se $\epsilon_1 = \epsilon_2$ e $b_1 - b_2 \in \Omega_\tau$. Se quindi consideriamo su $\mathbb{C} \ltimes \mathbb{Z}_2$ il prodotto

$$(\alpha, k) \cdot (\beta, h) = (\alpha + (-1)^h \beta, h + k), \tag{3.7}$$

il gruppo $\mathcal{A}ut(\mathrm{T}_\tau)$ è il quoziente

$$\mathcal{A}ut(\mathrm{T}_\tau) = \frac{\mathbb{C} \ltimes \mathbb{Z}_2}{\Omega_\tau \ltimes \{0\}}. \tag{3.8}$$

(*ii*) Se $\tau = i$, può essere $a = \pm 1, \pm i$. Se indichiamo con $\tilde{\mathbb{Z}}_4$ il gruppo moltiplicativo $\{\exp(ik\pi/2) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, allora

$$\mathcal{A}ut(\mathrm{T}_i) \simeq \mathrm{T}_i \ltimes \tilde{\mathbb{Z}}_4 \simeq \frac{\mathbb{C} \ltimes \tilde{\mathbb{Z}}_4}{\Omega \ltimes \{1\}}, \tag{3.9}$$

ove il prodotto su $\mathbb{C} \ltimes \tilde{\mathbb{Z}}_4$ è definito da:

$$(\alpha, h) \cdot (\beta, k) = (\alpha + h\beta, hk). \tag{3.10}$$

(*iii*) Se $\tau = e^{\pi i/3}, e^{2\pi i/3}$, osserviamo in primo luogo che $\mathrm{T}_{e^{\pi i/3}} = \mathrm{T}_{e^{2\pi i/3}}$; risulta $\mathrm{Re}(\tau) = \pm\frac{1}{2}$ ed i possibili valori di a sono le radici seste dell'unità $\pm 1, \pm e^{\pi i/3}, \pm e^{2\pi i/3}$, che formano il gruppo $\tilde{Z}_6 = \{e^{k\pi i/3} | k \in \mathbb{Z}\}$. Abbiamo allora

$$\mathcal{A}ut(\mathrm{T}_{\pi i/3}) = \mathcal{A}ut(\mathrm{T}_{2\pi i/3}) \simeq \mathrm{T}_{\pi i/3} \ltimes \tilde{\mathbb{Z}}_6 \simeq \frac{\mathbb{C} \ltimes \tilde{\mathbb{Z}}_6}{\Omega \ltimes \{1\}}, \tag{3.11}$$

con il prodotto in $\mathbb{C} \ltimes \tilde{\mathbb{Z}}_6$ definito come nella (3.10).

4. Funzioni ellittiche

Sia T_Ω una superficie di Riemann parabolica compatta. Indichiamo con $\pi : \mathbb{C} \to \mathrm{T}_\Omega$ il suo rivestimento universale olomorfo. Il gruppo Ω degli automorfismi del rivestimento è un sottogruppo abeliano di rango due del gruppo additivo $\mathbb{C}$. Possiamo identificare T_Ω al quoziente $\mathbb{C}/\Omega$. In particolare su T_Ω possiamo definire[2] una struttura di gruppo abeliano.

Siano ω_1, ω_2 due generatori di Ω. È quindi

$$\Omega = \{k_1\omega_1 + k_2\omega_2 | k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Gli ω_1, ω_2 sono numeri complessi, linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$, che possiamo scegliere con $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$, in modo che il versore di ω_1 si sovrapponga a quello di ω_2 con una rotazione antioraria di angolo convesso.

Consideriamo il parallelogramma

$$P = P(\omega_1, \omega_2) = \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 | 0 \le t_1, t_2 \le 1\}. \tag{4.1}$$

Possiamo ottenere T_Ω da P (o da un suo qualsiasi traslato $P_z = z + P$) identificando tra loro i lati opposti ed i quattro vertici. Questi ultimi sono gli unici punti del parallelogramma che appartengano al gruppo Ω.

Definizione 4.1. Chiamiamo *parallelogramma fondamentale* o *dei periodi* o *cella* un qualsiasi traslato del poligono (4.1).

Fissato un punto z_0 di $\mathbb{C}$, chiamiamo la

$$\mathcal{T}_{z_0} = \{P_{z_0+\omega} = z_0 + \omega + P \mid \omega \in \Omega\}$$

una *tassellazione* o *reticolo dei periodi* di vertice z_0 del piano complesso.

[2] La struttura di gruppo su T_Ω dipende dalla scelta del punto base $\{o\} = \pi(\Omega)$.

Osservazione 4.1. Nota che il sottogruppo Ω non determina completamente i parallelogrammi dei periodi, perché una base di Ω è determinanta a meno dell'azione del gruppo unimodulare. Fissato Ω, risultano univocamente determinate le *aree* delle celle.

Ogni funzione f su T_Ω si rialza ad una funzione $F{=}f\circ\pi$ *doppiamente periodica* su $\mathbb{C}$ tale cioè che

$$F(z{+}\omega) = F(z), \quad \forall\omega{\in}\Omega, \tag{4.2}$$

ovvero $$F(z{+}\omega_i) = F(z) \quad \text{per ogni} \quad z{\in}\mathbb{C} \ \text{ ed } \ i{=}1,2.$$

Poiché T_Ω è compatta e connessa, le sole funzioni olomorfe definite su tutta T_Ω, e quindi le funzioni olomorfe doppiamente periodiche su $\mathbb{C}$, sono le costanti. Mostreremo che invece le funzioni meromorfe su T_Ω formano un campo $\mathcal{M}(\mathrm{T}_\Omega)$ che ha grado di trascendenza uno su $\mathbb{C}$, costruendone esplicitamente un generatore. Gli elementi di $\mathcal{M}(\mathrm{T}_\Omega)$ si rialzano a funzioni *meromorfe* doppiamente periodiche su $\mathbb{C}$.

Definizione 4.2. Chiamiamo *ellittica* una funzione meromorfa doppiamente periodica su $\mathbb{C}$.

Lemma 4.2. *L'insieme delle funzioni ellittiche di periodi Ω, con le usuali operazioni di somma e prodotto di funzioni meromorfe, è un campo.* □

Proposizione 4.3. *Sia f una funzione meromorfa su una superficie di Riemann parabolica compatta $\mathrm{T}_\Omega = \mathbb{C}/\Omega$ ed $F{=}f\circ\pi$ la corrispondente funzione ellittica.*

(1) *F ha nella chiusura di un qualsiasi parallelogramma dei periodi un numero finito di zeri e di poli.*
(2) *Per quasi tutti i punti z_0 di $\mathbb{C}$, la F non ha né zeri né poli sul bordo dei parallelogrammi dei periodi della tassellazione $\mathcal{T}_{z_0}$.*
(3) *La somma S dei residui di un insieme irriducibile di poli di una funzione ellittica è nulla.*

Dimostrazione. (1)-(2). L'insieme $Z(F)$ degli zeri e dei poli di una funzione meromorfa F su $\mathbb{C}$ è discreto. In particolare l'intersezione di $Z(F)$ con ogni compatto è un insieme finito.

Siano F una funzione ellittica di periodi Ω, $Z(F)$ l'insieme dei suoi poli e dei suoi zeri, $\{w_1,\ldots,w_m\} = P\cap Z(F)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché ∂P_z non contenga né zeri né poli di F è che z non sia soluzione dell'equazione $\ z{\equiv}w_i \mod \Omega$ per $1{\leq}i{\leq}k$.

(3) Sia F una funzione ellittica. A meno di comporla con una traslazione, possiamo supporre che tutti i poli di F siano interni a P. Poiché abbiamo supposto che $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1){>}0$, la frontiera ∂P è la somma dei segmenti

orientati $[0, \omega_1]$, $[\omega_1, \omega_1{+}\omega_2]$, $[\omega_1{+}\omega_2, \omega_2]$, $[\omega_2, 0]$. Otteniamo allora

$$
\begin{aligned}
2\pi i{\cdot}S = \oint_{\partial P} F(z)dz = \int_0^1 F(t\omega_1)dt + \int_0^1 F(\omega_1{+}t\omega_2)\omega_2 dt \\
- \int_0^1 F(t\omega_1{+}\omega_2)\omega_1 dt - \int_0^1 F(t\omega_2)\omega_2 dt = 0
\end{aligned}
$$

perché F è doppiamente periodica, di periodi ω_1 ed ω_2. □

Definizione 4.3. Sia F una funzione ellittica con periodi Ω e P_z un parallelogramma fondamentale di Ω la cui frontiera ∂P_z non contenga poli di F. Chiamiamo allora *irriducibile* l'insieme dei poli di F contenuti in P_z.

Il numero di poli, contati con la loro molteplicità, di un insieme irriducibile si dice l'*ordine* della funzione ellittica. Se $f \in \mathcal{M}(\mathrm{T}_\Omega)$, diciamo suo *ordine* l'ordine della funzione ellittica corrispondente.

Lemma 4.4. *Siano f_1, f_2 due funzioni meromorfe non nulle su T_Ω. Allora*

$$
\mathit{ordine}(f_1{\cdot}f_2) \equiv \mathit{ordine}(f_1) + \mathit{ordine}(f_2) \mod 2. \tag{4.3}
$$

□

Proposizione 4.5. *Se $f \in \mathcal{M}(\mathrm{T}_\Omega)$ è una funzione meromorfa non costante, allora, per ogni $w \in \mathbb{C}$ il numero di radici dell'equazione*

$$
f(p) = w, \tag{4.4}
$$

in T_Ω, contate con la loro molteplicità, è finito ed uguale all'ordine di f.

Dimostrazione. Sia F la funzione ellittica corrispondente af f. Osserviamo che anche $F'(z)$ è una funzione ellittica e quindi, per ogni $w \in \mathbb{C}$, anche la $G(z) = F'(z)/(F(z){-}w)$ è una funzione ellittica. A meno di traslazioni possiamo supporre che $G(z)$ non abbia poli su ∂P e quindi, per la Proposizione 4.3, è

$$
\sum\nolimits_{z \in P} \nu_z(F{-}w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial P} \frac{F'(z)\, dz}{F(z) - w} = 0,
$$

ove $\nu_z(F{-}w)$ indica, se positivo, l'ordine di zero, se negativo, l'ordine di polo di $F{-}w$ in z. Quindi il numero di zeri di $F{-}w$, contati con la loro molteplicità, ed il suo numero di poli, contati con la loro molteplicità, sono uguali. Poiché gli ordini di polo di F e di $F{-}w$ in ciascun punto z sono uguali, otteniamo la tesi. □

Proposizione 4.6. *Ogni funzione ellittica non costante ha ordine maggiore o uguale a due.*

Dimostrazione. Questo è conseguenza della Proposizione 4.3, perché l'integrale di una funzione meromorfa sul bordo di un dominio in cui ha un polo semplice sarebbe diverso da zero. □

Proposizione 4.7. *Sia* $T_\Omega = \mathbb{C}/\Omega$ *una superficie di Riemanna parabolica compatta. Se* $f \in \mathcal{M}(T_\Omega)$ *non è costante, allora*

$$\sum\nolimits_{p \in T_\Omega} \nu_p(F) \cdot p = 0 \quad \textit{in } T_\Omega. \tag{4.5}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre che la $F = f \circ \pi$ non abbia né zeri né poli sulla frontiera di P. Allora

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_{z \in P} \nu_z(F) \cdot z &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial P} z \cdot \frac{F'(z)\,dz}{F(z)} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\omega_1} \left(z \cdot \frac{F'(z)\,dz}{F(z)} - (z+\omega_2) \cdot \frac{F'(z+\omega_2)\,dz}{F(z+\omega_2)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\omega_2} \left((z+\omega_1) \cdot \frac{F'(z+\omega_1)\,dz}{F(z+\omega_1)} - z \cdot \frac{F'(z)\,dz}{F(z)} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \cdot \omega_1 \int_0^{\omega_2} \frac{dF(z)}{F(z)} - \frac{1}{2\pi i} \cdot \omega_1 \int_0^{\omega_2} \frac{dF(z)}{F(z)}.
\end{aligned}$$

Abbiamo supposto che $F(z)$ non avesse né zeri né poli sui lati di P. Quindi nell'intorno di ciascuno dei lati di P possiamo definire una determinazione del logaritmo complesso di $F(z)$. Poiché $F(0) = F(\omega_1) = F(\omega_2)$, la differenza dei valori che queste determinazioni assumono agli estremi dei segmenti $[0, \omega_1]$ e $[0, \omega_2]$ differiscono per multipli interi di $2\pi i$. Otteniamo così che $\sum_{z \in P} \nu_z(F) \cdot z \in \Omega$, da cui segue la tesi. □

5. La ℘ di Weierstrass

La somma delle molteplicità dei poli di una funzione meromorfa non costante su T_Ω è almeno due. Introduciamo la funzione ℘ di Weierstrass come una funzione ellittica che ha un polo di ordine due nei punti del reticolo Ω. Sia

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum\nolimits_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right). \tag{5.1}$$

Poiché

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{z(z+\omega)}{(z-\omega)^2 \omega^2} = 0(|\omega|^{-3})$$

se z varia in un compatto di $\mathbb{C} \setminus \Omega$, la serie in (5.1) converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C}$ che non contengono elementi di Ω e definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli di ordine due in tutti i punti di Ω.

Definizione 5.1. La $\wp(z)$ definita dalla (5.1) si dice la *funzione di Weierstrass* relativa al reticolo Ω.

Si usa la notazione $\wp(z; \omega_1, \omega_2)$, oppure con $\wp_\Omega(z)$ quando si voglia esplicitare la sua dipendenza dalla scelta del reticolo Ω.

Poiché la serie in (5.1) converge uniformemente sui compatti che non intersecano Ω, possiamo differenziarla termine a termine ottenendo una nuova funzione meromorfa

$$\wp'(z) = -2\sum\nolimits_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}, \tag{5.2}$$

che ha poli di ordine tre in ogni punto di Ω.

Proposizione 5.1. *La funzioni $\wp(z)$ e $\wp'(z)$ sono funzioni ellittiche. La $\wp(z)$ è pari, la $\wp'(z)$ dispari.*

Dimostrazione. Il fatto che $\wp'(z)$ sia ellittica e dispari segue immediatamente dall'espressione del suo sviluppo in serie (5.2). Anche il fatto che $\wp(z)$ sia pari segue subito dall'espressione del suo sviluppo in serie (5.1). Poiché $\wp'(z)$ è ellittica, ne segue che per ogni $\omega\in\Omega$ c'è una costante C_ω tale che

$$\wp(z+\omega) = \wp(z) + C_\omega, \quad \forall z\in\mathbb{C}.$$

Sostituendo in questa uguaglianza $z=-\omega/2$ ed utilizzando il fatto che $\wp(z)$ è una funzione pari, otteniamo che $C_\omega=0$ per ogni $\omega \in \Omega$. Questo prova che $\wp$ è ellittica e completa la dimostrazione del teorema. □

5.1. L'equazione differenziale soddisfatta da $\wp$. La differenza $\wp(z)-z^{-2}$ è olomorfa in un intorno di 0 e si annulla in 0. Essendo una funzione pari, si può rappresentare in un intorno di 0 mediante una serie di Taylor

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{20}g_2 z^2 + \frac{1}{28}g_3 z^4 + 0(z^6) \tag{5.3}$$

con

$$g_2 = 60\sum\nolimits_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}\omega^{-4}, \quad g_3 = 140\sum\nolimits_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}\omega^{-6}. \tag{5.4}$$

Per verificare queste formule, osserviamo che, se $\omega\neq 0$,

$$\frac{1}{\omega-z} = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\omega^{n+1}} \Longrightarrow \frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\omega-z}\right) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\omega^{n+2}}z^n,$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{(z-\omega)^2} + \frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{2}{\omega^2} = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+2}{\omega^{2n+2}}z^{2n}.$$

Quindi

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}(2n+1)\cdot\left(\sum\nolimits_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}\omega^{-2n-2}\right)\cdot z^{2n},$$

da cui seguono le (5.4). Differenziando la (5.3), otteniamo

$$\wp'(z) = -2z^{-3} + \frac{1}{10}g_2 z + \frac{1}{7}g_3 z^3 + 0(z^5).$$

Otteniamo allora

$$[\wp(z)]^3 = z^{-6} + \frac{3}{20}g_2 z^{-2} + \frac{3}{28}g_3 + 0(z^2),$$

$$
\begin{aligned}
[\wp'(z)]^2 = 4z^{-6} - \frac{2}{5}g_2 z^{-2} - \frac{4}{7}g_3 + 0(z^2),& \\
\Rightarrow [\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3 &= -g_2 z^{-2} - g_3 + 0(z^2),\\
\Rightarrow [\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3 + g_2\wp(z) + g_3 &= 0(z^2).
\end{aligned}
$$

La funzione al primo membro dell'ultima uguaglianza è ellittica, olomorfa su $\mathbb{C}$ e nulla in 0. È quindi identicamente nulla su $\mathbb{C}$. Abbiamo ottenuto

Teorema 5.2. *La funzione $\wp$ di Weierstrass è soluzione dell'equazione differenziale*

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \tag{5.5}$$

ove i coefficienti g_2, g_3 sono definiti dalle (5.4). □

Teorema 5.3. *Ogni funzione ellittica di ordine pari è una funzione razionale di $\wp$.*

Ogni funizione ellittica di ordine dispari è prodotto di $\wp'$per una funzione razionale di $\wp$.

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{M}(\mathrm{T}_\Omega)$ una funzione meromorfa non costante. Siano $p_1, \dots, p_m$ i poli distinti di f, con molteplicità $k_1, \dots, k_m$. Indichiamo ancora con $\wp$ la funzione meromorfa su T_Ω corrispondente alla funzione ellittica di Weierstass. Allora la

$$\phi(p) = f(p) \prod\nolimits_{i=1}^{m} (\wp(p) - \wp(p_i))^{k_i}$$

è una funzione meromorfa su T_Ω che ha un unico polo nel punto o corrispondente al reticolo Ω. Se si tratta di un polo di ordine pari $2k_0$, allora $\phi(p)/\wp^{k_0}(p)$ è olomorfa su T_Ω e quindi uguale ad una costante c_0. Abbiamo allora, in questo caso,

$$f(p) = \frac{c_0 \cdot \wp^{k_0}(p)}{\prod_{i=1}^{m} (\wp(p) - \wp(p_i))^{k_i}}.$$

Se ϕ ha in o un polo di ordine dispari $3+2k_0$, allora $\phi(p)/(\wp'(p)\cdot\wp^{k_0}(p))$ è olomorfa e quindi uguale ad una costante c_0 su T_Ω. In questo caso

$$f(p) = \frac{c_0 \cdot \wp'(p) \cdot \wp^{k_0}(p)}{\prod_{i=1}^{m} (\wp(p) - \wp(p_i))^{k_i}}.$$

Da queste relazioni otteniamo la tesi. □

Indichiamo ancora con $\wp$, come nella dimostrazione del Teorema 5.3, la funzione meromorfa su T_Ω corrispondente alla funzione ellittica di Weierstrass.

Teorema 5.4. *Il campo $\mathcal{M}(\mathrm{T}_\Omega)$ è un'estensione algebrica di grado tre del campo $\mathbb{C}(\wp)$ delle funzioni razionali di $\wp$.* □

Dalla Proposizione 4.7 possiamo ricavare le formule d'addizione per la funzione di Weierstrass.

Teorema 5.5. *Vale la formula d'addizione*

$$\begin{vmatrix} \wp(p) & \wp'(p) & 1 \\ \wp(q) & \wp'(q) & 1 \\ \wp(p+q) & -\wp'(p+q) & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \forall p \neq q,\, p+q \in \mathrm{T}_\Omega \setminus \{o\}. \tag{5.6}$$

Dimostrazione. Se p, q sono due punti distinti di $\mathrm{T}_\Omega \setminus \{o\}$ con $p+q \neq o$, allora $\wp(p) \neq \wp(q)$ e sono quindi univocamente determinati due numeri complessi a, b tali che

$$\begin{cases} a \cdot \wp(p) + b = \wp'(p), \\ a \cdot \wp(q) + b = \wp'(q). \end{cases}$$

La $f(z) = \wp'(z) - a \cdot w(z) - b$ è una funzione meromorfa di ordine tre su T_Ω, che si annulla nei punti p e q. Per la Proposizione 4.7, essa si annulla ancora nel punto $-(p+q)$. È quindi

$$0 = f(-(p+q)) = \wp'(p+q) - a \cdot \wp(p+q) - b$$

e dunque il vettore $(a, -1, b)^{\intercal}$ annulla la matrice $\begin{pmatrix} \wp(p) & \wp'(p) & 1 \\ \wp(q) & \wp'(q) & 1 \\ \wp(p+q) & -\wp'(p+q) & 1 \end{pmatrix}$, che ha perciò determinante zero. □

Utilizziamo le notazioni introdotte nella dimostrazione del Teorema 5.4. Poiché i punti $p, q, -(p+q)$ sono radici di $f(z)$, essi sono anche radice di

$$\wp'^2(z) - (a \cdot \wp(z) + b)^2 = 0.$$

Utilizzando la (5.5), possiamo riscrivere questa come un'equazione che contiene soltanto $\wp(z)$:

$$\begin{aligned} 0 &= 4\wp^3(z) - g_2 \wp(z) - g_3 - (a \cdot \wp(z) + b)^2 \\ &= 4\wp^3(z) - a^2 \wp^2(z) - (g_2 + 2ab)\wp(z) - (g_3 + b^2). \end{aligned}$$

Poiché la somma delle radici di un'equazione di terzo grado è uguale al coefficiente del termine di secondo grado diviso per il coefficiente del monomio di terzo grado e cambiato di segno, otteniamo che

$$\wp(p) + \wp(q) + \wp(p+q) = \frac{a^2}{4} = \left(\frac{\wp'(p) - \wp'(q)}{\wp(p) - \wp(q)} \right)^2.$$

Da questa ricaviamo le formule di somma e di duplicazione.

Teorema 5.6. *Se* $p, q, p+q, z, 2z \in \mathrm{T}_\Omega \setminus \{o\}$, *allora*

$$\wp(p+q) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(p) - \wp'(q)}{\wp(p) - \wp(q)} \right)^2 - \wp(p) - \wp(q), \tag{5.7}$$

$$\wp(2\mathfrak{z}) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(\mathfrak{z})}{\wp'(\mathfrak{z})}\right)^2 - 2\wp(\mathfrak{z}). \tag{5.8}$$

□

6. Immersione proiettiva

Possiamo usare la funzione di Jacobi per definire un'immersione proiettiva del toro complesso T_Ω. Osserviamo che la $\wp$ e la $\wp'$ non hanno zeri comuni (il coefficiente g_3 in (5.5) è $\neq 0$). Possiamo allora definire un'applicazione

$$\Phi : \mathrm{T}_\Omega \longrightarrow \mathbb{CP}^2, \quad \text{ponendo} \quad \Phi(p) = \begin{cases} (1 : \wp(p) : \wp'(p)), & \text{se } p \neq o, \\ (0 : 0 : 1), & \text{se } p = o. \end{cases} \tag{6.1}$$

Proposizione 6.1. *L'applicazione Φ è una bigezione olomorfa di T_Ω con una curva algebrica di $\mathbb{CP}^2$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\wp/\wp'$ ed $1/\wp'$ hanno in 0 una singolarità eliminabile e si possono quindi considerare olomorfe in un intorno di 0 e che si annullano in 0. La Φ è quindi olomorfa in un intorno di o perché si può esprimere nella coordinata olomorfa z mediante mediante

$$\Phi(\pi(z)) = \left(\frac{1}{\wp'(z)} : \frac{\wp(z)}{\wp'(z)} : 1\right).$$

Osserviamo che o è l'unico punto del toro che abbia per immagine (0:0:1). Siano p, q punti di $\mathrm{T}_\Omega \setminus \{o\}$ per cui valgano

$$\begin{cases} \wp(p) = \wp(q), \\ \wp'(p) = \wp'(q). \end{cases} \tag{$*$}$$

Poiché $\wp$ è pari, abbiamo $p+q=o$ e questa, poiché $\wp'$ è dispari, dà $\wp'(p)=0$. Questo implica che $p=\pi(\omega/2)$ per qualche $\omega\in\Omega$ e perciò $p=q$. La tesi segue perché $\wp$ e $\wp'$ sono legate dall'equazione (5.5). □

CAPITOLO X

Gruppi di trasformazioni di Möbius

Idichiamo con $\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$ il gruppo di Möbius degli automorfismi olomorfi di $\mathbb{CP}^1$. Ricordiamo che $\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$ è isomorfo al quoziente di $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ rispetto al sottogruppo $\{\pm I_2\}$ o al quoziente di $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ rispetto al sottogruppo delle matrici diagonali.

1. Circonferenze isometriche

Sia
$$\gamma(z) = \frac{a\cdot z + b}{c\cdot z + d}, \quad \text{con} \quad a\cdot d - b\cdot c = 1$$
una trasformazione di Möbius che non lasci fisso il punto all'infinito. È
$$\gamma'(z) = \frac{1}{(c\cdot z + d)^2}$$
e quindi la γ definisce una isometria euclidea della circonferenza
$$\kappa_\gamma = \{z\in\mathbb{C} \mid |c\cdot z + d| = 1\}, \tag{1.1}$$
di centro $p_\gamma = \gamma^{-1}(\infty) = (-d/c)$ e raggio $r_\gamma = |c|^{-1}$ sulla circonferenza
$$\kappa_{\gamma^{-1}} = \{z\in\mathbb{C} \mid |c\cdot z - a| = 1\},$$
che ha lo stesso raggio $|c|^{-1}$ e centro in $\gamma(\infty) = a/c$.

Definizione 1.1. La κ_γ in (1.1) ed il punto $p_\gamma = \gamma^{-1}(\infty)$ si dicono rispettivamente la *circonferenza isometrica* di γ ed il suo *centro*. Chiamiamo
$$D_\gamma = \{z\in\mathbb{C} \mid |c\cdot z + d| < 1\} \ \text{ e } \ \check{D}_\gamma = \{z\in\mathbb{CP}^1 \mid |c\cdot z + d| > 1\} \tag{1.2}$$
il *disco interno* ed il *disco esterno* di γ, rispettivamente.

Osservazione 1.1. Rispetto alla metrica euclidea di $\mathbb{C}$, la γ definisce una *dilatazione* di D_γ in $\check{D}_{\gamma^{-1}}$ ed una contrazione di $\check{D}_\gamma$ in $D_{\gamma^{-1}}$.

2. Insiemi limite

Fussiamo un sottogruppo $\mathbf{G}$ di $\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$.

Definizione 2.1. Rispetto a $\mathbf{G}$ un punto p_0 di $\mathbb{CP}^1$ può essere

- *punto limite* se vi sono un elemento q di $\mathbb{CP}^1$ ed una successione $\{\gamma_n\}$ di elementi *distinti* di **G** tali che

$$p_0 = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(q). \tag{2.1}$$

- *punto ordinario* se non è un punto limite. In questo caso diciamo anche che **G** è *discontinuo* in p_0.

Diciamo che **G** è *discontinuo* se lo è in almeno un punto.

Indicheremo con $\mathscr{L}(\mathbf{G})$ l'insieme dei punti limite e con $\Omega(\mathbf{G})$ quello dei punti ordinari di **G**. Ometteremo il riferimento al gruppo, scrivendo semplicemente $\mathscr{L}$ ed Ω quando questo non generi confusione.

Proposizione 2.1. $\gamma(\mathscr{L}) = \mathscr{L}$ *e* $\gamma(\Omega) = \Omega$, *per ogni* $\gamma \in \mathbf{G}$. □

Esempio 2.1. Sia $\mathbf{G} = \langle\gamma\rangle = \{\gamma^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ il gruppo ciclico generato da una singola trasformazione di Möbius γ.

- Se γ è iperbolica, o lossodromica, con punti fissi $a, b \in \mathbb{CP}^1$, allora
$$\mathscr{L} = \{a, b\},\ \Omega = \mathbb{CP}^1 \setminus \{a, b\};$$
- se γ è parabolica con punto fisso a, allora
$$\mathscr{L} = \{a\},\ \Omega = \mathbb{CP}^1 \setminus \{a\};$$
- se γ è ellittica e $\gamma^n =$ identità per qualche intero $n > 0$, allora[1]
$$\mathscr{L} = \emptyset,\ \Omega = \mathbb{CP}^1;$$
- se γ è ellittica e $\gamma^n \neq$identità per ogni intero $n \neq 0$, allora
$$\mathscr{L} = \mathbb{CP}^1,\ \Omega = \emptyset;$$

Teorema 2.2. *Sia* **G** *un sottogruppo del gruppo di Möbius* $\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$. *Gli insiemi* $\mathscr{L}$ *dei suoi punti limite ed* Ω *dei suoi punti ordinari sono, rispettivamente, un chiuso e un aperto in* $\mathbb{CP}^1$.

Dividiamo la dimostrazione di questo teorema in una serie di lemmi.

Lemma 2.3. *Supponiamo che* ∞ *sia un punto ordinario per* **G**. *Se*

$$\gamma_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}, \quad \textit{con} \quad a_n d_n - b_n c_n = 1$$

è una successione di elementi distinti di **G**, *allora* $c_n \to \infty$.

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Se la successione dei coefficienti c_n non tendesse all'infinito, a meno di estrarre una sottosuccessione potremmo supporre che $\{c_n\}$ converga ad un numero complesso $c \in \mathbb{C}$. Poiché ∞ è, per ipotesi, un punto ordinario, le successioni:

$$\left\{\gamma_n^{-1}(\infty) = -\frac{d_n}{c_n}\right\}, \quad \left\{\gamma_n(0) = \frac{b_n}{d_n}\right\}, \quad \left\{\gamma_n(\infty) = \frac{a_n}{c_n}\right\},$$

[1]Segue dalla definizione che, se **G** è finito, allora $\mathscr{L}(\mathbf{G}) = \emptyset$ ed $\Omega(\mathbf{G}) = \mathbb{CP}^1$.

sono tutte limitate in $\mathbb{C}$ e quindi, sempre a meno di estrarre una sottosuccessione, possiamo supporre che siano tutte convergenti:

$$\frac{d_n}{c_n} \to \alpha\,, \quad \frac{b_n}{d_n} \to \beta\,, \quad \frac{a_n}{c_n} \to \gamma \quad \text{con} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

Sono allora anch'esse convergenti:

$$a_n = c_n \cdot \frac{a_n}{c_n} \to c \cdot \gamma = a\,, \quad d_n = c_n \cdot \frac{d_n}{c_n} \to c \cdot \alpha = d\,, \quad b_n = d_n \cdot \frac{b_n}{d_n} \to b \cdot \beta = b.$$

Dalla relazione $a_n d_n - b_n c_n = 1$, ricaviamo che $ad - bc = 1$ e dunque

$$\gamma_n(z) \to \gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad \text{per ogni} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Poiché γ è un automorfismo di $\mathbb{CP}^1$, da questo seguirebbe che $\mathscr{L}(\mathbf{G}) = \mathbb{CP}^1$, contro l'ipotesi che $\mathbf{G}$ fosse un gruppo discontinuo. Ciò completa la dimostrazione. □

Lemma 2.4. *L'insieme*

$$\mathscr{L}_\infty = \{z \in \mathbb{CP}^1 \mid \exists \{\gamma_n\} \subset \mathbf{G} \ \ t.c.\ \gamma_n \neq \gamma_m \ se \ \ n \neq m \ e \ z = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(\infty)\}$$

è chiuso in $\mathbb{CP}^1$. □

Lemma 2.5. $\gamma(\mathscr{L}_\infty) = \mathscr{L}_\infty$. □

Il Teorema 2.2 è allora conseguenza dei lemmi e del seguente:

Teorema 2.6. *Se ∞ è un punto ordinario per* $\mathbf{G}$*, allora* $\mathscr{L} = \mathscr{L}_\infty$.

Dimostrazione. Osserviamo che $\mathscr{L}_\infty \subset \mathscr{L}$; inoltre, poiché ∞ è un punto ordinario per $\mathbf{G}$, il gruppo può contenere al più un numero finito[2] di trasformazioni affini di $\mathbb{C}$ (cioè trasformazioni della forma $z \to a \cdot z + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$). Sia

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left(\gamma_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} \right) \quad \text{con } \gamma_n \in \mathbf{G} \text{ e } \gamma_n \neq \gamma_m \text{ se } m \neq n$$

un punto di $\mathscr{L}$. Possiamo allora supporre che sia

$$a_n d_n - b_n c_n = 1 \quad \text{e} \quad c_n \neq 0 \quad \text{per ogni} \quad n.$$

Possono darsi due casi:

(***i***) $|c_n z + d_n| \geq 1$ per ogni $n \gg 1$.

In questo caso, per il Lemma 2.3, avremmo:

$$|\gamma_n(z) - \gamma_n(\infty)| = \left| \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} - \frac{a_n}{c_n} \right| = \frac{1}{|c_n|} \frac{|a_n d_n - b_n c_n|}{|c_n z + d|} \leq \frac{1}{|c_n|} \to 0\,,$$

da cui $\alpha \in \mathscr{L}_\infty$.

[2] Un punto ordinario può essere punto fisso di al più un numero finito di elementi di **G**.

(*ii*) $|c_n z + d_n| < 1$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$. Possiamo allora supporre, a meno di passare a una sottosuccessione, che $|c_n z + d_n| < 1$ per ogni n. Allora, utilizzando ancora il Lemma 2.3:

$$\left|z - \gamma_n^{-1}(\infty)\right| = \left|z + \frac{d_n}{c_n}\right| = \frac{|c_n z + d_n|}{|c_n|} < \frac{1}{|c_n|} \to 0\,,$$

da cui segue che $z \in \mathscr{L}_\infty$ e quindi, poiché $\mathscr{L}$ è chiuso e **G**-invariante (Lemmi 2.4 e 2.5), anche α, essendo limite di una successione $\{\gamma_n(z)\}$ di punti di $\mathscr{L}_\infty$, appartiene ad $\mathscr{L}$.

Ciò completa la dimostrazione del teorema. □

Osservazione 2.7. Più in generale, se **G** è un gruppo discontinuo e q un qualsiasi punto di $\Omega(\mathbf{G})$, i punti di $\mathscr{L}(\mathbf{G})$ sono limiti di successioni $\{\gamma_n(q)\}$, con $\{\gamma_n\}$ successione di elementi distinti di **G**.

Teorema 2.8. *Ogni sottogruppo discontinuo del gruppo $\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$ è al più numerabile.*

Dimostrazione. Siano **G** un gruppo discontinuo di $\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$ ed $\{U_n\}$ un ricoprimento aperto numerabile di $\Omega = \Omega(\mathbf{G})$, mediante aperti relativamente compatti in Ω. Sia z_0 un punto di Ω e per ogni n sia A_n l'insieme dei $\gamma \in \mathbf{G}$ tali che $\gamma(z_0) \in U_n$. Ogni A_n è finito, perché in caso contrario $\bar{U}_n$ conterrebbe dei punti limite per **G**: ciò è impossibile perché $\bar{U}_n \Subset \Omega$. D'altra parte, per l'invarianza di Ω rispetto a **G**, abbiamo $\bigcup A_n = \mathbf{G}$ e quindi **G**, unione numerabile di insiemi finiti è al più numerabile. □

Teorema 2.9. *Se **G** è un sottogruppo discontinuo di $\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$, allora $\mathscr{L}(\mathbf{G}) = \partial\Omega(\mathbf{G})$.*

Dimostrazione. Poiché $\mathscr{L}$ è chiuso, Ω aperto ed $\mathscr{L} \cup \Omega = \mathbb{CP}^1$, abbiamo $\partial\Omega \subset \mathscr{L}$. Per il Teorema 2.6, se fissiamo un qualsiasi punto $z_0 \in \Omega$, ogni punto di $\mathscr{L}$ è limite di successioni $\{\gamma_n(z_0)\}$ con $\{\gamma_n\} \subset \mathbf{G}$. Poiché Ω è **G**-invariante, questo ci dice che ogni punto di $\mathscr{L}$ è limite di una successione di punti di Ω e quindi vale anche l'inclusione opposta $\mathscr{L} \subset \partial\Omega$. □

Corollario 2.10. *Il luogo $\mathscr{L}$ dei punti limite di un sottogruppo discontinuo **G** di $\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$ è privo di punti interni.*

3. Gruppi elementari

Definizione 3.1. Chiamiamo *elementare* un gruppo **G** di automorfismi di Möbius che abbia al più due punti limite.

Teorema 3.1. *Un gruppo **G** privo di punti limite è un gruppo finito di trasformazioni ellittiche.*

Dimostrazione. Infatti **G** non può contenere né trasformazioni iperboliche, né trasformazioni lossodromiche, né trasformazioni paraboliche. □

Teorema 3.2. *Sia* **G** *un gruppo di automorfismi di Möbius con un solo punto limite in* $\mathbb{CP}^1$. *Allora*

(*i*) *Le trasformazioni paraboliche di* **G** *formano un suo sottogruppo abeliano normale* $\mathbf{G}_0$, *di indice finito in* **G**.

(*ii*) **G** *contiene un sottogruppo finito* **E** *di trasformazioni ellittiche isomorfo al quoziente* $\mathbf{G}/\mathbf{G}_0$.

Dimostrazione. Il gruppo **G** non può contenere trasformazioni iperboliche o lossodromiche, perché i gruppi ciclici di tali trasformazioni hanno due punti limite (che sarebbero anche punti limite di **G**). Inoltre, se $\mathscr{L}=\{p_0\}$, allora p_0 è punto fisso di tutte le trasformazioni di **G** perché $\mathscr{L}$ è **G**-invariante. A meno di coniugio, possiamo supporre che p_0 sia il punto all'infinito. Allora gli elementi di **G** sono trasformazioni affini $\gamma_i(z) = a_i z + b_i$, con $a_i \neq 0$. In particolare, l'insieme $\mathbf{G}_0$ degli elementi parabolici di **G**, cioè di quelli con $a_i=1$, è un suo sottogruppo abeliano. Poiché

$$\gamma_1\circ\gamma_2\circ\gamma_1^{-1}\circ\gamma_2^{-1}(z) = \gamma_1\circ\gamma_2\circ\gamma_1^{-1}\left(\frac{z-b_2}{a_2}\right) = \gamma_1\circ\gamma_2\left(\frac{\frac{z-b_2}{a_2}-b_1}{a_1}\right)$$
$$= a_1\left(a_2\left(\frac{\frac{z-b_2}{a_2}-b_1}{a_1}\right)+b_2\right)+b_1 = z + (b_1 - b_2 - a_2 b_1 + a_1 b_2),$$

il commutatore $[\mathbf{G},\mathbf{G}]$ di **G** è un sottogruppo di $\mathbf{G}_0$, che quindi è normale in **G**. Infine, poiché **G** non contiene trasformazioni iperboliche o lossodromiche, deve essere $|a_i| = 1$ per ogni $\gamma_i(z) = a_i\cdot z + b_i$ in **G** ed abbiamo un omomorfismo naturale

$$\sigma : \mathbf{G} \ni \gamma_i \longrightarrow a_i \in \mathbf{S}^1$$

e $\mathbf{G}_0 = \ker(\sigma) = \{\rho_i \in \mathbf{G} \mid a_i=1\}$ si può identificare al sottogruppo additivo discreto $\Lambda=\{b_i | \gamma_i \in \mathbf{G}_0\}$ di $\mathbb{C}$. Se $\mathbf{G}_0=\mathbf{G}$, abbiamo finito. Altrimenti, supponiamo che **G** contenga delle trasformazione ellittiche diverse dall'identità. Esse sono della forma $\eta(z) = e^{i\theta}z+z_0$ per un θ reale ed un z_0 complesso. Abbiamo

$$\eta\circ\gamma_i\circ\eta^{-1}(z) = \eta\circ\gamma_i(e^{-i\theta}z - z_0) = \eta(a_i(e^{-i\theta}[z-z_0]) + b_i) = a_i z + e^{i\theta}b_i.$$

In particolare, Λ è invariante rispetto alla moltiplicazione per elementi di $\sigma(\mathbf{G})$ e perciò $\sigma(\mathbf{G})$ è finito e dunque della forma

$$\sigma(\mathbf{G}) = \{e^{2h\pi i/m} \mid h=1,\ldots,m\}$$

per qualche intero positivo m. A meno di coniugio, possiamo supporre che **G** contenga la rotazione $\eta(z) = e^{2\pi i/m}z$ e **G** risulta allora prodotto diretto di $\mathbf{G}_0$ ed $\langle\eta\rangle$. □

Osservazione 3.3. Nell'ipotesi del Teorema3.2, se $\sigma(\mathbf{G})$ contiene almeno tre elementi, allora $\mathbf{G}_0$ ha rango due. Abbiamo osservato nel §3 del Cap.IX, che, in questo caso, ci sono solo tre possibilità per $\mathbf{G}/\mathbf{G}_0$. Esso può essere

- il gruppo $\{\pm 1\}$ delle radici quadrate dell'unità,
- il gruppo $\{\pm 1, \pm i\}$ delle radici quarte dell'unità,
- il gruppo $\{\pm 1, \pm \exp(\pi i/3), \pm \exp(2\pi i/3)\}$ delle radici seste dell'unità.

Teorema 3.4. *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo elementare di automorfismi di Möbius tale che* $\mathscr{L}(\mathbf{G})$ *sia formato da due punti distinti. Allora* $\mathbf{G}$ *contiene un sottogruppo normale ciclico* $\mathbf{G}_0$*, di indice finito in* $\mathbf{G}$*, il cui generatore è iperbolico o lossodromico.*

Dimostrazione. A meno di coniugio, possiam supporre che l'insieme $\mathscr{L}$ dei punti limite di $\mathbf{G}$ sia $\{0, \infty\}$. Poiché $\mathscr{L}$ è $\mathbf{G}$-invariante, il sottogruppo $\mathbf{G}_0$ degli elementi di $\mathbf{G}$ che fissano sia 0 che ∞ è un sottogruppo normale di $\mathbf{G}$ di indice due. I suoi elementi sono trasformazioni della forma $\gamma_a(z) = a{\cdot}z$ con $a{\neq}0$ e risulta perciò definiti omomorfismi

$$\mathbf{G}_0 \ni \gamma_a \longrightarrow a \in \mathbb{C}^*, \quad \mathbf{G}_0 \ni \gamma_a \longrightarrow \frac{a}{|a|} \in \mathbf{S}^1, \quad \mathbf{G}_0 \ni \gamma_a \longrightarrow \log(|a|) \in \mathbb{R}.$$

Le immagini dei due ultimi omomorfismi sono discrete. Le a per cui γ_a è una trasformazione ellittica di $\mathbf{G}_0$ formano un gruppo isomorfo al gruppo $\mathbf{R}(m)$ delle radici m-esime dell'unità per qualche intero positivo m. Se scegliamo un γ_{a_0} di $\mathbf{G}_0$ con $\log(|a_0|)$ minimo in $\{\log(|a|) \mid |a| > 1\}$, allora $\mathbf{G}_0$ è il prodotto diretto di $\langle\gamma_{a_0}\rangle$ e $\langle\gamma_{\exp(2\pi i/m)}\rangle$.

Se $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0$ abbiamo finito. Altrimenti, $\mathbf{G}$ contiene un'inversione $\eta(z) = a/z$ per qualche $a{\in}\mathbb{C}^*$. A meno di coniugio possiamo supporre sia $a{=}1$ e $\mathbf{G}$ risulta allora somma diretta dei sottogruppi $\langle\gamma_{a_0}\rangle$, $\langle\gamma_{\exp(2\pi i/m)}\rangle$ e del sottogruppo $\langle\eta\rangle$, formato da due elementi. □

Esempio Supponiamo che $\mathbf{G}{=}\langle\gamma_0\rangle$ sia un gruppo ciclico, generato dalla trasformazione iperbolica $\gamma_0(z) = k{\cdot}z$, con k reale >1. Allora $\mathbf{G}$ è un gruppo di automorfismi del semipiano di Poincaré H. L'applicazione di rivestimento $w = \exp\left(2\pi i \dfrac{\log z}{\log k}\right)$ ci dice che $\mathbf{G}$ è il gruppo degli automorfismi del rivestimento universale dell'anello $A_k = \{w \mid \exp(-2\pi^2/\log k) < |w| < 1\}$.

Teorema 3.5. *Ogni sottogruppo discontinuo* $\mathbf{G}$ *di* $\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$ *che abbia almeno un punto fisso è elementare.*

Dimostrazione. A meno di coniugio, possiamo supporre che ∞ sia punto fisso di $\mathbf{G}$. Se $\mathbf{G}$ è finito, non c'è nulla da dimostrare. Se tutte le $\gamma \in \mathbf{G}$ avessero in comune due punti fissi, allora a meno di coniugio potremmo supporre che 0 sia l'ulteriore punto fisso. Il gruppo **G** è allora della forma $\mathbf{G}=\{\gamma(z)=a\cdot z \mid a \in \mathbf{A}\}$, per un sottogruppo **A** del gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^*$. Necessariamente **G** sarebbe allora o un gruppo finito di trasformazioni ellittiche (ciclico) o uno dei gruppi elementari descritti nel teorema precedente (caso 1).

Se tutti gli elementi di **G** fossero trasformazioni paraboliche, allora **G** sarebbe uno dei sottogruppi abeliani di $\mathbb{C}$ descritti nel Cap. IX e quindi elementare.

Supponiamo ora che **G** contenga due trasformazioni γ' e γ'' aventi solo ∞ come punto fisso comune, con γ' iperbolica o lossodromica. A meno di coniugio potremo allora supporre che $\gamma'(z) = a\cdot z$ con $|a|\neq 1$ e che $\gamma''(z) = b\cdot z + c$ con $bc \neq 0$. Possiamo ancora supporre che $|a| < 1$. Allora

$$\gamma''\gamma'^n\gamma''^{-1}\gamma'^{-n} = (a/b)z - (a^{n+1}c/b) + c \to (a/b)z + c$$

puntualmente su $\mathbb{CP}^1$, onde $\mathscr{L}(\mathbf{G}) = \mathbb{CP}^1$, contro l'ipotesi che **G** fosse discontinuo. Il gruppo **G** può dunque contenere solo trasformazioni ellittiche e paraboliche. Si verifica allora che deve essere uno dei gruppi elementari descritti nel Teorema 3.2. □

Corollario 3.6. *Siano* **G** *un sottogruppo discontinuo di* $\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$ *ed* F *un sottoinsieme non vuoto e finito di* $\mathbb{CP}^1$. *Se* $\gamma(F)=F$ *per ogni* $\gamma\in\mathbf{G}$, *allora* **G** *è elementare.*

Dimostrazione. L'applicazione di restrizione $\gamma\to\gamma|_F$ è un omomorfismo di **G** sul gruppo finito delle permutazioni di F. Il suo nucleo è un sottogruppo normale $\mathbf{G}_0$ che fissa tutti i punti di F ed è quindi, per il Teorema 3.5 elementare. Da questo segue che o $\mathbf{G}_0$, e quindi anche **G**, è finito, oppure che F, che è l'insieme limite di $\mathbf{G}_0$, contiene al più due punti. Poiché allora $\mathscr{L}(\mathbf{G})=\mathscr{L}(\mathbf{G}_0)=F$, ne segue che **G** è elementare. □

4. Gruppi discontinui non elementari

In questo paragrafo studieremo i sottogruppi discontinui non elementari di $\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$, mostrando che i loro insiemi limite non contengono punti isolati. Dimostriamo innanzi tutto il seguente:

Teorema 4.1. *Un sottogruppo discontinuo di* $\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$ *che contenga solo trasformazioni ellittiche è finito.*

Dimostrazione. Per i risultati del §3, sarà sufficiente dimostrare che un sottogruppo discontinuo $\mathbf{G}$ di $\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$ che contenga soltanto trasformazioni ellittiche è elementare. Sia $\mathbf{G}$ un tale sottogruppo e γ_1, γ_2 due trasformazioni di $\mathbf{G}$. Se esse avessero un solo punto fisso in comune [3], il loro commutatore $\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2^{-1}$ sarebbe una parabolica. Quindi due trasformazioni di $\mathbf{G}$ hanno o entrambi o nessun punto fisso in comune.

Se tutte le trasformazioni di $\mathbf{G}$ avessero due punti fissi in comune, allora $\mathbf{G}$ dovrebbe essere necessariamente finito: infatti, facendo sì mediante coniugio che i punti fissi comuni siano 0 e ∞, avremmo $\mathbf{G}=\{\gamma_a(z)=a\cdot z | a\in\mathbf{A}\}$ con $\mathbf{A}$ sottogruppo del gruppo moltiplicativo $\mathbf{S}^1=\{|z|=1\}$, ed un sottogruppo $\mathbf{A}$ di $\mathbf{S}^1$ è o finito o denso.

Ci resta da considerare il caso in cui $\mathbf{G}$ contenga due trasformazioni γ ee η senza punti fissi comuni. A meno di coniugio possiamo supporre che 0 e ∞ siano i punti fissi di γ. Avremo allora

$$\begin{cases} \gamma(z) = e^{i\theta} \cdot z, \quad \text{con} \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \\ \eta(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, \quad \text{con} \quad ad - bc = 1, \quad (a+d)^2 \in \mathbb{R}, \quad 0 \le (a+d)^2 < 4. \end{cases}$$

Per il calcolo, è conveniente rappresentare γ ed η con matrici di $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$:

$$\gamma \simeq \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}, \quad \eta \simeq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Per ipotesi, anche la

$$\gamma \circ \eta(z) \simeq \begin{pmatrix} a\, e^{i\theta/2} & b\, e^{i\theta/2} \\ c\, e^{-i\theta/2} & d\, e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

è una trasformazione ellittica e quindi deve essere

$$\left(e^{i\theta/2}a + e^{-i\theta/2}d\right)^2 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad 0 \le \left(e^{i\theta/2}a + e^{-i\theta/2}d\right)^2 < 4.$$

Poiché sia $a + d$ che $e^{i\theta/2}a + e^{-i\theta/2}d$ sono reali, ne ricaviamo che $d = \bar{a}$.

Poiché anche

$$\begin{aligned} \gamma \circ \eta \circ \gamma^{-1} \circ \eta^{-1} &\simeq \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b\, e^{i\theta} \\ c\, e^{-i\theta} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc\cdot e^{i\theta} & ab(1 - e^{i\theta}) \\ cd(1 - e^{-i\theta}) & ad - bc\cdot e^{-i\theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

è ellittica, otteniamo che

$$-2 \le 2ad - 2bc\cos\theta = 2(1 + 2bc\sin^2(\theta/2)) \le 2.$$

---

[3] Due trasformazioni non paraboliche commutano tra loro se e soltanto se hanno due punti fissi in comune.

Essendo $(\theta/2)\notin\pi\mathbb{Z}$, questa diseguaglianza ci dice che $bc\leq 0$. Poiché $d=\bar{a}$ ed abbiamo scelto le matrici che rappresentano γ ed η in $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$, è in particolare

$$ad - bc = |a|^2 - bc = 1$$

e quindi

$$|a| = |d| \leq 1, \quad -1 \leq bc \leq 0.$$

Per la prima parte della dimostrazione, queste diseguaglianze valgono per tutti gli elementi η di $\mathbf{G}$, tranne al più un numero finito.

Se $\mathbf{G}$ non fosse elementare, $\mathscr{L}(\mathbf{G})$ conterrebbe un punto w_0 diverso da 0 ed ∞: ci sarebbero cioè punti $z_0,\ w_0 \in \mathbb{C}^*$, tali che per una successione

$$(*) \qquad \gamma_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_n d_n - b_n c_n = 1 \\ d_n = \bar{a}_n \\ |a_n| = |d_n| \leq 1 \\ -1 \leq b_n c_n \leq 0 \end{cases}$$

di elementi distinti di $\mathbf{G}$ risulti

$$w_n = \frac{a_n z_0 + b_n}{c_n z_0 + d_n} \longrightarrow w_0.$$

Dalla relazione

$$a_n z_0 - d_n w_n = c_n z_0 w_n - b_n.$$

e dalle $(*)$ ricaviamo che le $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ sono tutte successioni limitate. A meno di passare a una sottosuccessione, possiamo supporre che

$$a_n \to a\,, \quad b_n \to b\,, \quad c_n \to c\,, \quad d_n \to d \;\text{ in } \mathbb{C},$$

con $d = \bar{a}$, $|a| = |d| \leq 1$, $|a|^2 - bc = 1$.

La successione delle $\gamma_n(z)$ convergerebbe puntualmente in $\mathbb{CP}^1$ a una trasformazione di Möbius $w=(az+b)(cz+d)^{-1}$ ed avremmo allora $\mathscr{L}(\mathbf{G})=\mathbb{CP}^1$, contro l'ipotesi che $\mathbf{G}$ fosse discontinuo. Quindi $\mathbf{G}$ è elementare e, poiché consiste di sole trasformazioni ellittiche, è finito. □

Teorema 4.2. *L'insieme $\mathscr{L}(\mathbf{G})$ dei punti limite per un gruppo discontinuo non elementare di trasformazioni di Möbius è perfetto*[4].

Dimostrazione. Possiamo supporre che ∞ sia un punto ordinario di $\mathbf{G}$. Supponiamo che $\mathscr{L}$ contenga almeno tre punti. Fissato q_0 in $\mathscr{L}$, siano q_1, q_2 altri due punti di $\mathscr{L}$, distinti da q_0 e distinti tra loro. Sia $\{\gamma_n\}$ una successione di elementi distinti di $\mathbf{G}$ con $q_0=\lim_{n\to\infty}\gamma_n^{-1}(\infty)$. Per il Lemma 2.3, i raggi δ_n delle circonferenze isometriche κ_{γ_n} formano una successione infinitesima. A meno di passare ad una sottosuccessione, possiamo supporre che anche la $\{\gamma_n(\infty)\}$ converga ad un elemento q di $\mathscr{L}$. Poiché $q_1\neq q_2$, il limite

[4] Cioè chiuso e privo di punti isolati.

q sarà diverso da uno di questi due punti. Supponiamo $q \neq q_2$. In particolare, q_1 apparterrà a $\check{D}_{\gamma_n^{-1}}$ definitivamente, in quanto $\gamma_n(\infty)$ è il centro del disco $D_{\gamma_n^{-1}}$ interno alla circonferenza isometrica di γ^{-1}. Questo implica che $\gamma_n(q_1) \in D_{\gamma_n}$ e quindi, dal momento che i centri $\gamma_n^{-1}(\infty)$ dei dischi D_{γ_n} convergono a q_0, anche $\gamma_n(q_1)$ converge a q_0. Questo dimostra che ogni punto di $\mathscr{L}$ è di accumulazione per $\mathscr{L}$, cioè che $\mathscr{L}$ è perfetto. $\square$

Lemma 4.3. *Siano U un aperto di $\mathbb{CP}^1$ ed $\mathscr{F}$ una famiglia di trasformazioni di Möbius tale che, per due valori fissati $z_0, z_1 \in \mathbb{CP}^1$, sia*

$$\gamma(U) \cap \{z_0, z_1\} = \emptyset \quad \forall \gamma \in \mathscr{F}. \tag{4.1}$$

Allora le restrizioni ad U delle trasformazioni di $\mathscr{F}$ è una famiglia normale di funzioni meromorfe [5] su U.

Dimostrazione. Possiamo supporre che $z_0=0$, $z_1=\infty$, e limitarci a considerare il caso in cui $U=\mathrm{D}=\{|z|<1\}$.

Allora, se $\gamma(z) = (az+b)(cz+d)^{-1}$ è una trasformazione di $\mathscr{F}$, abbiamo $az+b \neq 0$ e $cz+d \neq 0$ se $|z|<1$: da queste diseguaglianze ricaviamo che

$$|b/a| \geq 1, \quad |d/c| \geq 1.$$

Se $\left\{\gamma_n(z) = \dfrac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}\right\}$ è una successione di trasformazioni in $\mathscr{F}$, scriviamo

$$\gamma_n(z) = \frac{b_n}{d_n} \frac{(a_n/b_n)z + 1}{(c_n/d_n)z + 1}.$$

Passando a una sottosuccessione, possiamo supporre che
$a_n/b_n \to A$, $c_n/d_n \to B$ e $b_n/d_n \to C$, con $A, B \in \mathbb{C}$ e $|A| \leq 1$, $|B| \leq 1$, $C \in \mathbb{CP}^1$.

Esaminiamo le diverse possibilità. Se $C \in \mathbb{C}^*$, allora $\gamma_n(z) \to C\dfrac{Az+1}{Bz+1}$; se $C = 0$, allora $\gamma_n(z) \to 0$; se $C = \infty$, allora $\gamma_n(z) \to \infty$ uniformemente sui compatti di D. $\square$

Teorema 4.4. *Siano* $\mathbf{G}$ *un sottogruppo discontinuo di* $\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$ *e* z_0 *un punto di* $\mathbb{CP}^1$. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* $\mathbf{G}$ *sia discontinuo in* z_0 *è che vi sia un intorno aperto* U *di* z_0 *in* $\mathbb{CP}^1$ *per cui* $\mathbf{G}|_U$ *sia normale.*

Dimostrazione.
Necessità. Fissiamo due punti distinti p_1, p_2 di $\mathbb{CP}^1$. Se $\mathbf{G}|_U$ non è normale per nessun intorno U di z_0 in $\mathbb{CP}^1$, allora possiamo trovare una successione $\{\gamma_n\}$ di elementi distinti di $\mathbf{G}$ e una successione $\{z_n\}$ di punti di $\mathbb{CP}^1$ convergente a z_0, tali che $\gamma_n(z_n) \in \{p_1, p_2\}$ per ogni n. Allora z_0 è punto limite di una delle due successioni $\{\gamma_n^{-1}(p_1)\}$, $\{\gamma_n^{-1}(p_2)\}$ e quindi appartiene ad $\mathscr{L}(\mathbf{G})$.

---

[5] Una famiglia Φ di funzioni meromorfe su un aperto di U si dice *normale* se la sua chiusura in $\mathscr{C}(U, \mathbb{CP}^1)$ con la topologia compatta-aperta è un compatto.

Sufficienza. Supponiamo che $\mathbf{G}|_U$ sia normale in $\mathcal{M}(U)$ per un intorno aperto U di un punto z_0 di $\mathbb{CP}^1$. Se z_0 fosse un punto limite di $\mathbf{G}$, fissato un punto w_0 di $\Omega(\mathbf{G})$ (vedi l'Osservazione 2.7) potremmo trovare una successione $\{\gamma_n\}$ di elementi distinti di $\mathbf{G}$ tali che $\gamma_n(w_0)\to z_0$. Per l'ipotesi che $\mathbf{G}|_U$ sia normale, a meno di passare ad una sottosuccessione, possiamo fare in modo che la $\{\gamma_n^{-1}\}$ converga ad una funzione meromorfa f su U. La f è o costante o restizione ad U di una trasformazione di Möbius. Infatti, se f non fosse costante la sua immagine conterrebbe senz'altro tre punti distinti e potremmo quindi fissare z_1, z_2, z_3 in U per cui $w_1{=}f(z_1)$, $w_2{=}f(z_2)$, $w_3{=}f(z_3)$ siano punti distinti di $\mathbb{CP}^1$. Poiché le trasformazioni di Möbius preservano i birapporti, avremmo, per passaggio al limite, l'uguaglianza di birapporti

$$(f(z) : w_1 : w_2 : w_3) = (z : z_1 : z_2 : z_3), \quad \forall z{\in}U,$$

che ci permettere di scrivere f come la restrizione di una trasformazione di Möbius F. Da $\lim_{n\to\infty}\gamma_n^{-1}(z) = F(z)$ per ogni $z{\in}U$ ricaveremmo allora $F(U){\subseteq}\mathscr{L}(\mathbf{G})$. Ciò è assurdo perché, per l'ipotesi che $\mathbf{G}$ fosse discontinua, $\mathscr{L}(\mathbf{G})$ non ha punti interni (vedi il Corollario 2.10).

Dovrebbe essere allora $f(z){=}w_0$ per ogni z in U. Questo ci dà una contraddizione perché allora w_0 sarebbe un punto limite per $\mathbf{G}$, mentre l'avevamo scelto come un punto ordinario. □

5. Gruppi di Fuchs

Ricordiamo che gli automorfismi biolomorfi di D sono restrizioni a D di trasformazioni di Möbius di $\mathbb{CP}^1$. Possiamo quindi considerare il gruppo $\mathcal{A}ut(\mathrm{D})$ degli automorfismi olomorfi di D come un sottogruppo di $\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$.

Gli elementi di $\mathcal{A}ut(\mathrm{D})$ si possono rappresentare mediante

$$\gamma(z) = \frac{a{\cdot}z+\bar{c}}{c{\cdot}z+\bar{a}}, \quad \text{con } |a|^2-|c|^2=1.$$

Se $c{\neq}0$, cioè se la γ non è una rotazione euclidea, la circonferenza isometrica di γ interseca il disco D in una geodetica per la metrica iperbolica di D. La κ_γ è cioè una circonferenza ortogonale ad $\mathbf{S}^1{=}\partial\mathrm{D}$.

Definizione 5.1. Chiamiamo *fuchsiano*[6] un sottogruppo propriamente discontinuo di $\mathcal{A}ut(\mathrm{D})$.

Teorema 5.1. *L'insieme $\mathscr{L}$ dei punti limiti di un gruppo fuchsiano* $\mathbf{G}$ *è contenuto in* $\mathbf{S}^1$.

[6]Lazarus Immanuel Fuchs (1833-1902) fu un matematico tedesco che diede importanti contributi alla teoria delle equazioni differenziali lineari, in particolare a quelle con coefficienti meromorfi.

Dimostrazione. Poiché $\mathscr{L}$ è privo di punti interni, ci sono punti ordinari di **G** sia all'interno che all'esterno del disco unitario D. Poiché sia D che la parte interna $\check{\mathrm{D}}$ del suo complemento in $\mathbb{CP}^1$ sono $\mathcal{A}ut(\mathrm{D})$-invarianti, gli elementi di $\mathscr{L}$ sono approssimabili sia con successioni di punti in D che con successioni di punti in $\check{\mathrm{D}}$ ed appartengono perciò ad $\mathbf{S}^1$. □

Osservazione 5.2. Per il Teorema 4.2 il luogo $\mathscr{L}$ dei punti limite di un gruppo fuchsiano non elementare è perfetto. La sua struttura può, in generale, essere abbastanza complicata[7] ed $\mathscr{L}$ può essere un insieme con misura di Hausdorff frazionaria.

Definizione 5.2. Un gruppo fuchsiano **G** si dice *di prima specie* o *orociclico* se $\mathscr{L}(\mathbf{G}) = \mathbf{S}^1$. Altrimenti si dice di *seconda specie*.

6. Domini di Dirichelet

Consideriamo sul disco unitario $\mathrm{D}=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ la distanza iperbolica[8]

$$\mathrm{dist}(z_1, z_2) = 2\tanh^{-1}\left(\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|}\right), \tag{6.1}$$

associata alla metrica di Poincaré:

$$ds^2 = \frac{4\, dz{\cdot}d\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}. \tag{6.2}$$

Gli automorfismi olomorfi di D sono isometrie per la metrica di Poincaré.

Osservazione 6.1. Potremmo utilizzare, invece del disco D, il semipiano di Poincaré $\mathrm{H}=\{\mathrm{Im}\,(z)>0\}$. In questo modello (con $z=x+iy$, $x, y\in\mathbb{R}$, $y>0$) è

$$ds^2 = \frac{dz{\cdot}d\bar{z}}{y^2}, \quad \mathrm{dist}(z_1, z_2) = 2\tanh^{-1}\left(\frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2|}\right).$$

Il gruppo $\mathcal{A}ut(\mathrm{H})$ è omeomorfo al quoziente di $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ rispetto a $\{\pm \mathrm{I}_2\}$.

Fissiamo un sottogruppo **G** del gruppo $\mathcal{A}ut(\mathrm{D})$.

Definizione 6.1. Per ogni $z \in \mathrm{D}$ consideriamo la sua **G**-*orbita*

$$\mathbf{G}(z) = \{\gamma(z) \mid \gamma \in \mathbf{G}\}. \tag{6.3}$$

Chiamiamo *dominio fondamentale* di **G** un aperto connesso P di D che goda delle proprietà:

(i) ogni orbita di **G** interseca P al più in un punto;
(ii) ogni orbita di **G** interseca $\overline{P}$;

[7] Vedi, ad esempio, S. J. Patterson, *The limit set of a Fuchsian group*, Acta Math. **136** (1976), pp. 241-273.

[8] Ricordiamo che $\tanh(t) = (e^t - e^{-t})/(e^t + e^{-t})$ e quindi $\tanh^{-1}(s) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+s}{1-s}\right)$ per $t\in\mathbb{R}$ ed $s\in(-1, 1)$.

(*iii*) la frontiera di P in D è unione di archi geodetici;
(*iv*) per ogni arco geodetico α di ∂P c'è un altro arco geodetico α' di ∂P ed un $\gamma \in \mathbf{G} \setminus \{\mathrm{id}\}$ tale che $\gamma(\alpha) = \alpha'$.

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo fuchsiano che opera liberamente[9] su D. Esso è al più numerabile e possiamo scriverlo come una successione $\{\gamma_n\}$ di elementi distinti, con γ_0 = identità.

Fissato $z_0 \in$ D, indichiamo con $\{z_n = \gamma_n(z_0)\}$ i punti della sua $\mathbf{G}$-orbita. Per ogni n poniamo:

$$N_n = \{z \in D \mid \mathrm{dist}(z, z_n) < \mathrm{dist}(z, z_j)\ \forall j \neq n\}. \tag{6.4}$$

Poiché le orbite di $\mathbf{G}$ sono chiuse in D, abbiamo:

(1) $N_m \cap N_n = \emptyset$ se $m \neq n$,
(2) $\bigcup_n \overline{N}_n =$ D (ove $\overline{N}_n$ è la chiusura di N_n in D),
(3) gli N_n sono domini fondamentali di $\mathbf{G}$.

Se $z \in \partial N_n$, è

$$\mathrm{dist}(z, z_n) = \mathrm{dist}(z, z_m) \tag{6.5}$$

per qualche intero positivo $m \neq n$. La (6.5) è l'equazione di una retta non euclidea di D. Pertanto gli N_n sono convessi (non euclidei) di D, in particolare sono insiemi connessi e semplicemente connessi e due a due congruenti tra loro. Il fatto che $\mathbf{G}$ sia propriamente discontinuo ci dice che la frontiera di N_n in D è una spezzata poligonale e che, nel caso in cui i vertici siano in numero infinito, essi non hanno punti di accumulazione in D. Poiché gli N_n sono due a due congruenti tra loro per la metrica di Poincaré, basterà studiare il dominio fondamentale N_0.

Definizione 6.2. Chiamiamo N_0 *dominio di Dirichelet, o dominio metrico fondamentale* di $\mathbf{G}$, di centro z_0.

L'aperto N_0 è un dominio semplicemente connesso del piano, limitato da una curva di Jordan. La parte della sua frontiera contenuta in D è unione di segmenti o semirette o rette (non euclidei) di D che si dicono *lati interni*, quella contenuta in $\mathbf{S}^1$ si dice *parte libera* e gli archi di $\mathbf{S}^1$ che la compongono *lati liberi* di N_0. Gli estremi dei lati (interni e liberi) si dicono *vertici* di N_0.

Esempio Sia $X = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Poiché X è iperbolica, ha rivestimento universale D $\xrightarrow{\sigma} X$. Il dominio di Dirichelet relativo al gruppo $\mathbf{G} = \mathcal{A}ut(\mathrm{D} \xrightarrow{\sigma} X)$ ha necessariamente un numero infinito di lati interni (infatti è invariante per il sollevamento degli automorfismi $z \to z + m$, per $m \in \mathbb{Z}$, di X).

[9] Ciò significa che i suoi elementi diversi dall'identità non hanno punti fissi in D.

Lemma 6.2. *Siano* $\mathbf{G} = \{\gamma_n\}$ *un gruppo di Fuchs che opera liberamente su* D*,* z_0 *un punto di* D*, ed* N_0 *il dominio metrico fondamentale di* $\mathbf{G}$ *con centro* z_0*.*

I lati interni di N_0 *sono due a due equivalenti per l'azione di* $\mathbf{G}$*. Due lati interni consecutivi non possono essere equivalenti.*

Dimostrazione. I punti z di un lato interno ℓ di N_0 appartengono ad una retta di equazione

$$\operatorname{dist}(z_0, z) = \operatorname{dist}(z_j, z) \quad \text{per qualche } j \neq 0.$$

Essendo $\bar{N}_j = \gamma_j(\bar{N}_0)$, il lato ℓ, in quanto lato di N_j, è immagine mediante γ_j di un altro lato ℓ' di N_0. Se ci fosse un altro lato ℓ'' di N_0 ed una $\gamma_k \in \mathbf{G}$ con $\ell = \gamma_k(\ell'')$, allora ℓ sarebbe un lato comune a P_0 ed a P_k e tutti i suoi punti sarebbero allora equidistanti da z_0, z_j, z_k. Questo non è possibile perché vi è un solo punto equidistante da tre punti distinti assegnati (il loro baricentro).

Osserviamo inoltre che, se γ_j trasforma un lato interno ℓ di N_0 in un altro lato ℓ' di N_0, poiché γ_j trasforma N_0 in N_j, la $\ell \ni z \to \gamma_j(z) \in \ell'$ cambia l'orientazione indotta sui lati dall'orientazione di ∂N_0. Perciò, se ℓ ed ℓ' fossero consecutivi, il vertice $\ell \cap \ell'$ sarebbe punto fisso di γ_j, contro l'ipotesi che l'azione di $\mathbf{G}$ su D fosse libera. □

Teorema 6.3. *Siano* $\mathbf{G} = \{\gamma_n\}$ *un gruppo di Fuchs che opera liberamente su* D*,* z_0 *un punto di* D*, ed* N_0 *il corrispondente dominio di Dirichelet.*

Gli elementi di $\mathbf{G}$ *che trasformano l'uno nell'altro i lati interni di* N_0 *formano un suo sistema di generatori.*

Dimostrazione. Indichiamo con Γ l'insieme degli elementi di $\mathbf{G}$ che trasformano un lato di N_0 in un altro lato di N_0.

Sia γ_j un qualsiasi elemento di $\mathbf{G}$. Dico che è possibile trovare interi non negativi $j_0 = 0$, j_1, ..., j_m, $j_{m+1} = j$, tali che, per ogni $h = 0, 1, \ldots, m$ i poligoni N_{j_h} ed $N_{j_{h+1}}$ abbiano un lato interno in comune. Per dimostrare quest'affermazione, basta osservare che il complementare Ω in D dei vertici dei domini di Dirichelet N_h, di centri z_h, è connesso per archi. Un arco continuo $[0, 1] \ni t \to \mathfrak{z}(t) \in \Omega$ che congiunga z_0 a z_j, determina una sequenza $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} < t_{m+2} = 1$ di numeri reali e una sequenza $j_0 = 0$, $j_1, \ldots, j_m$, $j_{m+1} = j$ di interi positivi tali che $\mathfrak{z}(t) \in N_{j_h}$ se $t_h < t < t_{h+1}$ per $h = 0, 1, \ldots, m, m+1$. Ogni N_{j_h} ha un lato interno in comune con il successivo $N_{j_{h+1}}$.

Allora $\gamma_{h_{j+1}} \circ \gamma_{h_j}^{-1}$, trasformando N_{h_j} in $N_{h_{j+1}}$, trasforma l'uno nell'altro due lati di N_{h_j}. Scriviamo tali lati come $\gamma_{j_h}(\ell)$ e $\gamma_{j_h}(\ell')$, con ℓ ed ℓ' lati interni di N_0. Allora risulta $\gamma_{j_h}(\ell') = \gamma_{j_{h+1}} \circ \gamma_{j_h}^{-1}(\gamma_{j_h}(\ell)) = \gamma_{j_{h+1}}(\ell)$, onde $\gamma_{j_h}^{-1} \circ \gamma_{j_{h+1}}(\ell) = \ell'$ e $\gamma_{j_h}^{-1} \circ \gamma_{j_{h+1}}$ è una trasformazione che muta un lato interno di N_0 in un altro lato interno di N_0. Poiché $\gamma_{j_1} \in \Gamma$, ed abbiamo:

$$\gamma_j = \gamma_{j_{m+1}} = \gamma_{j_1} \circ (\gamma_{j_1}^{-1} \circ \gamma_{j_2}) \circ \cdots \circ (\gamma_{j_{m-1}}^{-1} \circ \gamma_{j_m}) \circ (\gamma_{j_m}^{-1} \circ \gamma_{j_{m+1}}).$$

Ciò dimostra la tesi del teorema. □

7. Esempi

1. Il gruppo Γ delle trasformazioni

$$\gamma(z) = \frac{a \cdot z + \bar{c}}{c \cdot z + \bar{a}}, \quad \text{con } a, c \in \mathbb{Z}[i] \text{ interi di Gauss}$$

è un gruppo di Fuchs propriamente discontinuo. Nella corrispondenza conforme di D con il semipiano di Poincaré H esso corrisponde al gruppo modulare. Notiamo che in questo caso un dominio fondamentale P è il quadrilatero che si ottiene da un triangolo geodetico *infinito* con un vertice in 1 ed un lato sull'asse immaginario, dividendolo in due aggiungendo un vertice in 0. I due segmenti ottenuti in questo modo sono identificati da Γ, mediante l'applicazione $\gamma(z) = -z$. Abbiamo quindi due lati equivalenti consecutivi, perché l'azione di Γ non è libera, in quanto la simmetria rispetto all'origine appartiene a Γ e fissa l'origine.

2. Dati tre interi positivi p, q, r, si indica con (p, q, r) il triangolo con angoli interni $\alpha = \pi/p$, $\beta = \pi/q$, $\gamma = \pi/r$. Esso è sferico, euclideo o iperbolico a seconda che la somma $\alpha+\beta+\gamma$ sia maggiore, uguale o minore di π. I triangoli sferici ed iperbolici sono completamente determinati dai tre angoli, quelli euclidei lo sono a meno di similitudini. Hermann Schwarz, nel 1873, ha classificato le possibili tassellazioni del piano, dimostrando che esse corrispondono a speciali terne (p, q, r) di interi positivi. Nel caso iperbolico, il più piccolo triangolo che dia luogo a una tassellazione corrisponde alla terna $(2, 3, 7)$. Le riflessioni rispetto ai lati dei triangoli della tassellazione generano un gruppo i cui elementi olomorfi formano un gruppo di Fuchs. Esso contiene il gruppo degli automorfismi del rivestimento universale della superficie di Riemann della quartica di Klein

$$x^3 y + y^3 + x = 0.$$

In generale, da ogni terna di Schwarz possiamo ricavare un gruppo di Fuchs come sottogruppo di indice due del gruppo generato dalle riflessioni rispetto ai lati dei triangoli della tassellazione.

CAPITOLO XI

Superfici di Riemann iperboliche

1. Superfici di Riemann iperboliche compatte

Siano X una superficie di Riemann di tipo iperbolico e

$$\pi : \mathrm{D} \longrightarrow X \tag{1.1}$$

il suo rivestimento universale olomorfo. Il gruppo **G** degli automorfismi del rivestimento agisce su D in modo olomorfo, propriamente discontinuo e libero ed è quindi un gruppo Fuchsiano. È numerabile e scriveremo $\mathbf{G}=\{\gamma_n | n\in\mathbb{N}\}$, con γ_0=identità. Indichiamo con N un suo dominio metrico fondamentale, con centro in un punto $z_0\in\mathrm{D}$ fissato (vedi §6 del Cap.X).

Teorema 1.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché X sia compatta è che N sia limitato nella metrica di Poincaré.*

Dimostrazione. Se N è limitato nella metrica di Poincaré, allora $\bar{N}$ è compatto ed $X=\pi(\bar{N})$ è compatto perché immagine continua di un compatto.

Viceversa, supponiamo che X sia compatta. Consideriamo le palle

$$B_{z_0}(n)=\{z\in\mathrm{D} \,|\, \mathrm{dist}(z, z_0)<n\}$$

di centro z_0 e raggio n nella metrica di Poincaré del disco. Poiché π è aperta, le loro immagini $U_n = \pi(B_{z_0}(n))$ formano un ricoprimento aperto di X. Poiché X è compatto ed $\{U_n\}$ una successione crescente di aperti, potremo trovare un intero positivo ν per cui $X=U_\nu$.

Ora, se $z \in \bar{N}$, risulta $\mathrm{dist}(z_0, z) \leq \mathrm{dist}(\gamma(z_0), z)$ per ogni $\gamma\in\mathbf{G}$. Poiché $U_\nu = X$, per ogni $z\in\mathrm{D}$, possiamo trovare $z'\in B(z_0.\nu)$ tale che $z'=\gamma(z)$ per qualche $\gamma\in\mathbf{G}$. Allora

$$\mathrm{dist}(z_0, z) \leq \mathrm{dist}(\gamma^{-1}(z_0), z) = \mathrm{dist}(z_0, \gamma(z)) < \nu.$$

Quindi $N \subset B(z_0, \nu)$. La dimostrazione è completa. □

Teorema 1.2. *Siano X una superficie di Riemann iperbolica compatta e* **G** *il gruppo degli automorfismi del suo rivestimento universale olomorfo. Allora*

1) **G** *è un gruppo fuchsiano di prima specie, finitamente generato;*
2) **G** *contiene soltanto trasformazioni paraboliche ed iperboliche;*

3) *i suoi domini fondamentali N sono poligoni con un numero finito e pari di lati, tutti interni;*
4) *due lati consecutivi di un poligono fondamentale N non sono* **G**-*equivalenti.*

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato nel §6 del Cap.X che il dominio metrico fondamentale N_0 di $\mathbf{G}$ è un poligono convesso. Essendo $\bar{N}_0$ compatto, ha un numero finito di lati. Per il Teorema 6.3 del Cap.X, gli elementi del gruppo che trasformano l'uno nell'altro i lati di N_0 generano $\mathbf{G}$, che perciò è finitamente generato. Nello stesso teorema abbiamo osservato che i lati sono due a due equivalenti per l'azione di $\mathbf{G}$, e quindi sono necessariamente in numero pari. Tutti i domini di Dirichelet $N_n = \gamma_n(N_0)$ hanno lo stesso diametro finito δ (per la metrica di Poincaré di D). Quindi ogni palla $B_z(\delta)=\{w\in\mathrm{D}|\mathrm{dist}(w,z)<\delta\}$ di raggio δ di D contiene almeno un dominio N_n. Ne segue che ogni disco euclideo tangente internamente alla frontiera di D in un qualsiasi suo punto a contiene un N_n ed in particolare il suo centro $z_n=\gamma_n(z_0)$. Questo dimostra che per ogni $a\in\mathbf{S}^1=\partial\mathrm{D}$ c'è una successione $\{\gamma_{k_n}(z_0)\}$ convergente ad a. Quindi $\mathscr{L}(\mathbf{G}) = \mathbf{S}^1$ e $\mathbf{G}$ è di prima specie.

Questo completa la dimostrazione di 1).

La 2) è conseguenza del fatto che tutte le trasformazini di Möbius del disco sono o ellittiche, o paraboliche, o lossodromiche. Il gruppo $\mathbf{G}$ non può contenere γ ellittiche perché agisce liberamente su D, mentre ogni trasformazione ellittica ha un punto fisso in D (il centro di rotazione).

I punti fissi di $\gamma(z)=(a\cdot z+\bar{c})/(c\cdot z+\bar{a})$ sono soluzioni dell'equazione

$$c\,z^2 - 2\mathrm{Re}\,(a)\,z + \bar{c} = 0$$

e quindi, se w è soluzione, anche $\bar{w}^{-1}$ è soluzione. Quindi gli elementi ellittici di $\mathcal{A}ut(\mathrm{D})$ hanno un punto fisso interno ed uno esterno al disco, mentre il punto fisso delle paraboliche o quelli delle iperboliche stanno sulla frontiera $\mathbf{S}^1$ di D.

Le 3) e 4) si dimostrano, per un dominio fondamentale generale, come per il dominio di Dirichelet considerato nel Lemma 6.2 del Cap.X. □

2. Triangolazione

Sia $X=\mathrm{D}/\mathbf{G}$ una superficie di Riemann compatta di tipo iperbolico. Utilizzando un dominio di Dirichelet N_0 di $\mathbf{G}$ possiamo costruire una sua triangolazione geodetica. Ricordiamo che, fissato il suo *centro* z_0, abbiamo definito

$$N_0=\{z\in\mathrm{D}\mid \mathrm{dist}(z,z_0)<\mathrm{dist}(z,\gamma(z_0)),\ \forall\gamma\in\mathbf{G}\setminus\{\mathrm{id}\}\}.$$

Abbiamo dimostrato che ha un numero pari $2e$ di lati. Cominciamo con il suddividere N_0 in $2e$ triangoli, $T_1, \ldots, T_{2e}$, ottenuti congiungendo i $2e$ vertici di N_0 a z_0. La loro proiezione su X non è ancora una triangolazione di X, perché ciascun triangolo ha con un altro da esso distinto tre vertici in comune. Dividiamo quindi ciascuno dei $2e$ triangoli T_j in quattro triangoli T_{j1}, T_{j2}, T_{j3}, T_{j4} congiungendo tra loro i punti medi dei lati di T_j. Il questo modo otteniamo una nuova triangolazione $\{T_{jh} | j=1, \dots, 2e,\ h=1,2,3,4\}$ di N_0 la cui immagine è una triangolazione di X.

Possiamo utilizzare questa triangolazione per calcolare la caratteristica di Poincaré χ di X.

Il numero F delle facce è $8e$.

Poiché i lati di N_0 sono identificati due a due da $\mathbf{G}$, ogni triangolo T_j contribuisce alla triangolazione di X con 6 lati. Quindi il numero E dei lati della triangolazione è $12e$.

Infine, il numero dei vertici della triangolazione di X è dato dal numero v dei vertici non $\mathbf{G}$-equivalenti di N, cui va sommato 1 per il vertice z_0, $2e$ per i punti medi dei lati interni dei triangoli T_j, ed e per i punti medi dei lati di N_0, in quanto questi vanno identificati due a due:

$$V = v + 1 + 2e + e = 3e + v + 1.$$

Risulta allora:

$$\chi = F - E + V = 8e - 12e + 3e + v + 1 = v - e + 1 \tag{2.1}$$

e quindi, per il *genere* g definito da $\chi = 2 - 2g$ abbiamo

$$2g = 1 - v + e. \tag{2.2}$$

3. Forma normale

Come nei paragrafi precedenti, supponiamo che X sia una superficie di Riemann compatta di tipo iperbolico ed indichiamo con $\mathbf{G}$ il gruppo degli automorfismi del suo rivestimento universale olomorfo $\pi : \mathrm{D} \to X$.

Ricordiamo (vedi la Def. 6.1 nel Cap.X) che un *dominio fondamentale* per $\mathbf{G}$ è un poligono (non euclideo) K in D, tale che $\pi(\bar{K}) = X$, i cui punti interni non siano due a due tra loro $\mathbf{G}$-equivalenti, mentre i lati sono due a due equivalenti tra loro.

Un dominio fondamentale K definisce una *tassellazione* $\{\gamma(K) | \gamma \in \mathbf{G}\}$ di D. Abbiamo cioè

$$\begin{cases} \gamma_1(K) \cap \gamma_2(K) = \emptyset, & \text{se } \gamma_1 \neq \gamma_2\,, \\ \bigcup_{\gamma \in \mathbf{G}} \gamma(\overline{K}) = \mathrm{D}\,. \end{cases} \tag{3.1}$$

Due poligoni $\gamma_1(K)$ e $\gamma_2(K)$ con $\gamma_1 \neq \gamma_2$ hanno al più un lato in comune e questo avviene se e soltanto se $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ è una trasformazione che trasforma un lato di K in un altro lato di K. L'argomento utilizzato nella dimostrazione del Teorema 6.3 del Cap.X si generalizza a domini fondamentali qualsiasi.

Teorema 3.1. *Se K è un dominio fondamentale di* **G**, *allora le trasformazioni $\gamma \in$* **G** *che trasformano l'uno nell'altro i lati di K generano* **G**. □

La costruzione fondamentale. Siano K un poligono fondamentale di **G** e d una sua diagonale, che lo divide in due poligoni K' e K''. Supponiamo vi siano due lati **G**-equivalenti ℓ', ℓ'' di K da parti opposte rispetto a d, in modo che, ad esempio, sia $\ell' \subset \bar{K}'$ ed $\ell'' \subset \bar{K}''$. Se $\gamma \in$ **G** trasforma ℓ' in ℓ'', allora i punti interni di $\bar{K}'' \cup \gamma(\bar{K}')$ formano un nuovo poligono $\tilde{K}$, che è ancora fondamentale ed ha numeri di lati e di vertici non superiori a quelli di K.

Diciamo che $\tilde{K}$ è *stato ottenuto da K mediante la costruzione fondamentale relativa a d ed ℓ.*

Teorema 3.2. *Esiste un poligono fondamentale K di* **G** *in cui tutti i vertici sono* **G**-*equivalenti.*

Dimostrazione. Fissiamo un punto a di D ed un dominio fondamentale K di **G** che, tra quelli che hanno un vertice uguale ad a, abbia il numero minimo di vertici non **G**-equivalenti ad a.

Supponiamo per assurdo che uno dei vertici di K non sia equivalente ad a. Sia b il primo vertice, nell'ordinamento ciclico dei vertici corrispondente all'orientazione di ∂K, che non sia **G**-equivalente ad a e c il vertice consecutivo a b. Il vertice a' precedente a b è equivalente ad a. I due lati $[a', b]$ e $[b, c]$, essendo consecutivi, non sono equivalenti e possiamo quindi eseguire la costruzione fondamentale relativa al lato $[b, c]$ ed alla diagonale $[a', c]$. Abbiamo cioè incollato il triangolo $\triangle(a', b, c)$ lungo un lato $[b', c']$ di $K'' = K \backslash \triangle(a', b, c)$. Il nuovo dominio fondamentale ha almeno un vertice in più (l'immagine di a') **G**-equivalente ad a. Questo contraddice la scelta di K come di un dominio fondamentale con un numero minino di vertici non equivalenti ad a. Ciò prova che tutti i vertici di K sono equivalenti ad a e completa la dimostrazione del teorema. □

Osserviamo ora che *se K è un dominio fondamentale con tutti i vertici* **G**-*equivalenti, ogni nuovo poligono fondamentale ottenuto da K mediante la costruzione fondamentale ha ancora tutti i vertici* **G**-*equivalenti.*

Per il calcolo della caratteristica di Poincaré fatta utilizzando una triangolazione di un dominio fondamentale nel paragrafo precedente, ricaviamo che *il numero di lati di un dominio fondamentale con tutti i vertici* **G** *equivalenti* è $4g$, *ove g è il genere di X.*

Fissiamo un dominio fondamentale K con tutti i vertici **G**-equivalenti e sia p_0 il punto di X corrispondente ai vertici di K. Allora ogni lato di K è il rilevamento di un laccetto in p_0. Fissiamo un vertice a di K ed indichiamo con $\ell_1, \ldots, \ell_{2e}$ i lati consecutivi, a partire da a, con il verso di percorrenza dato dall'orientazione della frontiera di K. Le loro proiezioni $\pi(\ell_1), \dots, \pi(\ell_{2e})$ sono laccetti in p_0, le cui classi di omotopia $\sigma_1, \dots, \sigma_{2e}$ generano il gruppo fondamentale $\pi_1(X, p_0)$, con la relazione $\sigma_1 \cdots \sigma_{2e} = 1$, perché K è contrattile.

Per descrivere K, useremo la convenzione di rappresentare il suo perimetro ∂K mediante la stringa dei laccetti corrispondenti ai suoi lati consecutivi a partire da un vertice a fissato, indicando ciascun laccetto con una lettera, ed utilizzando la stessa lettera per ciascuna coppia di lati **G**-equivalenti, con un esponente -1 per uno di essi. Infatti, ad una coppia di lati equivalenti corrisponde la coppia di un laccetto e del suo opposto. Useremo poi la parola *lato* (oggetto in ∂K) e *laccetto* (oggetto in X) in modo intercambiabile, ove ciò non provochi confusione.

Con queste convenzioni abbiamo:

Teorema 3.3. *Se X ha genere g, allora esiste un poligono fondamentale di* **G**, *con i vertici tutti* **G***-equivalenti, della forma*

$$\partial K = h_1 k_1 h_1^{-1} k_1^{-1} \cdots h_g k_g h_g^{-1} k_g^{-1}. \tag{3.2}$$

Dimostrazione. Scriviamo la frontiera di K nella forma:

$$\partial K = \ell_1 \ell_2 \cdots \ell_{2e-1} \ell_{2e}\,.$$

Sappiamo che per ogni indice $j = 1, \dots, 2e - 1$ vi è uno ed un solo indice $j' \neq j + 1$ tale che $\ell_{j'} = \ell_j^{-1}$, e che $\ell_{2e} \neq \ell_1^{-1}$.

Scegliamo ora come K un poligono fondamentale con tutti i vertici **G**-equivalenti e con un perimetro ∂K in cui sia massimo il numero dei lati organizzati, rispetto all'ordine ciclico, in sequenze della forma $hkh^{-1}k^{-1}$. Dico che allora per il perimetro di K vale la (3.2).

Infatti, se cosí non fosse, ci sarebbe un lato λ, con distanza ciclica minima da λ^{-1}, non organizzato in una sequenza di questa forma. Avremo allora:

$$\partial K = \lambda\mu\,\Lambda\,\lambda^{-1}\,\Xi\,\mu^{-1}\Theta \tag{3.3}$$

ove ciascuna delle lettere maiuscole Λ, Ξ, Θ indica delle spezzate poligonali ed ogni sequenza $hkh^{-1}k^{-1}$ sulla frontiera di K è contenuta in una di esse.

Sia d la diagonale che unisce l'estremo di λ comune a μ con il corrispondente estremo di λ^{-1}. Poiché μ è dalla parte opposta di μ^{-1} rispetto a d, possiamo fare la costruzione fondamentale relativa a d e μ. Per il nuovo poligono fondamentale K' così ottenuto vale la formula:

$$\partial K' = \lambda\, d\, \lambda^{-1}\Xi\Lambda d^{-1}\Theta = d^{-1}\Theta\,\lambda\, d\, \lambda^{-1}\,\Xi\,\Lambda.$$

Sia δ la diagonale che unisce i primi estremi di d e di d^{-1}. Essa lascia λ e λ^{-1} da parti opposte e possiamo quindi eseguire l'operazione fondamentale relativa a δ e λ, ottenendo un nuovo poligono fondamentale K'' con

$$\partial K'' = d^{-1}\delta d \delta^{-1}\Theta\Xi\Lambda\,,$$

in cui il numero degli elementi organizzati in sequenze $hkh^{-1}k^{-1}$ è aumentato rispetto a K. Ciò contraddice la scelta di K: ne segue la tesi. □

Corollario 3.4. *Il gruppo fondamentale di una superficie di Riemann compatta di genere g è isomorfo al quoziente del gruppo libero generato da* $2g$ *lettere* $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots b_g$ *modulo la relazione*

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = e. \tag{3.4}$$

□

Corollario 3.5. *Una superficie di Riemann compatta di genere g è omeomorfa alla sfera con g manici.* □

Su una superficie di Riemann compatta (di tipo iperbolico) e genere g, fissiamo un punto p_0 e una base $[a_1], \dots, [a_g], [b_1], \dots [b_g]$ del gruppo fondamentale $\pi_1(X, p_0)$. Possiamo scegliere i rappresentanti delle classi $[a_1], \dots, [a_g], [b_1], \dots [b_g]$ in modo che gli $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots b_g$ corrispondenti siano laccetti geodetici. Allora il laccetto $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ si rialza in D al perimetro di un dominio fondamentale.

Teorema 3.6. *Una superficie di Riemann compatta è iperbolica se e soltanto se ha genere* $g \geq 2$.

Dimostrazione. Se K è un poligono fondamentale di $\mathbf{G} = \mathcal{A}ut(\mathrm{D} \xrightarrow{\sigma} X)$ con tutti i vertici $\mathbf{G}$-equivalenti, la somma degli angoli interni dei poligoni $\gamma(K)$ adiacenti a K in un vertice w fissato è uguale a 2π, ma questo valore è anche uguale alla somma degli angoli interni di K. Questo ci dice che K ha necessariamente più di quattro lati, perché la somma degli angoli interni di un quadrilatero del piano iperbolico è sempre strettamente minore di 2π. □

A questo punto possiamo elencare le superficie di Riemann in base al tipo (a meno di equivalenza biolomorfa):

(1) la sfera di Riemann $\mathbb{CP}^1$ è l'unica superficie di tipo ellittico (di genere 0);
(2) $\mathbb{C}$ è l'unica superficie di tipo parabolico semplicemente connessa;
(3) $\mathbb{C}^*$ è l'unica superficie di Riemann di tipo parabolico che non sia né semplicemente connessa né compatta;
(4) i tori complessi sono le superfici di Riemann di genere 1 (compatte e paraboliche);
(5) tutte le altre superfici di Riemann, compatte o non compatte di genere $g \geq 2$, sono iperboliche.

4. Automorfismi delle superfici di Riemann

Siano X una superficie di Riemann ed $\mathcal{A}ut(X)$ il gruppo dei suoi automorfismi olomorfi. Abbiamo già osservato che:

(1) $\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1) = \left\{\gamma(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; ad - bc = 1\right\}$ è il gruppo delle trasformazioni di Möbius;

(2) $\mathcal{A}ut(\mathbb{C}) = \{\gamma(z) = az + b \mid a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}\}$ è il gruppo delle trasformazioni affini della retta complessa, che coincidono con le similitudini del piano euclideo che preservano l'orientazione;

(3) $\mathcal{A}ut(\mathbb{C}^*) = \{\gamma(z) = a \cdot z^{\pm 1} \mid a \in \mathbb{C}^*\}$;

(4) $\mathcal{A}ut(\mathrm{T}_\tau) = \mathrm{T}_\tau \ltimes \mathbf{R}(h)$ ove $\tau \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}z > 0,\ |\mathrm{Re}z| \leq 1/2,\ |z| \geq 1\}$ ed $\mathbf{R}(h)$ è il gruppo moltiplicativo delle radici h-esime dell'unità, con h=6 se τ=$e^{\pi i/3}$, $e^{2\pi i/3}$; h=4 se τ=i; h=2 altrimenti;

(5) $\mathcal{A}ut(D) = \left\{\gamma(z) = \dfrac{a{\cdot}z + \bar{c}}{c{\cdot}z + \bar{a}} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |c|^2 = 1\right\}$;

(6) $\mathcal{A}ut(\mathrm{D}^*) = \{\gamma(z) = e^{i\theta}z \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ è il gruppo delle rotazioni intorno all'origine;

(7) $\mathcal{A}ut(\{r < |z| < R\}) = \{\gamma(z) = e^{i\theta}z \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{e^{i\theta}rR/z \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

Nei primi cinque casi, il gruppo degli automorfismi opera transitivamente su X e dunque X è uno *spazio complesso omogeneo*. Nei casi 6) e 7) le orbite del gruppo degli automorfismi sono dei continui.

Il teorema seguente ci dice che i primi cinque casi esauriscono l'elenco delle superfici di Riemann omogenee ed i sette, a meno di equivalenza conforme, quello delle superfici di Riemann che ammettono un *gruppo continuo* di automorfismi.

Ricordiamo che l'azione di un gruppo $\mathbf{G}$ su uno spazio localmente compatto X si dice *propriamente discontinua* se, per ogni compatto K di X il numero di γ di $\mathbf{G}$ per cui $K \cap \gamma(K) \neq \emptyset$ è finito.

Teorema 4.1 (Schwarz). *Sia X una superficie di Riemann non biolomorfa ad una delle sette classi di superfici di Riemann elencate sopra. Allora $\mathcal{A}ut(X)$ opera su X in modo propriamente discontinuo. In particolare, se X è compatta e di tipo iperbolico, allora $\mathcal{A}ut(X)$ è finito.*

Dimostrazione. Possiamo limitarci a considerare superfici di Riemann iperboliche.

Siano X una superficie di Riemann iperbolica, $\pi{:}\mathrm{D}\to X$ il suo rivestimento universale e $\mathbf{G}$ il gruppo degli automorfismi del rivestimento. Il gruppo $\mathcal{A}ut(X)$ degli automorfismi olomorfi di X è isomorfo, in modo naturale, al quoziente $\mathrm{N}(\mathbf{G})/\mathbf{G}$, ove $\mathrm{N}(\mathbf{G})$ è il normalizzatore di $\mathbf{G}$ in $\mathcal{A}ut(\mathrm{D})$:

$$\mathrm{N}(\mathbf{G}) = \{\gamma \in \mathcal{A}ut(\mathrm{D}) \mid \gamma^{-1}\mathbf{G}\gamma = \mathbf{G}\}. \tag{4.1}$$

Poiché **G** è propriamente discontinuo, basta verificare che $N(\mathbf{G})$ è anch'esso propriamente discontinuo.

Dividiamo la dimostrazione di questo fatto in una serie di lemmi. Teniamo conto nel seguito che, per le trasformazioni di Möbius, la convergenza puntuale implica quella uniforme sui compatti se il limite è anch'esso una trasformazione di Möbius: ciò segue dal fatto che, se $\gamma \in \mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$ e $\gamma(z_j)=w_j$ per tre punti distinti z_1, z_2, z_3, allora

$$(w_1 : w_2 : w_3 : \gamma(z)) = (z_1 : z_2 : z_3 : z), \quad \forall z \in \mathbb{CP}^1.$$

Lemma 4.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sottogruppo* **G** *di* $\mathcal{A}ut(\mathrm{D})$ *sia propriamente discontinuo è che non esista una successione* $\{\gamma_n\}$ *di elementi distinti di* **G** *tale che* $\gamma_n(z) \to z$ *per ogni* $z \in \mathrm{D}$.

Dimostrazione. La necessità è ovvia. Dimostriamo la sufficienza. Se **G** non è propriamente discontinuo, possiamo trovare $a, b \in \mathrm{D}$ tali che, per una successione $\{\gamma_n\}$ di elementi distinti di **G**, risulti[1] $\gamma_n(a) \to b$.

Poniamo $b_n = \gamma_n(a)$. Se fosse $b_n = b$ per infiniti n, a meno di passare a una sottosuccessione potremmo supporre che $b_n = b$ per ogni n. Allora le $\gamma_n \circ \gamma_1^{-1}$ sarebbero infinite rotazioni di centro b tutte distinte e chiaramente il gruppo **G**, contenendo un sottogruppo infinito di rotazioni di centro b non sarebbe discontinuo.

Se $b_n \neq b$ per infiniti n, potremo allora supporre che

$$0 < \mathrm{dist}(b_{n+1}, b) < \mathrm{dist}(b_n, b) \quad \text{per ogni } n\,.$$

In particolare $\eta_n = \gamma_{n+1} \circ \gamma_n^{-1}$ non può essere una rotazione di centro b. Poiché $\eta_n(b_n) = b_{n+1}$, abbiamo

$$w = \eta_n(z) \quad \text{con} \quad \frac{w - b_{n+1}}{1 - \bar{b}_{n+1} w} = e^{i\theta_n} \frac{z - b_n}{1 - \bar{b}_n z}, \quad \text{ove } 0 \le \theta_n < 2\pi,$$

ed η_n è, per ogni n, una trasformazione diversa dall'identità.

A meno di passare a una sottosuccessione, possiamo supporre che la $\{\theta_n\}$ converga ad un $\theta \in [0, 2\pi]$. Allora $\eta_n(z) \to \eta(z)$ per ogni $z \in \mathrm{D}$, ove η è definita da:

$$\frac{w - b}{1 - \bar{b} w} = e^{i\theta} \frac{z - b}{1 - \bar{b} z}\,.$$

Poiché η è una rotazione di centro b e nessuna delle η_n è una rotazione di centro b, a meno di passare ad una sottosuccessione possiamo supporre che

[1] Supponiamo infatti che vi sia un numero reale R, con $0<R<1$, tale che, per $K=\{|z|\le R\}$, risulti $K \cap \gamma(K) \neq \emptyset$ per infiniti elementi γ di **G**. Poiché $\mathcal{A}ut(\mathrm{D})$ è una famiglia normale di $\mathscr{O}(\mathrm{D})$, (Teorema di Vitali-Montel), possiamo trovare una successione $\{\gamma_n\}$ di elementi distinti di **G**, che converge uniformemente sui compatti di D ad una funzione $f \in \mathscr{O}(\mathrm{D})$, e due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ in K, con $b_n = \gamma_n(a_n)$. Possiamo, a meno di estrarre una sottosuccessione, supporre che $\{a_n\}$ converga ad un elemento $a \in K$ e $\{b_n\}$ a $b = f(a) \in K$. Poiché la convergenza delle γ_n è uniforme, abbiamo allora anche $\gamma(a) \to b$.

tutti gli elementi $\{\eta_n\}$ siano distinti. Allora $\{\eta_{n+1}^{-1} \circ \eta_n\}$ è una successione di elementi di $\mathbf{G}\setminus\{\mathrm{id}\}$ che converge ad id. Ciò contraddice il fatto che $\mathbf{G}$ sia propriamente discontinuo. La dimostrazione è completa. $\square$

Lemma 4.3. *Se $\gamma, \eta \in \mathcal{Aut}(\mathrm{D})\setminus\{\mathrm{id}\}$ e $\gamma \circ \eta = \eta \circ \gamma$, allora γ ed η hanno gli stessi punti fissi.*

Dimostrazione. Sia a un punto fisso di η. Poniamo $\gamma(a) = b$ ed $\eta(b) = c$. Allora

$$b = \gamma(a) = \gamma \circ \eta(a) = \eta \circ \gamma(a) = \eta(b)\,.$$

Ciò dimostra che γ trasforma punti fissi di η in punti fissi di η. Analogamente, η manda punti fissi di γ in punti fissi di γ.

Consideriamo ora i diversi casi possibili:

(i) Se η è ellittica, allora ha un solo punto fisso a in D e dunque necessariamente $\gamma(a) = a$ ed a è anche punto fisso di γ. L'ulteriore punto fisso di η e γ si ottiene da a per riflessione rispetto ad $\mathbf{S}^1$.

(ii) Se η è parabolica, ha un unico punto fisso a che appartiene ad $\mathbf{S}^1$, e che è anche un punto fisso di γ. La γ non può avere un ulteriore punto fisso b perché allora dovrebbe essere anche $\eta(b) = b \neq a$.

(iii) Se η è iperbolica, con punti fissi a, b in $\mathbf{S}^1$, ed a, b non fossero anche punti fissi di γ, allora $\gamma(a) = b$ e $\gamma(b) = a$. Poiché la γ definisce una trasformazione proiettiva di $\mathbf{S}^1 \simeq \mathbb{RP}^1$ in sè che mantiene l'orientazione, la γ trasformerebbe $\mathbf{S}^1$ in sè senza punti fissi. Dovrebbe allora essere una rotazione ellittica di D con centro in un punto $c \in$ D, ma questo non è possibile per la discussione del punto (i). $\square$

Corollario 4.4. *Ogni sottogruppo abeliano di $\mathcal{Aut}(\mathrm{D})$ è elementare.* $\square$

Completiamo ora la dimostrazione del Teorema 4.1.

Supponiamo che $\mathrm{N}(\mathbf{G})$ non sia discontinuo su D. Possiamo allora trovare una successione $\{\gamma_n\} \subset \mathrm{N}(\mathbf{G}) \setminus \{\mathrm{id}\}$ che converga ad id in D.

Se $\mathbf{G} = \{id\}$, allora siamo nel caso (5) ($X \simeq$ D).

Se invece $\mathbf{G}$ contiene una trasformazione η diversa dall'identità, osserviamo che $\gamma_n^{-1} \circ \eta \circ \gamma_n \in \mathbf{G}$ per ogni n e dunque anche $\eta^{-1} \circ \gamma_n^{-1} \circ \eta \circ \gamma_n \in \mathbf{G}$ e converge ad id in D. Poiché $\mathbf{G}$ è discontinuo, questa relazione implica che esiste un $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\eta^{-1} \circ \gamma_n^{-1} \circ \eta \circ \gamma_n = \mathrm{id} \quad \forall n \geq \nu\,.$$

Per il Lemma allora tutte le γ_n hanno, per $n \geq \nu$, lo stesso insieme di punti fissi di η. Poiché $\eta \in \mathbf{G}\setminus\{\mathrm{id}\}$ era stata scelta in modo arbitrario, ne segue che $\mathbf{G}$ è un gruppo elementare di automorfismi di D, con un insieme comune di punti fissi. Per il teorema di classificazione dei gruppi elementari, abbiamo allora le seguenti possibilità:

(i) il gruppo **G** è un gruppo di trasformazioni paraboliche con un unico punto fisso comune $a \in \mathbf{S}^1$: allora $X \simeq \mathrm{D}^*$;
(ii) il gruppo **G** si può rappresentare come il gruppo ciclico delle trasformazioni del semipiano di Poincaré H generato dalla $\gamma(z) = k \cdot z$ con k reale e >1: allora X è biolomorfo all'anello $\{1<|z|< \exp(2\pi^2/\log k)\}$.

La dimostrazione è completa. □

5. La formula di Riemann-Hurwitz

Siano X e Y due superfici di Riemann compatte, di generi $g(X)$ e $g(Y)$ rispettivamente.

Teorema 5.1 (Riemann-Hurwitz). *Sia $f : X \to Y$ una funzione olomorfa non costante. Allora:*

(i) *f è aperta e surgettiva;*

(ii) *possiamo trovare un sottoinsieme finito A di Y tale che*

$$X \backslash f^{-1}(A) \xrightarrow{f} Y \backslash A$$

sia un rivestimento con un numero finito n di fogli;

(iii) *Per ogni $x \in f^{-1}(A)$ possiamo scegliere opportune coordinate olomorfe z in x e w in $y = f(x)$ in modo tale che la f si rappresenti, in un intorno di x, mediante*

$$w = z^{\nu} \tag{5.1}$$

per un intero positivo $\nu = \nu(x)$. Il numero ν non dipende dalla scelta delle coordinate z, w. Se $\nu > 1$ diciamo che x è un punto di ramificazione di f.

(iv) *Vale la formula:*

$$2g(X) - 2 = n \cdot (2g(Y) - 2) + \sum\nolimits_{x \in X} (\nu(x) - 1) \tag{5.2}$$

ove n è il numero di elementi della fibra generica di f.

Dimostrazione. La (i) è ovvia in quanto le funzioni olomorfe non costanti di una variabile complessa sono aperte: quindi $f(X)$ è aperto ed è anche chiuso in Y perché $f(X)$ è compatto in quanto f è continua ed X compatto. Poiché Y è connesso, abbiamo allora $f(X) = Y$.

La (ii) segue dal fatto che i punti $x \in X$ in cui $df(x) = 0$ sono isolati e quindi formano un insieme finito E. Poniamo $A = f(E)$. La dimensione della fibra nei punti di $Y \backslash A$ è localmente costante, e quindi costante perché $Y \backslash A$ è connesso. Si verifica allora facilmente che $f : X \backslash f^{-1}(A) \to X \backslash A$ è un rivestimento a n fogli, dove n è il numero di punti della fibra generica.

La (iii) è ovvia per le proprietà locali delle funzioni olomorfe.

Per dimostrare la (*iv*), scegliamo una triangolazione di Y in cui tutti i punti di A siano dei vertici. Indichiamo con $V(Y)$, $E(Y)$, $F(Y)$ rispettivamente il numero dei vertici, dei lati e dei triangoli della triangolazione. Allora:

$$2 - 2g(Y) = \chi(Y) = V(Y) - E(Y) + F(Y). \tag{5.3}$$

Mediante la f, questa triangolazione di Y si solleva a una triangolazione di X. Indichiamo con $V(X)$, $E(X)$, $F(X)$ rispettivamente il numero dei vertici, dei lati e dei triangoli di questa triangolazione.

Abbiamo allora: $E(X) = n \cdot E(Y)$, $F(X) = n \cdot F(Y)$. Sia $V_1(Y)$ il numero dei vertici della triangolazione di Y che non stanno in A. Ad ognuno dei vertici della triangolazione di Y che non appartiene ad A corrispondono n vertici distinti della triangolazione di X. Ad un vertice y di A corrispondono invece $m = m(y) \leq n$ vertici $x_1, ..., x_m$ in X e

$$\nu(x_1) + \cdots + \nu(x_m) = n\,.$$

Abbiamo quindi:

$$V(X) = n \cdot V_1(Y) + \sum\nolimits_{y\in A} m(y)\,.$$

Osserviamo ora che

$$m(y) = n - \sum\nolimits_{x\in f^{-1}(y)} (\nu(x) - 1)\,.$$

Risulta perciò:

$$\begin{aligned} V(X) &= n \cdot V_1(Y) + \sum\nolimits_{y\in A} \Big(n - \sum\nolimits_{x\in f^{-1}(y)} (\nu(x) - 1)\Big) \\ &= n \cdot V(Y) - \sum\nolimits_{x\in X} (\nu(x) - 1)\,. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Da questa segue la formula in (*iv*). □

Esempio 5.1. Definiamo $f : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ mediante $f(z) = z^2$ se $z\in\mathbb{C}$ ed $f(\infty) = \infty$. Allora 0 ed ∞ sono i punti di ramificazione con $\nu(0) = \nu(\infty) = 2$. Poiché $g(\mathbb{CP}^1) = 0$, sostituendo nella formula di Riemann-Hurwitz abbiamo: $0 - 2 = 2 \cdot (0 - 2) + (1 + 1)$.

Dalla formula di Riemann-Hurwitz ricaviamo il

Teorema 5.2 (Weber). *Siano X e Y due superfici di Riemann compatte. Se esiste una $f : X \to Y$ olomorfa non costante, allora $g(X) \geq g(Y)$.*
Se $g(X) = g(Y) = 0$, allora $\sum_{x\in X} \nu(x) - 1 = 2n - 2$.
Se $g(X) = g(Y) = 1$, allora f non ha punti di ramificazione.
Se $g(X) = g(Y) \geq 2$, allora f è biolomorfa. □

CAPITOLO XII

Il Teorema di Riemann-Roch

1. Fibrati in rette olomorfi

Siano X una superficie di Riemann e $\xi = \{F \xrightarrow{\pi} X\}$ un fibrato differenziabile in rette complesse su X.

Ricordiamo che questo significa che

- F (lo spazio totale) ed X (la base) sono varietà differenziabili;
- $\pi : F \to X$ è una sommersione differenziabile;
- su $\pi^{-1}(p)$, per ogni $p \in X$, è definita una struttura di spazio vettoriale complesso di dimensione uno;
- per ogni punto p di X possiamo trovare un intorno aperto U di p in X ed un diffeomorfismo $\phi : U \times \mathbb{C} \to \pi^{-1}(U)$ con

$$(1.1) \quad \begin{cases} \pi \circ \phi(p, \lambda) = p, \quad \forall p \in U, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \\ \phi(p, \lambda_1 + \lambda_2) = \phi(p, \lambda_1) + \phi(p, \lambda_2), \quad \phi(p, \lambda_1 \cdot \lambda_2) = \lambda_1 \cdot \phi(p, \lambda_2), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall p \in U, \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Chiamiamo la coppia (U, ϕ) una *trivializzazione locale* del fibrato ξ.

Il dato $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}$ di una famiglia di trivializzazioni locali di ξ con $\bigcup U_i = X$ si dice un *atlante di tivializzazione* di ξ. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, allora

$$\phi_j^{-1} \circ \phi_i(p, \lambda) = (p, g_{i,j}(p) \cdot \lambda), \ \forall p \in U_i \cap U_j, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \text{con } g_{i,j} \in \mathscr{C}^\infty(U_i \cap U_j, \mathbb{C}^*).$$

Le $g_{i,j}$ sono le *funzioni di transizione* di ξ per l'atlante di trivializzazione $\mathcal{A}$.

Definizione 1.1. Chiamiamo *olomorfo* un atlante di trivializzazione $\mathcal{A}$ le cui funzioni di transizione siano olomorfe.

Chiamiamo *equivalenti* due atlanti di trivializzazione olomorfi $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ per cui $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ sia ancora un atlante di trivializzazione olomorfo.

Chiamiamo *fibrato in rette complesse olomorfo* il dato di un fibrato differenziabile in rette complesse ξ e di una classe di equivalenza di suoi atlanti di tivializzazione olomorfi.

Definizione 1.2. Due fibrati in rette olomorfi $\xi_i = \{F_i \xrightarrow{\pi_i} X\}$ $(i=1,2)$ sulla stessa base X si dicono *equivalenti* se vi è un'applicazione $\Phi : F_1 \to F_2$, biolomorfa e lineare sulle fibre, che renda commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & F_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

Ciò significa che, se U è un qualsiasi aperto di X che sia di trivializzazione per entrambi i fibrati, dette $\psi_i{:}U \times \mathbb{C} \to \pi_i^{-1}(U)$ $(i{=}1,2)$ le relative trivializzazioni, abbiamo

$$\psi_2^{-1} \circ \Phi \circ \psi_1(p,\lambda) = (p, \lambda \cdot f(p)), \quad \forall (p,\lambda) \in U \times \mathbb{C}, \quad \text{con} \quad f \in \mathscr{O}^*(U).$$

Le funzioni di transizione caratterizzano il fibrato a meno di equivalenza.

Proposizione 1.1. *Siano* $\mathcal{U}{=}\{U_j\}$ *un ricoprimento aperto di* X *e* $\{g_{i,j}\}$ *una famiglia di* funzioni di transizione *su* $\mathcal{U}$. *Abbiamo*[1] *cioè*

(1.2)

$$g_{i,j} {\in} \mathscr{O}(U_{i,j}), \;\; g_{i,i}(p){=}1, \;\; \forall p \in U_i\,, \;\; g_{i,j}(p) g_{j,k}(p) g_{k,i}(p) = 1, \;\; \forall p \in U_{i,j,k}.$$

Allora vi è, a meno di equivalenza, un unico fibrato olomorfo $\xi{=}\{F \xrightarrow{\pi} X\}$ *per cui la* $\{g_{i,j}\}$ *sia una famiglia di funzioni di transizione.*

Dimostrazione. Il fibrato F si può definire come il quoziente dell'unione disgiunta dei prodotti cartesiani $U_i \times \mathbb{C}$ modulo la relazione di equivalenza che identifica $(p_i, \lambda_i) {\in} U_i \times \mathbb{C}$ e $(p_j, \lambda_j) {\in} U_j \times \mathbb{C}$ se $p_i{=}p_j \in U_i {\cap} U_j$ e $\lambda_j{=}g_{j,i}(p_i){\cdot}\lambda_i$. □

Si può verificare che vale il seguente :

Teorema 1.2. *Siano* $\xi{=}\{F \xrightarrow{\pi} X\}$ *ed* $\eta{=}\{F' \xrightarrow{\pi'} X\}$ *due fibrati in rette olomorfi su* X, $\mathcal{U}{=}\{U_i\}$ *un ricoprimento di* X *mediante aperti di trivializzazione per entrambi i fibrati e* $\{g_{ij}\}$, $\{g'_{ij}\}$ *le rispettive funzioni di transizione. Condizione necessaria e sufficiente affinché i due fibrati siano equivalenti è che esista una famiglia di funzioni olomorfe* $\{f_i \in \mathscr{O}^*(U_i)\}$ *tale che*

$$g'_{ij}(p) = f_i(p) \cdot g_{ij}(p) \cdot f_j^{-1}(p) \quad \forall p \in U_{i,j}. \tag{1.3}$$ □

1.1. Prodotto tensoriale di fibrati. Se $\xi_h{=}\{F_h \xrightarrow{\pi_h} X\}$, per $h{=}1,\ldots,n$, sono fibrati olomorfi in rette, che, per uno stesso ricoprimento $\mathcal{U}{=}\{U_i\}$ di X, con aperti che sono di trivializzazione per tutti i fibrati, hanno funzioni di transizione $\{g^{(h)}_{i,j} {\in} \mathscr{O}^*(U_{i,j}\}$ $(h{=}1,\ldots,n)$, allora le

$$\{g^{(1)}_{i,j} \cdots g^{(n)}_{i,j} \in \mathscr{O}^*(U_{i,j})\}$$

sono le funzioni di transizione del fibrato in rette

$$\xi_1 {\otimes} \cdots {\otimes} \xi_n {=} \{F_1 \otimes \cdots \otimes F_n \to X\}.$$

[1] Poniamo $U_{i_1,\ldots,i_k} = U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$.

1.2. Duale, potenza tensoriale. Se $\xi=\{F \xrightarrow{\pi} X\}$ è un fibrato in rette olomorfo, con funzioni di transizione $\{g_{i,j}\}$ per un ricoprimento aperto $\mathcal{U}=\{U_i\}$ di X, allora le $\{g_{i,j}^{-1}\}$ sono le funzioni di transizione di un fibrato $\xi^{-1}=\{F^{-1}\longrightarrow X\}$, che si dice *duale* di ξ.

Più in generale possiamo definire il fibrato $\xi^k = \{F^k \to X\}$, per k intero, mediante le funzioni di transizione $\{g_{i,j}^k\in\mathscr{O}^*(U_{i,j})\}$.

1.3. Fibrato canonico. Indichiamo con $\omega = \{\Omega \to X\}$ il *fibrato canonico*, definito a partire da un atlante complesso $\mathcal{U} = \{(U_i, z_i)\}$ di X mediante le funzioni di transizione $g_{i,j} = dz_j/dz_i$ su $U_{i,j} \neq \emptyset$. Esso coincide con la parte olomorfa del complessificato del fibrato cotangente T^*X di X.

1.4. Sezioni olomorfe. Sia $\xi = \{F \xrightarrow{\pi} X\}$ un fibrato olomorfo in rette. Ricordiamo che una *sezione* di ξ su un aperto U di X è un'applicazione $s : U \to F$ per cui $\pi\circ s(p) = p$ per ogni $p\in U$.

DEFINIZIONE 1.3. Una sezione s di ξ su un aperto U di X è *olomorfa* se, per ogni trivializzazione olomorfa $\phi : W \times \mathbb{C}\to\pi^{-1}(W)$, con $W \subset U$, è

$$s(p) = \phi(p, s_\phi(p)),\ \forall p \in W, \quad \text{con} \quad s_\phi \in \mathscr{O}(W). \tag{1.4}$$

Se ξ è definito da un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di X e da una famiglia di funzioni di transizione $\{g_{i,j}\}$, una sezione s di ξ su X è definita dal dato, su ciascun aperto U_i, di una funzione olomorfa s_i, con la proprietà che

$$s_i(p) = g_{i,j}(p) \cdot s_j(p), \quad \forall p \in U_{i,j},\ \forall i, j.$$

Indicheremo a volte la sezione s con la famiglia (s_i) delle sue trivializzazioni.

DEFINIZIONE 1.4. Indichiamo con $\mathrm{H}^0(X, F)$, oppure con $\mathscr{O}(X, F)$, lo spazio delle *sezioni olomorfe* s di F.

Diciamo che una sezione $s \in \mathscr{O}(X, F)$ ha uno zero di ordine m in un punto $p_0 \in X$ se, in una carta coordinata locale (U, z) di X, con centro in p_0 e per cui (U, ϕ) sia di trivializzazione per ξ, è $s(p) = \phi(p, z^m\cdot f(p))$ per una $f\in\mathscr{O}(U)$ con $f(p_0)\neq 0$.

LEMMA 1.3. *Siano X una superficie di Riemann connessa e $\xi=\{F \xrightarrow{\pi} X\}$ un fibrato in rette olomorfo. Gli zeri di una sezione olomorfa $s \in \mathscr{O}(X, F)$ non identicamente nulla sono isolati.* □

2. Funzioni meromorfe e fibrati olomorfi in rette

Siano X una superficie di Riemann connessa, $\xi = \{F \xrightarrow{\pi} X\}$ un fibrato olomorfo in rette, $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}$ un suo atlante di trivializzazione e $\{g_{i,j}\in\mathcal{O}^*(U_{i,j})\}$ le sue funzioni di transizione. Se $s=(s_i)$, $s'=(s'_i)$ sono due sezioni olomorfe di ξ, con s' non identicamente nulla, allora

$$\frac{s_i}{s'_i} = \frac{g_{ij}s_j}{g_{ij}s'_j} = \frac{s_j}{s'_j} \quad \text{su} \quad U_{i,j}.$$

Il rapporto s/s' definisce quindi senza ambiguità una funzione meromorfa f su X. Viceversa vale il:

Teorema 2.1. *Sia $f : X \to \mathbb{CP}^1$ una funzione meromorfa su una superficie di Riemann X. Allora esistono un fibrato olomorfo in rette $\xi = \{F \xrightarrow{\pi} X\}$ e due sue sezioni $s=(s_i)$, $s'=(s'_i)$ tali che $f=s/s'$. Il fibrato ξ è determinato dalla f a meno di equivalenza.*

Dimostrazione. Sia A l'insieme dei punti di X in cui la f abbia o uno zero o un polo. Poiché A è un insieme discreto, possiamo trovare un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di X tale che, per ogni indice i, l'intersezione $U_i \cap A$ contenga al più un punto. Possiamo ancora supporre che ciascuno degli U_i sia biolomorfo a un disco e quindi rappresentare la f su U_i come un quoziente:

$$f = \frac{p_i}{q_i} \qquad \text{su} \quad U_i, \tag{2.1}$$

con $p_i, q_i \in \mathcal{O}(U_i)$ e con una delle due funzioni priva di zeri in U_i. Se $U_{i,j} \neq \emptyset$, allora

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{p_j}{q_j} \quad \text{su} \quad U_{i,j} \quad \text{e quindi} \quad g_{i,j} = \frac{p_i}{p_j} = \frac{q_i}{q_j} \in \mathcal{O}^*(U_{i,j})$$

definisce un fibrato olomorfo in rette ξ su X ed $s=(p_i)$, $s'=(q_i)$ definiscono due sezioni di F con $f = s/s'$.

Una diversa scelta delle rappresentazioni locali della funzione meromorfa f ci dà, su un ricoprimento aperto che possiamo supporre sia lo stesso utilizzato nella prima parte della dimostrazione, due nuove famiglie di funzioni olomorfe $(p'_i \in \mathcal{O}(U_i))$ e $(q'_i \in \mathcal{O}(U_i))$, tali che una delle due funzioni $p_i{\cdot}p'_i$, $q_i{\cdot}q'_i$ non ha zeri in U_i ed $f|_{U_i} = p'_i/q'_i$. Dette

$$g'_{ij} = \frac{p'_i}{p'_j} = \frac{q'_i}{q'_j} \in \mathcal{O}^*(U_{i,j})$$

le funzioni di transizione del nuovo corrispondente fibrato ξ', e posto $h_i = p_i/p'_i = q_i/q'_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$, risulta $g_{ij} = h_i{\cdot}g'_{ij}{\cdot}h_j^{-1}$ e quindi i due fibrati ξ e ξ' sono equivalenti. □

3. Divisori

Sia X una superficie di Riemann connessa. Ad una funzione f, meromorfa su X e non costantemente uguale a 0 o a ∞, associamo l'applicazione

$$div(f) : X \to \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

che, in un punto $p \in X$ vale $m > 0$ se f ha in p uno zero di ordine m, vale $-m < 0$ se f ha in p un polo di ordine m e vale 0 se in p la f non ha né uno zero, né un polo.

Definizione 3.1. La funzione (3.1) si dice il *divisore* di f.
Più in generale, un *divisore* su X è una qualsiasi funzione

$$D : X \to \mathbb{Z}, \quad \text{tale che} \quad \operatorname{supp}(D) = \{x \in X \mid D(x) \neq 0\} \quad \text{sia discreto.} \tag{3.2}$$

Indichiamo con $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{D})$ lo $\mathbb{Z}$-modulo dei divisori su X, e con $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{D}^+)$ il sottoinsieme di $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{D})$ formato dai divisori D con $D(p) \geq 0$ per ogni $p \in X$. Con le usuali operazioni di somma di funzioni $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{D})$ è un gruppo abeliano (uno $\mathbb{Z}$-modulo) ed $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{D}^+)$ un *monoide abeliano*.

Gli elementi di $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{D})$ si dicono *divisori meromorfi*, quelli di $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{D}^+)$ *divisori olomorfi*, o *positivi*.

Se $D_1, D_2 \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{D})$, diciamo che $D_1 \leq D_2$ se $D_1(p) \leq D_2(p)$ per ogni $p \in X$.

Notazione 3.1. Dato un sottoinsieme discreto $\{p_i\}$ di punti distinti di X e, per ciascuno di essi un intero ν_i, indicheremo nel seguito con

$$\sum\nolimits_i \nu_i\, p_i \quad \text{il divisore} \quad D(p) = \begin{cases} \nu_i, & \text{se } p = p_i, \\ 0 & \text{se } p \notin \{p_i\}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Dato un divisore meromorfo $D \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{D})$, possiamo ricoprire X con una famiglia $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di aperti biolomorfi al disco e tali che $U_i \cap \operatorname{supp}(D)$ contenga al più un punto. Su ciascun U_i, possiamo poi definire una funzione meromorfa f_i tale che $div(f_i) = D|_{U_i}$. Allora le $g_{ij} = f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_{i,j})$ sono le funzioni di transizione di un fibrato in rette olomorfo $(\pi : F \longrightarrow X)$. Una diversa scelta delle funzioni meromorfe f_i darebbe un altro fibrato in rette olomorfo, ad esso equivalente.

Questa costruzione ci permette quindi di associare, ad ogni divisore meromorfo $D \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{D})$, una classe di equivalenza di fibrati olomorfi in rette, che indicheremo con $\{D\}$.

Osserviamo che *ogni divisore meromorfo $D \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{D})$ si può scrivere in modo unico come differenza $D_0 - D_\infty$ di divisori olomorfi D_0, D_∞, con $\operatorname{supp}(D_0) \cap \operatorname{supp}(D_\infty) = \emptyset$. Per i corrispondenti fibrati in rette olomorfi abbiamo $\{D\} = \{D_0\} \cdot \{D_\infty\}^{-1}$.*

4. Equivalenza lineare

Sia X una superficie di Riemann connessa. Indichiamo con $\mathcal{M}^*(X)$ l'insieme di tutte le funzioni meromorfe su X, che non siano né identicamente uguali a 0 né identicamente uguali ad ∞. Esse formano un gruppo abeliano rispetto alla moltiplicazione e l'applicazione

$$\mathcal{M}^*(X) \ni f \to \mathit{div}(f) \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{D}) \tag{4.1}$$

che associa ad ogni funzione il suo divisore è un omomorfismo di gruppi abeliani. In particolare, l'immagine $\mathit{div}(\mathcal{M}^*(X))$ è un sottogruppo di $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{D})$.

Definizione 4.1. Chiamiamo *principale* il divisore di una funzione meromorfa. Due divisori meromorfi $D_1, D_2 \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{D})$ si dicono *linearmente equivalenti*, ed in questo caso scriviamo $D_1 \equiv D_2$, se differiscono per un divisore principale. In particolare $D \equiv 0$ significa che D è il divisore di una funzione meromorfa.

Le classi di equivalenza rispetto all'equivalenza lineare sono gli elementi del gruppo quoziente $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{D})/\mathit{div}(\mathcal{M}^*(X))$.

Esempio 4.1. Fissiamo m punti distinti $p_1, ..., p_m$ sulla sfera di Riemann $\mathbb{CP}^1$ ed m interi $\nu_1, \ldots, \nu_m \in \mathbb{Z}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché il divisore $D = \sum_{h=1}^m \nu_h p_h$ su $\mathbb{CP}^1$ sia principale è che $\sum_{h=1}^m \nu_h = 0$.

Definizione 4.2. Se $D \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{D})$ è un divisore meromorfo, il *sistema lineare* definito da D è l'insieme

$$|D| = \{\Delta \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{D}^+) \mid \Delta \equiv D\} \tag{4.2}$$

dei divisori olomorfi linearmente equivalenti a D.

Se i due fibrati in rette olomorfi $\xi = \{F_1 \xrightarrow{\pi_1} X\}$ e $\xi_2 = \{F_2 \xrightarrow{\pi_2} X\}$ sono equivalenti, allora risulta determinato un isomorfismo canonico tra gli spazi delle loro sezioni olomorfe. Quindi:

dato un divisore meromorfo $D \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{D})$, gli spazi $\mathcal{O}(X, F)$ delle sezioni olomorfe dei fibrati $F \in \{D\}$ sono canonicamente isomorfi tra loro.

Notazione 4.1. Scriveremo $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}(D)) \simeq \mathcal{O}(X, F)$ se $F \in \{D\}$ e chiameremo questo insieme lo *spazio delle sezioni olomorfe associato a D*. Ad ogni sezione s di $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}(D))$ possiamo associare in modo naturale il divisore olomorfo che ha come supporto l'insieme dei suoi zeri e come valori i loro ordini e che indicheremo con $\mathit{div}(s)$.

Abbiamo allora:

Proposizione 4.2. *Sia D un divisore meromorfo su una superficie di Riemann connessa X. Allora*

$$|D| = \{\mathit{div}(s) \mid s \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}(D)) \setminus \{0\}\}. \tag{4.3}$$

Dimostrazione. Sia Δ un divisore olomorfo tale che $D-\Delta$ sia il divisore di una funzione meromorfa $\phi\in\mathcal{M}^*(X)$. Ricopriamo X con una famiglia $\{U_i\}$ di aperti biolomorfi al disco, ciascuno dei quali contenga al più un punto di $\operatorname{supp}(D)\cup\operatorname{supp}(\Delta)$. Siano f_i e h_i funzioni, la prima meromorfa, la seconda olomorfa su U_i, tali che $\mathit{div}(f_i) = D|_{U_i}$ e $\mathit{div}(h_i) = \Delta|_{U_i}$ per ogni indice i. Le $g_{i,j}=f_i/f_j \in \mathscr{O}(U_{i,j})$ sono le funzioni di transizione di un fibrato $(\pi : F \to X)$ per cui $\mathscr{O}(X,F)=\mathrm{H}^0(X,\mathscr{O}(D))$. Per ipotesi, ci sono funzioni $\psi_i\in\mathscr{O}^*(U_i)$ tali che

$$h_i\cdot\psi_i = f_i\cdot\phi, \quad \text{per ogni } i.$$

Le $s_i=h_i\cdot\psi_i\in\mathscr{O}(U_i)$ soddisfano la relazione $s_i=g_{i,j}s_j$ su $U_{i,j}$ e quindi (s_i) definisce una sezione olomorfa del fibrato F, che ha divisore Δ. Questo dimostra che $|D| \subseteq \{\mathit{div}(s) \mid s \in \mathrm{H}^0(X,\mathscr{O}(D))\setminus\{0\}\}$.

Dimostriamo l'inclusione opposta. Se $s\in\mathrm{H}^0(X,\mathscr{O}(D))$ è una sezione olomorfa non identicamente nulla, possiamo ricoprire X con una famiglia $\{U_i\}$ di aperti biolomorfi al disco in modo che $s=(s_i)$ ed $f=(f_i)$, con $s_i\in\mathscr{O}(U_i)$, $f_i\in\mathcal{M}^*(U_i)$, e $\mathit{div}(s_i)=\Delta|_{U_i}$, $\mathit{div}(f_i)=D|_{U_i}$, tali che (s_i) sia una sezione del fibrato definito da (f_i). Questo significa che $s_i=(f_i/f_j)s_j$ su $U_{i,j}$ e quindi che (f_i/s_i) definisce una funzione meromorfa ϕ su X, con $\mathit{div}(\phi) = D-\Delta$. □

Lemma 4.3. *Se la superficie di Riemann X è connessa e compatta, allora, per ogni divisore meromorfo $D \in \mathrm{H}^0(X,\mathcal{D})$, lo spazio $\mathrm{H}^0(X,\mathscr{O}(D))$ delle sezioni olomorfe del fibrato associato ha dimensione finita su $\mathbb{C}$.*

Due sezioni $s_1, s_2 \in \mathrm{H}^0(X,\mathscr{O}(D))\setminus\{0\}$ definiscono lo stesso divisore olomorfo su X se e soltanto se s_1/s_2 è una funzione olomorfa globale su X, cioè una costante complessa diversa da zero. □

Ne segue che il sistema lineare $|D|$ definito dal divisore meromorfo D ha la struttura di uno spazio proiettivo complesso di dimensione finita.

Definizione 4.3. Chiamiamo *dimensione* del sistema lineare $|D|$ ed indichiamo con $\dim(|D|)$ la sua dimensione come spazio proiettivo complesso:

$$\dim(|D|) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{H}^0(X,\mathscr{O}(D)) - 1. \tag{4.4}$$

Scriviamo $D = D_0-D_\infty$ con $D_0, D_\infty \in \mathrm{H}^0(X,\mathcal{D}^+)$ e $\operatorname{supp}(D_0)\cap\operatorname{supp}(D_\infty)=\emptyset$.

Ricordiamo che $\mathcal{M}^*(X)$ è il gruppo moltiplicativo delle funzioni meromorfe su X non identicamente uguali a zero o ad infinito. Per la Proposizione 4.2,

$$|D| = \{D + \mathit{div}(f) \mid f \in \mathcal{M}^*(X) \text{ e } \mathit{div}(f) \geq -D\}. \tag{4.5}$$

Da questa osservazione ricaviamo la proposizione seguente.

Proposizione 4.4. *L'insieme*

$$\mathcal{W}(D) = \{f \in \mathcal{M}^*(X) \mid \mathit{div}(f) \geq -D\} \cup \{0\}, \tag{4.6}$$

è uno spazio vettoriale complesso e

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{W}(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(D)) = \dim_{\mathbb{C}} |D| + 1. \tag{4.7}$$ □

Se $f \in \mathcal{M}^*(X)$, poniamo

$$\begin{cases} \mathscr{div}(f) = D_0(f) - D_\infty(f) \qquad \text{con} \\ D_0(f), D_\infty(f) \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{D}^+), \quad \mathrm{supp}(D_0(f)) \cap \mathrm{supp}(D_\infty(f)) = \emptyset\,. \end{cases} \tag{4.8}$$

La condizione $\mathscr{div}(f) \geq -D$ equivale a $D_0(f) - D_\infty(f) \geq D_0 - D_\infty$, cioè

$$D_0(f) + D_0 \geq D_\infty(f) + D_\infty\,.$$

Poiché anche $\mathrm{supp}(D_0) \cap \mathrm{supp}(D_\infty) = \emptyset$, da questa ricaviamo che:

$$\begin{cases} D_0(f) \geq D_\infty \\ D_\infty(f) \leq D_0\,, \end{cases} \tag{4.9}$$

onde

$$\mathcal{W}(D) = \{f \in \mathcal{M}^*(X) \mid D_0(f) \geq D_\infty\,, \quad D_\infty(f) \leq D_0\}. \tag{4.10}$$

Esempio 4.2. Sia $X = \mathbb{CP}^1$. Fissato $a \in \mathbb{Z}_*$, poniamo $D = a \cdot 0$.
Se $a \geq 0$, è

$$\mathcal{W}(D) = \{f \in \mathcal{M}^*(\mathbb{CP}^1) \mid \mathscr{div}(f) \geq -a \cdot 0\} = \{f \in \mathcal{M}^*(\mathbb{CP}^1) \mid D_\infty(f) \leq a \cdot 0\}\,.$$

Quindi $\mathcal{W}(D)$ è lo spazio delle funzioni razionali su $\mathbb{CP}^1$ che non hanno poli se non in zero e che in 0 hanno un polo di ordine minore o uguale ad a: esso è dunque lo spazio vettoriale complesso generato da:

$$1,\ z^{-1},\ \ldots,\ z^{-a}$$

ed ha quindi dimensione $a + 1$. Abbiamo perciò:

$$\dim_{\mathbb{C}} |a \cdot 0| = a\,.$$

Se $a < 0$, abbiamo $\mathcal{W}(D) = \{0\}$ e quindi $\dim_{\mathbb{C}} |a \cdot 0| = -1$.

5. Grado di un divisore

Se X è una varietà di Riemann compatta, il supporto di un divisore meromorfo D su X è finito e D si può scrivere come una somma finita

$$D = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \nu_i \cdot p_i, \quad \text{con} \quad \nu_i \in \mathbb{Z}\,,\ p_i \in X. \tag{5.1}$$

Definizione 5.1. Chiamiamo *grado* del divisore D definito dalla (5.1) il numero intero

$$\deg(D) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \nu_i. \tag{5.2}$$

Esempio 5.1. Se $D \in \mathrm{H}^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{D})$, allora $\dim_{\mathbb{C}} |D| = \deg(D)$. [Conveniamo che la dimensione dell'insieme vuoto sia un qualsiasi numero negativo.]

Proposizione 5.1. *Se X è una superficie di Riemann compatta e connessa, allora il grado di un suo qualsiasi divisore principale è* 0.

Dimostrazione. Una funzione meromorfa $f \in \mathcal{M}^*(X)$ definisce un'applicazione surgettiva $f : X \to \mathbb{CP}^1$, che è, al di fuori dell'insieme dei punti di diramazione, un rivestimento con un numero finito m di fogli. Il numero m è il *grado* dell'applicazione f. Ad ogni punto $p \in X$ associamo un intero positivo $\nu = \nu_f(p)$ (l'indice di ramificazione di f in p, definito, in coordinate olomorfe locali z di centro p in X e w di centro $f(p)$ in $\mathbb{CP}^1$, dall'equazione $f(z) = z^\nu \cdot h$, con h olomorfa e non nulla in 0). Per ogni $q \in \mathbb{CP}^1$ associamo alla funzione meromorfa f il divisore

$$D_q(f) = \sum_{f(p)=q} \nu_f(p) \cdot p. \tag{5.3}$$

Allora

$$\deg(D_q(f)) = m = \text{grado di } f, \quad \forall q \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{CP}^1. \tag{5.4}$$

In particolare, poiché $div(f) = D_0(f) - D_\infty(f)$, abbiamo

$$\deg(div(f)) = \deg(D_0(f)) - \deg(D_\infty(f)) = 0. \qquad \square$$

L'applicazione $deg : \mathcal{M}^*(X) \to \mathbb{Z}$, che associa ad $f \in \mathcal{M}^*(X)$ il suo grado come applicazione differenziabile a valori in $\mathbb{CP}^1$, è un omomorfismo di gruppi abeliani.

6. Differenziali abeliani

Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta. Indichiamo con Ω il suo *fibrato canonico* . È il fibrato olomorfo in rette, che in un qualsiasi atlante olomorfo $\{(U_i, z_i)\}$ ha funzioni di transizione $g_{i,j} = dz_i/dz_j$. Una sua *sezione meromorfa* si rappresenta su (U_i, z_i) come un differenziale $f_i(z)dz_i$, con $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$. Se ω è una sezione meromorfa di Ω su X, allora per ogni punto p di X possiamo considerare in X un laccetto γ di indice uno rispetto a p che non racchiuda singolarità di ω diverse da p. L'integrale

$$\operatorname{res}_p(\omega) = \oint_\gamma \omega \tag{6.1}$$

è un numero complesso che non dipende dalla scelta di γ e che si dice il *residuo* di ω in p.

Definizione 6.1. Chiamiamo *differenziale abeliano* una sezione meromorfa globale ω del fibrato canonico. Un differenziale abeliano ω su X si dice

- *di prima specie* se è una sezione olomorfa di Ω;
- *di seconda specie* se ha in ogni punto p di X residuo nullo;

- *di terza specie* se non si impongono su di esso condizioni.

Utilizzeremo la notazione:

$\mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X) =$ differenziali abeliani di prima specie $= \mathscr{O}(X, \Omega)$;

$\mathcal{Ab}_{\mathrm{II}}(X) =$ differenziali abeliani di seconda specie

$\mathcal{Ab}_{\mathrm{III}}(X) = \mathcal{Ab}(X) =$ differenziali abeliani di terza specie $= \mathcal{M}(X, \Omega)$.

Abbiamo: $\mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X) \subset \mathcal{Ab}_{\mathrm{II}}(X) \subset \mathcal{Ab}_{\mathrm{III}}(X) = \mathcal{Ab}(X)$.

7. Differenziali abeliani di prima specie

Gli spazi dei differenziali abeliani di prima, seconda e terza specie sono spazi vettoriali complessi.

Teorema 7.1. *Se X è una superficie di Riemann connessa e compatta di genere g, allora lo spazio $\mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X)$ dei suoi differenziali abeliani di prima specie è uno spazio vettoriale di dimensione finita g.*

Dimostrazione. Poiché X è omeomorfo alla sfera con g manici, il suo primo gruppo di coomologia $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C})$ è uno spazio vettoriale complesso di dimensione $2g$. Per il Teorema di de Rham, $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{C})$ è isomorfo al quoziente dello spazio vettoriale delle 1-forme chiuse α, di classe $\mathscr{C}^\infty$ su X, che soddisfano cioè la condizione $d\alpha = 0$, modulo il sottospazio delle 1-forme esatte, cioè il sottospazio vettoriale dei differenziali df delle funzioni f di classe $\mathscr{C}^\infty$ su X. Una 1-forma η di classe $\mathscr{C}^\infty$ su X si decompone in modo unico nella somma $\eta = \eta^{1,0} + \eta^{0,1}$ delle sue componenti $\mathbb{C}$-lineare ed anti-$\mathbb{C}$-lineare. Osserviamo che

$$d\eta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial\eta^{0,1} + \bar\partial\eta^{1,0} = 0. \tag{7.1}$$

(Ovviamente $\partial\eta^{1,0} = 0$ e $\bar\partial\eta^{0,1} = 0$ perché X ha dimensione complessa 1).

Risulta poi per la formula di Stokes :

$$\iint_X \partial\eta^{0,1} = \iint_X d\eta^{0,1} = 0 \quad \text{e} \quad \iint_X \bar\partial\eta^{1,0} = \iint_X d\eta^{1,0} = 0$$

in quanto $\partial\eta^{0,1} = d\eta^{0,1}$ e $\bar\partial\eta^{1,0} = d\eta^{1,0}$. In particolare $\partial\eta^{0,1}$ è ortogonale alle costanti e quindi l'equazione

$$\partial\eta^{0,1} = \partial\bar\partial u$$

ammette una soluzione $u \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{C})$. Abbiamo anche

$$\bar\partial\eta^{1,0} = -\partial\eta^{0,1} = \bar\partial\partial u$$

e quindi

$$\eta - du = (\eta^{1,0} - \partial u) + (\eta^{0,1} - \bar\partial u)$$

con

$$\bar\partial(\eta^{1,0} - \partial u) = 0 \quad \text{e} \quad \partial(\eta^{0,1} - \bar\partial u) = 0\,.$$

Queste relazioni ci dicono che $\eta^{1,0}-\partial u$ e $\overline{\eta^{0,1}-\bar{\partial} u}$ sono differenziali abeliani di prima specie. Quindi:
ogni elemento di $\mathrm{H}^1(X,\mathbb{C})$ *ha un rappresentante che è la somma di un differenziale abeliano di prima specie e del coniugato di un differenziale abeliano di prima specie.*

Abbiamo quindi

$$g \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X)\,.$$

Se viceversa α e β sono differenziali abeliani di prima specie ed $\alpha+\bar{\beta}=du$ per qualche $u\in\mathscr{C}^\infty(X)$, allora $\bar{\partial}u=\bar{\beta}$, onde $\partial\bar{\partial}u=0$ ed u è costante: quindi $\alpha=0$ e $\beta=0$. Questo dimostra che è anche

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X) \leq g\,.$$

Vale quindi l'uguaglianza. La dimostrazione è completa. □

Osservazione 7.2. Abbiamo dimostrato che l'applicazione

$$\mathcal{Ab}_I(X) \oplus \mathcal{Ab}_I(X) \ni (\alpha, \bar{\beta}) \longrightarrow [\alpha+\bar{\beta}] \in \mathrm{H}^1(X,\mathbb{C})$$

è un isomorfismo. Da questa ricaviamo che anche

$$\mathcal{Ab}_I(X) \ni \alpha \longrightarrow [\alpha+\overline{\alpha}] \in \mathrm{H}(X,\mathbb{R})$$

è un isomorfismo.

8. Periodi dei differenziali abeliani di prima specie

Sia X una superficie di Riemann compatta di genere g.

Se $g=0$, allora $X\simeq\mathbb{CP}^1$ e $\mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X)=\{0\}$.

Sia $g\geq 1$ e consideriamo, nel rivestimento universale $\pi:\tilde{X}\to X$ di X, un poligono fondamentale Π con i lati identificati secondo lo schema:

$$\partial\Pi = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}. \tag{8.1}$$

Sia p_0 l'immagine in X dei vertici di Π. Le proiezioni $\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{a}_g,\mathbf{b}_g$ dei lati $a_1,b_1,\ldots,a_g,b_g$ sono laccetti in p_0 e definiscono un sistema di generatori del gruppo fondamentale $\pi_1(X,p_0)$.

Ad un differenziale abeliano di prima specie ω associamo la stringa dei suoi *periodi*, definiti dagli integrali

$$\alpha_i = \oint_{\mathbf{a}_i}\omega\,, \qquad \beta_i = \oint_{\mathbf{b}_i}\omega, \quad \text{per} \quad i=1,\ldots,g. \tag{8.2}$$

In una carta locale olomorfa (U,z) è $\omega=f(z)dz$, onde

$$\omega\wedge\bar{\omega} = |f(z)|^2 dz\wedge d\bar{z} = (2/i)|f(z)|^2 dx\wedge dy$$

e quindi:

$$i\iint_X \omega\wedge\bar{\omega} > 0, \quad \text{se} \quad \omega\neq 0. \tag{8.3}$$

Poiché Π è semplicemente connesso, avremo $\pi^*\omega = dv$ su Π, per una funzione $v \in \mathscr{C}^\infty(\Pi)$. Otteniamo allora:

$$i\iint_X \omega \wedge \bar{\omega} = i\iint_\Pi dv \wedge \overline{\pi^*\omega} = i\iint_\Pi d(v \cdot \overline{\pi^*\omega}) = i\oint_{\partial\Pi} v \cdot \overline{\pi^*\omega}$$
$$= i\sum\nolimits_{j=1}^g \left(\int_{a_j} v \cdot \overline{\pi^*\omega} + \int_{a_j^{-1}} v \cdot \overline{\pi^*\omega} + \int_{b_j} v \cdot \overline{\pi^*\omega} + \int_{b_j^{-1}} v \cdot \overline{\pi^*\omega} \right).$$

Osserviamo che i valori che v assume su a_j e su a_j^{-1} differiscono per l'integrale di $\pi^*\omega$ su b_j:

$$\int_{b_j} \pi^*\omega = \oint_{\mathbf{b}_j} \omega = \beta_j\,.$$

Analogamente, i valori di v su b_j e su b_j^{-1} differiscono per

$$\int_{a_j^{-1}} \pi^*\omega = -\oint_{\mathbf{a}_j} \omega = -\alpha_j\,.$$

Risulta perciò:

$$\int_{a_j} v \cdot \overline{\pi^*\omega} + \int_{a_j^{-1}} v \cdot \overline{\pi^*\omega} = \int_{a_j} (v - [v + \beta_j])\overline{\pi^*\omega} = -\beta_j \oint_{\mathbf{a}_j} \bar{\omega} = -\bar{\alpha}_j\beta_j\,,$$
$$\int_{b_j} v \cdot \overline{\pi^*\omega} + \int_{b_j^{-1}} v \cdot \overline{\pi^*\omega} = \int_{a_j} (v - [v - \alpha_j])\overline{\pi^*\omega} = \alpha_j \oint_{\mathbf{b}_j} \bar{\omega} = \alpha_j\bar{\beta}_j\,.$$

Otteniamo così, per i periodi dei differenziali abeliani di prima specie, la *diseguaglianza di Riemann*:

TEOREMA 8.1. *Se* $\omega \in \mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X)\backslash\{0\}$, *allora*

$$0 < i\iint_X \omega \wedge \bar{\omega} = i\sum\nolimits_{j=1}^g \det\begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \bar{\alpha}_j & \bar{\beta}_j \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$ □

Con calcoli analoghi otteniamo *l'identità di Riemann*:

TEOREMA 8.2. *Siano* $\omega, \eta \in \mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X)$ *e poniamo:*

$$\alpha_j = \oint_{\mathbf{a}_j} \omega,\ \beta_j = \oint_{\mathbf{b}_j} \omega,\ \sigma_j = \oint_{\mathbf{a}_j} \eta,\ \tau_j = \oint_{\mathbf{b}_j} \eta. \tag{8.5}$$

Risulta allora:

$$\sum\nolimits_{j=1}^g \det\begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \sigma_j & \tau_j \end{pmatrix} = 0\,. \tag{8.6}$$ □

COROLLARIO 8.3. *Sia* $\omega \in \mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X)$ *un differenziale abeliano di prima specie e siano*

$$\alpha_j = \oint_{\mathbf{a}_j} \omega = 0, \quad per\ j = 1, \ldots, g. \tag{8.7}$$

(i) *Se* $\alpha_j = 0$ *per ogni* $j = 1, \dots, g$, *allora* $\omega = 0$.
(ii) *Assegnati* g *numeri complessi* $\alpha_1, \dots, \alpha_g \in \mathbb{C}$, *vi è uno e un solo differenziale abeliano di prima specie* ω *su* X *per cui valgano le* (8.7).

Dimostrazione. La (i) è conseguenza immediata della diseguaglianza di Riemann.

Verifichiamo la (ii). Introduciamo la matrice

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_g \\ -\mathrm{I}_g & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^g$ sono covettori complessi, allora

$$(\alpha, \beta) \cdot \mathrm{J} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} = \alpha \cdot \beta^* - \beta \cdot \alpha^*, \quad (\alpha, \beta) \cdot \mathrm{J} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^\intercal \\ \beta^\intercal \end{pmatrix} = \alpha \cdot \beta^\intercal - \beta \cdot \alpha^\intercal.$$

Fissata una base $\omega_1, \dots, \omega_g$ dello spazio dei differenziali abeliani di prima specie, indichiamo con

$$\Omega = \left(\oint_{\mathbf{a}_j} \omega_h \, , \, \oint_{\mathbf{b}_j} \omega_h \right) = (Z_1, \, Z_2) \tag{8.8}$$

la *matrice dei periodi*. Utillizzando J ed Ω, la diseguaglianza e l'identità di Riemann si scrivono:

$$\begin{cases} i \, \Omega \, J \, \Omega^* > 0, \\ \Omega \, J \, \Omega^\intercal = 0. \end{cases} \tag{8.9}$$

Utilizzando Z_1 e Z_2, possiamo riscriverle nella forma

$$i(Z_1 Z_2^* - Z_2 Z_1^*) > 0, \quad Z_1 Z_2^\intercal = Z_2 Z_1^\intercal.$$

La prima diseguaglianza ci dice in particolare che le matrici Z_1 e Z_2 hanno rango g. Infatti, se Z_1 fosse degenere, potremmo trovare un covettore non nullo $\alpha \in \mathbb{C}^g$ per cui $\alpha \cdot Z_1 = 0$ e questo darebbe $\alpha \cdot (Z_1 Z_2^* - Z_2 Z_1^*) \cdot \alpha^* = 0$, contraddicendo il fatto che $i(Z_1 Z_2^* - Z_2 Z_1^*) > 0$. In modo analogo si può verificare che anche Z_2 è non degenere. □

9. Grado dei differenziali abeliani

Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere $g \geq 2$. Per il Teorema 7.1 (esistenza di differenziali abeliani di prima specie) sappiamo che $\mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X)$ contiene due differenziali linearmente indipendenti. Il loro rapporto definisce una funzione meromorfa non banale $f : X \to \mathbb{CP}^1$. Siano $q_1, \dots, q_k$ i punti di ramificazione di f, al di fuori dei quali f è un rivestimento ad n fogli di $\mathbb{CP}^1$.

Possiamo supporre che 0 ed ∞ siano valori regolari di f. Il differenziale $d\mathfrak{z}$ su $\mathbb{C}$ si estende a un differenziale abeliano ω su $\mathbb{CP}^1$ con $D(\omega) = -2 \cdot \infty$.

Allora $\eta=f^*(\omega)$ ha in ciascuno degli n punti di $f^{-1}(\infty)$ un polo di ordine due, mentre, poiché ω non ha zeri su $\mathbb{CP}^1$, il suo pullback η ha soltanto zeri di ordine $(\nu(q_j)-1)$ nei punti di diramazione. Otteniamo perciò

$$D(\eta) = \sum\nolimits_{f(p)=\infty} -2\cdot p + \sum\nolimits_{j=1}^{k} (\nu(q_j)-1)\cdot p_j$$

e quindi, per il teorema di Riemann-Hurwitz, indicando con $\nu(q_j)$ gli ordini di ramificazione, vale la formula

$$\deg(\eta) = \sum\nolimits_{j=1}^{k} (\nu(q_j) - 1) - 2n = 2g - 2.$$

Abbiamo già verificato che i differenziali abeliani su $\mathbb{CP}^1$ hanno grado -2 e quelli sui tori complessi grado 0. Poiché i divisori di due differenziali abeliani differiscono per il grado di una funzione meromorfa, e questo è zero, otteniamo il seguente teorema.

Teorema 9.1. *Se X è una superficie di Riemann connessa e compatta di genere g, allora tutti i suoi differenziali abeliani non banali hanno divisore di grado $2g-2$.* $\square$

10. Esistenza di differenziali abeliani meromorfi

Supponiamo in questo paragrafo che X sia una superficie di Riemann connessa e compatta di genere g assegnata.

Teorema 10.1. *Per ogni coppia p_1, p_2 di punti distinti di X esiste un differenziale abeliano $\omega \in \mathcal{Ab}_{\mathrm{III}}(X)$ con soli poli semplici nei due punti p_1 e p_2 e residui rispettivamente uguali ad 1 e -1.*

Dimostrazione. Siano (U_i, z_i), per i=1, 2, con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, carte coordinate olomorfe in p_i, con $z_i(p_i)=0$. Siano $\chi_i \in \mathcal{C}_0^\infty(U_i)$, per $i = 1, 2$, funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ in X, con supporto compatto contenuto in U_i e $\chi_i=1$ in un intorno $V_i = \{|z_i(p)| \leq \epsilon_i\}$ di p_i in U_i (con $\epsilon_i > 0$). Definiamo una 2-forma $\psi \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ in X ponendo

$$\psi = \begin{cases} \bar{\partial}\chi_1 \wedge \dfrac{dz_1}{z_1} & \text{in } \quad U_1 \backslash V_1\,, \\ -\bar{\partial}\chi_2 \wedge \dfrac{dz_2}{z_2} & \text{in } \quad U_2 \backslash V_2\,, \\ 0 & \text{in } \quad V_1 \cup V_2 \cup (X \backslash (U_1 \cup U_2))\,. \end{cases}$$

La ψ (che vale 0 in un intorno dei punti p_1 e p_2) è una 2-forma di classe $\mathcal{C}^\infty$ su X e inoltre:

$$\iint_X \psi = \iint_{U_1 \backslash \{|z_1|<\epsilon_1\}} \bar{\partial}\chi_1 \wedge \frac{dz_1}{z_1} - \iint_{U_2 \backslash \{|z_2|<\epsilon_2\}} \bar{\partial}\chi_2 \wedge \frac{dz_2}{z_2}$$

$$= -\oint_{|z|=\epsilon_1} \frac{dz_1}{z_1} + \oint_{|z|=\epsilon_2} \frac{dz_2}{z_2} = 0.$$

L'equazione $\partial\bar{\partial}u = \psi$ ammette allora una soluzione $u \in \mathscr{C}^\infty(X)$. In particolare la

$$\omega = \begin{cases} \chi_1 \dfrac{dz_1}{z_1} + \partial u & \text{in} \quad U_1 \\ -\chi_2 \dfrac{dz_2}{z_2} + \partial u & \text{in} \quad U_2 \\ \partial u & \text{in} \quad X \backslash (U_1 \cup U_2) \end{cases}$$

è il differenziale abeliano cercato. □

Teorema 10.2. *Per ogni punto p_0 di X ed ogni intero $m \geq 2$, esiste un differenziale abeliano di seconda specie ω con un unico polo di ordine m in p_0.*

Dimostrazione. Sia (U, z) una carta locale olomorfa con centro in p_0. Fissiamo $\chi \in \mathscr{C}_0^\infty(U)$, uguale a 1 su $\{|z| \leq \epsilon\} \Subset U$ e consideriamo la dueforma

$$\eta = \begin{cases} \bar{\partial}\chi \wedge \dfrac{dz}{z^m} & \text{in} \quad U \backslash \{p\} \\ 0 & \text{in} \quad (X \backslash U) \cup \{p \in U \mid |z(p)| < \epsilon\}. \end{cases}$$

Poiché:

$$\iint_X \eta = \iint_{U \backslash \{p \in U \mid |z(p)| < \epsilon\}} \bar{\partial}\chi \wedge \frac{dz}{z^m} = \oint_{|z|=\epsilon} \frac{dz}{z^m} = 0,$$

l'equazione $\partial\bar{\partial}u = \eta$ ammette una soluzione $u \in \mathscr{C}^\infty(X)$. Allora

$$\omega = \begin{cases} \dfrac{\chi \cdot dz}{z^m} + \partial u, & \text{in} \quad U \\ \quad \partial u, & \text{in} \quad X \backslash U \end{cases}$$

è un differenziale abeliano di seconda specie che ha un unico polo di ordine m in p_0. □

Teorema 10.3 (Mittag-Leffler per i differenziali abeliani).

Siano $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_g$ definiti come nel paragrafo precedente e $p_1, \ldots, p_N$ punti distinti di X che non appartengano ai supporti dei laccetti $\mathbf{a}_i$. Sia assegnato, per ogni indice j con $1 \leq j \leq N$, un differenziale meromorfo η_j, definito in un intorno aperto U_j di p_j ed ordine di polo positivo in p_j e, per ogni indice i, con $1 \leq i \leq g$, un numero complesso α_j. Se

$$\sum_{j=1}^{N} \operatorname{res}_{p_j}(\eta_j) = 0,$$

allora vi è un unico differenziale abeliano ω, con

- $\operatorname{supp}(\mathit{div}_\infty(\omega)) = \{p_1, \ldots, p_N\}$,

- *periodi* $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ *sui laccetti* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_g$,
- *tale che, per ogni* $1 \leq j \leq N$, *il differenziale meromorfo* $\omega - \eta_j$ *abbia in* p_j *una singolarità eliminabile.*

Dimostrazione. Utilizzando i due teoremi precedenti, possiamo costruire un differenziale abeliano $\alpha \in \mathcal{Ab}(X)$ che abbia poli nei soli punti $p_1, \ldots, p_N$ e parti polari assegnate. Fissata una base $\omega_1, \ldots, \omega_q$ di $\mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X)$, il differenziale abeliano cercato sarà allora della forma $\omega = \alpha + \lambda_1\omega_1 + \cdots + \lambda_g\omega_g$, per opportuni numeri complessi $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$. L'unicità segue dal Corollario 8.3. Infatti due differenziali abeliani che soddisfino le condizioni del teorema, differiscono per un differenziale abeliano di prima specie con tutti i periodi nulli. □

11. Il teorema di Riemann-Roch per i divisori positivi

Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta. Fissato un divisore D su X, lo spazio $\mathcal{Ab}^D(X)$ dei differenziali abeliani il cui divisore è maggiore o uguale a D ha dimensione finita.

Definizione 11.1. Il numero intero

$$(11.1) \qquad \imath(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Ab}^D(X), \quad \text{con} \quad \mathcal{Ab}^D(X) = \{\omega \in \mathcal{Ab}(X) \mid \mathit{div}(\omega) \geq D\}$$

si dice l'*indice di specialità* di D.

Fissato un divisore D, il teorema di Riemann-Roch lega tra loro la dimensione dello spazio delle funzioni meromorfe $f \in \mathcal{M}(X)$ con $\mathit{div}(f) \geq -D$ con il genere di X ed il grado e l'indice di specialità del divisore. Ne daremo una dimostrazione che utilizza il teorema di Mittag-Leffler sull'esistenza di differenziali abeliani. Premettiamo all'enunciato e alla dimostrazione del lemma fondamentale alcune notazioni.

Tratteremo in questo paragrafo il caso di divisori olomorfi.

Se D è un divisore positivo, allora $\mathcal{Ab}^D(X) \subset \mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X)$ e quindi

$$(11.2) \qquad 0 \leq \imath(D) \leq g \quad \text{se} \quad D \geq 0.$$

Fissato un divisore D, possiamo scegliere il poligono fondamentale Π, con $\partial\Pi = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$, in modo che i supporti dei laccetti $\mathbf{a}_1, \ldots,$ $\mathbf{a}_g$, $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_g$ corrispondenti ai lati di Π non contengano punti del supporto di D. Se ω è un differenziale abeliano che non ha poli sui supporti dei laccetti, indicheremo con

$$(11.3) \qquad \alpha_j(\omega) = \oint_{\mathbf{a}_j} \omega, \quad \beta_i(\omega) = \oint_{\mathbf{b}_j} \omega, \quad \text{per } j = 1, \ldots, g$$

i suoi *periodi*.

Lemma 11.1. *Sia D un divisore positivo ed*[2]

$$\tilde{\mathcal{A}b}_{\mathrm{II}}(D) = \{\omega \in \mathcal{A}b_{\mathrm{II}}(X) \mid \mathit{div}(\omega) \geq -D-1,\ \alpha_j(\omega) = 0,\ \forall 1 \leq j \leq g\}. \tag{11.4}$$

(*i*) *Lo spazio* $\tilde{\mathcal{A}b}_{\mathrm{II}}(D)$ *ha dimensione* $\deg(D)$.

(*ii*) *Il nucleo dell'applicazione lineare*

$$\tilde{\mathcal{A}b}_{\mathrm{II}}(D) \ni \omega \to \beta(\omega) = (\beta_j(\omega))_{1 \leq j \leq g} \in \mathbb{C}^g \tag{11.5}$$

ha dimensione $\iota(D)$.

Dimostrazione. Sia $D = \sum_{i=1}^{\ell} \nu_i \cdot p_i$, con $p_1, \ldots, p_\ell$ distinti e $\nu_i \geq 1$ per ogni i. Per il Teorema 10.3 (Mittag-Leffler pei differenziali abeliani) gli elementi di $\tilde{\mathcal{A}b}_{\mathrm{II}}(D)$ sono completamente determinati dalle loro parti polari nei punti $p_1, \ldots, p_\ell$. Per ogni i, questi sono i coefficienti delle potenze negative nella serie di Laurent che li definisce in una coordinata olomorfa. Sono quindi ν_i per ogni i e quindi $\dim_{\mathbb{C}}(\tilde{\mathcal{A}b}_{\mathrm{II}}(D)) = \sum_{i=1}^{\ell} \nu_i = \deg(D)$. Questo dimostra (*i*).

Sia $\omega \in \tilde{\mathcal{A}b}_{\mathrm{II}}(D)$, è $D_\infty(\omega) = \sum_{i=1}^{\ell} \nu_i^\omega \cdot p_i$, con i p_i distinti e $0 \leq \nu_i^\omega \leq \nu_i$, con $\nu_i^\omega \neq 1$, per ogni i. Indichiamo ancora con $\pi : \Pi \to X$ la restrizione della proiezione del rivestimento universale al poligono fondamentale Π, scelto in modo che il supporto di $D_\infty(\omega)$ non intersechi $\pi(\partial\Pi)$ e siano $\mathfrak{z}_1 = \pi^{-1}(p_1)$, $\ldots$, $\mathfrak{z}_\ell = \pi^{-1}(p_\ell)$. Il pullback $\pi^*\omega$ è in Π il differenziale di una funzione meromorfa f, che ha $D_\infty(f) = \sum_{i=1}^{\ell} (\nu_i^\omega - 1)\mathfrak{z}_i$, le cui parti polari di f sono univocamente determinate da quelle di ω: se

$$\pi^*\omega - \sum\nolimits_{n=2}^{\nu_i} \frac{c_{i,n}\, dz}{(z - \mathfrak{z}_i)^n}, \quad \text{con } c_{i,n} \in \mathbb{C},$$

ha in $\mathfrak{z}_i$ una singolarità eliminabile, allora

$$f(z) - \sum\nolimits_{n=2}^{\nu_i} \frac{c_{i,n}}{(1-n) \cdot (z - \mathfrak{z}_i)^{n-1}}$$

ha in $\mathfrak{z}_i$ una singolarità eliminabile.

Se η è un qualsiasi differenziale abeliano di prima specie, il suo pullback $\pi^*\eta$ è un differenziale esatto $h(z)dz$ su Π, con $h \in \mathscr{O}(\bar{\Pi})$. I valori di h su a_j differiscono da quelli assunti nei corrispondenti punti di a_j^{-1} per un periodo $\beta_j(\eta)$, mentre quelli su b_j differiscono da quelli su b_j^{-1} per $-\alpha_j(\eta)$. Otteniamo perciò

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Pi} f \cdot \pi^*\eta &= \sum\nolimits_{j=1}^{g} \left(\int_{a_j} f \cdot \pi^*\eta + \int_{b_j} f \cdot \pi^*\eta + \int_{a_j^{-1}} f \cdot \pi^*\eta + \int_{b_j^{-1}} f \cdot \pi^*\eta \right) \\ &= \sum\nolimits_{j=1}^{g} \left(\int_{a_j} h \cdot \pi^*\omega + \int_{b_j} h \cdot \pi^*\omega + \int_{a_j^{-1}} h \cdot \pi^*\omega + \int_{b_j^{-1}} h \cdot \pi^*\omega \right) \end{aligned}$$

---

[2] Se $D = \sum_{i=1}^{\ell} \nu_i \cdot p_i$, poniamo $-D-1 = \sum_{i=1}^{\ell} (-\nu_i - 1) \cdot p_i$.

$$= \beta_j(\eta) \oint_{a_j} \pi^* \omega - \alpha_j(\eta) \oint_{b_j} \pi * \omega = \beta_j(\eta) \oint_{\mathbf{a}_j} \omega - \alpha_j(\eta) \oint_{\mathbf{b}_j} \omega$$
$$= -\sum\nolimits_{j=1}^{g} \alpha_j(\eta)\beta_j(\omega) = -\langle \alpha(\eta), \beta(\omega)\rangle.$$

Poiché l'applicazione $\eta \to \alpha(\eta) = (\alpha_j(\eta))_{1\leq j\leq g} \in \mathbb{C}^g$ è un isomorfismo lineare di $\mathcal{A}b_{\mathrm{I}}(X)$ su $\mathbb{C}^g$, possiamo utilizzare l'uguaglianza stabilita sopra per caratterizzare l'immagine di (11.5). Poiché

$$(\dagger) \qquad \oint_{\partial\Pi} f \cdot \pi^* \eta = \oint_{\partial\Pi} f \cdot h\, dz = \sum\nolimits_{i=1}^{\ell} \mathrm{res}_{\mathfrak{z}_i}(f \cdot h),$$

i differenziali abeliani η per cui $\langle \alpha(\eta), \beta(\omega)\rangle$ è zero per ogni $\omega \in \tilde{\mathcal{A}b}_{\mathrm{II}}(D)$ sono tutti e soli quelli che appartengono ad $\mathcal{A}b^D(X)$.

Infatti, se $\eta \in \mathcal{A}b^D(X)$, allora $f \cdot \pi^*(\eta)$ è un differenziale olomorfo in Π e quindi l'integrale $(\dagger)$ si annulla per il teorema di Morera. Se invece $\eta \in \mathcal{A}b_{\mathrm{I}}(X)$ ha in un punto p_i del supporto di D uno zero di ordine minore di ν_i, per il teorema d'esistenza dei differenziali abeliani di seconda specie possiamo trovare un $\omega \in \tilde{\mathcal{A}b}_{\mathrm{II}}(D)$ che ha un polo solo in p_j e per cui $\pi^*(\omega) = df$ per una f meromorfa, con un unico polo in $\mathfrak{z}_j = \pi^{-1}(p_j)$, per cui $f \cdot \pi^*(\eta)$ ha un residuo non nullo in $\mathfrak{z}_j$ e dunque l'integrale in $(\dagger)$ è diverso da zero.

Questo ci dice che il rango di (11.5) è uguale a $g - \imath(D)$. □

Nel §4 abbiamo introdotto la nozione del *sistema lineare* associato al divisore D e dimostrato che, detto $\mathcal{W}(D)$ lo spazio vettoriale delle funzioni meromorfe f su X per cui $\mathit{div}(f) \geq -D$, risulta

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{W}(D) = \dim_{\mathbb{C}} |D| + 1.$$

Teorema 11.2 (di Riemann-Roch per divisori positivi). *Sia X una superficie di Riemann compatta e connessa di genere g e $D \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{D}^+)$ un suo divisore positivo. Allora*

$$(11.6) \qquad \boxed{\dim_{\mathbb{C}} |D| = \deg(D) - g + \imath(D).}$$

Dimostrazione. Il differenziale definisce un'applicazione

$$d : \mathcal{W}(D) \ni f \longrightarrow df \in \tilde{\mathcal{A}b}_{\mathrm{II}}(D)$$

che ha come nucleo le costanti e come immagine lo spazio delle forme ω che soddisfano $\beta(\omega) = 0$ (con la notazione introdotta in (11.5)). Consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{W}(D) \xrightarrow{\ d\ } \tilde{\mathcal{A}b}_{\mathrm{II}}(D) \xrightarrow{\ \beta\ } \mathbb{C}^g.$$

Per il Lemma 11.1 l'immagine dell'ultima mappa ha dimensione $g - \imath(D)$. Quindi (la somma alternata delle dimensioni degli spazi in una successione esatta finita di spazi vettoriali ed applicazioni lineari, in cui la prima applicazione sia iniettiva e l'ultima surgettiva deve essere uguale a zero)

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{W}(D)) + \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{Ab}_{\mathrm{II}}^{-D-1}) - (g-\imath(D)) \\ &= -\dim_{\mathbb{C}}|D| + \deg(D) - g + \imath(D). \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione. □

Il teorema di esistenza dei differenziali abeliani di prima specie ed il Teorema 9.1 si possono dedurre l'uno dall'altro utilizzando la formula di Riemann-Roch.

Proposizione 11.3. *Se η è un differenziale abeliano di prima specie sulla superficie di Riemann (connessa e compatta) X di genere $g\geq 1$, allora*

$$\begin{cases} \deg(\mathit{div}(\eta)) = 2g-2; \\ \dim_{\mathbb{C}}|\mathit{div}(\eta)| = g-1. \end{cases} \tag{11.7}$$

Dimostrazione. Infatti, da $\imath(\mathit{div}(\eta)) = 1$, otteniamo

$$\dim(|\mathit{div}(\eta)|) = \deg(\mathit{div}(\eta)) - g + 1,$$

da cui $\deg(\mathit{div}(\eta)) - \dim(|\mathit{div}(\eta)|) = g-1$. Per il Teorema 10.1 è $\deg(\mathit{div}(\eta)) = 2g-2$, da cui ricaviamo che $\dim(|\mathit{div}(\eta)|) = g-1$. Viceversa, dal Teorema 7.1 (esistenza dei differenziali abeliani di prima specie) segue che $\dim(|\mathit{div}(\eta)|) = g-1$ e quindi, per la formula di Riemann-Roch, $\deg(\mathit{div}(\eta)) = 2g-2$. □

Poiché sia il grado che il sistema lineare sono invarianti per equivalenza lineare, abbiamo:

Teorema 11.4. *Se $\eta \in \mathcal{Ab}(X)$, allora*

$$\deg(\eta) = 2g-2, \quad \dim_{\mathbb{C}}|\mathit{div}(\eta)| = g-1.$$

12. Il teorema di Riemann-Roch nel caso generale

Sia X una superficie di Riemann, connessa e compatta, di genere g.

Lemma 12.1. *Se $g \geq 1$ ed η è un differenziale abeliano, allora per ogni divisore meromorfo $D \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{D})$ abbiamo:*

$$\imath(D) = \dim_{\mathbb{C}}|\mathit{div}(\eta) - D| + 1\,. \tag{12.1}$$

Dimostrazione. L'applicazione lineare

$$\mathcal{W}(\mathit{div}(\eta) - D) \ni f \to f \cdot \eta \in \mathcal{Ab}^D(X) \tag{12.2}$$

è ben definita ed è un isomorfismo.

Poiché $\dim_{\mathbb{C}}|\mathit{div}(\eta) - D| = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{W}(\mathit{div}(\eta) - D)) - 1$ e $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{Ab}^D(X)) = \imath(D)$, ne segue la tesi. □

Dal lemma ricaviamo immediatamente il :

Corollario 12.2. *L'indice di specialità è invariante per equivalenza lineare.*

Possiamo quindi dimostrare ora:

Teorema 12.3 (Riemann-Roch). *Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere g. Allora per ogni divisore meromorfo D su X abbiamo:*

$$\boxed{\dim_{\mathbb{C}}|D| = \deg(D) - g + \imath(D)\,.} \tag{12.3}$$

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato il teorema nel caso in cui D sia un divisore olomorfo. Supponiamo ora che per un $\eta \in \mathcal{Ab}(X)$, il divisore $\mathcal{div}(\eta) - D$ sia linearmente equivalente a un divisore olomorfo. Allora

$$\dim_{\mathbb{C}}|\mathcal{div}(\eta) - D| = \deg(\mathcal{div}(\eta) - D) - g + \imath(\mathcal{div}(\eta) - D)\,,$$

da cui ricaviamo che

$$\imath(D) - 1 = (2g-2) - \deg(D) - g + \dim_{\mathbb{C}}|D| + 1$$

e questa relazione ci dà la tesi.

Ci resta da considerare il caso in cui né D, né $\mathcal{div}(\eta) - D$, per $\eta \in \mathcal{Ab}(X)$, siano linearmente equivalenti a un divisore olomorfo.

In questo caso $\dim_{\mathbb{C}}|D| = -1$ [perché, se ci fosse una $f \in \mathcal{W}(D)\setminus\{0\}$, allora $D - \mathcal{div}(f)$ sarebbe un divisore olomorfo linearmente equivalente a D] ed $\imath(D) = 0$ [perché il fatto che non esista $\eta \in \mathcal{Ab}(X)$ per cui $\mathcal{div}(\eta) - D$ sia un divisore positivo significa che $\mathcal{Ab}^D(X) = \{0\}$]; dobbiamo perciò dimostrare che in questo caso

$$\deg(D) = g - 1\,.$$

Sia $D = D_0 - D_\infty$, con D_0, D_∞ divisori olomorfi senza parti comuni. Per il teorema di Riemann-Roch per i divisori olomorfi, abbiamo

$$\dim_{\mathbb{C}}|D_0| \geq \deg(D_0) - g = \deg(D) + \deg(D_\infty) - g\,.$$

Se fosse $\deg(D) \geq g$, avremmo allora

$$\dim_{\mathbb{C}}|D_0| \geq \deg(D_\infty)\,.$$

Allora $\mathcal{W}(D_0)$ conterrebbe $\deg(D_\infty)+1$ funzioni meromorfe linearmente indipendenti e potremmo quindi trovare una loro combinazione lineare che definisca una funzione meromorfa non nulla in $\mathcal{W}(D)$. Ma ciò contraddice il fatto che $\mathcal{W}(D)=\{0\}$; quindi, necessariamente, abbiamo $\deg(D) \leq g-1$. Analogamente, applicando lo stesso ragionamento al divisore $\mathcal{div}(\eta) - D$, per un arbitrario differenziale abeliano $\eta \in \mathcal{Ab}(X)$, otteniamo che

$$\deg(\mathcal{div}(\eta) - D) = 2g - 2 - \deg(D) \leq g - 1,$$

onde $\deg(D) \geq g - 1$ e pertanto vale l'uguaglianza.

La dimostrazione è completa. □

13. Il teorema di immersione di Riemann

Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere g.

Per il Teorema 11.4, il divisore di un differenziale abeliano non nullo ha grado $2g-2$. Poiché l'indice di specialità di un divisore D è la dimensione dello spazio dei differenziali abeliani con divisore maggiore o uguale a D, vale il

LEMMA 13.1. *L'indice di specialità di un divisore meromorfo di grado maggiore di* $(2g-2)$ *è zero.* □

TEOREMA 13.2 (Riemann). *Ogni superficie di Riemann connessa e compatta di genere g ammette un'immersione bi-regolare in* $\mathbb{CP}^{g+1}$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto p_0 di X. Per il Lemma 13.1, il divisore $D = (2g+1)\cdot p_0$ ha indice di specialità zero e quindi

$$\dim_{\mathbb{C}}|D| = \deg(D) - g = g + 1.$$

Poiché $(\dim_{\mathbb{C}}|D|+1)$ è la dimensione dello spazio vettoriale $\mathcal{W}(D)$ delle funzioni meromorfe f su X per cui $\mathit{div}(f)\geq -D$, questo ci dice che possiamo trovare $g+2$ funzioni meromorfe $f_0, f_1, \ldots, f_{g+1}$ su X, linearmente indipendenti, che hanno al più un polo in p_0, di ordine minore o uguale a $2g+1$. Se esse avessero tutte ordine di polo in p_0 minore o uguale a $2g$, allora, posto $D' = 2g\cdot p_0$, otterremmo $\mathcal{W}(D) = \mathcal{W}(D')$. Poiché, ancora per il Lemma13.1, $\iota(D') = 0$, otterremmo che $\dim_{\mathbb{C}}|D| = \dim_{\mathbb{C}}|D'| = \deg(D')-g=g \neq g+1$ e quindi una contraddizione. Dunque, almeno una delle f_j ha in p_0 un polo di ordine esattamente uguale a $2g+1$. Se poi tutte le $f_0, f_1, \ldots, f_{g+1}$ avessero, in un punto p_1 di X, uno zero comune, allora sarebbe $\mathcal{W}(D)=\mathcal{W}(D'')$ con $D''=D-p_1$. Poiché D'' ha grado $2g>2g-2$, ha indice di specialità zero. Quindi,

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{W}(D'')) = \dim_{\mathbb{C}}|D''|+1 = \deg(D'')-g+1 = g+1 < \dim_{\mathbb{C}}\mathcal{W}(D) = g+2$$

ci dà ancora una contraddizione. Ne segue che, detta z una coordinata olomorfa in con centro in p_0, le $z^{2g+1}f_j$ hanno in p_0 una singolarità eliminabile, ed almeno una di esse è diversa da zero in p_0. Indicando con w_j il valore dell'estensione di $z^{2g+1}f_j$ in p_0, possiamo descrivere un'applicazione olomorfa $F : X \to \mathbb{CP}^{g+1}$ ponendo, in coordinate omogenee,

$$F(p) = \begin{cases} (f_0(p) : f_1(p) : \cdots : f_{g+1}(p)), & \text{se } p \neq p_0, \\ (w_0 : w_1 : \cdots : w_{g+1}), & \text{se } p = p_0. \end{cases}$$

Ci resta da dimostrare che F è iniettiva e regolare.

F è iniettiva. Ragioniamo per assurdo. Se fosse $F(p_1) = F(p_2)$ per due punti distinti p_1 e p_2 di $X\setminus\{p_0\}$, sarebbe univocamente determinato un numero complesso λ tale che $f_j(p_2) = \lambda f_j(p_1)$, per $j = 0, 1, \ldots, g, g+1$. Sappiamo, per la prima parte della dimostrazione, che non tutte le f_j si annullano in p_1. Supponiamo, per fissare le idee, che sia, ad esempio, $f_{g+1}(p_1)\neq 0$. Allora le $h_j = f_j - (f_j(p_0)/f_{g+1}(p_0))\cdot f_{g+1}$, per $j=0, 1, \ldots, g$ sarebbero $g+1$ funzioni meromorfe e linearmente indipendenti appartenenti a $\mathcal{W}(D''')$, con $D''' = D - p_1 - p_2$. Poiché $\deg(D''') = 2g-1>2g-2$, il divisore D''' ha indice di specialità zero e quindi

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{W}(D''') = \dim_{\mathbb{C}} |D'''|+1 = 2g-1 - g + 1 = g$$

ci dà una contraddizione.

Consideriamo ora il caso in cui sia $p_2=p_0$. Possiamo supporre sia $w_j=0$ per $0\leq j\leq g$. Allora la condizione che $F(p_1)=F(p_0)$ ci dice che $f_0, \ldots, f_g$ sono $g+1$ funzioni meromorfe, linearmente indipendenti, in $\mathcal{W}(D'''')$, con $D'''' = D-p_0-p_1$, che ha grado $2g-1$. Ripetendo il ragionamento svolto sopra, otteniamo ancora una contraddizione. Questo prova che F è iniettiva.

F è regolare. Supponiamo per assurdo che $dF(p_1)=0$ in un punto $p_1\neq p_0$. Una delle f_j non si annulla in p_1. Supponiamo, per fissare le idee, che sia $f_{g+1}(p_1)\neq 0$. Allora le $h_j = f_j - (f_j(p_1)/f_{g+1}(p_1))\cdot f_{g+1}$, per $0\leq j\leq g$, hanno tutte uno zero del second'ordine in p_1 e sono quindi $g+1$ funzioni meromorfe linearmente indipendenti in $\mathcal{W}(D^v)$, con $D^v = D-2\cdot p_1$. Poiché $\deg(D^v) = 2g-1>2g-2$, possiamo ancora applicare il Lemma 13.1 e il teorema di Riemann-Roch per ottenere una contraddizione.

Nel caso in cui fosse $dF(p_0)=0$, potremmo, come in precedenza, supporre che $w_j=0$ per $0\leq j\leq g$. La condizione si traduce allora nel fatto che le $f_0, \ldots, f_g$ abbiano, in p_0, un polo di ordine $\leq(2g-1)$ e siano perciò $g+1$ elementi linearmente indipendenti di $\mathcal{W}((2g-1)\cdot p_0)$. Poiché il grado $2g-1$ del divisore $(2g-1)\cdot p_0$ è maggiore di $2g-2$, il suo indice di specialità è zero ed il teorema di Riemann-Roch ci dice che il suo sistema lineare deve avere dimensione $g-1$. Questo ci dà una contraddizione. La dimostrazione è completa. $\square$

CAPITOLO XIII

Funzioni Meromorfe

1. Indice di specialità e divisore canonico

Siano X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere g e D un divisore meromorfo su X. L'indice di specialità di D è la dimensione dello spazio $\mathcal{Ab}^D(X)$ dei differenziali abeliani ω con $\mathit{div}(\omega)\geq D$. Fissiamo un differenziale abeliano $\omega_0\in\mathcal{Ab}(X)$ e sia $K=\mathit{div}(\omega_0)$ il corrispondente divisore canonico. Se f appartiene allo spazio $\mathcal{W}(K-D)$ delle funzioni meromorfe su X con $\mathit{div}(f)\geq(D-K)$, allora $f\cdot\omega_0\in\mathcal{Ab}^D(X)$ e la

$$\mathcal{W}(K-D)\ni f\longrightarrow f\cdot\omega_0\in\mathcal{Ab}^D(X)$$

è un isomorfismo lineare. In particolare

Lemma 1.1. $\iota(D)=\dim_{\mathbb{C}}(|K-D|)+1$.

Osserviamo che $|D|=\emptyset$ se $\deg(D)<0$, mentre, per $\deg(D)=0$, il sistema lineare può contenere un punto od essere vuoto, a seconda che D sia o meno un divisore principale.

Il multiplo $q\cdot K$ del divisore canonico è associato alla potenza simmetrica q-esima ω_0^q del differenziale ω_0. Utilizzando il Lemma 1.1 e la formula di Riemann-Roch otteniamo

$$\dim(|q\cdot K|)=q\cdot(2g-2)-g+\dim(|(1-q)K|)+1=(2q-1)(g-1)+\dim(|(1-q)K|)$$

Se $g>1$, allora il grado di K è positivo e quindi $|q\cdot K|=\emptyset$ per $q<0$. questo ci dice che (la dimensione dell'insieme vuoto è -1)

$$\dim(|q\cdot K|)=(2q-1)\cdot(g-1)-1,\quad \text{se}\quad q\geq2,\quad g\geq2.$$

Ricordiamo che $\dim(|0|)=0$ e $\dim(|K|)=g-1$.

Nel caso delle superfici di Riemann compatte e connesse paraboliche, lo spazio dei differenziali olomorfi di grado q ha dimensione 1 per ogni q, mentre, nel caso della sfera di Riemann, poiché il divisore canonico ha grado -2, abbiamo $|qK|=\emptyset$ se $q>0$, mentre $\dim(|q\cdot K|)=-2q$ se $q\leq0$.

Possiamo riassumere i risultati per i multipli del divisore canonico nella tabella

genere	q	$\dim_{\mathbb{C}}(\lvert q\cdot K\rvert)$
g=0	≤ 0	$-2q$
g=0	>0	-1
g=1	tutti	0
$g>1$	<0	-1
$g>1$	0	0
$g>1$	1	$g-1$
$g>1$	>1	$(2q-1)(g-1)-1$

2. Il teorema delle lacune di Weierstrass

Non si possono assegnare arbitrariamente gli ordini di polo di una funzione meromorfa su una varietà di Riemann compatta di genere positivo. Esaminiamo innanzi tutto il caso di funzioni meromorfe con un unico polo.

Teorema 2.1 (Teorema delle lacune di Weierstrass). *Siano X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere $g\geq 1$ e p_0 un suo punto. Allora ci sono esattamente g interi positivi*

$$1=n_1 < n_2 < \cdots < n_g < 2g \tag{2.1}$$

per cui non esista su X una funzione meromorfa f con $\mathit{div}_\infty(f)=n_i\cdot p_0$.

Dimostrazione. Consideriamo il divisore $D=(2g-1)\cdot p_0$.

Per il Lemma 13.1 il suo indice di specialità è zero e quindi, per la formula di Riemann-Roch, la dimensione dello spazio $\mathcal{W}(D)$ delle funzioni meromorfe su X con al più un polo di ordine $\leq(2g-1)$ in p_0 ha dimensione

$$1+\dim_{\mathbb{C}}|D| = \deg(D) - g + 1 = (2g-1) - g + 1 = g.$$

Poiché funzioni meromorfe con diversi ordini di polo in p_0 sono tra loro linearmente indipendenti, e funzioni di $\mathcal{W}((2g-1)\cdot p_0)$ con la stessa parte singolare in p_0 sono uguali, ne segue che ci sono esattamente g valori n_i per cui $n_i\cdot p_0$ non sia divisore di una funzione di $\mathcal{W}((2g-1)\cdot p_0)$.

Le costanti non nulle hanno divisore 0 ed $1\cdot p$ non può essere il divisore di una f in $\mathcal{W}((2g-1)\cdot p_0)$ per il teorema dei residui (se $\omega\in\mathcal{Ab}(X)\setminus\{0\}$, $f\cdot\omega$ sarebbe un differenziale abeliano con somma dei residui non nulla). Quindi la prima lacuna è $n_1=1$.

Se $n\geq 2g$, ripetendo lo stesso ragionamento otteniamo che

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{W}(n\cdot p_0))=n-g+1$$

e quindi, per ogni $n\geq 2g$, c'è una $f\in\mathcal{M}(X)$ con $\mathit{div}_\infty(f) = n\cdot p_0$. $\square$

Teorema di Noether. Il teorema delle lacune di Weierstrass si può considerare come un caso particolare di un teorema di Noether.

Teorema 2.2 (Teorema delle lacune di Noether). *Siano X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere positivo g e $p_1, \dots, p_{2g-1}$ una sequenza di $2g-1$ punti (non necessariamente distinti) di X. Allora esistono esattamente g interi positivi, come in* (2.1) *per cui $D_{n_k} = \sum_{i=1}^{n_k} p_i$ non sia $div_\infty(f)$ per una $f \in \mathcal{M}(X)$.*

Dimostrazione. Il divisore $D = \sum_{i=1}^{2g-1} p_i$ ha grado $2g-1$ e quindi, per il Lemma 13.1, indice di specialità zero. Possiamo allora concludere, come nella dimostrazione del teorema precedente, che $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{W}(D))=g$ e ricavare da ciò la tesi. □

2.0.1. *Funzioni meromorfe con un unico polo.*

Definizione 2.1. Indichiamo con $N(p_0)$ l'insieme degli interi positivi n per cui $\mathcal{M}(X)$ contenga una f con $div_\infty(f) = n{\cdot}p_0$.

Proposizione 2.3. *Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere positivo g. Fissiamo un punto p_0 su X, siano*

$$2 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_g = 2g \tag{2.2}$$

i primi g elementi positivi di $N(p_0)$. Allora

(*i*) *$N(p_0)$ è un monoide additivo.*
(*ii*) $\alpha_j+\alpha_{g-j} \geq 2g, \quad \forall 1\leq j<g$.
(*iii*) *Se* $\alpha_1=2$, *allora* $\alpha_j=2j$, *per* $1\leq j\leq g$.
(*iv*) *Se* $\alpha_1>2$, *allora c'è almeno un indice j, con* $1\leq j\leq g-1$, *per cui* $\alpha_j+\alpha_{g-j}>2g$.
(*v*) *Abbiamo* $\sum_{i=1}^{g-1}\alpha_i\geq g(g-1)$ *e vale l'uguaglianza se e soltanto se* $\alpha_1=2$.

Dimostrazione. La (*i*) segue dal fatto che il divisore del prodotto di due funzioni di $\mathcal{M}^*(X)$ è la somma dei loro divisori.

Se, per un intero $j\geq g-j$ fosse $\alpha_j+\alpha_{g-j}<2g$, allora $N(p_0)$, essendo un monoide additivo, conterrebbe tutte le somme $(\alpha_h+\alpha_{g-j})$, che sarebbero anch'esse interi positivi $<2g$, per $1\leq h\leq j$. Ma questi sarebbero j elementi tutti maggiori di α_{g-j} e troviamo allora una contraddizione perché ci sarebbero g interi positivi minori di $2g$ in $N(p_0)$. Ciò dimostra (*ii*).

Se $\alpha_1=2$, allora $N(p_0)$ contiene $\{2, 4, \dots, 2g\}$ e quindi, poiché $N(p_0)$ contiene esattamente g numeri positivi $\leq 2g$, deve valere (*iii*).

Dimostriamo ora (*iv*). Deve essere $g\geq 2$. Nel caso $g=2$ l'unica possibile sequenza (2.2) è $(3, 4)$ e $3+3=6>4$.

Se $g=3$, le possibili sequenze (2.2) sono $(3, 4, 6)$, $(3, 5, 6)$ e $(4, 5, 6)$. Le somme $\alpha_1+\alpha_2$ sono, rispettivamente, $7, 8, 9$, che sono maggiori di $2g=6$.

Supponiamo ora che $g \geq 4$ e che sia $\alpha_j + \alpha_{g-j} = 2g$ per $1 \leq j < g$. Sia r il più grande intero positivo per cui $r \cdot \alpha_1 < 2g$. Poiché $N(p_0)$ è un monoide additivo, la sequenza (2.2) contiene tutti i multipli positivi di α_1 che siano minori di $2g$. Sia $r \geq 1$ il più grande intero positivo per cui $\alpha_j = j \cdot \alpha_1$ per $1 \leq j \leq r$. Allora α_{r+1} è un elemento della sequenza (2.2) che non è un multiplo di α_1. Per ipotesi, gli interi

$$(*) \qquad \alpha_{g-j} = 2g - j \cdot \alpha_1, \quad \text{per } 1 \leq j \leq r, \qquad \alpha_{g-r-1} = 2g - \alpha_{r+1}.$$

sono gli unici elementi di $N(p_0)$ che siano $\geq \alpha_{r+1}$ e $< 2g$. L'intero positivo

$$\alpha_1 + \alpha_{g-(r+1)} = 2g - (\alpha_{r+1} - \alpha_1)$$

appartiene ad $N(p_0)$, è maggiore di α_{g-r-1}, minore di $2g$, ma non è nella lista $(*)$. Abbiamo ottenuto una contraddizione, che dimostra la (*iv*).

La (*v*) è facile conseguenza di (*ii*), (*iii*) e (*iv*). □

3. Divisori dei differenziali abeliani di prima specie

Se l'intero positivo n_i è una *lacuna* della sequenza (2.1), allora gli spazi di funzioni meromorfe $\mathcal{W}((n_i - 1) \cdot p_0)$ e $\mathcal{W}(n_i \cdot p_0)$ hanno la stessa dimensione. Per la formula di Riemann-Roch

$$\dim(|(n_i - 1) \cdot p_0|) = (n_i - 1) - g + \imath((n_i - 1) \cdot p_0),$$
$$\dim(|n_i \cdot p_0|) = n_i - g + \imath(n_i \cdot p_0);$$

ne ricaviamo che, se n_i è una lacuna, l'indice di specialità di $((n_i - 1) \cdot p_0)$ è di uno maggiore di quello di $n_i \cdot p_0$. Ciò significa che lo spazio dei differenziali abeliani di prima specie con uno zero d'ordine $(n_i - 1)$ in p_0 ha dimensione di uno maggiore a quella dello spazio di quelli che hanno in p_0 uno zero di ordine n_i : esiste perciò un differenziale abeliano di prima specie con uno zero di ordine $n_i - 1$ in p_0.

Proposizione 3.1. *Gli ordini dei possibili zeri in p_0 dei differenziali abeliani di prima specie sono*

$$(3.1) \qquad 0 = n_1 - 1 < n_2 - 1 < \cdots < n_g - 1 \leq 2g - 2,$$

ove gli n_i sono le lacune in (2.1). □

4. Pesi rispetto a uno spazio vettoriale di sezioni olomorfe

Siano $\pi : F \to X$ un fibrato in rette su una superficie di Riemann X e p_0 un punto di X. Sia V un sottospazio di dimensione finita di $\mathscr{O}(X, F)$. Chiamiamo *adattata in* p_0 una base $f_1, \ldots, f_n$ di V con la proprietà che (ricordiamo che $\nu_{p_0}(f_i)$ indica l'ordine di zero di f_i in p_0)

$$\nu_{p_0}(f_1) < \nu_{p_0}(f_2) < \cdots < \nu_{p_0}(f_n).$$

Gli interi non negativi $\nu_{p_0}(f_i)$ dipendono soltanto da V e non dalla scelta di una base particolare.

DEFINIZIONE 4.1. Chiamiamo *peso* di p_0 rispetto a V il numero

$$\tau_V(p_0) = \sum\nolimits_{j=1}^{n}(\nu_{p_0}(f_j) - j+1), \tag{4.1}$$

calcolato usando una base adattata di V in p_0.

5. Matrici wronskiane

Date n funzioni olomorfe linearmente indipendenti $h_1, \dots, h_n$, definite su un aperto connesso U di $\mathbb{C}$, la

$$\mathrm{WR}(h_1, \dots, h_n)(z) = \begin{pmatrix} h_1(z) & h_2(z) & \dots & h_n(z) \\ h_1'(z) & h_2'(z) & \dots & h_n'(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1^{(n-1)}(z) & h_2^{(n-1)}(z) & \dots & h_n^{(n-1)}(z) \end{pmatrix}$$

si dice la loro *matrice wronskiana*[1].

LEMMA 5.1. *Siano $h_1, \dots, h_n$ funzioni olomorfe definite su un aperto connesso U di $\mathbb{C}$.*

(1) *Condizione necessaria e sufficiente affinché $h_1, \dots, h_n$ siano linearmente indipendenti è che il determinante della loro matrice wronskiana non sia identicamente nullo.*
(2) *Se $h_1, \dots, h_n$ sono linearmente indipendenti, allora il determinante della loro matrice wronskiana è una funzione olomorfa in U per cui*

$$\nu_z(\det(\mathrm{WR}(h_1, \dots, h_n)(z))) = \tau_{\langle h_1,\dots,h_n\rangle}(z), \quad \forall z \in U. \tag{5.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)$ e $\mathrm{WR}(h_1, \dots, h_n) = \mathrm{WR}(\vec{h})$. Se $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, allora, poiché $[\vec{h}\cdot A]^{(k)} = \vec{h}^{(k)} \cdot A$ per ogni intero non negativo k, $\mathrm{WR}(\vec{h}\cdot A) = \mathrm{WR}(\vec{h})\cdot A$ e quindi $\det(\mathrm{WR}(\vec{h}\cdot A)) = (\det(\mathrm{WR}(\vec{h})))\cdot \det(A)$.

Se $f \in \mathscr{O}(U)$, allora

$$[f\cdot\vec{h}]^{(k)} = f\cdot\vec{h}^{(k)} + \sum\nolimits_{j=1}^{k}\binom{k}{j} f^{(j)}\vec{h}^{(k-j)}$$

[1]Il nome di queste matrici ricorda Józef Maria Hoene-Wroński (1776-1853), che fu filosofo, matemcatico, fisico, inventore, avvocato ed economista.

per ogni intero positivo k e quindi

$$\mathrm{WR}(f\cdot\vec{h}) = \begin{pmatrix} f & 0 & \dots & 0 \\ f' & f & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(n-1)} & (n-1)f^{(n-2)} & \dots & f \end{pmatrix} \mathrm{WR}(\vec{h}).$$

Otteniamo perciò

$$\det(\mathrm{WR}(f\cdot\vec{h})) = f^n\cdot \det(\mathrm{WR}(\vec{h})), \quad \forall f \in \mathscr{O}(U). \tag{5.2}$$

Se le $h_1, \dots, h_n$ fossero $\mathbb{C}$-linearmente dipendenti, il loro wronskiano sarebbe nullo in tutti i punti. Supponiamo quindi che siano linearmente indipendenti e fissiamo un punto z_0 in U, che per comodità di notazione possiamo prendere uguale a 0.

Se $A\in\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $\det(\mathrm{WR}(\vec{h}\cdot A))=(\det(\mathrm{WR}(\vec{h})))\cdot\det(A)$ ha in 0 lo stesso ordine di zero di $\det(\mathrm{WR}(\vec{h}))$. Possiamo quindi limitarci a considerare il caso in cui $\vec{h}$ sia una base adattata in 0, con $h_i = 0(z^{k_i})$ per una sequenza

$$0\leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \infty.$$

Abbiamo allora $h_i = h_1\cdot\phi_i$ in un intorno U' di 0, con $\phi_i \in \mathscr{O}(U')$ che ha uno zero d'ordine (k_i-k_1) in 0. Ragioniamo per ricorrenza su n. La formula (5.1) è infatti certamente valida per n=1. Supponiamo poi che sia $n > 1$ e la formula valida per il wronskiano di meno di n funzioni. Allora

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{WR}(\vec{h})) = \det(\mathrm{WR}(h_1, h_1\cdot\phi_2, \dots, h_1\cdot\phi_n)) &= h_1^n\cdot\det(\mathrm{WR}(1, \phi_2, \dots, \phi_n)) \\ &= h_1^n \det(\mathrm{WR}(\phi_2', \dots, \phi_n')).\end{aligned}$$

Poiché ϕ_j', per $j\geq 2$, ha in 0 uno zero d'ordine k_j-k_1-1, per l'ipotesi induttiva

$$\nu_0(\det(\mathrm{WR}(\phi_2', \dots, \phi_n'))) = \sum\nolimits_{j=2}^{n}(k_j-k_1-j+1)$$

ed otteniamo allora la (5.1) perché $h_1^n(z) = 0(z^{nk_1})$. □

Lemma 5.2. *Siano U, U' due aperti di $\mathbb{C}$, ϕ un'applicazione olomorfa di U in U' ed $h_1, \dots, h_n$ funzioni olomorfe su U'. Allora*

$$\det(\mathrm{WR}(\vec{h}\circ\phi))(z)= \det(\mathrm{WR}(\vec{h}))(\phi(z))\cdot[\phi'(z)]^{n(n-1)/2}. \tag{5.3}$$

Dimostrazione. Per le derivate di ordine superiore della funzione composta valgono formule del tipo

$$\frac{d^k f\circ\phi(z)}{dz^k} = (\phi'(z))^k\cdot f^{(k)}(\phi(z)) + \sum\nolimits_{j=1}^{k-1}\Phi_{j,k}(z)\cdot f^{(k-j)}(\phi(z)),$$

in cui i $\Phi_{i,j}(z)$ hanno espressioni polinomiali nelle derivate di ϕ. Ciò vale infatti per k=0, 1 e si dimostra quindi facilmente per ricorrenza su k. Abbiamo allora

$$\mathrm{WR}(\vec{h}\circ\phi)(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi'(z) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \Phi_{n-1,1}(z) & \dots & [\phi'(z)]^{n-1} \end{pmatrix} \mathrm{WR}(\vec{h})(\phi(z))$$

e da questa segue la (5.3). □

6. Wronskiano di sezioni di un fibrato

Le formule (5.2) e (5.3) ci dicono che, su una superficie di Riemann X, è possibile definire il determinante wronskiano di n sezioni olomorfe $s_1, \dots, s_n$ di un suo fibrato olomorfo in rette F come una sezione del fibrato

$$F^n \otimes K^{n(n-1)/2} = F \otimes (F \otimes K) \otimes \cdots \otimes (F \otimes K^{n-1}).$$

Definizione 6.1 (Wronskiano). Date n sezioni $s_1, \dots, s_n$ in $\mathscr{O}(X, F)$ il determinante del loro wronskiano è la sezione

$$S(p) = \det(\mathrm{WR}(s_1(p), \dots, s_n(p)) \in \mathscr{O}(X, F^n \otimes K^{n(n-1)/2}). \tag{6.1}$$

Dalla possibilità di definire il determinante wronskiano di n sezioni di un fibrato, e dal fatto che questo è una sezione non banale di un fibrato in rette nel caso in cui le sezioni siano linearmente indipendenti, segue il seguente lemma.

Lemma 6.1. *Sia F un fibrato olomorfo in rette sulla superficie di Riemann connessa X. Se V è un sottospazio di dimensione finita di $\mathscr{O}(X, F)$, allora l'insieme dei punti p di X di peso positivo rispetto a V è discreto.* □

7. Punti di Weierstrass

Utilizziamo i determinanti wronskiani per definire e discutere le proprietà dei punti di Weierstrass sulle varietà di Riemann connesse e compatte di genere $g \geq 2$.

Definizione 7.1. Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere $g \geq 2$. Un $p_0 \in X$ è un *q-punto di Weierstrass* se ha peso positivo per il fibrato Ω^q dei differenziali di grado q su X. Se $q=1$, diciamo che p_0 è un *punto di Weierstrass (classico)*.

Osservazione 7.1. Si può dare formalmente la definizione di q-punto di Weierstass anche nel caso di superfici di Riemann connesse e compatte di qualsiasi genere g. Non ci sono però q-punti di Weierstrass se il genere g di X è minore o uguale ad uno.

Proposizione 7.2. *Un punto p_0 di una superficie di Riemann connessa e compatta di genere $g \geq 2$ è un q-punto di Weierstrass se e soltanto se esiste un differenziale non nullo di grado q su X che abbia in p_0 uno zero di ordine superiore alla dimensione dello spazio delle forme olomorfe di grado q.*

Il punto p_0 è di Weierstrass se e soltanto se l'indice di specialità del divisore $(g \cdot p_0)$ è positivo. $\square$

Abbiamo osservato che la dimensione d_q dello spazio dei differenziali olomorfi di grado $q \geq 1$ è $d_q = (2q-1)(g-1)$. Quindi il wronskiano di una base di $\mathscr{O}(X, \Omega^q)$ è una sezione in $\mathscr{O}(X, \Omega^{m_q})$ per

$$m_q = d_q \cdot q + \tfrac{1}{2} d_q (d_q - 1) = \tfrac{1}{2} d_q (2q + d_q - 1).$$

Poiché il grado del divisore di un elemento non nullo di $\mathscr{O}(X, \Omega^{m_q})$ è $2(g-2) \cdot m_q$, otteniamo, per la (5.1),

Lemma 7.3. *Se X è una superficie di Riemann connessa e compatta di genere $g \geq 2$, allora, indicando con $\tau_q(p)$ il peso di p rispetto ad $\mathscr{O}(X, \Omega^q)$, abbiamo*

$$\sum\nolimits_{p \in X} \tau(p) = (g-1) \cdot d_q \cdot (2q + d_q - 1). \tag{7.1}$$ $\square$

Osservazione 7.4. La condizione che p_0 sia un punto di Weierstrass si può anche esprimere anche dicendo che almeno uno degli interi $2, 3, \ldots, g$ non sia una lacuna di Weierstrass in p_0.

Corollario 7.5. *Su ogni superficie di Riemann connessa e compatta di genere $g \geq 2$ ci sono q-punti di Weierstrass per ogni $q \geq 1$.*

Dimostrazione. Ciò segue dal fatto che il secondo membro di (7.1) è positivo. $\square$

Teorema 7.6. *Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere $g \geq 2$. Allora il peso di un punto rispetto ai differenziali abeliani di prima specie è sempre minore o uguale a $g(g-1)/2$. Questo valore è assunto in tutti e soli i punti per cui la sequenza delle lacune di Weierstrass* (2.1) *non contenga* 2.

Dimostrazione. Siano $2 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_g = 2g$ i primi g elementi dell'insieme $N(p)$ degli interi positivi α per cui $\alpha \cdot p$ sia la parte polare del divisore di una funzione meromorfa su X ed $1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_g < 2g$ le lacune di Weierstrass in p. Per la Proposizione 3.1 gli $(n_j - 1)$ sono i possibili ordini di zero dei differenziali abeliani di prima specie in p. Allora

$$\begin{aligned} \tau(p) = \tau_{\mathscr{Ab}_1(X)}(p) = \sum\nolimits_{j=1}^{g} (n_j - j) &= \sum\nolimits_{j=1}^{g} n_j - \sum\nolimits_{j=1}^{g} j \\ &= \sum\nolimits_{j=g+1}^{2g-1} j - \sum\nolimits_{j=1}^{g-1} \alpha_j. \end{aligned}$$

Per il punto (*ii*) della Proposizione 2.3, è $\alpha_j+\alpha_{g-j}\geq 2g$. Otteniamo quindi la stima

$$\tau(p)\leq\left(\sum\nolimits_{j=g+1}^{2g} j\right)-g(g-1)=\frac{2g(2g-1)}{2}-\frac{g(g+1)}{2}-g(g-1)=\frac{g(g-1)}{2}.$$

La (*v*) della Proposizione 2.3 ci dice che $\sum_{j=1}^{g-1}\alpha_j=g(g-1)$ se e soltanto se $\alpha_1=2$, cioè se 2 non appartiene alla sequenza delle lacune di Weierstrass in p. □

Corollario 7.7. *Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere $g\geq 2$. Il numero w dei punti di Weierstrass di X soddisfa la diseguaglianza*

$$2g+2\leq w\leq g^3-g. \tag{7.2}$$

Dimostrazione. I punti di Weierstass sono quelli in cui il peso $\tau(p)$ in p dei differenziali abeliani di prima specie è maggiore di zero. Per il Teorema 7.6, in ciasun punto di Weierstrass p il peso $\tau(p)$ è almeno $g(g-1)/2$. La (7.1) ci dice che, per $\mathcal{A}b_{\mathrm{I}}(X)$ è

$$\sum\nolimits_{p\in X}\tau(p)=(g-1)g(g+1)=g^3-g.$$

Questo ci dà la stima dal basso, nel caso in cui tutti i punti di Weierstrass avessero peso massimo $g(g-1)/2$ (questo, come vedremo, è il caso delle superfici *iperellittiche*), mentre quella dall'alto si ottiene considerando il caso in cui in tutti i punti di Weierstrass il peso fosse 1 (punti di W. semplici). □

Osservazione 7.8. Le superfici in cui ci siano esattamente $2g+2$ punti di Weierstrass sono *iperellittiche* (rivestimenti doppi ramificati della sfera di Riemann). In essi, in questo caso, la sequenza delle lacune è formata da tutti i numeri dispari $1,3,\ldots,2g-1$ positivi e minori di $2g$. Ci sono anche superfici di genere g con g^3-g punti di Weierstrass. Allora, in ciascun punto di Weierstrass, la sequenza delle lacune è $1,2,\ldots,g-1,g+1$, cioè il primo intero positivo α per cui ci sia una $f\in\mathcal{M}(X)$ con $\mathit{div}_\infty(f)=\alpha\cdot p$ è g. [Ha questa proprietà, ad esempio, la superficie di Riemann della curva algebrica $w^7=z(z-1)^2$.]

8. Superifici iperellittiche

In questo paragrafo indichiamo con X una superficie di Riemann connessa e compatta e con g il suo genere.

Definizione 8.1. Chiamiamo *grado* di una funzione meromorfa $f\in\mathcal{M}^*(X)$ il grado[2] del suo divisore polare $\mathit{div}_\infty(f)$.

[2]Poiché $\deg(\mathit{div}(f))=0$, è $\deg(\mathit{div}_\infty(f))=\deg(\mathit{div}_0(f))$.

Una funzione $f \in \mathcal{M}^*(X)$ definisce un rivestimento ramificato $f : X \to \mathbb{CP}^1$. Il *grado* di f è il numero di punti della fibra generica (sopra i valori non critici).

Se $p_0 \in X$, per la formula di Riemann-Roch $\dim_{\mathbb{C}} |p_0| = 1 - g + \iota(p_0)$. Poiché, se $g \geq 1$, l'indice di specialità $\iota(p_0)$ è $g-1$, su una superficie di Riemann di genere positivo non ci possono essere funzioni meromorfe di grado 1, cioè con un singolo polo di ordine uno. Quelle che ammettono funzioni meromorfe di grado due (cioè o con due poli semplici distinti o un solo polo di ordine due) formano una classe speciale, che descriveremo in questo paragrafo.

Definizione 8.2. Chiamiamo *iperellittica* una superficie di Riemann connessa e compatta X per cui $\mathcal{M}^*(X)$ contenga una funzione meromorfa di grado due.

Una funzione $f \in \mathcal{M}^*(X)$ di grado due definisce un *rivestimento doppio ramificato* $f : X \to \mathbb{CP}^1$. Ciò significa che l'immagine A in $\mathbb{CP}^1$ dei punti in cui f non è regolare formano un insieme finito tale che f si restringa ad un rivestimento a due fogli $X \setminus f^{-1}(A) \to \mathbb{CP}^1 \setminus A$. I punti di $f^{-1}(A)$ sono *di diramazione* di f e la fibra $f^{-1}(a)$, per ciascun $a \in A$, consiste di un singolo punto, con ordine di ramificazione uguale a due. Per la formula di Riemann-Hurwitz è $2g-2 = -4 + \{$il numero dei punti di diramazione$\}$, da cui

Proposizione 8.1. *Una superficie di Riemann iperellittica di genere g è un rivestimento doppio ramificato di $\mathbb{CP}^1$, con $2g+2$ punti di ramificazione.* □

Proposizione 8.2. *Se $g \leq 2$, allora X è iperellittica.*

Dimostrazione. Se $D \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{D}^+)$ ha grado due, per la formula di Riemann-Roch

$$\dim_{\mathbb{C}} |D| = 2 - g + \iota(D).$$

Se $g=0$, allora $\dim_{\mathbb{C}} |D| \geq 2$ e quindi $\mathcal{W}(D)$ ha dimensione ≥ 3 e perciò contiene funzioni meromorfe f con $\mathit{div}_\infty(f) = D$.

Se $g=1$, è $\dim_{\mathbb{C}} |D| = 1$ e quindi $\mathcal{W}(D)$ contiene funzioni meromorfe non costanti f con $0 < \mathit{div}_\infty(f) \leq D$. Poiché $\mathit{div}_\infty(f)$ non può avere grado uno, per una $f \in \mathcal{W}(D)$ non costante deve essere $\mathit{div}_\infty(f) = D$.

Resta da considerare il caso $g=2$. Per il Corollario 7.7, ci sono su X punti di Weierstrass. In uno di questi punti, diciamo p_0, l'intero 2 non è una lacuna[3] ed esiste perciò una $f \in \mathcal{M}^*(X)$ con $\mathit{div}_\infty(f) = 2 \cdot p_0$. Ciò completa la dimostrazione. □

[3]Poiché $g=2$, in ciascun punto p_0 di X ci sono due lacune $1 = n_1 < n_2 < 4$. Il punto è di Weierstrass se e soltanto se $n_2 = 3$.

Esempio 8.1. Consideriamo la $X \subset \mathbb{CP}^2$ descritta in coordinate non omogenee dall'equazione

$$w^3 = z^3 + 1.$$

La z definisce su X una funzione meromorfa di grado 3, che è quindi un rivestimento a tre fogli ramificato di $\mathbb{CP}^1$. I punti di ramificazione corrispondono alle tre radici di (-1), mentre il punto ∞ non è di ramificazione. In ciascuno di essi l'indice di ramificazione è 3. Per la formula di Riemann-Hurwitz possiamo ricavare il genere di X da

$$2g-2 = -6 + 6 \Longrightarrow g=1.$$

Poiché ha genere uno, la X è iperellittica e ci devono quindi essere su X funzioni meromorfe di grado due. Infatti, se poniamo $w=\zeta+\eta$, $z=\zeta-\eta$, otteniamo

$$\zeta^3+3\zeta^2\eta+\zeta\eta^2 + \eta^3 = \zeta^3-3\zeta^2\eta+\zeta\eta^2 - \eta^3+1, \quad \text{cioè}$$
$$2\eta^3+6\zeta^2\eta - 1=0 \quad \text{ovvero} \quad \zeta^2=\frac{1-2\eta^3}{6\eta},$$

che ci mostra che η è su X una funzione meromorfa di grado due.

Proposizione 8.3. *La X è iperellittica se e soltanto se ha $2g+2$ punti di Weierstrass. Se $f \in \mathcal{M}(X)$ ha divisore polare di grado due, allora i punti di Weierstrass di X sono i punti di diramazione di $f : X \to \mathbb{CP}^1$.*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia iperellittica. Possiamo trovare allora una $f : X \to \mathbb{CP}^1$, meromorfa su X, che definisca un rivestimento doppio ramificato di $\mathbb{CP}^1$. In ciascuno dei $2g+2$ punti di ramificazione, poiché 2 non è una lacuna, le lacune di Weierstrass di X sono la sequenza $1<3<\cdots<2g-1$, cioè i numeri dispari minori di $2g$. Perciò il peso di ciascuno di questi punti p (rispetto ad $\mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X)$) è

$$\tau(p) = \sum\nolimits_{j=1}^{g}([2j-2]-j+1) = \sum\nolimits_{j=1}^{g-1} j = \frac{g(g-1)}{2}.$$

Poiché per il Corollario 7.7 è $\sum_{p\in X}\tau(p) = (g-1)g(g+1)$ e, detti $p_1, \dots, p_{2g+2}$ i punti di diramazione, $\sum_{j=1}^{2g}\tau(p_i)=(g-1)g(g+1)$, ne segue che non ci possono essere in X altri punti di Weierstrass.

Viceversa, se su X ci sono $2g+2$ punti di Weierstrass, il peso di ciascuno di essi deve essere massimale, uguale cioè a $g(g-1)/2$ e quindi nei punti di Weierstrass la sequenza delle lacune è $1<3<\cdots<2g-1$. C'è quindi una funzione meromorfa di grado due.

Nella prima parte della dimostrazione abbiamo ricavato che i punti di Weierstrass coincidono con quelli di ramificazione di una qualsiasi funzione meromorfa di grado due. $\square$

Proposizione 8.4. *Se X è iperellittica di genere positivo, allora le sue funzioni meromorfe di grado due si ottengono l'una dall'altra per composizione con una trasformazione di Möbius di* $\mathbb{CP}^1$.

Dimostrazione. Siano f_1, f_2 due funzioni meromorfe di grado due su X. Fissato un punto di Weierstrass p_0 di X che non sia un polo di nessuna delle due (ci sono almeno quattro punti di Weierstrass; se uno di questi fosse un polo di una f_i, questa non potrebbe avere nessun altro polo), le funzioni meromorfe $1/(f_i - f_i(p_0))$, $i=1,2$ hanno entrambe un polo di ordine due in p_0. Possiamo allora trovare un numero complesso $c_1 \in \mathbb{C}^*$ tale che

$$f = \frac{1}{f_2 - f_2(p_0)} - \frac{c_1}{f_1 - f_1(p_0)}$$

abbia un singolo polo in p_0, di ordine ≤ 1. Poiché 1 è una lacuna, la f è olomorfa e quindi costante su X. Abbiamo allora, con $c_2 \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{f_2 - f_2(p_0)} = \frac{c_1}{f_1 - f_1(p_0)} + c_2.$$

La dimostrazione è completa. □

Teorema 8.5. *Sia X una superficie iperellittica di genere $g \geq 2$. Risulta allora determinato un' unica involuzione olomorfa $J : X \to X$ che ha come luogo dei punti fissi i punti di Weierstrass di X e tale che, per ogni funzione meromorfa $f \in \mathcal{M}^*(X)$ di grado due risulti*

$$f^{-1}(f(p)) = \{p, J(p)\}, \quad \forall p \in X. \tag{8.1}$$

Dimostrazione. La J è ben definita perché il grado del rivestimento ramificato è due. Si verifica poi facilmente che, in una carta locale (U, z) su X con centro in un punto di Weierstrass, la J è descritta da $J(z) = -z$. □

Osservazione 8.6. Al variare di p in X, le somme $p + J(p)$ sono i divisori polari delle sue funzioni meromorfe di grado due.

Proposizione 8.7. *La superficie X è iperellittica se e soltanto se ammette un'involuzione olomorfa con $2g+2$ punti fissi.*

Dimostrazione. Poiché le superfici di genere ≤ 1 ammettono sempre involuzioni olomorfe, tenuto conto del Teorema 8.5, ci resta soltanto da dimostrare che, se $g \geq 2$ ed esiste un'involuzione olomorfa con luogo di punti fissi finito e di cardinalità $2g+2$, allora X è iperellittica. Detta J l'involuzione, il quoziente $\hat{X} = X/\langle J \rangle$ è una superficie di Riemann compatta. La proiezione naturale $f : X \to \hat{X}$ è un rivestimento di grado due, ramificato in $2g+2$ punti. Per la formula di Riemann-Hurwitz, $\hat{X}$ ha genere zero ed è quindi la sfera di Riemann $\mathbb{CP}^1$. Questo ci dice che f è una funzione meromorfa di grado due su X, che perciò è iperellittica. □

DEFINIZIONE 8.3. Chiamiamo la J definita nel Teorema 8.5 *involuzione iperellittica* di X.

PROPOSIZIONE 8.8. *Supponiamo che X sia iperellittica di genere positivo g, con punti di Weierstrass $p_1, \dots, p_{2g+2}$. Fissata una $f \in \mathcal{M}^*(X)$ di grado due, tale che il supporto di $div_\infty(f)$ non contenga punti di Weierstrass di X, possiamo definire una funzione meromorfa $F \in \mathcal{M}^*(X)$ tale che*

$$F^2(p) = \prod_{j=1}^{2g+2} (f(p) - f(p_j)). \tag{8.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $e_i = f(p_i)$. Possiamo ordinare $e_1, \dots, e_{2g+2}$ in modo che si possano trovare $g+1$ curve regolari $\gamma_1, \dots, \gamma_{g+1} \in \mathscr{C}^\infty([0,1], \mathbb{CP}^1)$, con $\gamma_i(0) = e_{2i-1}$, $\gamma(1) = e_{2i}$, due a due disgiunte. Osserviamo che il complemento U_i di $\gamma_i([0,1])$ in $\mathbb{CP}^1$ è semplicemente connesso e che la funzione olomorfa $(z - e_{2i-1}) \cdot (z - e_{2i})$ non si annulla in nessun punto di U_i. Possiamo allora, per ogni $i = 1, \dots, g+1$, definire una funzione $\Phi_i \in \mathscr{O}(U_i)$ tale che $\Phi_i^2(z) = (z - e_{2i-1}) \cdot (z - e_{2i})$ su U_i. Il prodotto $\Phi = \Phi_1 \cdots \Phi_{g+1}$ è ben definito ed olomorfo su $U = U_1 \cap \cdots \cap U_{g+1}$, e $\Phi^2(z) = \prod_{j=1}^{2g+2} (z - e_i)$ su U.

L'aperto $Y = f^{-1}(U)$ è unione di due componenti connesse $Y^\pm$. Infatti la f definisce un rivestimento a due fogli $Y \to U$ e punti distinti della stessa fibra non possono essere congiunti da un cammino continuo in Y. Definiamo $F(p)$ su Y ponendola uguale a $\Phi(f(p))$ se $p \in Y$ ed a $[-\Phi(f(p))]$ se $p \in Y^-$. Si verifica che la F si può prolungare ad una funzione continua, e quindi olomorfa, su tutto X, che verifica quindi la (8.2). □

OSSERVAZIONE 8.9. Poiché per ipotesi il supporto del divisore polare della f nella Proposizione 8.8 non contiene punti di Weierstrass, è $div_\infty(f) = q_1 + q_2$. Abbiamo allora

$$div(F) = \sum_{i=1}^{2g+2} p_i - (g+1)(q_1 + q_2).$$

COROLLARIO 8.10. *Siano f, F come nella Proposizione 8.8. Allora i g differenziali*

$$\frac{f^j df}{F}, \quad per \quad j = 0, \dots, g-1, \tag{8.3}$$

formano una base dei differenziali abeliani di prima specie su X.

DIMOSTRAZIONE. I differenziali in (8.3) sono linearmente indipendenti in $\mathcal{Ab}(X)$. Dobbiamo dimostrare che sono olomorfi. Possiamo supporre che il supporto del divisore di f non contenga punti di Weierstrass e quindi che $div(f) = (q_3 + q_4) - (q_1 + q_2)$. Abbiamo

$$div(df) = \sum_{i=1}^{2g+2} p_i - 2(q_1 + q_2)$$

e quindi

$$\begin{aligned} div\left(\frac{f^j df}{F}\right) &= j(q_3+q_4)-(q_1+q_2) + \left(\sum\nolimits_{i=1}^{2g+2} p_i - 2(q_1+q_2)\right) \\ &\qquad -\left(\sum\nolimits_{i=1}^{2g+2} p_i - (g+1)(q_1+q_2)\right) \\ &= (g-j-1)(q_1+q_2) + j(q_3+q_4) > 0. \end{aligned}$$

Ciò prova che il divisore è olomorfo e che quindi i differenziali sono olomorfi. □

Corollario 8.11. *Se X è iperellittica, ogni $\phi\in\mathcal{M}^*(X)$ con grado minore o uguale al genere g ha grado pari.*

Dimostrazione. L'affermazione è banalmente vera se X ha genere ≤ 2. Consideriamo ora il caso in cui $g\geq 3$. Sia $\phi\in\mathcal{M}^*(X)$ una funzione meromorfa di grado $\mathscr{d}\leq g$. Posto $D=div_\infty(\phi)$, per il teorema di Riemann-Roch

$$1\leq \dim_{\mathbb{C}} |D| = \mathscr{d} - g + \imath(D).$$

Quindi $\imath(D)\geq 1$ e perciò c'è almeno un differenziale olomorfo ω con divisore $\geq D$, tale cioè che $\phi\cdot\omega$ sia ancora un differenziale abeliano di prima specie. Utilizzando le notazioni del Corollario 8.10 abbiamo allora

$$\omega=\sum\nolimits_{j=1}^{g} a_j\frac{f^{j-1}df}{F},\quad f\cdot\omega=\sum\nolimits_{j=1}^{g} \mathscr{b}_j\frac{f^{j-1}df}{F}\quad\text{e quindi}\quad \phi=\frac{\sum_{j=1}^{g}\mathscr{b}_j f^j}{\sum_{j=1}^{g}a_j f^j}$$

è una funzione razionale di f. Poiché f ha grado pari, anche ϕ ha allora grado pari. □

9. Il teorema di Hurwitz

In questo paragrafo indicheremo con X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere g, di cui studieremo il gruppo $\mathcal{A}ut(X)$ degli automorfismi.

Proposizione 9.1. *Il numero di punti fissi di un automorfismo di X diverso dall'identità è minore o uguale a* $2g+2$.

Dimostrazione. Sia $\mathrm{id}_X\neq\phi\in\mathcal{A}ut(X)$.

Poiché X è compatta, l'insieme $\mathrm{Fix}(\phi)$ dei punti fissi di ϕ è discreto e quindi di cardinalità finita k. Fissiamo p_0 in $X\setminus\mathrm{Fix}(\phi)$. C'è una funzione meromorfa $f\in\mathcal{M}^*(X)$ con $div_\infty(f) = r\cdot p_0$ per un intero r con $1\leq r\leq g+1$ (il minimo r è proprio $g+1$ se p_0 non è punto di Weierstrass, altrimenti, se non tutti i punti di Weierstass sono punti fissi di ϕ, si può prendere più piccolo). La funzione $f-f\circ\phi$ ha divisore $div_\infty(f-f\circ\phi)=[r\cdot p_0+r\cdot\phi^{-1}(p_0)]$ ha grado $2r$. Quindi anche $div_0(f-f\circ\phi)$, di grado $2r$, cioè $(f-f\circ\phi)$ ha al più $2r\leq(2g+2)$ zeri. Poiché tutti i punti fissi di ϕ sono zeri di $f-f\circ\phi$, otteniamo la tesi. □

Indichiamo con $W(X)$ l'insieme dei punti di Weierstrass di X. Ricordiamo che la sua cardinalità è maggiore o uguale di $2g+2$ (uguale nel caso iperellittico) e minore o uguale a g^3-g. Abbiamo ovviamente

Lemma 9.2. *Se* $\phi\in\mathcal{A}ut(X)$, *allora* $\phi(W(X)) = W(X)$. □

Corollario 9.3. *C'è un omomorfismo*

$$\lambda : \mathcal{A}ut(X) \ni \phi \longrightarrow \phi|_{W(X)}\in\mathbf{S}(W(X)), \tag{9.1}$$

che è iniettivo se X non è iperellittica. Se X è iperellittica, il nucleo di λ contiene il sottogruppo $\langle J\rangle$, degenerato dall'involuzione iperellittica e coincide con esso se $g\geq 2$.

Dimostrazione. Se X non è iperellittica, allora $W(X)$ ha cardinalità maggiore di $2g+2$. Allora il fatto che una $\phi\in\mathcal{A}ut(X)$ che fissi i punti di $W(X)$ sia l'identità segue dalla Proposizione 9.1. Nel §8 abbia visto che J è l'unico automorfismo di una superficie ellittica X che ne fissi i punti di Weierstrass. □

Corollario 9.4 (Schwarz). *Il gruppo degli automorfismi di una superficie di Riemann connessa e compatta di genere $g\geq 2$ è finito.* □

Teorema 9.5 (Hurwitz). *Se* $g\geq 2$, *allora*

$$|\mathcal{A}ut(X)| \leq 84(g-1). \tag{9.2}$$

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathbf{G}$ il gruppo $\mathcal{A}ut(X)$ e con $\pi : X\to X/\mathbf{G}$ la proiezione, che è una mappa olomorfa. Il grado N di π è l'ordine $|\mathcal{A}ut(X)|$ del gruppo degli automorfismi. La π è ramificata nei punti fissi degli elementi di $\mathbf{G}$. Se, per un punto p di X indichiamo con $\mathbf{G}_p$ lo stabilizzatore di $\mathbf{G}$ in p, l'ordine di diramazione $\nu(p)$ di π in p è l'ordine $|\mathbf{G}_p|$ dello stabilizzatore. Sia $p_1,\dots,p_r$ un sottoinsieme massimale di punti fissi di elementi di $\mathbf{G}^*=\mathbf{G}\setminus\{\mathrm{id}\}$, appartenenti ad orbite distinte di $\mathbf{G}$. Per ciascuno di essi sia $\nu_j = \nu(p_j) = |\mathbf{G}_{p_j}|$. Per calcolare l'indice di diramazione di π, osserviamo che la fibra sopra $\pi(p_j)$ è formata da N/ν_j punti, ciascuno con indice di diramazione ν_j. L'indice totale è allora

$$B = \sum\nolimits_{j=1}^{r} \frac{N}{\nu_j}(\nu_j-1) = N\sum\nolimits_{j=1}^{r}\left(1-\frac{1}{\nu_j}\right).$$

Per la formula di Riemann-Hurwitz, detto γ il genere di $X/\mathbf{G}$, abbiamo

$$2g-2 = N(2\gamma-2) + B = N(2\gamma-2)+N\sum\nolimits_{j=1}^{r}\left(1-\frac{1}{\nu_j}\right). \tag{$*$}$$

Osserviamo che, necessariamente, poiché supponiamo che $N>1$, è $\gamma<g$. Inoltre ogni addendo nella sommatoria in $(*)$ è un numero in $[\frac{1}{2}, 1)$.

Distinguiamo diversi casi.

Caso 1. Se $\gamma\geq 2$, allora $2g-2\geq 2N$ e quindi $N\leq(g-1)$.

Caso 2. Se $\gamma=1$, allora

$$2g-2 = N\sum_{j=1}^{r}\left(1-\frac{1}{\nu_j}\right).$$

ed r non può essere zero, perché abbiamo supposto che $g\geq 2$. Otteniamo perciò $2g-2\geq\frac{1}{2}N$, da cui $N\leq 4(g-1)$.

Caso 3. Se $\gamma=0$, la $(*)$ diviene

$$(**)\qquad 2g-2 = N\left(\left[\sum_{j=1}^{r}\left(1-\frac{1}{\nu_j}\right)\right]-2\right).$$

Poiché $g\geq 2$, deve essere $r\geq 3$.

Se $r\geq 5$, allora $2g-2\geq\frac{1}{2}N$ e quindi $N\leq 4(g-1)$.

Se $r=4$, non tutti gli addendi $(1-(1/\nu_j))$ possono essere uguali a $1/2$. Quindi

$$2(g-1) \geq N\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-2\right) = \frac{1}{12}N \;\Leftrightarrow N \leq 12(g-1).$$

Rimane da considerare il caso $r=3$. Possiamo supporre, per fissare le idee, che

$$2 \leq \nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3.$$

Deve essere $\nu_2\geq 3$, perché altrimenti il secondo membro di $(**)$ sarebbe negativo.

Se fosse $\nu_3 \geq 7$, allora avremmo

$$2g-2 \geq N\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{6}{7}-2\right)=\frac{N}{42} \;\Rightarrow N \leq 84(g-1).$$

Se $\nu_3=6$, e $\nu_1=2$, allora deve essere $\nu_2\geq 4$ e quindi

$$2g-2 \geq N\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-2\right) = \frac{N}{12} \;\Rightarrow N \leq 24(g-1).$$

Se $\nu_3=6$ e $\nu_1\geq 3$, allora

$$2g-2 \geq N\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-2\right) = \frac{N}{6} \;\Rightarrow N \leq 12(g-1).$$

Se $\nu_3=5$ e $\nu_1=2$, allora $\nu_2 \geq 4$ ed allora

$$2g-2 \geq N\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-2\right) = \frac{N}{20} \;\Rightarrow N \leq 40(g-1).$$

Se $\nu=5$ e $\nu_1 \geq 3$, allora

$$2g-2 \geq N\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-2\right) = \frac{2N}{15} \;\Rightarrow N \leq 15(g-1).$$

Se $\nu_3 = 4$, allora devono essere $\nu_1, \nu_2 \geq 3$ e quindi

$$2g-2 \geq N\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{4}-2\right) = \frac{N}{12} \;\Rightarrow N \leq 24(g-1).$$

Questo esaurisce tutti i casi possibili e completa la dimostrazione del teorema. □

Osservazione 9.6. Esistono superfici di Riemann per cui il gruppo degli automorfismi contenga esattamente $84(g-1)$ elementi, ma questo non avviene per ogni genere $g \geq 2$. Ad esempio, il neozelandese Marston Conder ha dimostrato che, per $2 \leq g \leq 11904$ ci sono esattamente 32 interi distinti per cui tale valore viene raggiunto. Questo risultato si può trovare in "*The Genus of Compact Riemann Surfaces with Maximal Automorphism Group*", Journal of Algebra, **108**, (1987), pp.204-247.

10. Divisori speciali

Come vedremo nel Cap.XV, le e superfici di Riemann connesse e compatte X si possono rappresentare come *desingolarizzazioni* di grafici di funzioni algebriche, cioè di curve in $\mathbb{CP}^2$. Le funzioni razionali in $\mathbb{CP}^2$ si restringono a funzioni meromorfe su X.

Una funzione razionale non costante di grado m realizza X come un rivestimento ramificato ad m fogli della sfera di Riemann. È quindi interessante, per comprendere la struttura geometrica di X, cercare funzioni meromorfe non costanti di minimo grado m.

Per il teorema delle lacune, scegliendo ad esempio come divisore polare un multiplo di un punto di Weierstrass, sappiamo che vi sono funzioni meromorfe di grado m minore o uguale al genere.

Per la formula di Riemann-Roch, il divisore polare una funzione meromorfa non costante di grado minore o uguale al genere deve avere indice di specialità positivo.

Indicheremo nel seguito con X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere positivo g.

Ricordiamo la definizione dei divisori speciali.

Definizione 10.1. Chiamiamo *speciale* un divisore olomorfo D con indice di specialità $\iota(D)$ positivo.

Un divisore olomorfo D è *speciale* se vi è un differenziale abeliano di prima specie ω con $\mathit{div}(\omega) \geq D$. Ciò equivale al fatto che ci sia un altro divisore olomorfo D^* tale che $K = D + D^*$ sia un divisore canonico. In particolare, un divisore speciale ha grado minore o uguale al grado $2g-2$ del divisore canonico. Ovviamente, un complemento olomorfo D^* di D è anch'esso speciale.

Definizione 10.2. Dato un divisore olomorfo D, chiamiamo suo *complementare* un divisore olomorfo D^* tale che $D{+}D^*$ sia un divisore canonico.

Abbiamo osservato (Lemma 1.1 del Cap.XIII) che, se K è un qualsiasi divisore canonico, allora $\imath(D){=}|K{-}D|{+}1$. La condizione di specialità si può riscrivere perciò nella forma

$$|D^*|{=}|D{-}K|{\neq}\emptyset.$$

Ogni divisore olomorfo di grado minore di g è speciale, perché, per la formula di Riemann-Roch,

$$0 \leq \dim_{\mathbb{C}} |D| = \deg(D) - g + \imath(D) \Longrightarrow \imath(D) \geq g - \deg(D).$$

Per un divisore olomorfo di grado g la dimensione del suo sistema lineare è uguale al suo indice di specialità e quindi il divisore è speciale se e soltanto se ci sono funzioni meromorfe non costanti il cui divisore polare sia minore o uguale a D.

Definizione 10.3. Chiamiamo *indice di Clifford* di un divisore D su X l'intero

$$\mathsf{cl}(D) = \deg(D) - 2\dim_{\mathbb{C}} |D|. \tag{10.1}$$

Proposizione 10.1. *Siano D un divisore qualsiasi e K un divisore canonico su X. Allora*

$$\mathsf{cl}(D) = \mathsf{cl}(K{-}D). \tag{10.2}$$

Dimostrazione. Poiché la dimensione del sistema lineare $|K{-}D|$ è uguale ad $\imath(D){-}1$, abbiamo

$$\begin{aligned}\mathsf{cl}(K{-}D) &= (2g{-}2){-}\deg(D){-}2\dim_{\mathbb{C}} |K{-}D| = 2g{-}\deg(D){-}2\imath(D)\\ &= 2g{-}\deg(D){-}2(\dim_{\mathbb{C}} |D| + g{-}\deg(D)) = \deg(D){-}2\dim_{\mathbb{C}} |D| = \mathsf{cl}(D).\square\end{aligned}$$

Per la formula di Riemann-Roch l'enunciato della Proposizione 10.1 equivale ad una qualsiasi delle

$$\begin{cases}\mathsf{cl}(D) = \mathsf{cl}(K{-}D,\\ 2\imath(D){+}\deg(D) = 2\imath(K{-}D){+}\deg(K{-}D),\\ \imath(D) - \imath(K{-}D) = (g{-}1) - \deg(D).\end{cases} \tag{10.3}$$

Notazione 10.2. Chiamiamo *massimo comun divisore* di due divisori olomorfi D_1, D_2 il divisore olomorfo

$$D_1{\wedge}D_2(p) = \min\{D_1(p), D_2(p)\}, \quad \forall p{\in}X \tag{10.4}$$

e loro *minimo comune multiplo* il divisore

$$D_1{\vee}D_2(p) = \max\{D_1(p), D_2(p)\}, \quad \forall p{\in}X. \tag{10.5}$$

PROPOSIZIONE 10.3. *Se D_1, D_2 sono due divisori olomorfi allora*

$$\dim_{\mathbb{C}} |D_1| + \dim_{\mathbb{C}} |D_2| \leq \dim_{\mathbb{C}} |D_1 \vee D_2| + \dim_{\mathbb{C}} |D_1 \wedge D_2|. \tag{10.6}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che $\mathcal{W}(D_1)+\mathcal{W}(D_2) \subseteq \mathcal{W}(D_1 \vee D_2)$, perché $D_1, D_2 \leq D_1 \vee D_2$.

Abbiamo poi $\mathcal{W}(D_1) \cap \mathcal{W}(D_2) = \mathcal{W}(D_1 \wedge D_2)$ e quindi la tesi segue dalla formula d'intersezione di Grassmann. □

COROLLARIO 10.4. *Se D_1, D_2 sono divisori olomorfi, allora*

$$\mathsf{cl}(D_1) + \mathsf{cl}(D_2) \geq \mathsf{cl}(D_1 \wedge D_2) + \mathsf{cl}(D_1 \vee D_2). \tag{10.7}$$ □

COROLLARIO 10.5. *Se D e D^* sono divisori olomorfi complementari, allora*

$$\mathsf{cl}(D) \geq \mathsf{cl}(D \wedge D^*). \tag{10.8}$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché, per la Proposizione 10.1, è $\mathsf{cl}(D)=\mathsf{cl}(D^*)$ e, posto $K=D+D^*$,

$$\mathsf{cl}(D \wedge D^*) = \mathsf{cl}(K - [D \wedge D^*]) = \mathsf{cl}(D \vee D^*),$$

per la (10.7) abbiamo

$$2\mathsf{cl}(D) = \mathsf{cl}(D) + \mathsf{cl}(D^*) \geq \mathsf{cl}(D \wedge D^*) + \mathsf{cl}(D \vee D^*) = 2\mathsf{cl}(D \wedge D^*).$$ □

TEOREMA 10.6 (Clifford).

a) *Ogni divisore olomorfo speciale di grado $2g-2$ è canonico ed ha indice di Clifford zero. Il divisore nullo è speciale con indice di Clifford zero.*
b) *L'indice di Clifford di un divisore speciale è non negativo.*
c) *Se X non è iperellittica, i divisori speciali di grado positivo e minore di $(2g-2)$ hanno indice di Clifford positivo.*

DIMOSTRAZIONE. Per il divisore nullo 0 abbiamo $\dim |0| = 0$, $\deg(0) = 0$ ed $\imath(D) = g > 0$. Quindi 0 è speciale con indice di Clifford zero.

Se D è speciale di grado $(2g-2)$, allora $\imath(D)=1$ e c'è quindi un differenziale abeliano di prima specie con divisore D. Per la formula di Riemann-Roch è

$$\dim |D| = (2g-2) - g + 1 = g - 1 \Longrightarrow \mathsf{cl}(D) = 0.$$

Questo dimostra il punto a).

Per dimostrare b) possiamo ragionare per ricorrenza sul grado di D. Se l'enunciato non fosse vero, ci sarebbe un grado minimo d per cui esista un divisore olomorfo speciale D, di grado d, per cui $\mathsf{cl}(D)<0$. Per il punto a), deve essere $0<d<2g-2$ e quindi D ha un complemento D^* non banale. Poiché anche D^* è speciale e ha lo stesso indice di Clifford, avremo $0<d<g$. Sia ω un differenziale abeliano di prima specie con $\mathit{div}(\omega)=D+D^*$. Poiché

$\mathsf{cl}(D)$ è per ipotesi negativo, $|D|$ ha dimensione positiva e ci sono quindi funzioni meromorfe f non costanti con divisore polare $0<\mathit{div}_\infty(f)\leq D$. Se p_0 non appartiene al supporto di $\mathit{div}(\omega)$ e $z_0=f(p_0)$, il prodotto $\omega'=(f(p)-z_0)\cdot\omega$ è ancora un differenziale abeliano di prima specie. Il suo divisore è maggiore o uguale al divisore olomorfo $D'=D+\mathit{div}(f)$, che è ancora speciale perché ha grado $d<g$ ed ha lo stesso indice di Clifford perché linearmente equivalente a D. Per costruzione, il suo complemento $D'^*=\mathit{div}(\omega')-D'$ non contiene nel supporto il punto p_0 e quindi $D'\wedge D'^*$ ha grado strettamente minore di d. Poiché anche D' è olomorfo e speciale, la $\mathsf{cl}(D'\wedge D'^*)\leq\mathsf{cl}(D')<0$ (per il Corollario 10.5) contraddice l'ipotesi induttiva. Questo completa la dimostrazione di b).

Per dimostrare c) utilizzeremo un argomento analogo a quello utilizzato nella dimostrazione del punto b). Se ci fossero divisori speciali D con $0<\deg(D)<(2g-2)$ e $\mathsf{cl}(D)=0$, fissiamone uno con minimo grado positivo e sia D^* un divisore complementare di D ed ω un differenziale abeliano di prima specie con divisore $K=D+D^*$. Osserviamo che $\deg(D)<g$.

Se fosse $\deg(D)=2$, allora $\mathcal{W}(D)$ avrebbe dimensione due; conterrebbe quindi una funzione meromorfa di grado due ed X sarebbe iperellittica.

Se X avesse genere 3, poiché i gradi possibili di un divisore speciale con indice di Clifford nullo sono $0, 2, 4=2g-2$, una X, l'esistenza di una D con $\mathsf{cl}(D) = 0$ e $\deg(D)=2$ è possibile se e soltanto se X è iperellittica.

Consideriamo infine una X di genere $g\geq 4$ e un D con $4\leq\deg(D)\geq<2g-2$. Se $\mathsf{cl}(D)=0$, allora $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{W}(D)) = 1+\frac{1}{2}\deg(D)\geq 3$. Possiamo allora trovare una $f\in\mathcal{W}(D)$ che si annulli in un punto p_0 del supporto di D^* ed in un punto q_0 che non appartenga al supporto di K. Allora $\omega'=f\cdot\omega$ è ancora un differenziale abeliano di prima specie, il cui divisore è maggiore del divisore olomorfo $D' = D+\mathit{div}(f)$, che quindi è speciale. Consideriamo il suo complemento $D'^* = K'-D'$. Poiché p_0 appartiene sia al supporto di D' che a quello di D'^*, abbiamo

$$0 < D'\wedge D'^* < D.$$

Il divisore $D'\wedge D'^*$ sarebbe ancora speciale, avrebbe indice di Clifford zero per il Corollario 10.5 ed il punto b) e grado positivo minore di quello di D. Questo ci dà una contraddizione. La dimostrazione è completa. □

Corollario 10.7. *Ogni divisore olomorfo di grado minore o uguale a* $2g-2$ *ha indice di Clifford non negativo e, se X non è iperellittica, indice di Clifford è zero se e soltanto se D è o* 0 *o un divisore canonico.*

Dimostrazione. Per la formula di Riemann-Roch, l'indice di Clifford di un divisore non speciale è maggiore di quello di un divisore speciale dello stesso grado. Da questo segue la tesi. □

Corollario 10.8. *Se D è un divisore olomorfo di grado minore o uguale a $(2g{-}2)$, allora*

$$\imath(D) \leq g - \tfrac{1}{2}\deg(D). \tag{10.9}$$

Se X non è iperellittica, l'uguaglianza vale solo se D è o uguale a zero, o un divisore canonico.

Dimostrazione. Per la formula di Riemann-Roch,

$$\imath(D) = \dim_{\mathbb{C}}|D| + g - \deg(D) = \Big(g - \tfrac{1}{2}\deg(D)\Big) - \tfrac{1}{2}\mathsf{cl}(D).$$

La tesi segue dal corollario precedente, in quanto $\mathsf{cl}(D){\geq}0$. L'uguaglianza in (10.9) vale se e soltanto se $\mathsf{cl}(D){=}0$. □

Esempio 10.1. Se X è iperellittica di genere $g{>}0$ e p_0 è un punto di Weierstrass, allora $\mathsf{cl}(2k{\cdot}p_0) = 0$ per $0{\leq}k{\leq}(g{-}1)$.

10.1. Divisori di grado tre. Le superfici iperellittiche sono caratterizzate dall'esistenza di funzioni meromorfe di grado due, cioè di divisori olomorfi di grado due il cui sistema lineare abbia dimensione uno.

Tutte le superfici di genere minore o uguale a due sono iperellittiche. Se il genere g è maggiore di due, la dimensione del sistema lineare di un divisore olomorfo D di grado tre non può essere maggiore di uno. Infatti, se la superficie è iperellittica, tutte le sue funzioni meromorfe il cui grado non superi $2g{-}2$ hanno grado pari; se non lo è, non ci possono essere funzioni meromorfe di grado due. In entrambi i casi, $\mathcal{W}(D)$, se contiene funzioni meromorfe non costanti, ha dimensione due.

Proposizione 10.9. *Supponiamo che X sia una superficie di Riemann connessa e compatta di genere $g{>}4$.*

- (i) *Se ci sono su X due divisori olomorfi D_1, D_2 di grado tre non linearmente equivalenti, con $\dim_{\mathbb{C}}|D_1|{=}\dim_{\mathbb{C}}|D_2|{=}1$, allora X è iperellittica.*
- (ii) *Se $\mathcal{M}^*(X)$ contiene una funzione meromorfa f di grado tre, allora tutte le altre funzioni meromorfe di grado tre si ottengono componendo f con una trasformazione di Möbius ed X non è iperellittica.*

Dimostrazione. (i). Siano f_i, per $i{=}1,2$, funzioni meromorfe non costanti in $\mathcal{W}(D_i)$. Se una di esse fosse di grado due, la X sarebbe iperellittica. Possiamo quindi supporre che f_1, f_2 siano di grado tre e quindi $\mathit{div}(f_i) = D_i$, per $i{=}1,2$.

Se ci fosse una trasformata di Möbius τ tale che $f_2{=}\tau{\circ}f_1$, allora

$$D_1{=}\mathit{div}_\infty(f_1) = \mathit{div}_\infty(1/(f_2(p) - z_0)) \;\text{ con }\; \tau(\infty) = z_0.$$

I divisori $div_\infty(1/(f_2(p)-z_0))$ e $D_2{=}div_\infty(f_2)$ sono linearmente equivalenti, perché

$$\begin{aligned} div_\infty(1/(f_2(p)-z_0)) &= div_0(1/(f_2(p)-z_0)) - div(1/(f_2(p)-z_0)) \\ &= div_\infty(f_2) - div(1/(f_2(p)-z_0)) = D_2 - div(1/(f_2(p)-z_0)). \end{aligned}$$

Quindi, se fosse $f_2{=}\tau{\circ}f_1$ per una $\tau{\in}\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$, avremmo $D_1 \equiv D_2$. Da questo segue che $\mathcal{W}(D_1{+}D_2)$ contiene quattro funzioni meromorfe linearmente indipendenti $1, f_1, f_2, f_1f_2$. Infatti, una relazione lineare

$$c_0 + c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_1f_2 = 0, \quad \text{con} \;\; |c_0|{+}|c_1|{+}|c_2|{+}|c_3| > 0$$

implicherebbe che $c_3{\neq}0$ ed $f_2{=}{-}(c_1f_1{+}c_0)/(c_3f_1{+}c_2)$ si otterrebbe da f_1 componendola con una trasformazione di Möbius.

Poiché $D_1{+}D_2$ ha grado 6, minore di $2g{-}2$, e

$$\mathsf{cl}(D_1{+}D_2) = 6{-}2\dim_{\mathbb{C}}|D_1{+}D_2| \leq 6-6 = 0,$$

è $\mathsf{cl}(D_1{+}D_2){=}0$ e quindi, per il Corollario 10.7, la X è iperellittica. Poiché 3 è minore o uguale del genere di X, per il Corollario 8.11, se X è iperellittica non ci sono su X funzioni meromorfe di grado tre. Quindi f_1 ed f_2 hanno grado due e sono l'una una la composizione dell'altra con una trasformazione di Möbius.

(*ii*). Poiché $D_1{+}D_2$ ha grado $6{<}2g{-}2$, per il Corollario 10.7 ha indice di Clifford positivo. È perciò $6-2\dim_{\mathbb{C}}|D_1{\vee}D_2|{>}0$ e questo ci dice che $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{W}(D_1{\vee}D_2){\leq}3$. Ne segue che le funzioni meromorfe $1, f_1, f_2, f_1{\cdot}f_2$ sono linearmente dipendenti e perciò f_1 ed f_2 si ottengono l'una componendo l'altra con una trasformazione di Möbius. □

Esempio 10.2. La *quartica di Klein* è descritta, in coordinate omogenee di $\mathbb{CP}^2$, da

$$x_0^3x_1 + x_1^3x_2 + x_2^3x_0 = 0.$$

Nelle coordinate non omogenee $w{=}x_0x_1^{-1}$ e $z{=}x_2x_1^{-1}$ otteniamo

$$w^3 + z^3w + z{=}0.$$

I punti di ramificazione al finito si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} w^3 + z^3w + z{=}0, \\ 3w^2 + z^3 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 3w^2 + z^3 = 0, \\ z = 2w^3 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2w^3, \\ 8w^9 + 3w^2 = 0. \end{cases}$$

Otteniamo così 8 punti di diramazione, corrispondenti a $z=0$ ed a $z_h{=}2w_h^3$, con w_h uguale, per $h=1,\ldots,7$, alle sette radici settime di $-\frac{3}{8}$. In ciascuno di questi punti abbiamo una ramificazione di ordine 2. Ad esempio, nel punto 0, sostituendo $z_2{=}0$ nell'equazione omogenea, otteniamo in X i due punti distinti $(0,1,0)$ ed $(1,0,0)$, di cui uno solo può essere di ramificazione, con ordine due. Il punto all'infinito di z corrisponde a $x_1{=}0$, $x_2{=}1$, che ci dà

x_0=0. Quindi ∞ è un punto di ramificazione di ordine 3. Abbiamo perciò nove punti di ramificazione, 8 di ordine due ed uno di ordine tre. La formula di Riemann-Hurwitz ci dà allora

$$2g - 2 = -6 + 10 \Rightarrow g = 3.$$

La z è su X una funzione meromorfa di grado tre e quindi X non è iperellittica.

10.1.1. *Superfici di Riemann di genere* 4. Consideriamo ora superfici di Riemann connesse e compatte X di genere 4.

Proposizione 10.10. *Ogni superficie di Riemann di genere* 4 *ha un divisore speciale D di grado tre, con* $\dim_{\mathbb{C}} |D|=1$.

Dimostrazione. Sia $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ una base dei differenziali abeliani di prima specie. Abbiamo osservato nel §1 del Cap.XIII che la dimensione[4] dello spazio dei differenziali olomorfi di grado due è 9. Perciò i dieci differenziali $\omega_i \cdot \omega_j$, per $1 \leq i \leq j \leq 4$ sono linearmente dipendenti. Possiamo allora trovare una matrice simmetrica $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 4} \neq 0$ tale che

$$\sum\nolimits_{i,j=1}^{4} a_{i,j}\omega_i\omega_j = 0, \quad \text{cioè} \quad (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix} = 0.$$

L'unico invariante per congruenza di una matrice simmetrica è il rango. Quindi, a meno di un cambiamento della base dei differenziali abeliani, possiamo supporre che sia

$$A = \mathrm{I}_4, \quad \text{oppure} \quad A = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & \\ & 0 \end{pmatrix} \quad \text{se } A \text{ ha rango } 1 \leq r < 4.$$

La A non può avere rango 1, perché $\omega_1^2 \neq 0$. Non può neanche avere rango due, perché se fosse $\omega_1^2+\omega_2^2=0$ i due differenziali abeliani di prima specie ω_1 ed ω_2 avrebbero gli stessi divisori e sarebbero quindi multipli l'uno dell'altro. Devono essere quindi verificate una delle due relazioni

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 0, \quad \text{oppure} \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 = 0. \tag{10.10}$$

La prima di queste si può riscrivere nella forma

$$\zeta_1^2 = \zeta_2\zeta_2, \quad \text{con} \quad \zeta_1 = i\omega_1, \quad \zeta_2 = \omega_2 + i\omega_3, \quad \zeta_3 = \omega_2 - i\omega_3.$$

Se $div(\zeta_1) = p_1 + \cdots + p_6$, allora almeno una delle ζ_2, ζ_3 deve annullarsi su tre degli zeri di ζ_1. Allora uno dei quozienti ζ_1/ζ_2, ζ_1/ζ_3 è una funzione meromorfa di grado minore o uguale a tre.

[4]Abbiamo dimostrato che la dimensione di $\Omega^q(X)$ è $(2q-1)(g-1)$.

Se vale invece la seconda, abbiamo

$\zeta_1\zeta_2 = \zeta_3\zeta_4$, con $\zeta_1{=}i\omega_1{+}\omega_2$, $\zeta_2{=}i\omega_1{-}\omega_2$, $\zeta_3 = \omega_3{+}i\omega_4$, $\zeta_4 = \omega_3{-}i\omega_4$.

Anche in questo caso una delle ζ_3, ζ_4 ha tre zeri in comune con ζ_1 ed una delle ζ_1/ζ_3, ζ_1/ζ_4 è una funzione meromorfa non costante di grado minore o uguale a tre.

C'è quindi un divisore polare è un divisore speciale di grado tre. Poiché non ci possono essere sia funzioni meromorfe di grado due che di grado tre, ne segue che la dimensione del suo sistema lineare è uno. □

Lemma 10.11. *Siano f_1, f_2 funzioni meromorfe di grado tre su X. Sono equivalenti*

(1) $|\mathscr{div}_\infty(f_1)| \equiv |\mathscr{div}_\infty(f_2)|$;
(2) *possiamo trovare* $\tau{\in}\mathcal{Aut}(\mathbb{CP}^1)$ *tale che* $f_2{=}\tau{\circ}f_1$.
(3) $1, f_1, f_2, f_1{\cdot}f_2$ *sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. Siano $D_i{=}\mathscr{div}_\infty(f_i)$, per $i{=}1, 2$. Se D_1 e D_2 sono linearmente equivalenti, allora $D_2{=}D_1{+}\mathscr{div}(h)$ per una $h{\in}\mathcal{M}^*(X)$. Allora l'applicazione

$$\mathcal{W}(D_1) \ni \phi \longrightarrow h{\cdot}\phi \in \mathcal{W}(D_2)$$

è un isomorfismo lineare. Come abbiamo osservato, gli spazi vettoriali $\mathcal{W}(D_1)$ e $\mathcal{W}(D_2)$ hanno entrambi dimensione due, con $1, f_1$ base di $\mathcal{W}(D_1)$ ed $1, f_2$ base di $\mathcal{W}(D_2)$. Poiché la moltiplicazione per h è un isomorfismo lineare di $\mathcal{W}(D_1)$ su $\mathcal{W}(D_2)$, anche l'immagine h, $h{\cdot}f_1$ di $1, f_1$ è una base di $\mathcal{W}(D_2)$. Possiamo allora trovare numeri complessi a, b, c, d, con $ad{-}bc{\neq}0$, per cui

$$\begin{cases} a \cdot hf_1{+}b \cdot h = f_2, \\ c \cdot hf_1{+}d \cdot h = 1 \end{cases} \implies f_2 = \frac{af_1 + b}{cf_1 + d}.$$

Viceversa se $\tau{\in}\mathcal{Aut}(\mathbb{CP}^1)$, allora $\tau{\circ}f$ ha lo stesso divisore polare di f se τ è una trasformazione affine del piano, altrimenti il suo divisore polare è quello di $\phi(p){=}1/(f(p) - \tau^{-1}(\infty))$ e quindi linearmente equivalente a D.

Si verifica infine facilmente che (3) è equivalente a (2). □

Teorema 10.12. *Sia X una superficie di Riemann compatta di genere* 4. *Si possono allora dare uno dei casi seguenti (ciascuno esclude gli altri due):*

(1) *X è iperellittica;*
(2) $\mathcal{M}^*(X)$ *contiene una funzione meromorfa f di grado tre tale che* $2\mathscr{div}_\infty(f)$ *sia un divisore canonico. Ogni altra funzione meromorfa di grado tre in $\mathcal{M}^*(X)$ si ottiene componendo f con una trasformazione di Möbius;*

(3) *ci sono in $\mathcal{M}^*(X)$ due funzioni meromorfe di grado tre, che non si possono ottenere l'una componendo l'altra con una trasformazione di Möbius. Ogni altra funzione meromorfa di grado tre si ottiene componendo una di queste due con una trasformazione di Möbius.*

Dimostrazione. Poiché su una superficie iperellittica di genere 4 non ci sono funzioni meromorfe di grado tre, se è verificata (1) non possono essere verificate né (2) né (3), e viceversa.

Supponiamo che X non sia iperellittica. Per la Proposizione 10.10, possiamo trovare una funzione meromorfa $f{\in}\mathcal{M}^*(X)$ di grado tre.

Posto $D{=}\mathit{div}_\infty(f)$, la formula di Riemann-Roch ci dà

$$1 = \dim_{\mathbb{C}} |D| = 3 - 4 + \imath(D) \quad \Longrightarrow \imath(D) = 2.$$

Lo spazio $\mathcal{Ab}^D(X)$ ha cioè dimensione due e possiamo fissarne una base ω_1, ω_2. Siano $K_i{=}\mathit{div}(\omega_i)$ i corrispondenti divisori canonici, che hanno grado tre. È $K_i{=}D{+}D_i$ con divisori olomorfi D_i di grado tre. Il quoziente $f_1{=}\omega_2/\omega_1$ è una funzione meromorfa non costante, di grado minore o uguale a tre e quindi di grado tre, con $\mathit{div}(f_1) = D_2{-}D_1$ e quindi $D_1{=}\mathit{div}_\infty(f_1)$, $D_2{=}\mathit{div}_0(f_1)$. Se uno (e quindi entrambi) i divisori D_i fossero linearmente equivalenti a D, avremmo, per una $h{\in}\mathcal{M}^*(X)$,

$$D_1 = D + \mathit{div}(h) \Rightarrow K_1{=}D_1{+}D = 2D + \mathit{div}(h)$$

e quindi $2D$, essendo linearmente equivalente a K_1, sarebbe un divisore canonico. Viceversa, se $K{=}2D{=}2\mathit{div}_\infty(f)$ fosse canonico, i complementi D_1, D_2 di D sarebbero linearmente equivalenti a D, perché

$$K_i = D{+}D_i \Rightarrow D_i = D + (K_i - 2D) = D + (K_i - K)$$

e quindi $D_i{\equiv}D$ perché la differenza di due divisori canonici è principale.

Se ci fosse una funzione meromorfa h di grado tre su X il cui divisore polare Δ non fosse linearmente equivalente a quello di f, le quattro funzioni $1, f, h, f{\cdot}h$ di $\mathcal{W}(D{+}\Delta)$ sarebbero linearmente indipendenti. Quindi, per la formula di Riemann-Roch,

$$3 \leq \dim_{\mathbb{C}} |D{+}\Delta| = 6 - 4 + \imath(D{+}\Delta) \Longrightarrow \imath(D{+}\Delta) \geq 1.$$

Questo implica che $\imath(D{+}\Delta){=}1$ e $K{=}D{+}\Delta$ è un divisore canonico e Δ un complemento di D. Poiché abbiamo osservato che, se $2D$ è canonico, i complementi di D sono linearmente equivalenti a D, questo ci dice che, in questo caso, tutte le funzioni meromorfe di grado tre sono, per il Lemma 10.11, trasformate di Möbius di f, completando la dimostrazione del punto (2).

Consideriamo ora il caso in cui il doppio del divisore polare di una funzione meromorfa di grado tre non sia mai canonico e siano f, f_1 definite come all'inizio della dimostrazione. In particolare, $D_1 \not\equiv D$. Sia h una funzione meromorfa di grado tre, con divisore polare Δ non linearmente equivalente a D. Vogliamo dimostrare che allora Δ è linearmente equivalente a D_1. Poiché $\Delta \not\equiv D$, le funzioni $1, f, h, f \cdot h$ sono linearmente indipendenti in $\mathcal{W}(D+\delta)$ e quindi

$$3 \leq \dim_{\mathbb{C}} |D+\Delta| = 6 - 4 + \imath(D+\Delta)$$

ed $\imath(D+\Delta) \geq 1$. Poiché $D+\Delta$ ha grado 6, il divisore eq-sprXb-10.6 olomorfo $D+\Delta$ è canonico ed esiste quindi, unico a meno di moltiplicazione per scalare, un differenziale abeliano di prima specie ω con $\mathit{div}(\omega)=D+K$. Poiché $\omega \in \mathcal{Ab}^D(X)$, si scrive in modo unico come una combinazione lineare $\omega = c_1\omega_1 + c_2\omega_2$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non entrambi nulli. Il quoziente ω/ω_1 è una funzione meromorfa ϕ con divisore $\mathit{div}(\phi) = D+\Delta-K_1 = D+\Delta-(D+D_1) = \Delta - D_1$. Questo dimostra che $\Delta \equiv D_1$ e, quindi, per il Lemma 10.11, h si ottiene componendo f_1 con una trasformazione di Möbius. Ciò dimostra (3) e conclude quindi la dimostrazione del Teorema. □

Osservazione 10.13. I casi (2) e (3) corrispondono alle relazioni (10.10). Abbiamo osservato come nel caso in cui la matrice A abbia rango 3 si possa trovare una base $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ di $\mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X)$ con $\zeta_1^2 = \zeta_2\zeta_3$. Allora ζ_2/ζ_1 è una funzione meromorfa di rango tre f con $2\mathit{div}_\infty(f) = \mathit{div}(\zeta_1)$ canonico.

Se A ha rango 4, possiamo fare in modo che $\zeta_1\zeta_2 = \zeta_3\zeta_4$. Le $f_1 = \zeta_1/\zeta_3$ ed $f_2 = \zeta_1/\zeta_4$ sono funzioni meromorfe di grado tre con parti polari non linearmente equivalenti.

Esempio 10.3. Sia X descritta, nelle coordinate non omogenee di $\mathbb{CP}^2$, dalla curva regolare

$$w^5 = z(z^2-1).$$

Possiamo considerare z come una funzione meromorfa su X. Essa definisce un rivestimento a 5 fogli di $\mathbb{CP}^1$, ramificato nei punti corrispondenti a $z=0, 1, -1, \infty$. Nel punto all'infinito è

$$(1/w)^5 = \frac{1}{z(z^2-1)} = \frac{(1/z)^3}{1-(1/z)^2}$$

e quindi c'è un unico punto p_∞ corrispondente di X, con $\nu(p_\infty)(z)=5$. Possiamo infatti parametrizzare X, in un intorno di p_∞, con

$$\begin{cases} z^{-1} = \mathfrak{z}^5, \\ w^{-1} = \mathfrak{z}^3 \cdot / \sqrt[5]{1-\mathfrak{z}^{10}}. \end{cases}$$

L'ordine è 5 anche nei punti $p_0(=)z^{-1}(0)$, $p_1 = z^{-1}(1)$ e $p_{-1} = z^{-1}(-1)$. Calcoliamo il genere g di X utilizzando la formula di Riemann-Hurwitz:

$$2g-2 = -10+16 = 6 \Rightarrow g=4.$$

La w definisce invece una funzione meromorfa di grado tre su X, che ha come divisore polare $3\cdot p_\infty$. Consideriamo il differenziale

$$\omega=\frac{dz}{w^4}.$$

Nell'intorno dei punti p_0, p_1, p_{-1} la w è una coordinata locale e $z=w^5+0(w^6)$. Ne segue che ω non ha né zeri né poli nei punti $p\neq p_\infty$. Nella coordinata $\mathfrak{z}$ introdotta sopra, abbiamo $z = \mathfrak{z}^{-5}$, $w^{-1} = z^3+0(z^4)$. Quindi

$$\omega = -5\,\mathfrak{z}^{-6}(\mathfrak{z}^3+0(\mathfrak{z}^4))^4 d\mathfrak{z} = (-5\mathfrak{z}^6+0(\mathfrak{z}^7))\,d\mathfrak{z}$$

dimostra che ω è un differenziale abeliano di prima specie con divisore $6\cdot p_0$. Quindi w è una funzione meromorfa di grado tre e il quadrato del suo divisore polare è un divisore canonico. Siamo nel caso (2) del teorema e quindi ogni funzione meromorfa di grado tre su X è una $\tau(w)$ con $\tau\in\mathcal{A}ut(\mathbb{CP}^1)$.

Esempio 10.4. Siano $z_1,\dots,z_5$ cinque punti distinti di $\mathbb{C}$. Consideriamo la superficie di Riemann X definita dalla curva complessa di $\mathbb{CP}^1$

$$w^3 = \prod\nolimits_{j=1}^{5}(z-z_j).$$

La coordinata non omogenea z definisce su X una funzione meromorfa di grado tre. Possiamo calcolare il genere g di X utilizzando la formula di Riemann-Hurwitz. Poiché z è ramificata nei sei punti $p_1,\dots,p_5,p_\infty$, in cui z assume, rispettivamente, i valori $z_1,\dots,z_5,\infty$, ed in ciascuno di questi punti l'ordine di ramificazione è tre, abbiamo

$$2g-2 = -6 + 2\cdot 6 = 6 \Longrightarrow g=4.$$

Il divisore polare di z è $3\cdot p_\infty$. Consideriamo il differenziale abeliano $\omega=w^{-2}dz$. In ciasuno dei punti p_j è $(z-z_j)=w^3+0(w^4)$ e quindi ω non ha poli su $X\setminus\{p_\infty\}$. Vicino a p_∞, possiamo utilizzare la parametrizzazione $z=\mathfrak{z}^{-3}$, ottenendo

$$w^3 = \prod\nolimits_{j=1}^{5}\left(\frac{1}{\mathfrak{z}^3}-z_j\right) = \frac{1}{\mathfrak{z}^{15}}\prod\nolimits_{j=1}^{5}(1-\mathfrak{z}^3 z_j) \Rightarrow w \simeq \mathfrak{z}^{-5}.$$

Ne segue che $\omega \simeq -3\mathfrak{z}^{-4}\cdot\mathfrak{z}^{10}d\mathfrak{z} \simeq -3\mathfrak{z}^6 d\mathfrak{z}$ e quindi ω è un differenziale abeliano di prima specie con $\mathit{div}(\omega)=2\,\mathit{div}_\infty z$. La X verifica quindi la condizione (2) del Teorema 10.12.

Esempio 10.5. Consideriamo ora la $X\subset\mathbb{CP}^2$, definita in coordinate non omogenee dall'equazione

$$2w^3 - 3z^4w^2 + z^3 = 0.$$

La z definisce una funzione meromorfa di grado tre su X. Possiamo trovare i suoi punti di diramazione risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2w^3 - 3z^4w^2 + z^3 = 0, \\ w^2 - z^4w = 0. \end{cases}$$

Sostituendo $w{=}z^4$ nella prima equazione otteniamo

$$z^{12} = z^3.$$

I punti di diramazione in $X \backslash z^{-1}(\infty)$ corrispondono quindi allo zero ed alle nove radici none $z_1, \dots, z_9$ dell'unità. Lo $z^{-1}(0)$ contiene un solo punto p_0, con ordine di diramazione 3. Se sostituiamo a z una radice nona di 1, ad esempio 1, otteniamo l'equazione

$$0{=}2w^3{-}3w^2{+}1{=}2w^2(w{-}1) - (w{-}1)(w{+}1){=}(w{-}1)(2w^2{-}w - 1)$$
$$= (w{-}1)^2(2w{-}1) \;\Rightarrow\; w{=}1 \text{ (con molteplicità 2)}, \quad w{=}\tfrac{1}{2} \text{ (con molteplicità 1)}.$$

Questo ci dice che $z^{-1}(z_j)$ consiste di due punti, di cui uno solo, diciamo p_j, è critico con ordine di diramazione 2.

Consideriamo ora $z^{-1}(\infty)$. Sostituendo $\mathfrak{z}{=}z^{-1}$, otteniamo

$$2\mathfrak{z}^4w - 3w^2 + \mathfrak{z}^3 = 0.$$

La formula risolutiva dell'equazione di secondo grado ci dà

$$w{=}\frac{\mathfrak{z}^4(1 \pm \sqrt{1{+}\mathfrak{z}^{-5}})}{3}$$

ed abbiamo perciò un punto di diramazione p_∞, corrispondente al valore $w{=}0$, con indice di diramazione due, ed un punto non ciritico q_∞, corrispondente a $w{=}\infty$. La formula di Riemann-Hurwitz per il genere g di X ci dà allora

$$2g{-}2 = -6 + 2 + 10 = 6 \Rightarrow g{=}4.$$

Osserviamo che, con $\zeta = w/z$, otteniamo

$$2\zeta^3 - 3z^3\zeta^2 + z^3 = 0.$$

Questo ci dice che anche la funzione meromorfa ζ su X ha grado tre. Le $1, z, \zeta, w$ sono linearmente indipendenti e quindi la X soddisfa la condizione (1) del Teorema 10.12.

Proposizione 10.14. *Sia D il divisore polare di una funzione meromorfa su X. Se Δ è un qualsiasi altro divisore, allora*

$$2\dim_{\mathbb{C}}|\Delta| \leq \dim_{\mathbb{C}}|\Delta{+}D| + \dim_{\mathbb{C}}|\Delta - D| \tag{10.11}$$

Dimostrazione. La (10.11) è banalmente vera (con =) se D=0. Supponiamo che D=$dv_\infty(f)$ per una $f\in\mathcal{M}^*(X)$ non costante. Allora $D_0=div_0(f)$ e $D_1=div_0(f-1)$ sono divisori olomorfi linearmente equivalenti a D ed i supporti di D, D_0, D_1 sono due a due disgiunti. Dico che

$$\mathcal{W}(\Delta) \cap \mathcal{W}(\Delta+D_0 - D_1) = \mathcal{W}(\Delta - D_1).$$

Infatti, poiché $\Delta>\Delta-D_1$ e $\Delta+D_0-D_1>\Delta-D_1$, è

$$\mathcal{W}(\Delta - D_1) \subsetneq \mathcal{W}(\Delta)\cap\mathcal{W}(\Delta+D_0-D_1).$$

Supponiamo viceversa che una funzione meromorfa non costante h appartenga all'intersezione $\mathcal{W}(\Delta)\cap\mathcal{W}(\Delta+D_0 - D_1)$.

Allora $Z'=div(h)+\Delta$ e $Z''=div(h)+\Delta+D_0-D_1$ sono divisori olomorfi e

$$Z' - \Delta = Z'' + D_1 - \Delta - D_0 \Rightarrow Z' = Z'' + D_1 - D_0.$$

Poiché i supporti di D_1 e D_0 sono disgiunti, il fatto che $Z'\geq 0$ ci dice che $Z''\geq D_0$. Quindi $Z''' = Z''-D_0$ è un divisore olomorfo e $Z'=Z'''+D_1$. Allora

$$div(h) = Z' - \Delta = Z'''+D_1-\Delta \geq D_1 - \Delta \;\Rightarrow\; h \in \mathcal{W}(\Delta - D_1).$$

Ciò completa la dimostrazione dell'uguaglianza.

Per la formula di Grassmann, abbiamo allora

$$\dim_{\mathbb{C}} |\Delta-D_1|+ \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{W}(\Delta)+\mathcal{W}(\Delta+D_0-D_1))-1= \dim_{\mathbb{C}} |\Delta|+ \dim_{\mathbb{C}} |\Delta+D_0-D_1|.$$

Il secondo membro di questa uguaglianza è uguale a $2\dim_{\mathbb{C}} |\Delta|$, perché $|\Delta|$ e $|\Delta+D_0-D_1|$ sono linearmente equivalenti. Abbiamo $\mathcal{W}(\Delta)\subset\mathcal{W}(\Delta+D_0)$ e $\mathcal{W}(\Delta+D_0-D_1)\subset\mathcal{W}(\Delta+D_0)$ e quindi

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{W}(\Delta) + \mathcal{W}(\Delta + D_0 - D_1))-1\leq \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{W}(\Delta+D_0))-1= \dim_{\mathbb{C}} |\Delta+D_0|.$$

Poiché D_0 e D sono linearmente equivalenti, è $\dim_{\mathbb{C}} |\Delta+D_0|= \dim_{\mathbb{C}} |\Delta+D|$ e da questa segue la (10.11). □

Osservazione 10.15. La (10.11) è equivalente alla

$$2\mathsf{cl}(\Delta) \geq \mathsf{cl}(\Delta-D) + \mathsf{cl}(\Delta+D), \quad \begin{cases}\forall\Delta \in \mathscr{D}(X),\\ \forall D\in\{div_\infty(f) \mid f\in\mathcal{M}^*(X)\}.\end{cases} \tag{10.12}$$

Corollario 10.16. *Se su una superficie di Riemann X, di genere g≥4, ci sono due divisori olomorfi D, Δ, non linearmente equivalenti, con*

$$3 \leq \deg(\Delta) \leq \deg(D) \leq g-1, \quad cl(\Delta)=1, \quad cl(D)=1, \tag{10.13}$$

allora è verificata una delle due

- *$D+\Delta$ è un divisore canonico;*
- *X è iperellittica.*

Dimostrazione. Per la definizione dell'indice di Clifford, segue dall'ipotesi che sia $\mathcal{W}(D)$ che $\mathcal{W}(\Delta)$ contengono funzioni meromorfe non costanti. Ci sono due casi possibili.

Caso I. Δ non è la parte polare del divisore di una funzione olomorfa. Possiamo allora trovare un punto p_0 tale che $\mathcal{W}(\Delta)=\mathcal{W}(\Delta')$, con $\Delta'=\Delta-p_0$. Poiché

$$2\leq \deg(D)\leq 2g-2 \text{ e } \mathsf{cl}(\Delta')=\deg(\Delta')-2\dim_{\mathbb{C}}|\Delta'|=\deg(\Delta)-1-2\dim_{\mathbb{C}}|\Delta|=0,$$

segue dal teorema di Clifford che X è iperellittica.

Caso II. Sia D che Δ sono parti polari di divisori di funzioni meromorfe. Per la (10.12), abbiamo

$$2 = 2\mathsf{cl}(D) \geq \mathsf{cl}(D+\Delta) + \mathsf{cl}(D-\Delta).$$

Poiché $D+\Delta$ e $D-\Delta$ sono divisori olomorfi di grado minore o uguale a $2g-2$, per il teorema di Clifford $\mathsf{cl}(D+\Delta)$ e $\mathsf{cl}(D-\Delta)$ sono entrambi non negativi. Se uno di essi fosse zero ed il divisore corrispondente avesse grado positivo e minore di $2g-2$, allora la X sarebbe iperellittica. Supponiamo nel seguito che X non sia iperellittica.

Poiché grado ed indice di Clifford hanno la stessa parità, i gradi di D e di Δ sono dispari. Allora quelli di $D+\Delta$ e di $D-\Delta$ sono pari e tali sono anche i loro indici di Clifford. Quindi almeno uno dei due dovrebbe essere zero. Non può esserlo $D-\Delta$ perché allora dovrebbe essere $D=\Delta$, mentre abbiamo supposto che i due divisori non siano linearmente equivalenti. Quindi $\mathsf{cl}(D+\Delta)=0$ e questo, per il teorema di Clifford, ci dice che $D+\Delta$ è un divisore canonico. □

10.2.

Lemma 10.17. *Siano X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere g e D un divisore con* $\dim_{\mathbb{C}}|D|=t\geq 0$.

(1) *Se $s\leq t+1$ e $p_1,\dots,p_s$ sono punti di X, allora*

$$\dim_{\mathbb{C}}|D-(p_1+\cdots+p_s)| \geq t-s.$$

(2) *Se $s\leq t+1$, le s-uple $(p_1,\dots,p_s)$ di punti distinti di X per cui*

$$\dim_{\mathbb{C}}|D-(p_1+\cdots+p_s)| = t-s.$$

formano un aperto di Zariski non vuoto di X^s.

Dimostrazione. Per ogni punto p di X, le funzioni meromorfe di $\mathcal{W}(D-p)$ sono le f di $\mathcal{W}(D)$ per cui $\nu_p(f) \geq 1+D(p)$. Questa condizione si può esprimere con un funzionale lineare su $\mathcal{W}(D)$ e quindi $\dim_{\mathbb{C}}|D-p|\geq \dim_{\mathbb{C}}|D|-1$ e vale l'uguaglianza se il funzionale non è nullo, ad esempio quando p sia un punto di X su cui non si annullino tutte le funzioni di $\mathcal{W}(D)$, che abbiamo supposto di dimensione positiva. Ragionando per ricorrenza questo di dà (1) e ci dimostra che l'insieme delle s-uple per cui vale l'uguaglianza è non vuoto. Fissata una base $f_0, \dots, f_t$ di $\mathcal{W}(D)$, vale l'uguaglianza sull'aperto di Zariski non vuoto

$$\left\{(p_1, \dots, p_s)\in X^s \,\middle|\, \operatorname{rank}(f_i(p_j))_{\substack{1\leq i\leq t,\\ 1\leq j\leq s}} = s\right\} \qquad \square$$

Lemma 10.18. *Siano D', Δ' due divisori dello stesso grado, con*

$$\dim_{\mathbb{C}} |D'| = \dim_{\mathbb{C}} |\Delta'| = t\geq 1.$$

Per ogni $s\leq t$ è allora possibile trovare divisori olomorfi D, Δ, Z tali che

$$\begin{cases} D\equiv D', \quad \Delta \equiv \Delta', \\ \deg(Z) = s, \\ D\wedge\Delta\geq Z, \\ \dim_{\mathbb{C}} |D+\Delta-Z| = \dim |D+\Delta| - s. \end{cases} \tag{10.14}$$

Se D, Δ, Z soddisfano le prime tre delle (10.14)*, allora*

$$\mathcal{cl}(D+\Delta) \leq \deg(D\wedge\Delta) - \mathcal{cl}(D\wedge\Delta)+2(\mathcal{cl}(D) - s). \tag{10.15}$$

Dimostrazione. Utilizziamo il Lemma 10.17. Per una scelta generica dei punti $p_1, \dots, p_s$, detto Z il divisore olomorfo $p_1+\cdots+p_s$, abbiamo $\dim_{\mathbb{C}} |D'-Z|=t-s$, $\dim_{\mathbb{C}} |\Delta'-Z|=t-s$, $\dim_{\mathbb{C}} |D'+\Delta'-Z| = \dim_{\mathbb{C}} |D'+\Delta'|-s$.

Scegliamo una f_D in $\mathcal{M}^*(D'-Z)$ ed una f_Δ in $\mathcal{M}^*(\Delta-Z)$.

Allora $D=\mathcal{div}(f_d)+D'$, $\Delta=\mathcal{div}(f_\Delta)+\Delta'$ e $D+\Delta-Z$ sono divisori olomorfi linearmente equivalenti a D', Δ' $D'+\Delta'-Z$, rispettivamente, che soddisfano le condizioni richieste.

Dimostriamo ora la diseguaglianza (10.15). Poiché per ogni di grado minore o uguale di $\dim_{\mathbb{C}} |D+\Delta|$ è

$$\dim_{\mathbb{C}} |D+\Delta|- \dim_{\mathbb{C}} |D+\Delta-Z|\leq \deg(Z),$$

nella dimostrazione possiamo supporre che siano verificate tutte le condizioni di (10.11). Poniamo $D=Z+D_1$, $\Delta=Z+\Delta_1$. I divisori D_1 e Δ_1 sono olomorfi e $\mathcal{W}(D\vee\Delta) \subseteq \mathcal{W}(D+\Delta-Z$. Quindi

$$\dim_{\mathbb{C}} |D+\Delta| - s= \dim_{\mathbb{C}} |D+\Delta-Z) \geq \dim_{\mathbb{C}} |D\vee\Delta|.$$

Utilizzando i gradi e gli indici di Clifford, questa diseguaglianza divente

$$\deg(D+\Delta) - \mathsf{cl}(D+\Delta) - 2s \geq \deg(D\vee\Delta) - \mathsf{cl}(D\vee\Delta).$$

Osserviamo ora che $\deg(D+\Delta)- \deg(D\vee\Delta)= \deg(D\wedge\Delta)$. Otteniamo quindi

$$\mathsf{cl}(D+\Delta)\leq\mathsf{cl}(D\vee\Delta) + (\deg(D\wedge\Delta)-2s).$$

Per la (10.6) è

$$2\mathsf{cl}(D) = \mathsf{cl}(D)+\mathsf{cl}(\Delta) \geq \mathsf{cl}(D\wedge\Delta)+\mathsf{cl}(D\vee\Delta)$$

ed otteniamo perciò

$$\mathsf{cl}(D+\Delta) \leq 2\mathsf{cl}(D) - \mathsf{cl}(D\wedge\Delta)+(\deg(D\wedge\Delta)-2s),$$

cioè la (10.14). □

Teorema 10.19. *Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta, non iperellittica, di genere $g\geq 4$. Se D è un divisore olomorfo su X di grado minore di g con* $\mathsf{cl}(D)=1$, *allora possono darsi i due casi*

(1) $\dim_{\mathbb{C}} |D| \leq 1$ *e* $\deg(D)\leq 3$*;*
(2) $g=6$, $\dim_{\mathbb{C}} |D| = 2$ *e* $2D$ *è canonico.*

Dimostrazione. Supponiamo sia $\dim_{\mathbb{C}} |D|=1+s$, con $s\geq 1$. A meno di sostituire a D un altro divisore olomorfo linermente equivalente, possiamo, per il Lemma 10.17, trovare un altro divisore olomorfo Δ, linearmente equivalente ad D ed un divisore olomorfo Z, di grado s, tali che

$$\dim_{\mathbb{C}} |D - Z| = 1, \quad \dim_{\mathbb{C}} |\Delta - Z| = 1, \quad \dim_{\mathbb{C}} |D+\Delta-Z| = \dim_{\mathbb{C}} |D+\Delta| - s.$$

Abbiamo

$$1\leq s = \deg(Z) \leq \deg(D\wedge\Delta) \leq \deg(D) \leq g-1,$$
$$1 \leq \deg(D+\Delta-Z) \leq 2g-3.$$

Per il teorema di Clifford,

$$1\leq\mathsf{cl}(D\vee\Delta)\leq\mathsf{cl}(D)+\mathsf{cl}(\Delta) - \mathsf{cl}(D\wedge\Delta) \leq 2 - \mathsf{cl}(D\wedge\Delta)$$

e quindi, poiché anche $D\wedge\Delta$, avendo grado maggiore di zero e minore di $2g-2$, ha indice di Clifford positivo, otteniamo che

$$\mathsf{cl}(D\wedge\Delta) = \mathsf{cl}(D\vee\Delta) = 1.$$

Esaminiamo due casi.

Caso I. $\dim_{\mathbb{C}} |D\wedge\Delta| = 0$.

Per la definizione dell'indice di Clifford, $\deg(D\wedge\Delta)=\mathsf{cl}(D\wedge\Delta)=1$ e quindi, per il Lemma 10.18, poiché $2D$ e $D+\Delta$ sono linearmente equivalenti, vale la diseguaglianza

$$\mathsf{cl}(2D) = \mathsf{cl}(D+\Delta) \leq \deg(D\wedge\Delta) - \mathsf{cl}(D\wedge\Delta) + 2(\mathsf{cl}(D) - s) = 2(1 - s).$$

Poiché $s\geq 1$ e $2\leq \deg(2D)\leq 2g-2$, questa diseguaglianza implica che $\mathsf{cl}(2D)=0$ e quindi $2D$ è un divisore canonico. Inoltre, poiché $s=1$, la condizione che $\mathsf{cl}(D)=1$ ci dà $1=\deg(D) - 4$, cioè $\deg(D)=5$, $2g-2 = 10$ e perciò $g=6$.

Caso II. $\dim_{\mathbb{C}}|D\wedge\Delta|\geq 1$.

Poiché $\mathcal{W}(D\wedge\Delta)$ contiene una funzione meromorfa non costante f, a meno di sostituire a Δ il divisore olomorfo $\Delta+\mathit{div}(f)$, possiamo supporre che $\Delta\neq D$. Se per questo nuovo divisore Δ fosse $\dim_{\mathbb{C}}|D\wedge\Delta|=0$, ci saremmo ricondotti al [Caso I] e sarebbe quindi verificata la (2).

Ci resta da dimostrare che non può essere $\Delta\neq D$ e $\dim_{\mathbb{C}}|D\wedge\Delta|\geq 1$.

In questo caso $D\wedge\Delta$ sarebbe il divisore polare di una funzione meromorfa. Infatti, se $p\leq D\wedge\Delta$, allora $\dim_{\mathbb{C}}|(D\wedge\Delta)-p| = \dim_{\mathbb{C}}|D\wedge\Delta|-1$, perché, se così non fosse, avremmo

$$\mathsf{cl}((D\wedge\Delta)-p) = \deg(D\wedge\Delta) - 1 - 2\dim_{\mathbb{C}}|D\wedge\Delta| = \mathsf{cl}(D\wedge\Delta) - 1 = 0$$

e questo, poiché $\deg((D\wedge\Delta)-p)$ è maggiore di zero e minore di $2g-2$ implicherebbe, per il teorema di Clifford, che X sia iperellittica. Allora tutti i $\mathcal{W}((D\wedge\Delta)-p)$, al variare di p nel supporto di $D\wedge\Delta$, sono iperpiani di $\mathcal{W}(D\wedge\Delta)$ e perciò $\mathcal{W}(D\wedge\Delta)\setminus\cup_{(D\wedge\Delta)(p)>0}\mathcal{W}((D\wedge\Delta)-p)$ non è vuoto. Ogni suo elemento è una funzione meromorfa con divisore polare $D\wedge\Delta$.

Poiché $D\wedge\Delta$ è il divisore polare di una funzione meromorfa, per la (10.11), è

$$2\dim_{\mathbb{C}}|D|\leq \dim_{\mathbb{C}}|D+(D\wedge\Delta)| + \dim_{\mathbb{C}}|D-(D\wedge\Delta)|,$$

da cui

$$2 = 2\mathsf{cl}(D) \geq \mathsf{cl}(D+(D\wedge\Delta)) + \mathsf{cl}(D-(D\wedge\Delta)).$$

Poiché sia D che $D\wedge\Delta$ hanno indice di Clifford uno, entrambi hanno grado dispari. Perciò sia $D+(D\wedge\Delta)$ che $D-(D\wedge\Delta)$ hanno grado ed indice di Clifford pari. Questo non è possibile perché, avendo grado compreso tra 2 e $2g-4$, dovrebbero entrambi avere indice di Clifford maggiore o uguale a due.

Ciò completa la dimostrazione. □

Lemma 10.20. *Siano* $0<\rho\leq r$ *due interi positivi. Le matrici complesse simmetriche di* $\mathbb{C}^{r\times r}$ *di rango* $\leq\rho$ *formano una varietà algebrica affine di dimensione* $\frac{1}{2}\rho\cdot(2r-\rho+1)$.

Dimostrazione. Sia $V\simeq\mathbb{C}^{r(r+1)/2}$ lo spazio delle matrici complesse simmetriche $r\times r$. Quelle di rango $\leq\rho$ sono caratterizzate dalla condizione che si annullino tutti i minori di ordine superiore a ρ e formano quindi una varietà algebrica affine V_ρ.

Il gruppo lineare $\mathbf{GL}_r(\mathbb{C})$ agisce su V mediante

$$\mathbf{GL}_r(\mathbb{C})\times V \ni (x,A) \longrightarrow x\cdot A\cdot x^\intercal \in V.$$

Le matrici simmetriche di rango ρ sono l'orbita in V della matrice

$$\mathrm{I}_{r,\rho} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il suo stabilizzatore **G** ha come algebra di Lie

$$\mathcal{G} = \{Y\in\mathbb{C}^{r\times r} \mid Y\cdot\mathrm{I}_{r,\rho} + \cdot\mathrm{I}_{r,\rho}\cdot Y^{\intercal} = 0\}.$$

Scriviamo una matrice Y di $\mathcal{G}$ come una matrice a blocchi $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ con $A\in\mathbb{C}^{\rho\times\rho}$, $B, C^{\intercal}\in\mathbb{C}^{\rho\times(r-\rho)}$ $D\in\mathbb{C}^{(r-\rho)\times(r-\rho)}$. Allora la condizione affinché Y appartenga a $\mathcal{G}$ è che

$$A^{\intercal}=-A, \quad C=0.$$

La dimensione di $\mathcal{G}$ e quindi di **G**) è allora

$$\tfrac{1}{2}\rho(\rho-1) + (r-\rho)^2+\rho\cdot(r-\rho) = \tfrac{1}{2}\rho(\rho-1) + r\cdot(r-\rho).$$

Ne segue che la dimensione di $\mathbf{GL}_r(\mathbb{C})/\mathbf{G}$ è

$$r^2 - [\tfrac{1}{2}\rho(\rho-1) + r\cdot(r-\rho)] = r\cdot\rho - \tfrac{1}{2}\rho(\rho-1) = \tfrac{1}{2}\rho(2r - \rho+1).$$

Le matrici di rango esattamente uguale a ρ sono un aperto di Zariski $\mathring{V}_\rho$ in V_ρ, che ha quindi dimensione $\frac{1}{2}\rho(2r - \rho+1)$. □

Teorema 10.21. *Siano X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere g e D un divisore olomorfo di grado n≥g. Se*

$$\dim_{\mathbb{C}} |D|>\tfrac{1}{4}(2n-g+3), \tag{10.16}$$

allora esiste un divisore olomorfo Δ, *con*

$$\deg(\Delta)\leq(n/2) \quad e \quad \dim_{\mathbb{C}} |\Delta|\geq 1. \tag{10.17}$$

Ciò equivale ad affermare che ci sono su X funzioni meromorfe non costanti di grado $\leq n/2$.

Dimostrazione. Poiché $2n>2g-2$, l'indice di specialità di $2D$ è zero. Allora, per la formula di Riemann-Roch,

$$\dim_{\mathbb{C}} |2D| = 2n - g + \imath(2D) = 2n-g.$$

Sia $r=\dim_{\mathbb{C}} |D|+1$ ed indichiamo con $f_1, \dots, f_r$ una base di $\mathcal{W}(D)$. I prodotti $f_i f_j$, per $1\leq i\leq j\leq r$ definiscono $\frac{1}{2}r(r+1)$ elementi di $\mathcal{W}(2D)$.

Lo spazio vettoriale $\mathcal{W}(2D)$ ha dimensione $2n-g+1$. Quindi, poiché per la condizione (10.16) $\frac{1}{2}r(r+1)$ è maggiore di $2n-g+1$, le $f_i f_j$ sono linearmente indipendenti e soddisfano almeno $k=\frac{1}{2}r(r+1)-(2n-g+1)$ relazioni lineari indipendenti della forma

$$\sum\nolimits_{i,j=0}^{r} a_{i,j} f_i f_j = 0, \tag{$*$}$$

con $(a_{i,j})$ matrici simmetriche $r\times r$. Le matrici simmetriche per cui vale $(*)$ formano un sottospazio vettoriale di dimensione maggiore o uguale a k. Perché tra queste ce ne siano alcune di rango ≤ 4, basta che la somma di k e della dimensione $2(2r-3)$ della varietà V_4 delle matrici simmetriche di rango ≤ 4 sia maggiore della dimensione $\frac{1}{2}r\cdot(r+1)$ dello spazio V delle matrici complesse $r\times r$ simmetriche. Abbiamo

$$k + 2(2r-3) = \tfrac{1}{2}r(r+1) - (2n-g+7) + 4r > \tfrac{1}{2}r(r+1)$$

per la (10.16).

Con un opportuno cambiamento di base possiamo supporre sia allora verificata (non ci possono essere relazioni di rango due)

$$f_1 f_2 = f_3 f_4, \quad \text{oppure} \quad f_1^2 = f_3 f_4.$$

Se siamo nel secondo caso, poniamo nell'argomento che segue $f_2 = f_1$. Sia $D = p_1 + \cdots + p_n$ e

$$\mathit{div}(f_j) = (q_{1,j} + \cdots + q_{n,j}) - (p_1 + \cdots + p_n), \quad j = 1, \ldots, 4.$$

Metà dei $q_{i,1}$ compaiono nel divisore di f_3 od f_4. Supponiamo, per fissare le idee, che $\#(\{q_{i,1}\} \cap \{q_{i,3}\}) \geq n/2$. Allora f_1/f_3 è una funzione meromorfa non costante di grado minore o uguale ad $n/2$. □

Corollario 10.22. *Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere $g \geq 4$. Allora $\mathcal{M}^*(X)$ contiene una funzione meromorfa di grado minore o uguale a* $(3g+1)/4$.

Dimostrazione. I divisori olomorfi canonici sono divisori speciali di grado $2g-2$. Possiamo perciò senz'altro scegliere un divisore speciale D un divisore speciale D, di grado n, minimo tra i gradi di divisori speciali con

$$(3g/2) \leq n \leq (2g-2).$$

Per la formula di Riemann-Roch

$$\dim_{\mathbb{C}} |D| = n - g + \imath(D) \geq n - g + 1.$$

Poiché $n \geq 3g/2$, è $n - g + 1 > \frac{1}{4}(2n - g + 3)$ e possiamo quindi applicare il Teorema 10.21. Esiste quindi un divisore Δ di grado $\leq n/2$ con $\dim_{\mathbb{C}} |\Delta| \geq 1$. Se Δ avesse grado $>(3g+1)/4$, avremmo

$$1 \leq \dim_{\mathbb{C}} |\Delta| < \tfrac{1}{4}(3g+1) - g + \imath(\Delta) = \tfrac{1}{4}(1-g) + \imath(\Delta).$$

Quindi Δ sarebbe speciale di grado maggiore di $3g/2$ e minore di D, contraddicendo la scelta di D. Quindi Δ ha grado minore o uguale di $(3g+1)/4$. Ciò completa la dimostrazione. □

Osservazione 10.23. La stima del corollario non è ottimale. Su una superficie di Riemann di genere g esiste sempre una funzione meromorfa di grado $\leq \left[\frac{g+3}{2}\right]$.

CAPITOLO XIV

Varietà di Jacobi

Usiamo le ipotesi e le notazioni introdotte nei §6, §7, §8 del Cap.XII.

1. Forma canonica della matrice dei periodi e semispazio di Siegel

Sia X una superficie di Riemann compatta di genere g e sia $\omega_1, \ldots, \omega_g$ una base dei differenziali abeliani di prima specie su X .

Sia $\Pi \subset \mathrm{D}$ un poligono fondamentale di X, con

$$\partial\Pi = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}.$$

Indichiamo con $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_g, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_g$ i laccetti in X corrispondenti ai lati $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$.

Ad una base $\omega_1, \ldots, \omega_g$ di $\mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X)$ associamo la *matrice dei periodi*

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \Omega = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \quad \text{con } Z_1 = (\alpha_i(\omega_j)),\, Z_2 = (\beta_i(\omega_j)), \text{ ove} \\ \alpha_i(\omega_j) = \oint_{\mathbf{a}_i} \omega_j, \quad \beta_i(\omega_j) = \oint_{\mathbf{b}_i} \omega_j. \end{cases}$$

Possiamo scrivere queste relazioni come prodotti di matrici:

$$(1.2)\qquad \Omega = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \omega, \quad \text{con } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_g \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_g \end{pmatrix}, \quad \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_g).$$

Abbiamo dimostrato nel §8 del Cap.XII che vale il

Lemma 1.1. *Sia $\Omega = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ la matrice dei periodi. Allora Z_1 e Z_2 sono matrici invertibili.* □

In particolare, possiamo considerare la nuova base $\omega' = \omega Z_1^{-1}$ di $\mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X)$. La sua matrice dei periodi è

$$\Omega' = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \omega' = \Omega Z_1^{-1} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} Z_1^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{2g} \\ Z_2 Z_1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{2g} \\ Z \end{pmatrix}.$$

Definizione 1.1. Chiamiamo *forma canonica della matrice dei periodi* una scelta delle basi di $\mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z})$ e dei differenziali abeliani di prima specie per cui sia

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_g \\ Z \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Le condizioni di Riemann per la forma canonica danno:

$$\begin{cases} Z = Z^{\intercal} \\ \mathrm{Im} Z > 0 \,. \end{cases} \tag{1.4}$$

Definizione 1.2. Si chiama *semispazio di Siegel* di ordine g l'insieme

$$\mathcal{H}_g = \{Z \in \mathbb{C}^{g\times g} \mid Z^{\intercal} = Z,\ \mathrm{Im}\,(Z) > 0\}. \tag{1.5}$$

Osserviamo che le matrici simmetriche complesse di ordine g formano uno spazio vettoriale complesso di dimensione $g(g+1)/2$ e quindi $\mathcal{H}_g$ è un aperto di uno spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^{g(g+1)/2}$.

Lemma 1.2. *Gli autovalori di una matrice di $\mathcal{H}_g$ hanno parte immaginaria positiva. In particolare, ogni matrice di $\mathcal{H}_g$ è invertibile.*

Dimostrazione. Siano $Z = A + i\,B$, con $A, B \in \mathbb{R}^{g\times g}$, una matrice complessa simmetrica e $\lambda = \alpha + i\,\beta \in \mathbb{C}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, un suo autovalore. Sia $v = u + i\,w$, con $u, w \in \mathbb{R}^g$ un corrispondente autovettore. Allora

$$\begin{cases} (A-\alpha)u - Bw = -\beta w, \\ Bu + (A-\alpha)w = \beta u. \end{cases}$$

Moltiplicando a sinistra la prima per $w^{\intercal}$, la seconda per $u^{\intercal}$ e sottraendo la seconda dalla prima ricaviamo che

$$u^{\intercal} B\, u + w^{\intercal} B\, w = \beta(|u|^2 + \|w\|^2).$$

Quindi, se $B>0$, dev'essere $\beta>0$. $\square$

Osservazione 1.3. Se $g=1$, il semispazio di Siegel coincide con il semipiano di Poincaré dei numeri complessi con parte immaginaria positiva. Se $g>1$, matrici simmetriche i cui autovalori abbiano tutti parte immaginaria positiva possono non appartenere ad $\mathcal{H}_g$. Ad esempio,

$$\begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha polinomio caratteristico $(\lambda - i)^2$ e dunque autovalore i con molteplicità due, ma non appartiene ad $\mathcal{H}_2$.

2. Indice d'intersezione

Siano $s_1, s_2 : [0,1] \to X$ due curve regolari su una superficie di Riemann e supponiamo che, per due parametri $t_1, t_2 \in [0,1]$ sia $s_1(t_1) = s_2(t_2)$ e $\dot{s}_1(t_1) \wedge \dot{s}_2(t_2) \neq 0$. In questo caso diciamo che s_1 ed s_2 *si intersecano trasversalmente* in (t_1, t_2).

Definizione 2.1. Diciamo che l'*indice d'intersezione* di s_1 ed s_2 in (t_1, t_2) è 1 se $\dot{s}_1(t_1) \wedge \dot{s}_2(t_2)$ ha orientazione positiva, -1 se ha orientazione negativa. Indichiamo con $\iota_{(t_1,t_2)}(s_1, s_2)$ l'indice d'intersezione di s_1 ed s_2 in (t_1, t_2).

L'indice d'intersezione è cioè positivo se, percorrendo s_2, vediamo, al tempo t_2, arrivare il punto che percorre la traiettoria s_1 da sinistra verso destra, negativo in caso contrario. Naturalmente l'indice d'intersezione cambia di segno se invertiamo il senso di percorrenza di una sola delle due curve o se le scambiamo.

Definizione 2.2. Siano s_1, s_2 due laccetti regolari trasversali tra loro. Definiamo il loro *indice d'intersezione* come il numero[1]

$$I(s_1, s_2) = \sum\nolimits_{s(t_1)=s(t_2)} \iota_{(t_1,t_2)}(s_1, s_2). \tag{2.1}$$

Poiché l'indice di intersezione è invariante per omotopia, possiamo estenderne la definizione ai laccetti continui, definendolo come quello che può essere calcolato utilizzando laccetti omotopi regolari e trasversali.

Possiamo definire l'indice d'intersezione anche utilizzando il Lemma 4.1 del Cap.VII. Ricordiamo che un laccetto semplice regolare s ammette sempre un *intorno tubolare*. Se, ad esempio, abbiamo fissato una metrica Riemanniana su X, per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo la striscia

$$U_\epsilon = \{p \in X \mid \operatorname{dist}(p, |s|) < \epsilon\}$$

è diffeomorfa ad una corona circolare, divisa in due parti $U_\epsilon^\pm$ dal supporto della s. Indichiamo con U_ϵ^- quella di cui s è parte della frontiera orientata, ovvero sta alla nostra sinistra quando percorriamo la curva. Sia ϕ una funzione di classe $\mathscr{C}^\infty$ su U_ϵ, che vale 1 in tutti i punti di U_ϵ^* e 0 in un intorno di $\partial U_\epsilon^- \setminus |s|$. La

$$\psi_s = \begin{cases} d\phi, & \text{in } U_\epsilon, \\ 0, \text{in } X \setminus U_\epsilon, \end{cases}$$

è una uno-forma chiusa di classe $\mathscr{C}^\infty$, a supporto compatto in X. Per la formula di Stokes

$$\iint_X \psi_s \wedge \alpha = \oint_s \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathcal{Z}^{(1)}(X) = \{\alpha \in \mathscr{E}^{(1)}(X) \mid d\alpha = 0\}. \tag{2.2}$$

[1]Naturalmente $I(s_1, s_2) = 0$ se i supporti delle due curve non hanno punti in comune.

Osserviamo che la *classe di coomologia a supporti compatti* di ψ_s è univocamente determinata da s ed il valore dell'integrale (2.2) dipende soltanto dalla classe di ψ_s in $\mathrm{H}^1_{\mathrm{comp}}(X)$.

Proposizione 2.1. *Siano s_1, s_2 due laccetti semplici regolari in X e ψ_{s_1}, ψ_{s_2} due* 1*-forme chiuse di classe $\mathscr{C}^\infty$ e a supporti compatti per cui valgano le* (2.2)*. Allora*

$$I(s_1, s_2) = \iint_X \psi_{s_1} \wedge \psi_{s_2}. \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Scegliamo gli intorni tubolari U_i dei supporti $|s_i|$ dei laccetti sufficientemente piccoli, in modo che ciascuna delle componenti di $U_2 \cap |s_1|$ sia un arco di s_1 che contenga al più un punto di $|s_1| \cap |s_2|$. Sia ϕ_2 una funzione di classe $\mathscr{C}^\infty$, a valori reali, definita sulla striscia U_2, uguale ad 1 sulla parte di $U_2 \setminus |s_2|$ a destra di s_2 e nulla sul bordo della striscia a sinistra di s_2. Indichiamo con

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{2m} < t_{2m-1} = 1$$

la partizione di $[0, 1]$ tale che

$$|s_1| \cap U_2 = \bigcup\nolimits_{i=0}^m \{s_1(t) \mid t_{2m} \le t \le t_{2m+1}\}.$$

Allora

$$\iint_X \eta_{s_1} \wedge \eta_{s_2} = \iint_{U_1 \cap U_2} \eta_{s_1} \wedge \eta_{s_2} = \int_{s_1} d\phi_2 = \sum\nolimits_{i=0}^m (\phi_2(t_{2m+1} - \phi_2(t_{2m})).$$

L'i-esimo addendo dell'ultimo membro dell'uguaglianza è uguale a zero se l'arco $\ell_i = \{s_1(t) | t_{2i} \le t \le t_{2m+1}\}$ non contiene punti di $|s_2|$, mentre, incaso contrario, la differenza $(\phi_2(t_{2m+1} - \phi_2(t_{2m}))$ è uguale ad uno o a meno uno a seconda che (con le notazioni introdotte sopra) $s_1(t_{2m})$ appartenga ad U_2^- o ad U_2^+. In questo caso, Detto τ_m il punto di $[t_{2m}, t_{2m+1}]$ per cui $s_1(\tau_m) = s_2(\tau'_m)$ per qualche $\tau' \in [0, 1]$, il valore di $(\phi_2(t_{2m+1} - \phi_2(t_{2m}))$ è l'orientazione di $\dot{s}_1(\tau_m) \wedge \dot{s}_2(\tau'_m)$. □

Le curve semplici chiuse regolari di classe $\mathscr{C}^\infty$ sono rappresentanti di un sistema di generatori del gruppo di omologia singolare $\mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z})$. Possiamo quindi estendere la corrispondenza

$$\mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z}) \ni [s] \longrightarrow [\psi_s] \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{comp}}(X, \mathbb{C})$$

a un omomorfismo di gruppi additivi $\lambda : \mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{comp}}(X, \mathbb{C})$. In questo modo, dopo aver definito l'indice d'intersezione per coppie di curve semplici regolari, possiamo estenderlo a un'applicazione $\mathbb{Z}$-bilineare :

$$I : \mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z}) \times \mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \tag{2.4}$$

che renda commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_1(X,\mathbb{Z})\times\mathrm{H}_1(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{I} & \mathbb{Z} \\ \lambda\downarrow \qquad \downarrow\lambda & & \downarrow \\ \mathrm{H}^1_{\mathrm{comp}}(X)\times\mathrm{H}^1_{\mathrm{comp}}(X) & \xrightarrow[\mathscr{B}]{} & \mathbb{C} \end{array} \tag{2.5}$$

ove

$$\mathscr{B}(\xi_1,\xi_2) = \iint_X \eta_1\wedge\eta_2, \quad \text{se} \quad \eta_i \in \xi_i \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{comp}}(X), i = 1,2 \tag{2.6}$$

e le freccia verticale $\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ è l'inclusione.

Possiamo naturalmente sopprimere il suffiso "comp" se X è compatta.

3. Gruppo modulare e gruppo simplettico

Sia X una superficie di Riemann compatta di genere $g\geq 2$. Sia $\Pi\Subset D$ un suo poligono fondamentale con perimetro $\partial\Pi = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$, cui corrispondono i $2g$ laccetti $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_g,\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_g$ di X, che definiscono una base canonica per il suo primo gruppo di omologia singolare $H_1(X,\mathbb{Z})$. I loro indici d'intersezione sono:

$$\begin{cases} I(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j) = 0\,,\ I(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_j) = 0 & \text{per} \quad 1\leq i,j\leq g\,; \\ I(\mathbf{a}_i,\mathbf{b}_j) = -I(\mathbf{b}_j,\mathbf{a}_i) = \delta_{ij} & \text{per} \quad 1\leq i,j\leq g\,. \end{cases} \tag{3.1}$$

La loro *matrice d'intersezione* è quindi la

$$\mathrm{J}_g = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_{2g} \\ -\mathrm{I}_{2g} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Se facciamo corrispondere ai laccetti
$\mathbf{a}=k_1\mathbf{a}_1+\cdots+k_g\mathbf{a}_g+h_1\mathbf{b}_1+\cdots+h_g\mathbf{b}_g$ e $\mathbf{b}=k_1'\mathbf{a}_1+\cdots+k_g'\mathbf{a}_g+h_1'\mathbf{b}_1+\cdots+h_g'\mathbf{b}_g$, i covettori (k,h), (k',h') di $\mathbb{Z}^{2g}$, possiamo calcolare il loro indice d'intersezione utilizzando la matrice J_g. È

$$I(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (k,h)\,\mathrm{J}_d(k',h')^{\intercal} = \sum\nolimits_{j=1}^{g}\det\begin{pmatrix} k_j & h_j \\ k_j' & h_j' \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Se dunque $M\in\mathbf{GL}(2g,\mathbb{Z})$ è una matrice di cambiamento di base in $H_1(X,\mathbb{Z})$, la condizione che nella nuova base la matrice d'intersezione sia ancora la J si esprime mediante:

$$M^{\intercal}\,\mathrm{J}_g\,M = \mathrm{J}_g. \tag{3.4}$$

Definizione 3.1. Poniamo

$$\mathbf{Sp}(g,\mathbb{Z}) = \{M\in\mathbf{GL}(2g,\mathbb{Z})\,|\,M^{\intercal}\,J\,M = J\} = \text{gruppo modulare}. \tag{3.5}$$

3.1. Gruppo simplettico reale. Il gruppo modulare è un sottogruppo discreto del *gruppo simplettico reale*

$$(3.6) \qquad \mathbf{Sp}(g,\mathbb{R}) = \{M \in \mathbf{GL}(2g,\mathbb{R}) \mid M^\intercal\, \mathrm{J}_g\, M = \mathrm{J}_g\}.$$

Poiché $\mathrm{J}_g^2{=}-\mathrm{I}_{2g}$, le matrici M di $\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})$ si caratterizzano anche mediante

$$(3.7) \qquad (-\mathrm{J}_g M^\intercal \mathrm{J}_g)\cdot M = \mathrm{I}_{2g}, \quad \text{cioè} \quad M^{-1} = -\mathrm{J}_g M^\intercal \mathrm{J}_g.$$

Poiché la trasposta dell'inversa è l'inversa della trasposta, dalla (3.7) sege che $M{\in}\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})$ se, e soltanto se, $M^\intercal{\in}\mathbf{Sp}(g,R)$. Ciò si esprime nel seguente enunciato.

Lemma 3.1 (Involuzione di Cartan). *L'applicazione* $M \to (M^\intercal)^{-1}$ *è un'involuzione del gruppo simplettico* $\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})$. □

Se rappresentiamo M come una matrice $2{\times}2$ di blocchi $g{\times}g$, la (3.7) ci permette di calcolare la sua inversa con una regola analoga a quella per le matrici di $\mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(2)$:

$$(3.8) \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} D^\intercal & -B^\intercal \\ -C^\intercal & A^\intercal\end{pmatrix}, \quad \text{per ogni } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} \in \mathbf{Sp}(g,\mathbb{R}),$$

mentre l'involuzione di Cartan è

$$(3.9) \qquad \mathbf{Sp}(g,\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A\end{pmatrix} \in \mathbf{Sp}(g,\mathbb{R}).$$

È conveniente esplicitare le equazioni che caratterizzano $\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})$ per le matrici a blocchi, nella forma

$$(3.10) \qquad \begin{cases} A\,D^\intercal - B\,C^\intercal = \mathrm{I}_g, \\ D\,A^\intercal - C\,B^\intercal = \mathrm{I}_g, \\ A\,B^\intercal = B\,A^\intercal, \\ C\,D^\intercal = D\,C^\intercal, \end{cases} \qquad \begin{cases} D^\intercal A - B^\intercal C = \mathrm{I}_g, \\ A^\intercal D - C^\intercal B = \mathrm{I}_g, \\ A^\intercal C = C^\intercal A, \\ B^\intercal D = D^\intercal B. \end{cases}$$

Osserviamo che in ciascuno dei due blocchi la seconda equazione si ottiene dalla prima per trasposizione e ciascuno dei due blocchi è sufficiente a caratterizzare le matrici di $\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})$.

Gli elementi che rimangono fissi nell'involuzione di Cartan del Lemma 3.1 sono matrici ortogonali, che formano il sottogruppo compatto massimale di $\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})$.

Lemma 3.2. *Abbiamo*

$$(3.11) \quad \mathbf{Sp}(g,\mathbb{R}) \cap \mathbf{O}(2g) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_{2g}(\mathbb{R}) \,\middle|\, A + iB \in \mathbf{U}(g) \right\} \simeq \mathbf{U}(g).$$

Dimostrazione. Le matrici di $\mathbf{O}(2g)$ sono le matrici di $\mathbf{GL}_{2g}(\mathbb{R})$ lasciate fisse dall'involuzione di Cartan. Dalla (3.9) segue allora che le matrici di $\mathbf{Sp}(g, \mathbb{R})$ che appartengono ad $\mathbf{O}(2g)$ sono quelle per cui $D{=}A$ e $C{=}{-}B$. Sostituendo nelle (3.10) troviamo che

$$\begin{cases} A\,A^{\intercal}+B\,B^{\intercal} = \mathrm{I}_g, \\ A\,B^{\intercal} = B\,A^{\intercal}. \end{cases}$$

Questa è equivalente alla

$$(A+i\,B)(A+i\,B)^* = (A+i\,B)(A^{\intercal}-i\,B^{\intercal}) = A\,A^{\intercal}+B\,B^{\intercal} + i(B\,A^{\intercal}-A\,B^{\intercal}) = \mathrm{I}_g.$$

Si verifica infine facilmente che

$$\mathbf{U}(g) \ni A + iB \longrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in \mathbf{Sp}(g, \mathbb{R}) \cap \mathbf{O}(2g) \tag{3.12}$$

è un isomorfismo di gruppi. □

Per la *decomposizione di Cartan*, abbiamo

Proposizione 3.3. *Il gruppo* $\mathbf{Sp}(g, \mathbb{R})$ *è connesso e diffeomorfo al prodotto cartesiano* $\mathbf{U}(g) \times \mathbb{R}^{g(g+1)}$. □

Corollario 3.4. *Se* $M \in \mathbf{Sp}(g, \mathbb{R})$, *allora* $\det(M) = 1$. □

3.2. Azione del gruppo simplettico sul semispazio di Siegel. Mostriamo qui che il semispazio di Siegel $\mathcal{H}_g$ si identifica allo spazio hermitiano simmetrico $\mathbf{Sp}(g, \mathbb{R})/\mathbf{U}(g)$.

Lemma 3.5. *Siano* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *una matrice di* $\mathbf{Sp}(g, \mathbb{R})$ *e* Z *di* $\mathcal{H}_g$. *Allora*

- $(A{+}B\,Z)$ *e* $(C{+}D\,Z)$ *sono matrici invertibili;*
- $Z' = (C{+}D\,Z){\cdot}(A{+}B\,Z)^{-1}$ *appartiene ad* $\mathcal{H}_g$.

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{aligned} &(A{+}B\,Z)^*(C{+}D\,Z) = (A^{\intercal}{+}Z^*B^{\intercal}){\cdot}(C{+}D\,Z) \\ &= A^{\intercal}C + Z^*B^{\intercal}D\,Z + Z^*B^{\intercal}C + A^{\intercal}D\,Z \\ &= [A^{\intercal}C + Z^*B^{\intercal}D\,Z + Z^*B^{\intercal}C + C^{\intercal}BZ] + (A^{\intercal}D - C^{\intercal}B)Z \\ &= [A^{\intercal}C + Z^*B^{\intercal}D\,Z + Z^*B^{\intercal}C + C^{\intercal}BZ] + Z = R{+}iS, \end{aligned}$$

con $R = [A^{\intercal}C + Z^*B^{\intercal}D\,Z + Z^*B^{\intercal}C + C^{\intercal}BZ + \mathrm{Re}\,(Z)]$ che, per le (3.10) è Hermitiana simmetrica ed $S{=}\mathrm{Im}\,(Z)$ simmetrica e definita positiva. La S ammette una radice quadrata $S^{1/2}$ ancora simmetrica e definita positiva. La $R{+}iS$ è invertibile se e soltanto se lo è

$$S^{-1/2}(R{+}iS)S^{-1/2} = [(S^{-1/2}R\,S^{-1/2}) + i\,\mathrm{I}_g].$$

Questa è invertibile perché $(S^{-1/2}R\,S^{-1/2})$, essendo Hermitiana simmetrica, ha soltanto autovalori reali. Ciò dimostra il primo punto.

Verfichiamo ora che Z' è simmetrica. Questo equivale a

$$\begin{aligned}
&(A^{\intercal}+Z\,B^{\intercal})(C+D\,Z) = (C^{\intercal}+Z\,D^{\intercal})(A+B\,Z)\\
\Leftrightarrow\quad & A^{\intercal}C+Z\,B^{\intercal}D\,Z+A^{\intercal}D\,Z + Z\,B^{\intercal}C = C^{\intercal}A+Z\,D^{\intercal}B\,Z+C^{\intercal}B\,Z + Z\,D^{\intercal}A\\
\Leftrightarrow\quad & (A^{\intercal}C-C^{\intercal}A)+Z(B^{\intercal}D-D^{\intercal}B)Z+(A^{\intercal}D-C^{\intercal}B)Z + Z(B^{\intercal}C - D^{\intercal}A) = 0
\end{aligned}$$

e dunque l'uguaglianza è verificata per le (3.10).

Dimostrare che la parte immaginaria di Z' è definita positiva è equivalente al fatto che la parte Hermitiana simmetrica di $(A+B\,Z)^*(-i\,Z')(A+B\,Z)$ sia definita positiva. Abbiamo verificato all'inizio della dimostrazione che

$$(A+B\,Z)^*(-i\,Z')(A+B\,Z) = -i(A+B\,Z)^*(C+D\,Z) = -iR + \operatorname{Im}(Z),$$

con R matrice Hermitiana simmetrica. La dimostrazione è completa. $\square$

Lemma 3.6. *Le matrici triangolari inferiori a blocchi di* $\mathbf{S}(g,\mathbb{R})$ *formano un sottogruppo*

$$\mathbf{T}_{-}(\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ E\cdot\alpha^{-1} & \alpha^{\intercal} \end{pmatrix} \middle|\, \alpha\in\mathbf{GL}_g(\mathbb{R}),\ E=E^{\intercal}\in\mathbb{R}^{g\times g} \right\}. \tag{3.13}$$

Dimostrazione. Imponendo nelle (3.10) la condizione $B=0$, otteniamo che $A\,D^{\intercal}=\mathrm{I}_g$ e $CD^{\intercal}=E$ è una matrice reale simmetrica. Posto $A=\alpha^{-1}$ per una $\alpha\in\mathbf{GL}_g(\mathbb{R})$, otteniamo $D=\alpha^{\intercal}$ e quindi $C = E\cdot\alpha^{-1}$. Otteniamo la (3.13) scrivendo A al posto di $A^{\intercal}$. $\square$

Lemma 3.7. *Per ogni* $Z\in\mathcal{H}_g$ *possiamo trovare una* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})$ *tale che*

$$Z = (C + i\,D)(A + i\,B)^{-1}. \tag{3.14}$$

Dimostrazione. Sia $Z=R+i\,S$ con $R,S\in\mathbb{R}^{g\times g}$, una matrice di $\mathcal{H}_g$. Essendo simmetrica e definita positiva, la S ammette un'unica radice quadrata simmetrica e definita positiva $S^{1/2}\in\mathbb{R}^{g\times g}$. La matrice

$$M = \begin{pmatrix} S^{-1/2} & 0 \\ S^{-1/2}\cdot R & S^{1/2} \end{pmatrix}$$

appartiene ad $S\,p(g,\mathbb{R})$ ed otteniamo

$$(R\cdot S^{-1/2} + i\,S^{1/2})\cdot(S^{-1/2})^{-1} = R+i\,S = Z. \qquad \square$$

Definiamo un'azione del gruppo simplettico sul semispazio di Siegel mediante

$$\Phi_M(Z) = (C+D\,Z)(A+B\,Z)^{-1}, \quad \text{per } M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbf{Sp}(g,\mathbb{R}). \tag{3.15}$$

Teorema 3.8. *Il gruppo simplettico agisce in modo transitivo sul semispazio di Siegel.*

Il sottogruppo d'isotropia in $i\,\mathrm{I}_g$ *è* $\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})\cap\mathbf{O}(2g)\simeq\mathbf{U}(g)$.

Dimostrazione. Per il Lemma 3.5 ogni matrice $M\in\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})$ definisce un'applicazione di $\mathcal{H}_g$ in sé. Dobbiamo verificare che $\Phi_M\circ\Phi_{M'}=\Phi_{MM'}$. A questo scopo osserviamo che, se $Z\in\mathcal{H}_g$, allora $Z'=\Phi_{M'}(Z)=Z_2'Z_1'^{-1}$ con

$$\begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \end{pmatrix} = M'\begin{pmatrix} \mathrm{I}_g \\ Z \end{pmatrix}.$$

Abbiamo poi $Z''=\Phi_M(Z')=Z_2''Z_1''^{-1}$ con

$$\begin{pmatrix} Z_1'' \\ Z_2'' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} \mathrm{I}_g \\ Z' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \end{pmatrix}Z_1'^{-1},$$

da cui

$$\begin{pmatrix} Z_1'' \\ Z_2'' \end{pmatrix} = MM'\begin{pmatrix} \mathrm{I}_g \\ Z \end{pmatrix}Z_1'^{-1}.$$

Da questa ricaviamo che

$$MM'\begin{pmatrix} \mathrm{I}_g \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1''Z_1' \\ Z_2Z_1' \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\Phi_M\circ\Phi_{M'}(Z)=Z_2''Z_1''^{-1}=(Z_2''Z_1')(Z_1''Z_1')^{-1}=\Phi_{MM'}(Z).$$

Possiamo riformulare il Lemma 3.7 dicendo che, per ogni $Z\in\mathcal{H}_g$, possiamo trovare una $M\in\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})$ tale che $\Phi_M(i\,\mathrm{I}_g)=Z$. Questo dimostra la transitività. Infine, l'equazione $\Phi_M(i\,\mathrm{I}_g)=i\,\mathrm{I}_g$ si può riscrivere, per $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\in\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})$, nella forma

$$C+i\,D=i(A+iB),$$

che ci dà $D=A$ e $C=-B$, cioè $M\in\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})\cap\mathbf{O}(2g)\simeq\mathbf{U}(g)$. □

3.3. Algebra di Lie del gruppo simplettico reale. Il gruppo $\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie connesso. La sua algebra di Lie è

$$\begin{aligned}\mathfrak{sp}(g,\mathbb{R}) &= \{A\in\mathfrak{gl}_{2g}(\mathbb{R})\mid A\mathrm{J}_g+\mathrm{J}_gA^\intercal=0\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^\intercal \end{pmatrix}\middle|\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^{g\times g},\ \ \beta^\intercal=\beta,\ \gamma^\intercal=\gamma\right\}.\end{aligned}$$

Abbiamo

$$\mathfrak{sp}(g,\mathbb{R})\cap\mathfrak{o}(2g)=\left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\middle|\ \alpha^\intercal=-\alpha,\ \ \beta^\intercal=\beta\right\},$$

$$\mathfrak{sp}(g,\mathbb{R})\cap\mathfrak{p}(2g,\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \beta&-\alpha\end{pmatrix}\middle|\,\alpha^{\intercal}=\alpha,\quad\beta^{\intercal}=\beta\right\}.$$

L'applicazione

$$\mathfrak{sp}(g,\mathbb{R})\cap\mathfrak{o}(2g)\ni\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ -\beta&\alpha\end{pmatrix}\longrightarrow\alpha+i\,\beta\in\mathfrak{u}(g)$$

è un isomorfismo di algebre di Lie.

La *decomposizione di Cartan*

$$\mathbf{U}(g)\times(\mathfrak{sp}(g,\mathbb{R})\cap\mathfrak{p}(2g,\mathbb{R}))\ni(u,A)\longrightarrow\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,(u)&-\mathrm{Im}\,(u)\\ \mathrm{Im}\,(u)&\mathrm{Re}\,(u)\end{pmatrix}\cdot\exp(A)\in\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})$$

è un diffeomorfismo che ci permette di identificare il semipiano di Siegel $\mathcal{H}_g$ con le matrici simmetriche dell'algebra di Lie $\mathfrak{sp}(g,\mathbb{R})$.

3.4. Disco unitario generalizzato. Possiamo rappresentare il semispazio di Siegel come un dominio limitato di $\mathbb{C}^{g(g+1)/2}$.

Definizione 3.2. Chiamiamo *disco unitario generalizzato* il dominio

$$\mathcal{B}_g=\{U\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\mid U^{\intercal}=U,\;\;U\cdot U^*<\mathrm{I}_g\},\tag{3.16}$$

nello spazio delle matrici simmetriche[2].

Teorema 3.9. *Le applicazioni*

$$\mathcal{H}_g\ni Z\to U=\frac{Z-i\mathrm{I}_g}{Z+i\mathrm{I}_g}\in\mathcal{B}_g,\tag{3.17}$$

$$\mathcal{B}_g\ni U\to Z=i\,\frac{\mathrm{I}_g+U}{\mathrm{I}_g-U}\in\mathcal{H}_g\tag{3.18}$$

sono ben definite e sono l'una l'inversa dell'altra.

Dimostrazione. Se Z è simmetrica e non ha l'autovalore $(-i)$, allora

$$U=(Z-i\,\mathrm{I}_g)(Z+i\,\mathrm{I}_g)^{-1}=(Z+i\,\mathrm{I}_g)^{-1}(Z-i\,\mathrm{I}_g)$$

è ben definita e simmetrica perché prodotto di matrici simmetriche. Allora l'identità

$$\mathrm{I}_g-U=2i(Z+i\,\mathrm{I}_g)^{-1}$$

di dice che 1 non è autovalore di U e, viceversa, se U è una matrice simmetrica che non ha autovalore 1 allora

$$Z=i(\mathrm{I}_g+U)(\mathrm{I}_g-1)^{-1}=i(\mathrm{I}_g-1)^{-1}(\mathrm{I}_g+U)$$

[2]La diseguaglianza $U\cdot U^*<\mathrm{I}_g$ significa che la matrice Hermitiana $2\mathrm{I}_g-U\,U^*-U^*U$ è definita positiva.

è ben definita e simmetrica perché prodotto di matrici simmetriche che commutano tra loro. Inoltre, poiché

$$Z+i\,\mathrm{I}_g = \frac{1}{2i}(\mathrm{I}_g-U)^{-1},$$

la Z non ha l'autovalore $(-i)$.

Questo dimostra che le (3.17), (3.18) definiscono una corrispondenza $Z\leftrightarrow U$ tra l'insieme delle matrici complesse simmetriche che non hanno l'autovalore $(-i)$ e quelle che non hanno l'autovalore 1.

Per completare la dimostrazione, è sufficiente verificare che $\mathrm{Im}(Z)>0$ se e soltanto se $UU^*<1$. Osserviamo che, poiché Z ed U sono simmetriche, $Z^*=\bar{Z}$ ed $U^*=\bar{U}$.

$$\frac{1}{i}\left(Z-\overline{Z}\right) = \left\{(\mathrm{I}_g-U)^{-1}(\mathrm{I}_g+U)+(\mathrm{I}_g+U^*)(\mathrm{I}_g-U^*)^{-1}\right\}$$

da cui ricaviamo che

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_g-U)\left[\tfrac{1}{i}\left(Z-\overline{Z}\right)\right](\mathrm{I}_g-U^*) &= (\mathrm{I}_g+U)(\mathrm{I}_g-U^*)+(\mathrm{I}_g-U)(\mathrm{I}_g+U^*)\\ &= 2(\mathrm{I}_g-UU^*).\end{aligned}$$

Questa uguaglianza ci dice che Z ha parte immaginaria definita positiva se e soltanto se $\mathrm{I}_g-U\,U^*$ è definita positiva.

Questo completa la dimostrazione. □

Se $g=1$, il dominio $\mathcal{B}_g$ è il disco unitario $\mathrm{D}=\{|z|<1\}$ e l'applicazione $z\to(z+i)^{-1}(z-i)$ la trasformazione conforme del semipiano di Poincaré sul disco.

Osservazione 3.10. L'azione del gruppo $\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})$ su $\mathcal{B}_g$ si può rappresentare mediante il gruppo

$$\mathcal{G} = \{S\in\mathbf{Sp}(g,\mathbb{C})\mid K_gS = \bar{S}K_g\},\quad \text{con}\quad K_g = \begin{pmatrix}0 & \mathrm{I}_g\\ \mathrm{I}_g & 0\end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Le matrici di $\mathcal{G}$ si possono cioè scrivere come matrici a blocchi della forma

$$S = \begin{pmatrix}E & \bar{F}\\ F & \bar{E}\end{pmatrix}$$

e le (3.10) danno allora

$$\begin{cases}E^*E - F^*F = \mathrm{I}_g,\\ E^*F = F^*E.\end{cases} \tag{3.20}$$

Consideriamo, nello spazio $\mathbb{C}^{2g\times g}$, le trasformazioni lineari

$$\begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2i}}\begin{pmatrix}\mathrm{I}_g & i\,\mathrm{I}_g\\ -\mathrm{I}_g & i\,\mathrm{I}_g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2i}}\begin{pmatrix}-\mathrm{I}_g & \mathrm{I}_g\\ i\,\mathrm{I}_g & i\,\mathrm{I}_g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix}.$$

Le matrici

$$N = \frac{1}{\sqrt{2i}}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_g & i\,\mathrm{I}_g \\ -\mathrm{I}_g & i\,\mathrm{I}_g \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad N^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2i}}\begin{pmatrix} -\mathrm{I}_g & \mathrm{I}_g \\ i\,\mathrm{I}_g & i\,\mathrm{I}_g \end{pmatrix}$$

che abbiamo utilizzato nelle due espressioni sono simplettiche complesse e l'una l'inversa dell'altra. Si ottengono le (3.17) e (3.18) ponendo $Z{=}Z_2Z_1^{-1}$ ed $U{=}U_2U_1^{-1}$.

Il gruppo $\mathcal{G}$ è quindi il coniugato

$$\mathcal{G} = N\,\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})\,N^{-1}$$

in $\mathbf{Sp}(g,\mathbb{C})$ del gruppo simplettico reale $\mathbf{Sp}(g,\mathbb{R})$ e perciò un sottogruppo del gruppo simplettico complesso. Le matrici S di $\mathcal{G}$ sono caratterizzate dall'ulteriore condizione che $N^{-1}S\,N$ sia reale, cioè che

$$N^{-1}S\,N = \overline{N^{-1}S\,N} \iff \bar{N}{\cdot}N^{-1}S = \bar{S}\cdot\bar{N}{\cdot}N^{-1} \iff K_gS = \bar{S}\,K_g,$$

perché $\bar{N}{\cdot}N^{-1}{=}-K$.

Abbiamo ottenuto così la caratterizzazione (3.20).

3.5. Azione sullo spazio dei periodi. Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere g. Ad una base $\omega{=}\omega_1,\dots,\omega_g$ dello spazio dei differenziali abeliani di prima specie corrisponde la *matrice dei periodi* $\Omega = (Z_1, Z_2)$. Abbiamo osservato nel §1 che Z_1 e Z_2 sono matrici invertibili e che nella base $\omega' = \omega\,Z_1^{-1}$ la matrice dei periodi ha la forma canonica (I_{2g}, Z), con $Z = Z_2Z_1^{-1}$. La base ω' è univocamente determinata dal fatto che la matrice dei periodi sia di questa forma.

Se operiamo in $\mathrm{H}_1(X,\mathbb{Z})$ un cambiamento di base che lasci invariata la matrice d'intersezione, i nuovi laccetti $\mathbf{a}_i'$, $\mathbf{b}_i'$ sono legati ai precedenti dalla relazione

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a}'\\ \mathbf{b}'\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}, \quad \text{con } \ M \in \mathbf{Sp}(g,\mathbb{Z}).$$

La nuova matrice dei periodi sarà quindi

$$\Omega' = \begin{pmatrix}\mathbf{a}'\\ \mathbf{b}'\end{pmatrix}\omega = M\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}\omega = M\Omega = \begin{pmatrix} A\,Z_1{+}B\,Z_2 \\ C\,Z_1{+}D\,Z_2\end{pmatrix}$$

ed il punto corrispondente del semispazio di Siegel è allora

$$Z' = (C\,Z_1{+}D\,Z_2)(A\,Z_1{+}B\,Z_2)^{-1} = (C{+}D\,Z){\cdot}(A{+}B\,Z)^{-1}. \tag{3.21}$$

Possiamo riassumere la discussione svolta fin qui nel modo seguente.

Teorema 3.11. *Data una superficie di Riemann compatta X di genere g, ad ogni scelta di una base canonica di $H_1(X,\mathbb{Z})$ corrisponde un punto di $\mathcal{H}_g$. Punti di $\mathcal{H}_g$ che si corrispondono mediante una trasformazione* (3.21) *sono associati alla stessa superficie di Riemann compatta X, ma ad una diversa scelta della base canonica di $H_1(X,\mathbb{Z})$.* □

4. Differenziali abeliani di seconda specie

Indichiamo con K un divisore associato al fibrato canonico e con ω_K un differenziale abeliano con $\mathcal{div}(\omega_K)=K$. Se D è un qualsiasi divisore su X, allora possiamo considerare il sistema lineare $|D+K|$ come lo spazio proiettivo associato allo spazio vettoriale dei differenziali con coefficienti in $\mathscr{O}(D)$. Indichiamo con $\Omega(D)$ il corrispondente fibrato in rette.

Lemma 4.1. *Siano X una superficie di Riemann compatta e connessa di genere g e* $D=\sum_{i=1}^{\ell}\nu_i\cdot p_i>0$, *con* $\nu_i>0$, *un divisore olomorfo su X. Allora*

(*i*) $\dim(|K+D|) = \deg(D)+g-2$.
(*ii*) *Se* $\dim(|K+D|) \geq 0$ *e* σ_0 *è una sezione non identicamente nulla di* $\Omega^1(D)$ *su X, con* $\mathcal{div}(\sigma_0) = K+D$, *allora ogni differenziale abeliano* η *con* $\mathcal{div}(\eta)\geq -D$ *(cioè con poli soltanto nei punti* p_i *e di ordine non superiore a* ν_i*) è della forma*

$$\eta = \frac{\sigma}{\sigma_0}\,\omega_K, \quad con \quad \sigma\in\mathscr{O}(X,\Omega(D)). \tag{4.1}$$

Dimostrazione. (*i*). Poiché D è strettamente positivo, non ci possono essere differenziali abeliani con divisore maggiore di K. Quindi l'indice di specialità $\iota(K+D)$ è zero. Poiché il grado di $(K+D)$ è $(2g-2+\deg(D))$ (somma dei gradi di K e di D) e dunque (*i*) è conseguenza diretta della formula di Riemann-Roch.

(*ii*). Se η è un differenziale abeliano con divisore $\geq(-D)$, allora η/ω_K è una funzione meromorfa con divisore $\geq(-D-K)$. Quindi $\sigma=(\eta/\omega_K)\sigma_0$ è una sezione del fibrato $\Omega^1(D)$, per cui vale la (4.1). Viceversa, i differenziali abeliani definiti da (4.1) hanno divisore $\geq(-D)$. La dimostrazione è completa. □

Osservazione 4.2. Abbiamo dimostrato che

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{Ab}^{-D}(X)) = \deg(D)+g-1.$$

In particolare, se $D=\nu\cdot p_0$ per un intero $\nu>0$ ed un punto fissato p_0 di X, allora $\mathcal{Ab}^{-\nu\cdot p_0}(X)$ ha dimensione $g+\nu-1$.

Poiché la somma dei residui dei differenziali abeliani è zero, un differenziale abeliano che abbia al più un polo è di seconda specie: è cioè o regolare, oppure il suo polo deve avere ordine maggiore o uguale a due.

Poiché $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{Ab}^{-\nu\cdot p_0}(X)) = \nu+g-1$, per ogni $\nu\geq 2$ esiste un differenziale abeliano che abbia un unico polo, di ordine ν, in p_0, come avevamo dimostrato analiticamente in precedenza (Teorema 10.2 del Cap.XII).

Utilizziamo le notazioni introdotte nel §sec-sprXI-1.

Teorema 4.3. *Se X è una superficie di Riemann connessa e compatta di genere $g \geq 1$, allora abbiamo una successione esatta*

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{M}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{A}b_{\mathrm{II}}(X) \xrightarrow{(\alpha,\beta)} \mathbb{C}^{2g} \longrightarrow 0. \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Ci resta da dimostrare che l'applicazione dei periodi è surgettiva su $\mathbb{C}^{2g}$. Ricordiamo (Lemma 13.1 del Cap.XII) che l'indice di specialità di un divisore meromorfo di grado maggiore di $(2g-2)$ è zero. Allora, per il Lemma 11.1 d el Cap.XII, l'applicazione β è surgettiva da $\tilde{\mathcal{A}b}_{\mathrm{II}}(D)$ in $\mathbb{C}^g$. Da questo segue la tesi. □

Corollario 4.4. *Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere $g \geq 1$. Allora si possono assegnare arbitrariamentre i periodi di un differenziale abeliano di seconda specie. Due differenziali abeliani di seconda specie che abbiano i periodi uguali differiscono per il differenziale di una funzione meromorfa.*

5. Differenziali abeliani di terza specie

Poiché possiamo assegnare arbitrariamente i periodi di un differenziale abeliano di prima specie su $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_g$, abbiamo

Proposizione 5.1. *Data una qualsiasi coppia di punti p, q di X, fissati gli $\mathbf{a}_i$ e $\mathbf{b}_i$ in modo che non contengano p e q nei loro supporti, possiamo trovare un unico differenziale abeliano di terza specie $\theta_{p.q}$ con*

$$\begin{cases} div_\infty(\theta_{p,q}) = p+q, \\ \mathrm{res}_p(\theta_{p,q}) = 1, \quad \mathrm{res}_p(\theta_{p,q}) = -1, \\ \alpha_i(\theta_{p,q}) = \oint_{\mathbf{a}_i} \theta_{p,q} = 0, \quad \textit{per } i=1,\ldots,g. \end{cases} \tag{5.1}$$

Dimostrazione. Per il Teorema 10.1 del Cap.XII esiste un differenziale abeliano di terza specie ω che soddisfa le prime due condizioni in (5.1). Possiamo verificare anche la terza aggiungendo ad ω un opportuno differenziale abeliano di prima specie. Le condizioni (5.1) caratterizzano $\theta_{p,q}$ perché la differenza di due differenziali abeliani che le soddisfino sarebbe un differenziale abeliano di prima specie ζ con tutti i periodi $\alpha_i(\zeta) = 0$. □

Utilizziamo la notazione richiamata nel §1. Poiché i poli semplici sono singolarità integrabili, dato un differenziale abeliano di prima specie ω, indichiamo con $h \in \mathscr{O}(\Pi) \cap \mathscr{C}^\infty(\bar{\Pi})$ una primitiva in $\bar{\Pi}$ di $\pi^*(\omega)$. Abbiamo

$$0 = \iint_X \omega \wedge \theta_{p,q} = \iint_\Pi \pi^*(\omega) \wedge \pi^*(\theta_{p,q}) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \iint_{\inf\{|z-z_0|,|z-z_1|\} > \epsilon} \pi^*(\omega) \wedge \pi^*(\theta_{p,q}),$$

ove $z_0 = \pi^{-1}(p)$ e $z_1 = \pi^{-1}(q)$. Poiché $\pi^*(\omega)\wedge\pi^*(\theta_{p,q}) = d(h\cdot\pi^*(\theta_{p,q})$ su $\Pi\setminus\{z_0, z_1\}$, per la formula di Green otteniamo

$$(5.2)\qquad \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\oint_{|z-z_0|=\epsilon} h\cdot\pi^*(\theta_{p,q}) + \oint_{|z-z_1|=\epsilon} h\cdot\pi^*(\theta_{p,q})\right) = \oint_{\partial\Pi} h\cdot\pi^*(\theta_{p,q}).$$

Per $\epsilon>0$ sufficientemente piccolo, tale cioè che i dischi chiusi di centri z_0, z_1 e raggio ϵ siano tutti contenuti in Π e non si intersechino, il primo membro di questa uguaglianza è uguale a $2\pi i(h(z_0)-h(z_1))$. Per calcolare il secondo membro osserviamo che i valori di h nei punti di a_j differiscono da quelli nei punti corrispondenti di a_j^{-1} per $\beta_j(\omega)$ e quelli assunti nei punti di b_j differiscono da quelli assunti nei corrispondenti punti di b_j^{-1} per $[-\alpha_j(\omega)]$, mentre $\pi^*(\theta_{p,q})$ ha uguali valori nei punti corrispondenti di a_j, a_j^{-1} e di b_j, b_j^{-1}. Otteniamo allora

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\Pi} h\cdot\pi^*(\theta_{p,q}) &= \sum\nolimits_{j=1}^{g}\left(\beta_j(\omega)\oint_{a_j}\pi^*(\theta_{p,q}) - \alpha_j(\omega)\oint_{b_j}\pi^*(\theta_{p,q})\right)\\ &= \sum\nolimits_{j=1}^{g}\left(\beta_j(\omega)\oint_{\mathbf{a}_j}\theta_{p,q} - \alpha_j(\omega)\oint_{\mathbf{b}_j}\theta_{p,q}\right)\\ &= -\sum\nolimits_{j=1}^{g}\alpha_j(\omega)\beta_j(\theta_{p,q}).\end{aligned}$$

Poiché il primo membro della (5.2) è, per $\epsilon>0$ sufficientemente piccolo, uguale a $[2\pi i(f(p)-f(q))]$ per la formula dei residui, abbiamo ottenuto

LEMMA 5.2. *Siano p, q punti distinti di X ed $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_g, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_g$ laccetti di X che ne costituiscano una base canonica*[3] *dell'omologia e non contengano p, q nel loro supporto. Sia $\omega\in\mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X)$ ed h una primitiva di $\pi^*(\omega)$ in $\bar{\Pi}$. Allora*

$$(5.3)\qquad f(p) - f(q) = \frac{1}{2\pi i}\sum\nolimits_{1}^{g}\alpha_j(\omega)\beta_j(\theta_{p,q}).$$

6. Varietà di Jacobi

Siano X una superficie di Riemann connessa e compatta, di genere g positivo, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_g, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_g$ una base canonica di $H_1(X, \mathbb{Z})$ ed $\omega_1, \ldots, \omega_g$ una base dello spazio $H^0(X, \Omega^1)$ dei differenziali abeliani di prima specie, cui corrisponde la matrice dei periodi

$$(6.1)\qquad \Omega = (Z_1, Z_2) = \left(\oint_{\mathbf{a}_i}\omega_j, \oint_{\mathbf{b}_i}\omega_j\right).$$

LEMMA 6.1. *Il sottoinsieme $\Gamma_\Omega=\Omega\cdot\mathbb{Z}^{2g}$ 'e un sottogruppo discreto di rango $2g$ di $\mathbb{C}^g$. Il quoziente $\mathbb{C}^g/\Gamma_\Omega$ è un gruppo di Lie commutativo complesso e compatto, omeomorfo al prodotto topologico di $2g$ circonferenze.*

[3] Cioè che soddisfi (3.1).

Dimostrazione. Le relazioni di Riemann (§8 del Cap.XII) ci dicono che le colonne di Ω sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$. Utilizzando l' automorfismo $\mathbb{R}$-lineare di $\mathbb{C}^g$ che trasforma le colonne di Ω nella base reale canonica $e_1, \dots, e_g, ie_1, \dots, ie_g$ di $\mathbb{C}^g$, troviamo che $\mathbb{C}^g/\Gamma_\Omega$ è diffeomorfo al quoziente $\mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g} \simeq (\mathbf{S}^1)^{2g}$. Le altre affermazioni dell'enunciato sono di facile verifica. □

Definizione 6.1. Chiamiamo il quoziente $\mathcal{J}(X) = \mathbb{C}^g/\Gamma_\Omega$ la *varietà di Jacobi* di X.

Osserviamo che $\mathcal{J}(X)$ è una varietà complessa e compatta di dimensione g. Scelte diverse della base canonica di omologia e della base dei differenziali abeliani di prima specie di dà una $\mathcal{J}(X)$ biolomorficamente equivalente.

Per $g=1$ la superficie di Riemann X è parabolica e la corrispondente varietà di Jacobi un toro compesso $\mathcal{J}(X)$ ad essa biolomorfo.

Anche per $g>1$ si verifica infatti che i quozienti $\mathbb{C}^g/\Gamma_\Omega$, $\mathbb{C}^g/\Gamma_{\Omega'}$, associati a due matrici dei periodi $\Omega = (Z_1, Z_2)$ ed $\Omega' = (Z_1', \mathbb{Z}_2')$, sono biolomorfi se e soltanto se i corrispondenti punti $Z = Z_2 Z_1^{-1}$ e $Z' = Z_2'(Z_1')^{-1}$ del semispazio di Siegel $\mathcal{H}_g$ sono congruenti rispetto ad un elemento del gruppo modulare $\mathbf{Sp}(g, \mathbb{Z})$.

Le superfici di genere 1 sono state discusse nel Cap. IX.

Consideriamo ora il caso di superfici di genere g maggiore di 1.

Sia $g \geq 2$ e $\pi : \mathrm{D} \to X$ il rivestimento universale olomorfo di X. Il pullback di una base $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_g)$ dei differenziali abeliani di prima specie definisce una forma chiusa $\pi^*(\omega)$ a valori in $\mathbb{C}^q$, che possiamo integrare a partire ad esempio dal punto 0 di D, ottenendo così un'applicazione olomorfa $\tilde{F} : \mathrm{D} \to \mathbb{C}^g$, con

$$\tilde{F}(z) = \int_0^z \pi^*(\omega), \quad \forall z \in \mathrm{D}. \tag{6.2}$$

Se z e z' sono due punti di D con $\pi(z)=\pi(z')$, allora l'immagine mediante π del segmento che li unisce è un laccetto di X e quindi definisce un elemento $\pi([z, z'])$ di $H_1(X, \mathbb{Z})$. Allora

$$\tilde{F}(z) - \tilde{F}(z') = \int_z^{z'} \pi^*(\omega) = \oint_{\pi([z,z'])} \omega \in \Gamma_\Omega.$$

Per passaggio al quoziente, risulta definita un'unica applicazione $F : X \to \mathcal{J}(X)$, che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D} & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbb{C}^g \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle pr} \\ X & \xrightarrow{F} & \mathcal{J}(X) \end{array} \tag{6.3}$$

in cui la freccia verticale a destra è la proiezione nel quoziente.

Teorema 6.2. *L'applicazione F definita dal diagramma commutativo* (6.3) *è olomorfa, regolare ed iniettiva.*

Dimostrazione. Segue subito dalla definizione che la F sia olomorfa. Per verificare che è regolare, basta osservare che la $\tilde{F}$ è regolare, perché il suo differenziale è il pullback di una base di differenziali abeliani di prima specie, e sappiamo che essi non hanno zeri comuni in X. Dimostreremo l'iniettività, completando la dimostrazione del teorema, dopo che, con il teorema di Abel (Teorema 6.6) avremo caratterizzato i divisori delle funzioni meromorfe. □

Osserviamo che la scelta di un diverso punto iniziale $z_0 \in D$, ci darebbe una mappa $F' : X \to \mathcal{J}(X)$ che differirebbe da F per l'addizione di un elemento di $\mathcal{J}(X)$ (ricordiamo che $\mathcal{J}(X)$ è un gruppo abeliano).

Definizione 6.2. Chiamiamo una qualsiasi applicazione $F' = F + cost$ di X nella sua varietà jacobiana (con F definita dalle (6.2), (6.3)) un'*immersione di Abel-Jacobi*.

Ci è utile riformulare il Lemma 5.2 utilizzando la funzione $\tilde{F}$ introdotta sopra.

Proposizione 6.3. *Se* $\omega_1, \ldots, \omega_g$ *è una base di* $\mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X)$ *con* $\alpha_i(\omega_j) = \delta_{i,j}$ *(*$1 \leq i, j \leq g$*) ed* F' *un'immersione di Abel-Jacobi, allora*

$$F'(q) - F'(p) = pr\left(\tfrac{1}{2\pi i}\beta_j(\theta_{p,q})_{1 \leq j \leq g}\right), \tag{6.4}$$

ove $pr : \mathbb{C}^g \to \mathcal{J}(X)$ *è la proiezione canonica.* □

Notazione 6.4. Scriviamo per semplicità $\mathscr{D}(X)$ per indicare lo $\mathbb{Z}$-modulo dei divisori su X. Per ogni intero n indichiamo con $\mathscr{D}_n(X)$ l'insieme dei divisori di grado n e, se $n>0$, indichiamo con $\mathscr{D}_n^+(X)$ il sottoinsieme di quelli positivi di grado n. Se $D = p_1 + \cdots + p_n \in \mathscr{D}_n^+(X)$, poniamo

$$\Phi_F(D) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} F(p_i). \tag{6.5}$$

Poiché per $p_0 = \pi(0)$ è $F(p_0) = 0$ (lo zero del gruppo abeliano $\mathcal{J}(X)$), abbiamo

$$F(X) = \Phi_F(\mathscr{D}_1^+(X)) \subseteq \Phi_F(\mathscr{D}_2^+(X)) \subseteq \cdots \subseteq \Phi_F(\mathscr{D}_n^+(X)) \subseteq \cdots$$

Se $D \in \mathscr{D}(X)$, porremo

$$\Phi_F(D) = F(D_0) - F(D_\infty), \quad \text{se } D_0, D_\infty \in \mathscr{D}^+(X) \text{ e } D = D_0 - D_\infty. \tag{6.6}$$

Lemma 6.5. *I divisori di grado* 0 *formano un gruppo additivo* $\mathscr{D}_0(X)$ *e la restrizione dell'applicazione della* Φ_F *definita in* (6.6) *a* $\mathscr{D}_0(X)$ *è un omomorfismo di gruppi abeliani* $\Phi = \Phi_F : \mathscr{D}_0(X) \longrightarrow \mathcal{J}(X)$ *che non dipende dalla scelta della* F. □

Teorema 6.6 (Abel). *Condizione necessaria e sufficiente affinché un* $D \in \mathscr{D}(X)$ *sia il divisore di una funzione meromorfa è che* $\deg(D)=0$ *e* $\Phi(D) = 0$.

Dimostrazione. Ricordiamo che i divisori delle funzioni meromorfe su X sono principali ed hanno quindi grado zero.

Dimostriamo la necessità. Sia

$$D = \sum\nolimits_{i=1}^{k} a_i \cdot p_i - \sum\nolimits_{i=1}^{r} b_i q_i,$$

il divisore di una funzione meromorfa $f \in \mathcal{M}^*(X)$ non costante, con $p_1, \dots, p_k$, $q_1, \dots, q_r$ punti distinti di X ed $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_r$ interi positivi. La condizione che $\deg(D)=0$ è equivalente ad

$$a_1 + \cdots + a_k = b_1 + \cdots + b_r.$$

Possiamo supporre che nessuno dei punti del supporto di D appartenga ai laccetti $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_g, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_g$ della base canonica dell'omologia di X.

Il quoziente $f^{-1}df = d\log(f)$ è un differenziale abeliano (di terza specie) con soli poli semplici nei punti distinti del supporto di D e residui uguali agli ordini di f nei diversi punti. Inoltre, poiché il logaritmo di f è una funzione multivoca, definita sul complemento del supporto di D, i cui valori in un punto differiscono per multipli interi di $2\pi i$, abbiamo

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{df}{f} \in \mathbb{Z}, \quad \text{per ogni laccetto } \gamma \text{ in } X.$$

Fissiamo un punto base p_0, che non appartenga né al supporto di D né ai supporti dei rappresentanti scelti per la base dell'omologia. Allora la differenza

$$\frac{df}{f} - \left(\sum\nolimits_{i=1}^{k} a_i \theta_{p_i, p_0} - \sum\nolimits_{i=1}^{r} b_i \theta_{q_i, p_0} \right)$$

(i $\theta_{p,q}$ sono i differenziali definiti nel §5) è un differenziale abeliano di prima specie. Quindi, se indichiamo con $\omega_1, \dots, \omega_g$ la base canonica $\mathcal{A}b_{\mathrm{I}}(X)$, con $\alpha_i(\omega_j) = \oint_{\mathbf{a}_i} \omega_j = \delta_i.j$, abbiamo

$$(\dagger) \qquad \frac{df}{f} = \sum\nolimits_{i=1}^{k} a_i \theta_{p_i, p_0} - \sum\nolimits_{i=1}^{r} b_i \theta_{q_i, p_0} + \sum\nolimits_{i=1}^{g} c_i \omega_i,$$

con

$$c_i = \oint_{\mathbf{a}_i} \frac{df}{f} \in 2\pi i \mathbb{Z}.$$

Otteniamo allora

$$\begin{aligned} F(D) &\equiv \sum\nolimits_{i=1}^{k} (a_i(F(p_i) - F(p_0)) - \sum\nolimits_{i=1}^{r} (b_i(F(q_i) - F(p_0)) \\ &\equiv \frac{1}{2\pi i} \left(\sum\nolimits_{i=1}^{k} a_i \oint_{\mathbf{b}} \theta_{p_i, p_0} - \sum\nolimits_{i=1}^{r} b_i \oint_{\mathbf{b}} \theta_{q_i, p_0} \right) \end{aligned}$$

$$\equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbf{b}} \frac{df}{f} - \sum\nolimits_{i=1}^{g} \left(\frac{1}{2\pi i} c_i \oint_{\mathbf{b}} \omega_i \right).$$

L'ultimo termine dell'uguaglianza è un elemento di $\mathbb{Z}^g + Z{\cdot}\mathbb{Z}^g = (\mathrm{I}_g, Z)\mathbb{Z}^{2g} = \Gamma_\Omega$ e quindi $\equiv 0$. Questo completa la dimostrazione della necessità.

Viceversa, se $\Phi(D) = 0$, fissato un punto p_0 che non appartiene né al supporto del divisore, nè a quello dei laccetti di base dell'omotopia, indichiamo con η il differenziale abeliano a secondo membro di (†), con i coefficienti c_i da determinare. Sia $\pi : \bar{\Pi} \to X$ la proiezione su X dal poligono fondamentale ed indichiamo con $\int_{p_0}^{p}$ l'integrale in X lungo il cammino proiezione di un segmento geodetico di lunghezza minima in $\bar{\Pi}$. Cerchiamo la funzione meromorfa f come

$$f(p) = \exp\left(\int_{p_0}^{p} \eta \right).$$

Abbiamo

$$\oint_{\mathbf{a}_j} \eta = c_j,$$
$$\oint_{\mathbf{b}_j} \eta = 2\pi i \left(\sum\nolimits_{i=1}^{k} a_i \tilde{F}_j(p) - \sum\nolimits_{i=1}^{r} \tilde{F}_j(q_i) \right) + \sum\nolimits_{i=1}^{g} c_i \beta_j(\omega_i).$$

La condizione $\Phi(D)=0$ ci dice che

$$\left(\sum\nolimits_{i=1}^{k} a_i \tilde{F}_j(p) - \sum\nolimits_{i=1}^{r} \tilde{F}_j(q_i) \right)_{1 \le j \le g} = v_1 + Z v_2, \quad \text{con} \quad v_1, v_2 \in \mathbb{Z}^g$$

(la Z è la matrice $\beta(\omega)$ nella base canonica).

Basterà quindi scegliere $c = -2\pi i v_2$ affinché la f sia una funzione meromorfa ben definita su X. □

Conclusione della dimostrazione del Teorema 6.2.

Se ci fossero due punti distinti p_1, p_2 di X con $F(p_1)=F(p_2)$, allora, per il teorema di Abel (Teor. 6.2), $(p_1 - p_2)$ sarebbe il divisore di una funzione meromorfa con un solo polo semplice su X. Ciò è assurdo. Questo completa la dimostrazione del teorema. □

7. Teorema d'inversione di Jacobi

Ricordiamo che un divisore olomorfo D si dice *speciale* se $\iota(D) > 0$.

Poiché la dimensione del sistema lineare di un divisore olomorfo è non negativa, per la formula di Riemann-Roch tutti i divisori olomorfi di grado minore di g sono speciali.

L'indice di specialità di un divisore olomorfo D è la dimensione dello spazio dei differenziali abeliani di prima specie che abbiano divisore maggiore o uguale a D. La formula di Riemann-Roch ci dice quindi che possiamo assegnare arbitrariamente $g-1$ zeri di un differenziale abeliano di prima specie.

Poiché su una superficie di Riemann connessa e compatta non ci sono funzioni meromorfe con un unico polo semplice, da

$$0 = \dim_{\mathbb{C}} |p| = 1-g+\imath(p)$$

ricaviamo che lo spazio $\mathcal{A}b^{p}(X)$ dei differenziali abeliani di prima specie che si annullano in p è un iperpiano di $\mathcal{A}b_{\mathrm{I}}(X)$.

Fissato un punto p_1, basterà scegliere un punto p_2 in cui non si annulli un elemento di $\mathcal{A}b^{p_1}(X)$ perché $\mathcal{A}b^{p_1+p_2}(X)=\mathcal{A}b^{p_1}(X)\cap\mathcal{A}b^{p_2}(X)$ abbia codimensione due in $\mathcal{A}b_{\mathrm{I}}(X)$. Ragionando per ricorrenza, possiamo costruire in questo modo g-uple $p_1,\ldots,p_g$ di punti distinti tali che, per ogni $j=1,\ldots,g$ il divisore $D_j = p_1+\cdots+p_j$ abbia indice di specialità $g-j$. La condizione necessaria e sufficiente affinché una g-upla $p_1,\ldots,p_g$ abbia questa proprietà è che, per una qualsiasi base $\omega_1,\ldots,\omega_g$ di $\mathcal{A}b_{\mathrm{I}}(X)$, la matrice wronskiana

$$\begin{pmatrix} \omega_1(p_1) & \ldots & \omega_g(p_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1(p_g) & \ldots & \omega_g(p_g) \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

abbia determinante diverso da zero e ciò equivale ad affermare che il divisore $D=p_1+\cdots+p_g$ non sia speciale.

Le g-uple $(p_1,\ldots,p_g)$ di X^g per cui $p_1+\cdots+p_g$ non sia speciale formano perciò un aperto di Zariski[4] non vuoto e quindi denso in X^g. Abbiamo ottenuto:

Proposizione 7.1. *Per ogni $D\in\mathscr{D}^+_g(X)$, c'è un divisore $D'\in\mathscr{D}^+_g(X)$, arbitrariamente vicino a D e non speciale. Possiamo inotre scegliere D' come somma di g punti distinti.* □

Teorema 7.2 (d'inversione di Jacobi). *L'applicazione*

$$\Phi : \mathscr{D}^+_g(X) \longrightarrow \mathcal{J}(X) \tag{7.2}$$

è surgettiva.

Dimostrazione. Indichiamo con $\Psi : X^g \to \mathcal{J}(X)$ l'applicazione olomorfa

$$\Psi(p_1,\ldots,p_g) = \Phi(p_1+\cdots+p_g),$$

[4] Un aperto di Zariski è, in una varietà algebrica, il complemento del luogo di zeri di un ideale di polinomi.

che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} X^g \arrow[rr, "(p_1,\ldots,p_g)\to p_1+\cdots+p_g"] \arrow[dr, "\Psi"'] & & \mathscr{D}_g^+(X) \arrow[dl, "\Phi"] \\ & \mathcal{J}(X). & \end{tikzcd}$$

L'applicazione Ψ è definita, nell'intorno di $(p_1, \cdots, p_g)$, da

$$\Psi(p_1', \ldots, p_g') \equiv \Phi(p_1 + \cdots + p_g) + pr\left(\sum_{i=1}^{g} \int_{p_i}^{p_i'} \omega\right).$$

Il suo Jacobiano in $(p_1, \ldots, p_g)$ è dato allora dal wronskiano (7.1). La Ψ ha perciò rango g per tutte le g-uple $(p_1, \ldots, p_g)$ di punti distinti per cui il divisore $p_1 + \cdots + p_g$ non sia speciale, dunque su un aperto di X^g.

Fissata una tale g-upla $(p_1, \ldots, p_g)$, sia $\Delta_0 = p_1 + \cdots + p_g$ il corrispondente divisore olomorfo. Per il teorema delle funzioni implicite, possiamo trovare un intorno aperto U di $(p_1, \ldots, p_g)$ in X^g tale che $\Psi(U)$ sia un intorno di $\Phi(\Delta_0)$ in $\mathcal{J}(X)$. Poiché $\mathcal{J}(X)$ è un gruppo topologico, il traslato $W = \Psi(U) - \Phi(\Delta_0)$ di $\Psi(U)$ è un intorno aperto di 0 in $\mathcal{J}(X)$.

Se $D \in \mathscr{D}_g^+(X)$, per ogni $\Delta \in \mathscr{D}_g(X)$ il divisore meromorfo $D + \Delta - \Delta_0$ ha grado g. Per la formula di Riemann-Roch

$$\dim_{\mathbb{C}} |D + \Delta - \Delta_0| = \imath(D + \Delta - \Delta_0) \geq 0$$

e quindi $\mathcal{W}(D + \Delta - \Delta_0)$ ha dimensione positiva.

Fissata una funzione meromorfa f in $\mathcal{W}(D + \Delta - \Delta_0) \setminus \{0\}$, è

$$D' = D + \Delta - \Delta_0 + \mathit{div}(f) \in \mathscr{D}_g^+(X).$$

Per il teorema di Abel, $\Phi(D') = \Phi(D) + \Phi(\Delta - \Delta_0)$.

Questo ci dice che l'immagine di $\mathscr{D}_g^+(X)$ mediante Φ contiene l'intorno aperto $\Phi(D) + W$ di $\Phi(D)$. Perciò la $\Phi(\mathscr{D}_g^+(X))$, che è chiusa perché immagine continua di un compatto in un compatto Hausdorff, è anche aperta e quindi coincide con $\mathcal{J}(X)$. La dimostrazione è completa. □

Corollario 7.3. *$\mathcal{J}(X)$ è isomorfo al quoziente del gruppo abeliano $\mathscr{D}_0(X)$ rispetto al sottogruppo formato dai divisori principali.*

Osservazione 7.4. È anche $\mathcal{J}(X) \simeq \mathscr{D}_g^+(X)/\approxeq$, ove abbiamo indicato qui con "$\approxeq$" la relazione di equivalenza lineare. In particolare, dato un divisore olomorfo di grado g, i divisori olomorfi di grado g ad esso linearmente equivalenti sono in numero finito.

8. Il teorema di Torelli

Abbiamo descritto l'immersione di Abel-Jacobi di una superficie di Riemann compatta e connessa X di genere $g \geq 1$ nel toro complesso $\mathbb{C}^g/\Gamma_\Omega$ di dimensione g, che è completamente deteminato, modulo isomorfismi, da una sua matrice dei periodi.

Abbiamo così osservato che c'è una corrispondenza che ad ogni X di genere g fa corrispondere un'orbita di $\mathbf{Sp}(g, \mathbb{Z})$ nel semispazio di Siegel $\mathcal{H}_g$.

Il teorema di Torelli[5] ci dice che questa mappa è iniettiva. Una dimostrazione moderna di questo risultato è contenuta nell'articolo:

Aldo Andreotti, "*On a Theorem of Torelli.*", American Journal of Mathematics **80**, No. 4 (1958), pp. 801-828.

Se $g>1$ quest'applicazione non è surgettiva: lo spazio dei moduli ha infatti la struttura di uno "*stalk*" (cioè un *fascio di categorie*, o *schema*) di dimensione $3g-3 \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_g = g(g+1)/2$.

[5] Ruggiero Torelli (1884-1915), matematico italiano. Il teorema è dimostrato nel suo articolo "*Sulle variet di Jacobi.*", Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, **22** (5), (1913) pp.98-103.

CAPITOLO XV

Continuazione analitica

1. Prefasci e fasci

Sia X uno spazio topologico.

Definizione 1.1. Un *prefascio di gruppi abeliani* $\mathscr{S}$ su X è il dato, per ogni aperto U di X, di un gruppo abeliano $\mathscr{S}(U)$ e, per ogni coppia d'aperti $V \subseteq U$, di un omomorfismo di *restrizione* $r_V^U : \mathscr{S}(U) \to \mathscr{S}(V)$ tale che, per ogni tripla di aperti $W \subseteq V \subseteq U$, le relative restrizioni soddisfino la relazione di compatibilità descritta dal diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S}(U) \arrow[rr, "r_V^U"] \arrow[dr, "r_W^U"'] & & \mathscr{S}(V) \arrow[dl, "r_W^V"] \\ & \mathscr{S}(W). & \end{tikzcd}$$

Diciamo che $\mathscr{S}$ è un *fascio di gruppi abeliani* se, inoltre, per ogni aperto U di X ed ogni suo ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ abbiamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathscr{S}(U) \xrightarrow{\ \alpha\ } \coprod\nolimits_i \mathscr{S}(U_i) \xrightarrow{\ \beta\ } \coprod\nolimits_{i,j} \mathscr{S}(U_i \cap U_j), \tag{1.1}$$

ove $\alpha(u) = (r_{U_i}^U(u))$ e $\beta(u_i) = (r_{U_i \cap U_j}^{U_i}(u_i) - r_{U_i \cap U_j}^{U_j}(u_j))$.

Gli elementi di $\mathscr{S}(U)$ si dicono *sezioni* di $\mathscr{S}$ su U.

L'esattezza di (1.1) significa che una sezione di $\mathscr{S}(U)$ è univocamente determinata dalle sue restrizioni sugli aperti di un qualsiasi ricoprimento di U e che sezioni definite su un ricoprimento aperto di U e che abbiano le stesse restrizioni sulle intersezioni si rincollano in una sezione globale.

I *fasci* sono uno strumento adatto per trattare classi di funzioni che siano caratterizzate dalle loro proprietà locali. Sono ad esempio un fascio le funzioni continue o differenziabili di un qualche ordine m (con $0 < m \leq \omega$) o le funzioni olomorfe o meromorfe su una varietà complessa.

Possiamo in modo analogo definire fasci di anelli, di spazi vettoriali, di algebre, etc. richiedendo che gli spazi $\mathscr{S}(U)$ siano anelli, spazi vettoriali, algebre, etc.

Definizione 1.2. Se $\mathscr{S}$ è un prefascio di gruppi abeliani su X, per ogni punto p di X chiamiamo il limite diretto

$$\mathscr{S}_p = \varinjlim_{U^{\text{aperto}} \ni p} \mathscr{S}(U) \tag{1.2}$$

spiga dei *germi* di $\mathscr{S}$ in p.

Ricordiamo che il limite diretto (1.2) è il quoziente di $\coprod_{p\in U}\mathscr{S}(U)$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica $u_1{\in}\mathscr{S}(U_1)$ ad $u_2{\in}\mathscr{S}(U_2)$ se possiamo trovare un intorno aperto U_3 di p in X tale che $r^{U_1}_{U_3}(u_1) = r^{U_2}_{U_3}(u_2)$.

La spiga $\mathscr{S}_p$ ha una struttura naturale di gruppo abeliano tale che, per ogni intorno aperto U di p in X, la restrizione naturale

$$r^U_p : \mathscr{S}(U) \ni u \longrightarrow u_p \in \mathscr{S}_p \tag{1.3}$$

che associa ad u il suo *germe* in p sia un omomorfismo. Indichiamo con

$$\mathcal{S} = \coprod\nolimits_{p\in X}\mathscr{S}_p \tag{1.4}$$

l'unione disgiunta delle spighe di $\mathscr{S}$ con $\pi : \mathcal{S} \to X$ l'applicazione che associa ad ogni germe il suo punto di applicazione. Per ogni aperto U di X ed ogni sezione $u \in \mathscr{S}(U)$ sia

$$A(u, U) = \{u_p \mid p \in U\} \tag{1.5}$$

l'insieme dei germi di u nei punti di U.

Proposizione 1.1. *Sia $\mathscr{S}$ un prefascio di gruppi abeliani. Gli insiemi $A(u, U)$, al variare di U tra gli aperti di X e di u in $\mathscr{S}(U)$, formano una base di aperti di una topologia su $\mathcal{S}$, per cui la proiezione $\pi : \mathcal{S} \to X$ è un omeomorfismo locale. Posto, per ogni aperto U di X,*

$$\mathcal{S}(U) = \{s \in \mathscr{C}(U, \mathcal{S}) \mid \pi\circ s(p) = p,\ \forall p \in U\}, \tag{1.6}$$

la corrispondenza $U \to \mathcal{S}(U)$ è un fascio di gruppi abeliani su X.

Se $\mathscr{S}$ è un fascio, allora, per ogni aperto U di X l'applicazione

$$\mathscr{S}(U) \ni u \longrightarrow \{p \to u_p\} \in \mathcal{S}(U) \tag{1.7}$$

è un isomorfismo. □

Nel caso di un fascio, utilizzeremo la (1.7) per identificare $\mathscr{S}$ con $\mathcal{S}$.

Definizione 1.3. Chiamiamo $\mathcal{S}$ lo *spazio totale* del fascio $\mathscr{S}$.

Possiamo utilizzare la (1.7) per dare una definizione equivalente di fascio, presentandolo come un fibrato $\pi : \mathcal{S} \to X$ in cui le fibre siano gruppi abeliani e la proiezione sulla base un omeomorfismo locale.

Nel caso in cui $\mathscr{S}$ sia un fascio di germi di funzioni complesse, possiamo definire una funzione di *valutazione*

$$F : \mathcal{S} \ni \alpha \longrightarrow \alpha(\pi(\alpha)) \in \mathbb{C}. \tag{1.8}$$

PROPOSIZIONE 1.2. *Sia $\mathscr{S}$ un fascio. Condizione necessaria e sufficiente affinché la* (1.8) *sia continua è che $\mathscr{S}(U) \subseteq \mathscr{C}(U)$ per ogni $U^{aperto} \subseteq X$.* □

2. Il fascio $\mathscr{O}$

Sia X una varietà complessa. La corrispondenza che associa ad ogni aperto U di X lo spazio $\mathscr{O}(U)$ delle funzioni olomorfe su U definisce un fascio di anelli.

DEFINIZIONE 2.1. Chiamiamo $\mathscr{O}=\{U \to \mathscr{O}(U)\}$ il *fascio dei germi delle funzioni olomorfe* su X e con $\mathfrak{O}$ il suo spazio totale.

TEOREMA 2.1. *La topologia di $\mathfrak{O}$ è di Hausdorff.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\alpha, \beta \in \mathfrak{O}$, $p_\alpha = \pi(\alpha)$, $p_\beta = \pi(\beta)$. Indichiamo con U_α, U_β due intorni aperti di p_α, p_β, rispettivamente, e siano $f \in \mathscr{O}(U_\alpha)$, $g \in \mathscr{O}(U_\beta)$ due funzioni olomorfe con $f_{p_\alpha} = \alpha$, $g_{p_\beta} = \beta$.

Se $p_\alpha \neq p_\beta$, allora possiamo scegliere gli intorni in modo che $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ ed allora $A(f, U_\alpha) \cap A(g, U_\beta) = \emptyset$ perché $\pi(A(f, U_\alpha)) \cap \pi(A(g, U_\beta)) = \emptyset$.

Se $p_\alpha = p_\beta$, possiamo supporre che $U_\alpha = U_\beta = U$, per un aperto U biolomorfo al disco D. Se $A(f, U_\alpha)$ ed $A(g, U_\beta)$ avessero un punto in comune, allora f e g dovrebbero essere uguali in un intorno di un punto p di U e sarebbero allora uguali su tutto U per il teorema della continuazione unica. Quindi $A(f, U) \cap A(g, U) = \emptyset$ se $\alpha \neq \beta$. La dimostrazione è completa. □

Per ogni punto p di X i germi di funzioni olomorfe su X in p formano un *dominio d'integrità $\mathscr{O}_p$*. I campi quozienti $\mathscr{M}_p$ formano le spighe dei germi di un fascio $\mathscr{M}$ su X.

DEFINIZIONE 2.2. Chiamiamo $\mathscr{M}$ il *fascio dei germi di funzioni meromorfe su X*. Indichiamo con $\mathfrak{M}$ il suo spazio totale e con $\pi : \mathfrak{M} \to X$ la proiezione sulla base.

Il fascio $\mathscr{M}$ è associato al prefascio

$$U \to \mathscr{M}'(U) = \{f/g \mid f, g \in \mathscr{O}(U),\ \{p \mid g(p) \neq 0\} \text{ denso in } U\}.$$

Le sue sezioni sono le funzioni che si possono scrivere *localmente* come il quoziente di due funzioni olomorfe.

OSSERVAZIONE 2.2. Il teorema di fattorizzazione di Weierstrass ci dice che ogni funzione meromorfa su una varietà complessa connessa non compatta X di dimensione uno si può scrivere come quoziente di due funzioni olomorfe su X. Questo non vale se X è compatta, in quanto in questo caso le sole funzioni olomorfe globali sono le costanti.

Se p è un punto di X, la scelta di una carta locale (U, z) di X con centro in p ci permette di idenficare $\mathscr{O}_p$ ed $\mathscr{M}_p$ con gli spazi

$$\mathscr{O}_p \simeq \mathbb{C}\{z\}, \quad \mathscr{M}_p \simeq \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}], \tag{2.1}$$

ove $\mathbb{C}\{z\}$ è l'anello delle serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ che convergono in un intorno di z=0, e $\mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ l'anello delle serie di Laurent $\sum_{n=-n_0}^{\infty} a_n z^n$ che contengono al più un numero finito di potenze di z con esponente negativo e che convergono in un disco puntato $\{0<|z|<\epsilon\}$, ovvero dei polinomi in z^{-1} i cui coefficienti sono serie di potenze di z, convergenti in un intorno di 0. Osserviamo che $\mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ è un campo, in quanto i suoi elementi non nulli ammettono un'inversa moltiplicativa in $\mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$.

2.0.1. *Serie di Puiseux.* Dato un intero positivo p, la radice p-esima $\sqrt[p]{z}$ di z è una funzione multivoca su $\mathbb{C}$, che assume in zero il valore zero e p valori distinti in ciascun punto $z \neq 0$. Le serie di potenze nelle *variabili multivoche* $\sqrt[p]{z}=z^{1/p}$ saranno necessarie per studiare la continuazione analitica di funzioni olomorfe e meromorfe nei *punti di diramazione*.

Definizione 2.3. Una *serie di Puiseux di denominatore* p è una serie formale in $\mathbb{C}(\!(z^{1/p})\!)$.

Una serie di Puiseux di denominatore p si scrive quindi come una serie formale

$$\sum\nolimits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, z^{n/p}, \quad \text{con } a_n \in \mathbb{C}. \tag{2.2}$$

Una serie di Puiseux di denominatore 1 è semplicemente una serie formale di Laurent.

Se $p>1$ la sostituzione $z=w^p$, trasforma la (2.2) nella la serie di Laurent

$$\sum\nolimits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, w^h. \tag{2.3}$$

Come sappiamo, se questa converge per qualche valore di $w \neq 0$, allora converge in un anello $\{r<|w|<R\}$ per $0 \leq r<R \leq +\infty$. Diremo allora che la corrispondente serie di Puiseux (2.2) converge nell'anello $A = \{\sqrt[p]{r}<|z|<\sqrt[p]{R}\}$. Naturalmente, per ogni z nell'anello A, ci sono p determinazioni distinte w della radice p-esima di z, cui corrisponderanno p valori per la somma della (2.2).

Definizione 2.4. Chiamiamo

- *olomorfa* una serie di Puiseux convergente che non abbia termini di esponente negativo,
- *meromorfa* una serie di Puiseux convergente che contenga al più un numero finito di termini con esponente negativo.

Le serie di Puiseux olomorfe formano un dominio d'integrità, di cui quelle meromorfe costituiscono il campo dei quozienti.

Teorema 2.3 (Puiseux-Newton). *Il campo delle serie di Puiseux meromorfe è la chiusura algebrica del campo $\mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ delle serie di Laurent meromorfe.* □

Questo teorema fu dimostrato da Puiseux[1] nei lavori "*Recherches sur les fonctions algébriques*", J. Math. Pures Appl. 15 (1850), pp. 365-480 e , "*Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques*", J. Math. Pures Appl. 16 (1851), pp. 228-240. Si veda anche il Corollario 13.15 in D.Eisenbud, "*Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*", Graduate Texts in Mathematics 150, Springer, 1996.

Indichiamo con $\mathbb{C}\langle z\rangle$ l'anello delle serie di Puiseux olomorfe. Possiamo allora identificare con $\mathbb{C}\langle z\rangle[z^{-1}]$ il campo delle serie di Puiseux meromorfe.

Possiamo associare ad esso un fascio $U \to \mathcal{P}(U)$ su X, che associa ad ogni aperto U le *funzioni meromorfe multivoche* i cui valori nell'intorno di ogni punto si possono ottenere come somme di serie di Puiseux meromorfe rispetto ad una coordinata locale. Lo spazio $\mathcal{P}_p$ dei suoi germi in p è allora isomorfo al campo $\mathbb{C}\langle z\rangle[z^{-1}]$ delle serie di Puiseux meromorfe rispetto ad una coordinata locale con centro in p. Indichiamo con $\mathfrak{P}$ il suo spazio totale ed ancora con $\pi : \mathfrak{P} \to X$ la proiezione sulla base.

Definizione 2.5. Chiamiamo $\mathcal{P}$ *il fascio di Puiseux* su X.

Proposizione 2.4. *Le topologie dei fasci $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{P}$ sono di Hausdorff.* □

Proposizione 2.5. *Abbiamo inclusioni continue $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}$, compatibili con le proiezioni su X.*

3. Rivestimenti generalizzati di superfici di Riemann

Raccogliamo in questo paragrafo alcuni risultati di topologia generale che ci saranno utili nel seguito per discutere la continuazione analitica.

Teorema 3.1 (Poicaré-Volterra). *Sia $\pi : Y \to X$ un omeomorfismo locale di uno spazio connesso su uno spazio di Hausdorff localmente connesso per archi e a base numerabile. Allora anche Y è a base numerabile.*

Dimostrazione. Osserviamo che dalle ipotesi segue che Y è anch'esso localmente connesso per archi e quindi connesso per archi.

Sia $\mathscr{B}$ una base numerabile della topologia di X, i cui elementi sono aperti connessi per archi, e sia $\mathscr{B}'$ la famiglia degli aperti connessi V di Y tali che $\pi(V)\in\mathscr{B}$ e $\pi : V\to\pi(V)$ sia un omeomorfismo. La $\mathscr{B}'$ è una base di aperti di Y, che ha la proprietà che, se $U\in\mathcal{B}$ e q un punto di Y, vi è al più un

[1]Victor Alexandre Puiseux (1820-1883) fu un matematico ed astronomo francese. A queste serie è stato associato il suo nome per ricordare i suoi contributi allo studio delle funzioni algebriche. Serie con esponenti frazionarii erano già state considerate nel 1676 da Isaac Newton.

elemento U' di $\mathcal{B}'$ con $\pi(U') = U$ e $q \in U'$. Vogliamo dimostrare che $\mathscr{B}'$ è numerabile.

Ricordiamo che una *catena finita di insiemi* è una successione finita $E_0, \dots, E_n$ di insiemi con $E_h \cap E_{h-1} \neq \emptyset$ per $1 \leq h \leq n$. Per costruzione, ogni catena finita di aperti di $\mathcal{B}$ si rialza in al più una catena finita di aperti di $\mathcal{B}'$. Fissiamo un aperto U'_0 di $\mathcal{B}'$, un punto q_0 in U' e siano $p_0 = \pi(q_0)$, $U = \pi(U')$. Se U' è un qualsiasi altro aperto di $\mathcal{B}'$, fissiamo un punto q_1 di U'. Poiché Y è connesso per archi, possiamo trovare un arco continuo $\gamma' : [0, 1] \to Y$ che congiunge q_0 a q_1. Poiché il suo supporto $\gamma'([0, 1])$ è compatto, possiamo ricoprirlo con un numero finito di aperti $U'_0, U'_1, \dots, U'_n$ di $\mathcal{B}'$, tali che, per una successione finita $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ sia $\gamma'(t_{h-1}), \gamma'(t_h) \in U'_h$ per $1 \leq h \leq n$. Quindi la $U'_0, U'_1, \dots, U'_n = U'$ è una catena finita in $\mathcal{B}'$ che rialza una catena finita $U_0, U_1 = \pi(U'_1), \dots, U_n = \pi(U')$ in $\mathcal{B}$. Abbiamo così verificato che ogni aperto U' di $\mathcal{B}'$ si può ottenere come l'ultimo aperto del rialzamento di una catena finita di aperti di $\mathcal{B}$ (con primo termine U_0.) Poiché le catene finite di $\mathcal{B}$ con primo termine U_0 che si rialzano a catene di $\mathcal{B}'$ con primo termine U'_0 formano un insieme numerabile, ne segue che $\mathcal{B}'$ è numerabile. □

Teorema 3.2. *Siano X una superficie di Riemann, Y uno spazio topologico, $\varpi : Y \to X$ un omeomorfismo locale.*

Definiamo un atlante $\mathcal{A}$ su Y considerando tutte le coppie (U', z') per cui ϖ definisca un omemomorfismo sull'aperto U di una carta locale (U, z) di X e sia $z' = z \circ \varpi$.

La condizione che $\mathcal{A}$ sia un atlante olomorfo è necessaria e sufficiente affinché si possa definire su Y una struttura di superficie di Riemann per cui $\varpi : Y \to X$ sia un biolomorfismo locale.

Dimostrazione. L'atlante $\mathcal{A}$ definisce la struttura di varietà topologica su Y per cui la ϖ è un omeomorfismo locale. La condizione che sia olomorfo è necessaria e sufficiente perché $\mathcal{A}$ definisca una struttura complessa che renda la ϖ un biolomorfismo locale. Per il teorema precendente, Y è a base numerabile e quindi una superficie di Riemann. □

Teorema 3.3. *Se X è una superficie di Riemann, ogni aperto connesso Y di $\mathfrak{O}$ ha un'unica struttura di superficie di Riemann che renda la proiezione $\varpi : Y \ni \alpha \to \pi(\alpha) \in X$ un biolomorfismo locale.*

Dimostrazione. La proiezione $\pi : \mathfrak{O} \to X$ è aperta e quindi $\pi(Y)$ è un aperto di X e quindi una superficie di Riemann. Per ogni punto α di Y possiamo trovare una carta coordinata (U_α, z_α) ed una funzione $f_\alpha \in \mathscr{O}(U_\alpha)$ tali che $A(f_\alpha, U_\alpha) \subset Y$. La $\zeta_\alpha(\beta) = z_\alpha(\pi(\beta))$ definisce allora una coordinata olomorfa su $A(f_\alpha, U_\alpha)$. Le carte così definite formano un atlante olomorfo di Y perché hanno le stesse funzioni di transizione dell'atlante $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$

di $\pi(Y)$. Questa è l'unica struttura complessa che renda la restrizione della proiezione π localmente biolomorfa. Per il teorema di Poincaré-Volterra Y è a base numerabile e quindi paracompatto. È quindi una superficie di Riemann. Questo completa la dimostrazione. □

4. Domini di Riemann

Supporremo in questo paragrafo che X sia una superficie di Riemann connessa.

Fissiamo un punto p_0 di X ed il germe $\alpha = f_{p_0}$ di una funzione olomorfa definita in un intorno di p_0 in X. Sia

$$\Sigma_\alpha = \text{la componente connessa di } \alpha \text{ in } \mathfrak{O}. \tag{4.1}$$

Per i risultati di § 3, abbiamo:

Teorema 4.1 (continuazione analitica). *Con le notazioni introdotte sopra:*

1. *C'è su Σ_α un'unica struttura di superficie di Riemann che renda la restrizione $\pi_\alpha : \Sigma_\alpha \to X$ della proiezione $\pi : \mathfrak{O} \to X$ un biolomorfismo locale.*
2. *La funzione $F_\alpha : \Sigma_\alpha \ni \beta \to F(\beta) = \beta(\pi(\beta)) \in \mathbb{C}$ è olomorfa su Σ_α.*
3. *Se $\beta \in \Sigma_\alpha$, allora $\Sigma_\beta = \Sigma_\alpha$.* □

Definizione 4.1. La funzione F_α definita nel punto 2 del Teorema 4.1 è il *prolungamento analitico del germe* α e la tripla $(\Sigma_\alpha, \pi_\alpha, X)$ il suo *dominio di Riemann*.

Chiamiamo *funzione analitica su* X il dato di un aperto connesso Y di $\mathfrak{O}$ e la corrispondente $F = F|_Y \in \mathscr{O}(Y)$.

Chiamiamo *dominio di Riemann astratto su* X una tripla (Y, ϖ, X) in cui Y sia una varietà complessa connessa e $\varpi : Y \to X$ un biolomorfismo locale.

Esempio 4.1. Sia $X = \mathbb{C}$ e consideriamo il germe in 1 definito dalla serie di potenze (convergente nel disco $\{|z-1| < 1\}$)

$$\alpha = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (z-1)^n.$$

Il germe α è quello della determinazione di $\sqrt{z}$ che vale 1 in 1. In questo caso Σ_α è un rivestimento a due fogli di $\mathbb{C}^*$. Quindi Σ_α è biolomorfo a $\mathbb{C}^*$, su cui possiamo scegliere una coordinata olomorfa w in modo che $z = \pi_\alpha(w) = w^2$ ed allora $F_\alpha(w) = w$.

Esempio 4.2. Più in generale, fissato un qualsiasi numero reale positivo r, possiamo considerare il germe α definito in 1 dalla serie

$$\alpha = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} (z-1)^n.$$

Si tratta della determinazione di z^r che vale 1 in 1. Possono darsi allora due casi.

I. Se $r = p/q$ è un numero razionale con p, q interi positivi primi tra loro, allora Σ_α è biolomorfo a $\mathbb{C}^*$, su cui possiamo scegliere la coordinata olomorfa w in modo che $z = \pi_\alpha(w) = w^q$. In questo caso $F_\alpha(w) = w^p$.

II. Se $r \notin \mathbb{Q}$, allora Σ_α è biolomorfa a $\mathbb{C}$ e possiamo definire una coordinata olomorfa w su Σ_α in modo che $z=\pi_\alpha(w)=\exp(w)$. Allora $F_\alpha(w)=r\cdot w$.

5. Rivestimenti

Ricordiamo che un'applicazione continua $\pi : \Sigma \to X$ tra due spazi topologici Σ ed X è un *rivestimento* se per ogni punto p di X si può trovare un intorno aperto U di p tale che $\pi^{-1}(U)$ sia unione di una famiglia di aperti disgiunti, su ciascuno dei quali la restrizione di π definisce un omeomorfismo su U.

Nel caso in cui Σ ed X siano varietà topologiche connesse, ciò equivale al fatto che π sia un omeomorfismo locale surgettivo e che valga la proprietà del rialzamento dei cammini: per ogni arco continuo $\gamma : [0,1] \to X$ e $q \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ vi è uno ed un solo cammino continuo $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \Sigma$ con $\tilde{\gamma}(0) = q$ e $\pi\circ\tilde{\gamma} = \gamma$.

Uno spazio topologico di Hausdorff connesso per archi ammette, unico a meno di equivalenza, un *rivestimento universale* $\varpi : \tilde{X} \to X$, su cui il gruppo fondamentale $\pi_1(X)$ opera come un gruppo di automorfismi con le proprietà seguenti:

(1) (PROPRIETÀ UNIVERSALE) Per ogni rivestimento connesso $\varpi_\Sigma : \Sigma \to X$ abbiamo un diagramma commutativo di rivestimenti

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\sigma_\Sigma"] \arrow[dr, "\varpi"'] & & \Sigma \arrow[dl, "\varpi_\Sigma"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

(2) Se $\mathbf{G}_\Sigma = \{\gamma \in \pi_1(X) \mid \sigma_\Sigma \circ \gamma = \sigma_\Sigma\}$ è il sottogruppo degli elementi del gruppo fondamentale i cui automorfismi preservano le fibre di Σ, allora $\Sigma \simeq \tilde{X}/\mathbf{G}_\Sigma$ e $\pi_1(X) = \{\mathrm{id}\}$, $\pi_1(\Sigma) = \mathbf{G}_\Sigma$.

(3) Il rivestimento universale è caratterizzato, a meno di equivalenza, dal fatto che lo spazio totale $\tilde{X}$ sia connesso e semplicemente connesso.

(4) Per ogni rivestimento $\varpi_\Sigma : \Sigma \to X$ il gruppo fondamentale opera sulle fibre per rialzamento dei cammini. Condizione necessaria e sufficiente affinché Σ sia connesso è che X sia connesso e l'azione di $\pi_1(X)$ su una fibra (e quindi su tutte le fibre) transitiva.

(5) Condizione necessaria e sufficiente affinché un rivestimento connesso $\varpi_\Sigma : \Sigma \to X$ sia *di Galois*, tale cioè che il gruppo dei suoi automorfismi operi transitivamente sulle fibre, è che
$$\mathbf{G}_\Sigma = \{\gamma \in \pi_1(X) \mid \gamma \circ \sigma_\Sigma = \sigma_\Sigma\}$$
sia un sottogruppo normale di $\pi_1(X)$.

(6) Condizione necessaria e sufficiente affinché due rivestimenti
$$\varpi_\Sigma : \Sigma \to X \text{ e } \varpi_{\Sigma'} : \Sigma' \to X$$
siano isomorfi è che i corrispondenti gruppi $\mathbf{G}_\Sigma$ e $\mathbf{G}_{\Sigma'}$ siano coniugati in $\pi_1(X)$.

5.1. Rivestimento del disco puntato. Indichiamo con
$$\mathrm{D}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$$
il *disco puntato*.

È $\pi_1(\mathrm{D}^*) = \mathbb{Z}$ ed i laccetti $[0,1] \ni t \to \gamma_r(t) = r \cdot \exp(2\pi i t) \in \mathrm{D}^*$, con $0<r<1$ fissato, hanno per immagine un generatore di $\pi_1(\mathrm{D}^*)$. Il rivestimento universale $\tilde{\mathrm{D}}^*$ del disco puntato si può identificare con il semipiano di Poincaré $\mathrm{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. L'applicazione di rivestimento è
$$\pi : \mathrm{H} \ni z \longrightarrow \exp(2\pi i z) \in \mathrm{D}^*.$$
Il gruppo additivo $\mathbb{Z}$ degli interi si identifica al gruppo degli automorfismi del rivestimento, mediante $\mathrm{H} \times \mathbb{Z} \ni (z,k) \to z+k \in \mathrm{H}$.

Ogni sottogruppo $\mathbf{G}$ di $\mathbb{Z}$ è della forma $m \cdot \mathbb{Z}$ per un intero $m \geq 0$. Tutti i rivestimenti connessi di D^* sono quindi di Galois, e, a parte il rivestimento universale, hanno un numero finito m di fogli e sono isomorfi a
$$\mathrm{D}^* \ni z \longrightarrow z^m \in \mathrm{D}^*.$$

6. Punti di ramificazione

Sia $(\Sigma_\alpha, \varpi_\alpha, X)$ il dominio di Riemann di un germe α di funzione olomorfa su X ed F_α la corrispondente funzione analitica su X. La proiezione $\Omega_\alpha = \varpi_\alpha(\Sigma_\alpha)$ è un aperto di X.

Definizione 6.1. Definiamo il luogo $\mathcal{S}ing(F_\alpha)$ dei *punti singolari di* F_α come l'unione di $X \setminus \Omega_\alpha$ e dei punti p di Ω_α per cui ci sia un intorno aperto U tale che una componente connessa di $\varpi_\alpha^{-1}(U)$ non intersechi $\varpi_\alpha^{-1}(p)$.

Sia $p_0 \in \mathcal{S}ing(F_\alpha)$ o un punto di Ω_α o un punto isolato di $X \setminus \Omega_\alpha$. Fissata una carta coordinata (U, z) in X con centro in p_0, per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo,
$$\check{\mathrm{D}}_{p_0}(\epsilon) = \{p \in U \mid 0 < |z(p)| < \epsilon\} \Subset (\Omega_\alpha \cap U) \cup \{p_0\}$$
e, per ciascuna componente connessa Υ di $\varpi_\alpha^{-1}(\check{\mathrm{D}}_{p_0}(\epsilon))$, la $\Upsilon \xrightarrow{\varpi_\alpha} \check{\mathrm{D}}_{p_0}(\epsilon)$ è un dominio di Riemann sopra $\check{\mathrm{D}}_{p_0}(\epsilon)$.

DEFINIZIONE 6.2. Diciamo che p_0 è un *punto di ramificazione* di F_α se possiamo trovare $\epsilon > 0$ ed una componente connessa Υ di $\varpi_\alpha^{-1}(\check{\mathrm{D}}_{p_0}(\epsilon))$ tale che $\Upsilon \xrightarrow{\varpi_\alpha} \check{\mathrm{D}}_{p_0}(\epsilon)$ sia un rivestimento.

Diciamo che p_0 è *di ramificazione pura* se, per un $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo e per tutte le componenti connesse Υ di $\varpi_\alpha^{-1}(\check{\mathrm{D}}_{p_0}(\epsilon))$, la $\Upsilon \xrightarrow{\varpi_\alpha} \check{\mathrm{D}}_{p_0}(\epsilon)$ è un rivestimento.

OSSERVAZIONE 6.1. Con un cambiamento di variabile potremo supporre che la coordinata, nell'intorno di un punto di ramificazione puro, sia scelta in modo che si possa prendere ϵ=1.

Nel seguito saremo soprattutto interessati al caso in cui X sia connessa e compatta ed $\alpha \in \mathfrak{O}$ il germe di una funzione olomorfa f le cui singolarità siano tutte punti di diramazione puri.

In questo caso, se Ω_α è denso in X, il suo complemento $C=X\setminus\Omega_\alpha$ è formato da un numero finito di punti.

6.1. Serie di Puiseux nei punti di ramificazione. Supponiamo che il germe di funzione olomorfa $\alpha \in \mathfrak{O}$ abbia in p_0 un punto di ramificazione. Possiamo ricondurci al caso in cui α sia il germe di una funzione olomorfa f, definita, per una coordinata locale (U, z), sul disco puntato $\mathrm{D}^* \subset \mathbb{C}^1_z$. Allora per una delle componenti connesse Υ di $\varpi_\alpha^{-1}(\mathrm{D}^*)$ la restrizione di ϖ_α definisce un rivestimento $\Upsilon \to \mathrm{D}^*$, che quindi può essere della forma $\mathrm{D}^* \ni w \to w^m \in \mathrm{D}^*$, oppure della forma $\mathrm{H} \ni w \to \exp(2\pi i w) \in \mathrm{D}^*$.

Nel primo caso, il prolungamento analitico $F\in\mathscr{O}(\Sigma_\alpha)$ è una funzione olomorfa nel disco puntato $\mathrm{D}^* \subset \mathbb{C}^1_w$ ed ammette quindi uno sviluppo in serie di Laurent

$$F(w) = \sum\nolimits_{h=-\infty}^{\infty} a_h\, w^h.$$

Ad esso facciamo corrispondere, nella coordinata $z = w^m$ della base, la serie

$$f(z) = \sum\nolimits_{h=-\infty}^{\infty} a_h\, z^{h/m}. \tag{6.1}$$

DEFINIZIONE 6.3. Chiamiamo la (6.1) *sviluppo di Puiseux* di f.

OSSERVAZIONE 6.2. Per rappresentare funzioni olomorfe nel semipiano $\{\mathrm{Re}\,(w)>0\}$ si utilizzano serie di Dirichlet[2]

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \exp(-\lambda_n w), \quad \text{con } \{\lambda_n\} \subset \mathbb{R},\ 0\leq\lambda_n<\lambda_{n+1} \text{ per ogni } n \text{ e } \sup_n\lambda_n=+\infty. \tag{6.2}$$

Queste serie sono importanti per la teoria analitica dei numeri (la funzione ζ di Riemann si può scrivere, nel semipiano $\{\mathrm{Re}\,(z) > 1\}$, come la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$, che corrisponde alla scelta $\lambda_n = \log(1+n)$ ed a_n=1). Utilizzando il rivestimento $\{\mathrm{Re}\,(w)>0\} \ni w \to \exp(-w) \in \mathrm{D}^*$, ad una serie di Dirichelet (6.2) corrisponderebbe su D^* la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$.

[2]dal matematico tedesco Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).

DEFINIZIONE 6.4. Diciamo che il prolungamento analitico F presenta soltanto *singolarità algebriche* sopra un punto p_0 di ramificazione pura se

i) il numero delle componenti connesse di $\varpi_\alpha^{-1}(\mathrm{D}^*)$ è finito e la restrizione di ϖ_α a ciascuna di esse definisce un rivestimento con un numero finito di fogli;
ii) gli sviluppi di Puiseux di F hanno al più un numero finito di termini con esponente negativo.

DEFINIZIONE 6.5. Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta. Una funzione analitica F su X, che abbia in X soltanto singolarità algebriche, si dice *algebrica* su X.

Una funzione algebrica su una varietà di Riemann connessa e compatta ha un insieme finito C di punti singolari. Se (Σ, ϖ, X) è il suo dominio di Riemann, la restrizione della proiezione ϖ definisce un rivestimento

$$\Sigma \setminus \varpi^{-1}(C) \ni w \longrightarrow \varpi(w) \in X \setminus C \tag{6.3}$$

con un numero finito di fogli.

Sia (Σ, ϖ, X) il dominio di Riemann di una funzione algebrica F su X.

DEFINIZIONE 6.6. Il *grado* di F è il numero di fogli del rivestimento (6.3).

Mostreremo nel seguito che le funzioni algebriche sono *meromorfe* su un'opportuna compattificazione complessa del loro dominio di Riemann. Questo è essenzialmente il contenuto del seguente lemma.

LEMMA 6.3. *Siano (Σ, ϖ, X) il dominio di Riemann di una funzione algebrica F su X, $p \in X$ un suo punto singolare ed (U, z) una coordinata olomorfa con centro in p. Possiamo allora trovare un intero non negativo k ed un intorno U' di p contenuto in U tali che*

$$\pi^{-1}(U) \ni \xi \to z^k(\pi(\xi)) \cdot F(\xi) \in \mathbb{C}$$

sia limitata su $\varpi^{-1}(U')$.

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi, possiamo fissare una carta locale (U, z) in p tale che $\pi^{-1}(U)$ sia unione di un numero finito di aperti connessi $W_1, \ldots, W_\ell$ in modo che la F si possa rappresentare su ciascuno di essi mediante una serie di Puiseux

$$F(z) = \sum\nolimits_{h=k_j}^{\infty} a_{j,h} z^{h/p_j} \quad \text{su } W_j,$$

per opportuni interi positivi $p_1, \ldots, p_\ell$ ed interi relativi $k_1, \ldots, k_\ell$. Basterà allora fissare $k = \max\{0, -k_1, \ldots, -k_\ell\}$. $\square$

7. Funzioni algebriche su $\mathbb{CP}^1$

TEOREMA 7.1. *Se F è una funzione algebrica di grado m su $\mathbb{CP}^1$, allora le determinazioni di F sopra ad un punto p di $\mathbb{CP}^1$ sono le m radici u di un'equazione polinomiale di grado m rispetto ad u, che in una coordinata non omogenea z su $\mathbb{CP}^1$ si può scrivere nella forma*

$$\Phi(z,u) = \phi_0(z)\, u^m + \phi_1(z)\, u^{m-1} + \cdots + \phi_{m-1}(z)\, u + \phi_m(z) = 0, \tag{7.1}$$

per una Φ che verifica le seguenti proprietà:

(i) *I coefficienti $\phi_h(z)$, per $0\leq h\leq m$, sono polinomi in z e $\phi_0\neq 0$;*
(ii) *Il massimo comun divisore di $\phi_0(z),\dots,\phi_m(z)$ in $\mathbb{C}[z]$ è 1;*
(iii) *Il polinomio $\Phi\in\mathbb{C}[z,u]$ è irriducibile.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo fissare la coordinata non omogenea z su $\mathbb{CP}^1$ in modo che il punto all'infinito non sia singolare. Sia $A=\{a_1,\dots,a_n\}\subset\mathbb{C}$ l'insieme dei punti singolari di F in $\mathbb{CP}^1$ ed $\Omega=\mathbb{CP}^1\setminus(A\cup\{\infty\})$. Per il Lemma 6.3, possiamo trovare un intero non negativo k tale che la funzione algebrica

$$G(z) = (z-a_1)^k\cdots(z-a_n)^k\cdot F(z)$$

sia limitata nell'intorno dei punti singolari. Per ogni $z\in\Omega$, la G definisce m germi $(g_z^{(i)})_{1\leq i\leq m}$. Le loro funzioni simmetriche elementari

$$s_z^{(h)} = \sum\nolimits_{1\leq i_1<\cdots<i_h\leq m} g_z^{(i_1)}\cdots g_z^{(i_h)}$$

sono funzioni olomorfe e limitate su Ω e le determinazioni w di G sopra il punto $z\in\Omega$ verificano l'equazione

$$\prod_{1\leq i\leq m}(w-g_z^{(i)}) = w^m - s_{z_0}^{(1)} w^{m-1} + \cdots + (-1)^m s_{z_0}^{(m)} = 0. \tag{$*$}$$

Per il teorema sulle singolarità eliminabili, le $s^{(i)}(z)$ definiscono funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$, perché sono limitate nell'intorno dei punti di A. Poiché ∞ non è un punto singolare di F, le $s^{(i)}(z)$ hanno in ∞ al più una singolarità polare e sono perciò dei polinomi di z.

Se sostituiamo a w la $(z-a_1)^k\cdots(z-a_n)^k\cdot u$ nella ($*$), otteniamo per u un'equazione della forma(7.1). Possiamo imporre che valga la condizione (ii) dividendo i coefficienti per il loro massimo comun divisore.

Dimostriamo ora che il polinomio Φ è irriducibile. Ragioniamo per assurdo, supponendo che sia $\Phi=\Phi_1\cdot\Phi_2$ per due polinomi di $\mathbb{C}[z,u]$ di gradi positivi m_1, m_2 con $m_1+m_2=m$. Fissiamo un punto non singolare z_0 al finito e consideriamo un suo intorno $U=\{|z-z_0|<\epsilon\}$ tale che $\varpi^{-1}(U)$ sia unione di m aperti disgiunti $W_1,\dots,W_m$, biolomorfi al disco. La determinazione di $F(z)$ su W_1 soddisfa allora una delle equazioni $\Phi_j(z,F(z))=0$. Poiché Σ è connesso, deve risultare allora $\Phi_j(\varpi(\xi),F(\xi)) = 0$ su Σ. Ma questo ci dice che le determinazioni di F sopra z_0, essendo le soluzioni di un'equazione in u di grado $m_j<m$, sono al più m_j. Questo ci dà una contraddizione. La dimostrazione è completa. □

Osservazione 7.2. Sia X sia una superficie di Riemann compatta ed $\mathcal{M}(X)$ il campo delle sue funzioni meromorfe. Allora le m determinazioni di una funzione algebrica su X al di sopra dei punti regolari sono le soluzioni di un'equazione algebrica

$$\Phi(z,u) = u^m + b_1(z)\,u^{m-1} + \cdots + b_m(z) = 0,$$

per un polinomio irriducibile $\Phi \in \mathcal{M}(X)[u]$.

Teorema 7.3. *Consideriamo un'equazione polinomiale* (7.1) *e supponiamo siano verificate le condizioni* $(i),(ii),(iii)$ *del Teorema 7.1. Esiste allora una funzione algebrica F su $\mathbb{CP}^1$ le cui m determinazioni, nei punti regolari, siano le radici di* (7.1).

Dimostrazione. Per il teorema delle funzioni implicite, se in un punto (z_0,u_0) di $\mathbb{C}^2$ è

$$\frac{\partial\Phi(z_0,u_0)}{\partial u} \neq 0,$$

allora possiamo trovare una funzione $f(z)$, definita in un intorno U di z_0 in $\mathbb{C}$, tale che

$$\Phi(z,f(z)) = 0, \quad \forall z \in U \quad \text{ed } f(z_0) = u_0.$$

Si verifica facilmente che $f\in\mathscr{O}(U)$. Essa definisce quindi un germe di funzione olomorfa α_0 in $\mathfrak{O}$, che soddisfa l'equazione $\Phi(\pi(\alpha),F(\alpha)) = 0$. Poiché gli $\alpha \in \mathfrak{O}$ che soddisfano questa equazione formano un insieme aperto e chiuso in $\mathfrak{O}$, tutti gli α di Σ_{α_0} soddisfano la (7.1). □

Osservazione 7.4. Sia X una superficie di Riemann compatta e connessa qualsiasi. Si può dimostrare che il campo $\mathcal{M}(X)$ delle funzioni meromorfe su X ha grado di trascendenza 1 su $\mathbb{C}$. Infatti, con un ragionamento analogo a quello svolto nel caso della retta proiettiva, si può dimostrare che ogni funzione algebrica su X soddisfa un'equazione della forma (7.1), con coefficienti in $\mathcal{M}(X)$, per un polinomio $\Phi(z,u)$ irriducibile su $\mathcal{M}(X)$.

Osservazione 7.5. $\mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$ è il campo quoziente dell'anello dei polinomi in una variabile, che è un anello a fattorizzazione unica. Ci sono però superfici di Riemann connesse e compatte X per cui il campo $\mathcal{M}(X)$ delle funzioni meromorfe non è il campo quoziente di un anello a fattorizzazione unica.

8. Superficie di Riemann di una funzione algebrica

Siano X una superficie di Riemann connessa e compatta e (Σ,ϖ,X) il dominio di Riemann di una funzione algebrica F di grado m su X. Indichiamo con $A = \{a_1,\dots,a_k\}$ l'insieme dei punti singolari di F in X. Allora ϖ

definisce un ricoprimento connesso ad m fogli

$$\Sigma\backslash\varpi^{-1}(A) \xrightarrow{\varpi} X\backslash A.$$

Per ogni punto a_i di A possiamo trovare un disco puntato $\mathrm{D}_i^* = \{0<|z_i|<1\}$, ove (D_i, z_i) è una carta olomorfa locale in a_i, tale che

$$\varpi^{-1}(\mathrm{D}_i^*) = \mathrm{D}_{i,1}^* \cup \cdots \cup \mathrm{D}_{i,s_i}^*$$

è unione disgiunta di s_i componenti connesse $\mathrm{D}_{i,j}^*$, ciascuna biolomorfa a un disco puntato, per cui $\mathrm{D}_{i,j}^* \ni \alpha \to \varpi(\alpha) \in \mathrm{D}_i^*$ sia un rivestimento a $m_{i,j}$ fogli, con

$$\sum_{j=1}^{s_i} m_{i,j} = m.$$

In una coordinata $\zeta_{i,j}$ su $\mathrm{D}_{i,j}^* = \{0<|\zeta_{i,j}|<1\}$ possiamo descrivere questo rivestimento mediante $z_i = \zeta_{i,j}^{m_{i,j}}$.

Costruiamo una superficie di Riemann connessa e compatta $\tilde{\Sigma}$ aggiungendo a $\Sigma\backslash\varpi^{-1}(A)$ un punto $\alpha_{i,j}$ per ogni $1\leq i\leq k$ ed $1\leq j\leq s_i$ e definendone la struttura complessa in modo che la ϖ sia ancora un biolomorfismo locale al di fuori di $\tilde{A} = \{\alpha_{i,j}\}$ e che $(\mathrm{D}_{i,j}, \zeta_{i,j})$, con $\mathrm{D}_{i,j} = \mathrm{D}_{i,j}^* \cup \{\alpha_{i,j}\}$ e $\zeta_{i,j}$ estesa mediante $\zeta_{i,j}(\alpha_{i,j}) = 0$ sia una carta olomorfa locale. Elenchiamo le principali proprietà di $\tilde{\Sigma}$.

(1) $\tilde{\Sigma}$ è una superficie di Riemann connessa e compatta.

(2) C'è un'inclusione naturale $\Sigma \hookrightarrow \tilde{\Sigma}$ e la ϖ si estende ad una $\tilde{\varpi} : \tilde{\Sigma} \to X$ olomorfa e surgettiva che rende commutativo il diagramma

(8.1)
$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\varpi"'] & & \tilde{\Sigma} \arrow[dl, "\tilde{\varpi}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

(3) La funzione algebrica F, con dominio di Riemann (Σ, ϖ, X) si estende ad una funzione meromorfa $\tilde{F}$ su $\tilde{\Sigma}$.

(4) I punti di $\tilde{\Sigma}$ sono in corrispondenza biunivoca con tutte le possibili serie di Puiseux

(8.2)
$$F(z) = \sum_{h=-\nu}^{\infty} c_h (z-a)^{h/p}$$

associati alla funzione algebrica F.

Definizione 8.1. Chiamiamo la $\tilde{\Sigma}$, con l'applicazione $\tilde{\varpi} : \tilde{\Sigma} \to X$, la *superficie di Riemann* della funzione algebrica F su X.

Osservazione 8.1. La $\tilde{\Sigma}$ si può identificare con la componente connessa di un germe α di F in $\mathfrak{P}$.

Definizione 8.2. Chiamiamo *superficie di Riemann astratta su X* ogni tripla (Y, λ, X) in cui

- X ed Y sono due superfici di Riemann connesse e compatte;
- $\lambda : Y \to X$ è olomorfa e non costante.

Osservazione 8.2. Poiché le applicazioni olomorfe non costanti sono aperte, $\lambda(Y)$, essendo aperta e chiusa in X, è uguale ad X. Quindi λ è surgettiva. Inoltre, i valori singolari di λ formano un sottoinsieme finito A di X e la $\lambda : Y \backslash \lambda^{-1}(A) \to X \backslash A$ è un rivestimento con un numero finito di fogli.

Il *problema di Riemann* consiste nel chiedersi se ogni superficie di Riemann astratta su X sia la superficie di Riemann di una funzione algebrica sulla base. Il teorema di Riemann-Roch ha, tra le sue conseguenze, una risposta affermativa a questa domanda.

Osserviamo che, per il teorema d'immersione di Riemann, ogni superficie di Riemann connessa e compatta X è *algebrica*. Si può cioè rappresentare come il luogo di zeri in $\mathbb{CP}^{g+1}$ di un ideale di polinomi omogenei. Inoltre, poiché $\mathcal{M}(X)$ ha grado di trascendenza uno su $\mathbb{C}$, X *è la superficie di Riemann di una funzione algebrica su* $\mathbb{CP}^1$.

Vedi ad esempio p.174 del libro: Rick Miranda, "*Algebraic Curves and Riemann Surfaces* ", Graduate Studies in Mathematics Volume: 5; 1995; 390 pp.

CAPITOLO XVI

Formulazione coomologica del Teorema di Riemann Roch

1. Il fascio dei divisori

Sia X una superficie di Riemann. Per ogni aperto U di X indichiamo con $\mathscr{O}^*(U)$ l'insieme delle funzioni olomorfe su U, a valori in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Esso è un gruppo abeliano rispetto alla moltiplicazione. La corrispondenza $U \to \mathscr{O}^*(U)$ definisce un fascio di gruppi abeliani su X, che denotiamo con $\mathscr{O}^*$ e chiamiamo *il fascio delle funzioni olomorfe non nulle* su X.

Per ogni aperto U di X indichiamo poi con $\mathcal{M}^*(U)$ il gruppo moltiplicativo delle funzioni meromorfe definite su U e che non si annullano su nessuna componente connessa di U. La corrispondenza $U \to \mathcal{M}^*(U)$ definisce il fascio $\mathcal{M}^*$ delle *funzioni meromorfe non identicamente nulle* su X.

Abbiamo un morfismo iniettivo di fasci $\mathscr{O}^* \hookrightarrow \mathcal{M}^*$. Il fascio quoziente

$$\mathscr{D} = \mathcal{M}^*/\mathscr{O}^* \tag{1.1}$$

si dice il *fascio dei divisori meromorfi* su X. Indichiamo con $\mathscr{O}_0^*$ l'insieme dei germi olomorfi di $\mathcal{M}^*$: se $p \in X$, un elemento di $(\mathscr{O}_0^*)_p$ è il germe $f_{(p)}$ di una funzione olomorfa f, definita in un intorno aperto connesso U di p e non identicamente nulla in U. Osserviamo che, per ogni aperto U di X, l'insieme $\mathscr{O}_0^*(U)$ delle funzioni olomorfe in U e non identicamente nulle su nessuna delle sue componenti connesse, è un monoide commutativo unitario rispetto alla moltiplicazione. La corrispondenza $U \to \mathscr{O}_0^*(U)$ è quindi un *fascio di monoidi commutativi unitari*. Per questi oggetti si possono ripetere gran parte delle definizioni formali che abbiamo dato per i fasci di gruppi abeliani. In particolare abbiamo un fascio quoziente di monomi commutativi abeliani

$$\mathscr{D}^+ = \mathscr{O}_0^*/\mathscr{O}^* \tag{1.2}$$

che si dice il fascio dei *divisori positivi*, o *olomorfi* su X.

Abbiamo le successioni esatte, rispettivamente di fasci di gruppi abeliani e di fasci di monoidi commutativi unitari:

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}^* \longrightarrow \mathcal{M}^* \longrightarrow \mathscr{D} \longrightarrow 0\,, \tag{1.3}$$

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}^* \longrightarrow \mathscr{O}_0^* \longrightarrow \mathscr{D}^+ \longrightarrow 0\,. \tag{1.4}$$

Definizione 1.1.
- Gli elementi di $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{D})$ formano un gruppo abeliano, e si dicono i *divisori di Cousin meromorfi* su X;
- gli elementi di $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{D}^+)$ formano un monoide commutativo unitario, e si dicono i *divisori di Cousin olomorfi* su X.

Indicheremo in modo additivo le operazioni di gruppo abeliano su $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{D})$ e di monoide commutativo unitario su $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{D}^+)$.

Fissato un punto p di X, data una $f \in \mathcal{M}_p$, se z è una coordinata olomorfa con centro in p, risulta ben definito

$$\nu_p(f) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\epsilon} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} \in \mathbb{Z}. \tag{1.5}$$

(ordine di zero o di polo di f in p). La

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_p^* \longrightarrow \mathcal{M}_p^* \xrightarrow{\nu_p} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{1.6}$$

è una successione esatta, che ci permette di identificare la spiga $\mathscr{D}_p$ in p del fascio dei divisori meromorfi all'anello $\mathbb{Z}$ degli interi. Abbiamo ottenuto quindi la

Proposizione 1.1. *Il fascio $\mathscr{D}$ dei divisori meromorfi si identifica a quello dei germi delle funzioni $\alpha : X \to \mathbb{Z}$ che sono nulle al di fuori di un insieme discreto di punti.*

Il fascio $\mathscr{D}^+$ dei divisori positivi si identifica al sottofascio dei germi di funzioni $\alpha : X \to \mathbb{Z}$, nulle fuori da un sottoinsieme discreto, che assumono valori non negativi. □

I sottoinsiemi discreti di X sono numerabili o finiti ed una sezione D di $\Gamma(X, \mathscr{D})$ si può quindi descrivere come una somma formale

$$D = \sum\nolimits_n \nu_n p_n, \tag{1.7}$$

con $\{p_n\}$ sottoinsieme discreto di X e $\nu_n \in \mathbb{Z}$ per ogni n e $D \in \Gamma(X, \mathscr{D}^+)$ quando $\nu_n \geq 0$ per ogni n.

Ad una funzione f meromorfa su X associamo il divisore

$$div(f) = \sum\nolimits_{\nu_p(f)\neq 0} \nu_p(f) \cdot p. \tag{1.8}$$

Definizione 1.2. Si dicono *principali* i divisori che sono della forma (1.8) per una funzione meromorfa f su X.

Esempio 1.1. *Sia $D = \sum_{h=1}^m \nu_h p_h$ un divisore meromorfo su $\mathbb{CP}^1$. Condizione necessaria e sufficiente affinché D sia principale è che $\sum_{h=1}^m \nu_h = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $D = div(f)$ per una funzione meromorfa f su $\mathbb{CP}^1$. Fissiamo un punto q che non sia né uno zero né un polo di f. Possiamo fissare la coordinata non omogenea z su $\mathbb{CP}^1$ in modo che q sia

0 e che il disco chiuso $\bar{\mathrm{D}} = \{|z|\leq 1\}$ non contenga zeri o poli di f. Allora il complemento D' di $\bar{\mathrm{D}}$ è ancora un disco. Poiché D' contiene tutti gli zeri e i poli di f, abbiamo

$$\sum\nolimits_h \nu_h = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial \mathrm{D}'} \frac{df}{f} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial \mathrm{D}} \frac{df}{f} = 0.$$

Viceversa, se $\sum_{h=1}^{m}\nu_h = 0$, fissiamo una coordinata non omogenea z su $\mathbb{CP}^1$ in modo tale che i punti p_h abbiano coordinata $z_h \neq \infty$. Poniamo $f(z) = \prod_{h=1}^{m}(z-z_h)^{\nu_h}$ su $\mathbb{C} = \{z\neq\infty\}$. Per $t = z^{-1} \neq 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} f(z) = f(1/t) = \prod\nolimits_{h=1}^{m}\left(\frac{1}{t} - z_m\right) &= \prod\nolimits_{h=1}^{m} t^{-\nu_h}\,(1 - t\,z_m) \\ &= t^{-\sum_{h=1}^{m}\nu_h}\prod\nolimits_{h=1}^{m}(1 - t\,z_m) \\ &= \prod\nolimits_{h=1}^{m}(1 - t\,z_m) \end{aligned}$$

e questo mostra che f si prolunga su ∞, definendo una funzione meromorfa su $\mathbb{CP}^1$ che ha come divisore D. □

In particolare, due divisori su $\mathbb{CP}^1$ sono linearmente equivalenti se e soltanto se hanno uguali le somme dei coefficienti ν_p.

2. Sistemi lineari

Fissiamo un divisore meromorfo D su X.

Definizione 2.1. Il *sistema lineare* definito da D è l'inisieme

(2.1) $$|D| = \{\Delta \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{D}^+) \mid \Delta \equiv D\}$$

dei divisori olomorfi linearmente equivalenti a D.

Esempio 2.1. Se $X = \mathbb{CP}^1$ e D un divisore principale, allora $|D| = \{0\}$.

Dato un divisore meromorfo D su X e detto $\{D\}$ il fibrato olomorfo in rette ad esso associato, indichiamo con $\mathscr{O}(D)$ il fascio dei germi di sezioni olomorfe si $\{D\}$.

Il gruppo moltiplicativo $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}^*)$ agisce su $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(D))$ mediante

(2.2) $$\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(D)) \times \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(D)) \ni (f, g) \longrightarrow f\cdot g \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(D)).$$

Proposizione 2.1. *È* $$|D| = \frac{H^0(X, \mathscr{O}(D))\setminus\{0\}}{H^0(X, \mathscr{O}^*)}.$$

Dimostrazione. L'applicazione $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(D)) \ni f \to \mathit{div}(f) \in |D|$ è surgettiva. Se $f, g \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(D))$ definiscono lo stesso divisore, allora (f/g) è una funzione olomorfa e diversa da 0 in ogni punto di X. Dunque, se $\mathit{div}(f) = \mathit{div}(g)$, allora $g = h\cdot f$ con $h \in \mathscr{O}^*(X)$. □

Osservazione 2.2. Se X è compatto e connesso, allora $H^0(X, \mathscr{O}^*) = \mathbb{C}^*$ e quindi $|D|$ ha una struttura di spazio proiettivo complesso. Definiremo dimensione di $|D|$ la sua dimensione come spazio proiettivo complesso.

Definizione 2.2. Chiamiamo

$$\dim(|D|) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(D))) - 1 \tag{2.3}$$

la *dimensione* di $|D|$.

Proposizione 2.3. *Se X è compatto, allora* $\dim(|D|)$ *è finita per ogni divisore meromorfo D su X.*

Dimostrazione. Si definisce su $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(D))$ una struttura di spazio normato e si verifica che la palla unitaria è relativamente compatta. □

3. Il problema di Riemann

Data una superficie di Riemann compatta X ed un divisore meromorfo D su X, ci proponiamo di calcolare la dimensione del suo sistema lineare $|D|$.

Scriviamo $D = D_0 - D_\infty$, decomponendo D nella sua parte di zeri e nella sua parte polare. Allora

$$|D| = \{D + \mathit{div}(f) \mid f \in \mathcal{M}^*(X),\ \mathit{div}(f) \geq -D\}$$

e dunque, posto

$$\mathcal{W}(D) = \{f \in \Gamma(X, \mathcal{M}^*) \mid \mathit{div}(f) \geq -D\}$$

osserviamo che

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{W}(D)) = \dim_C(\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(D)) = \dim(|D|) + 1.$$

Infatti, se $f, g \in \Gamma(X, \mathcal{M}^*)$ e $\mathit{div}(f) = \mathit{div}(g)$, allora $f = k \cdot g$ con $k \in \mathbb{C}^*$.

Data $f \in \Gamma(X, \mathcal{M}^*)$, scriviamo

$$\mathit{div}(f) = D_0(f) - D_\infty(f)$$

separando nel divisore di f la parte degli zeri e quella dei poli. Allora

$$\mathit{div}(f) \geq -D$$

dà

$$D_0(f) - D_\infty(f) \geq -D_0 + D_\infty,$$

onde

$$D_0(f) + D_0 \geq D_\infty(f) + D_\infty.$$

Se $\mathrm{supp}(D_0) \cap \mathrm{supp}(D_\infty) = \emptyset$ e $\mathrm{supp}(D_0(f)) \cap \mathrm{supp}(D_\infty(f)) = \emptyset$, allora è

$$D_0(f) \geq D_\infty \quad e \quad D_\infty(f) \leq D_0,$$

da cui

$$\mathcal{W}(D) = \{f \in \Gamma(X, \mathcal{M}^*) \mid D_0(f) \geq D_\infty, \ \ D_\infty(f) \leq D_0\}.$$

Esempio 3.1. Sia $X = \mathbb{CP}^1$ e $D = a{\cdot}p_0$ con $a \in \mathbb{Z}^*$. Se $a \geq 0$, allora

$$\mathcal{W}(D) = \{f \in \Gamma(\mathbb{CP}^1, \mathcal{M}^*) \mid D_0(f) \geq 0, \ D_\infty(f) \leq a{\cdot}0\},$$

cioè $\mathcal{W}(D)$ è lo spazio delle funzioni meromorfe su $\mathbb{CP}^1$ che non hanno poli fuori da p_0 e che in p_0 hanno un polo di ordine non superiore ad a. Quindi, scelta la coordinata non omogenea z con centro in p_0, una base di $\mathcal{W}(D)$ è data dalle funzioni meromorfe

$$1, \ \frac{1}{z}, \dots, \frac{1}{z^{a-1}}, \frac{1}{z^a}$$

e quindi $\dim(|D|) = a$. Se $a < 0$, allora

$$\mathcal{W}(D) = \{f \in \Gamma(\mathbb{CP}^1, \mathcal{M}^*) \mid D_0(f) \geq a{\cdot}0, \ D_\infty(f) \leq 0\} = \{0\},$$

e quindi $\dim(|D|) = -1$.

Esempio 3.2. Consideriamo ora il caso in cui $X = \mathbb{CP}^1$ e $D = a{\cdot}0 + b{\cdot}1$, con $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $a{\leq}b$. Distinguiamo tre casi.

I. $\boxed{a \leq b < 0}$ Abbiamo

$$\mathcal{W}(D) = \{f \in \Gamma(\mathbb{CP}^1, \mathcal{M}^*) \mid D_0(f) \geq |a|{\cdot}0 + |b|{\cdot}1, \ D_\infty(f) \leq 0\} = \{0\}$$
$$\text{e} \quad \dim(|D|) = -1.$$

II. $\boxed{a < 0 < b}$ In questo caso

$$\mathcal{W}(D) = \{f \in \Gamma(\mathbb{CP}^1, \mathcal{M}^*) \mid D_0(f) \geq |a|{\cdot}0, \ D_\infty(f) \leq b{\cdot}1\}.$$

Sono cioè le funzioni razionali che hanno al più un polo in 1, di ordine minore o uguale di b, ed in 0 uno zero di ordine almeno $|a|$. Se $a{+}b{<}0$, allora $\mathcal{W}(D) = \{0\}$ e $\dim(|D|) = -1$. Se $a{+}b \geq 0$, allora $\mathcal{W}(D)$ è generato dalle funzioni razionali

$$\frac{z^h}{(z-1)^k} \quad \text{con } h{\leq}k, \ h{+}a \geq 0, \ k{\leq}b.$$

Otteniamo allora $\dim(|D|) = (b{+}a)(b{+}a{+}3)/2$.

III. $\boxed{0 < a \leq b}$ Lo spazio

$$\mathcal{W}(D) = \{f \in \Gamma(\mathbb{CP}^1, \mathcal{M}^*) \mid D_0(f) \geq 0, \ D_\infty(f) \leq a{\cdot}0 + b{\cdot}1\}$$

è generato da

$$z^h(z-1)^{-k}, \quad \text{con } 0{\leq}k{\leq}b, \ -a{\leq}h{\leq}k$$

e quindi $\dim(|D|) = ab{+}a{+}b{+}\frac{1}{2}b(b{+}1)$.

4. Preliminari di algebra omologica

Sia $\mathbb{K}$ un campo e

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_m \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

una successione esatta di spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ e di applicazioni lineari. Allora

$$\sum\nolimits_{h=0}^{m} \dim_{\mathbb{K}}(A_h) = 0. \tag{4.2}$$

Siano X uno spazio paracompatto ed $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ tre fasci di spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ su X. Supponiamo che

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{H}^i(X,\mathcal{S}_h))<\infty,\ \forall i \geq 0 \text{ ed } \mathrm{H}^i(X,\mathcal{S}_h)=0,\ \ \forall i>i_0,\ \text{ per } h=1,2,3. \tag{4.3}$$

Poniamo

$$\chi(\mathcal{S}_h) = \sum\nolimits_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim(\mathrm{H}^i(X,\mathcal{S}_h)), \quad \text{per } h = 1,2,3. \tag{4.4}$$

Proposizione 4.1. *Se abbiamo una successione esatta corta di fasci*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2 \longrightarrow \mathcal{S}_3 \longrightarrow 0, \tag{4.5}$$

e valgono le (4.3)*, allora*

$$\chi(\mathcal{S}_2) = \chi(\mathcal{S}_1) + \chi(\mathcal{S}_3). \tag{4.6}$$

Dimostrazione. La (4.6) è conseguenza della successione esatta lunga in coomologia

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(X,\mathcal{S}_1) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X,\mathcal{S}_2) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X,\mathcal{S}^3) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{H}^1(X,\mathcal{S}_1) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \mathrm{H}^h(X,\mathcal{S}^3) \longrightarrow \mathrm{H}^h(X,\mathcal{S}_2) \longrightarrow \mathrm{H}^h(X,\mathcal{S}^3) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \mathrm{H}^{i_0}(X,\mathcal{S}_2) \longrightarrow \mathrm{H}^{i_0}(X,\mathcal{S}_3) \longrightarrow 0. \end{array}$$ □

5. Genere geometrico e genere topologico

Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta.

Definizione 5.1. Chiamiamo

- *genere topologico* di X l'intero non negativo

$$g(X) = \tfrac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{H}^1(X,\underset{\sim}{\mathbb{R}}) = \tfrac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^1(X,\underset{\sim}{\mathbb{C}}), \tag{5.1}$$

- *genere geometrico* di X il numero reale non negativo

$$P_g(X) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{H}^1(X,\mathscr{O})). \tag{5.2}$$

Sia Ω^1 il fascio dei germi di differenziali olomorfi su X. Lo possiamo interpretare come il fascio dei germi delle sezioni olomorfe del fibrato cotangente di X, che è un fibrato in rette le cui funzioni di transizione, rispetto ad un qualsiasi atlante coordinato $\mathcal{U} = \{(u_i, z_i)\}$, sono

$$g_{i,j} = \frac{dz_i}{dz_j} \quad \text{su} \quad U_i \cap U_j. \tag{5.3}$$

Proposizione 5.1. *Se X è una superficie di Riemann compatta, allora*

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{H}^0(X, \Omega^1)) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O})) < \infty. \tag{5.4}$$

Dimostrazione. Poiché $\bar\partial : \mathscr{E}^{0,0}(X) \to \mathscr{E}^{0,1}(X)$ è un operatore ellittico su una varietà compatta, è $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}) \simeq \mathscr{E}^{0,1}(X)/\bar\partial\mathscr{E}^{0,0}(X)) < \infty$. Analogamente, poiché anche $\bar\partial : \mathscr{E}^{1,0}(X) \to \mathscr{E}^{1,1}(X)$ è ellittico su X compatta, anche $\mathrm{H}^0(X, \Omega^1) = \ker(\bar\partial : \mathscr{E}^{1,0}(X) \to \mathscr{E}^{1,1}(X))$ ha dimensione finita.

Poiché $\bar\partial\mathscr{E}^{0,0}(X))$ ha codimensione finita, è un sottospazio chiuso di $\mathscr{E}^{0,1}(X)$ e quindi il duale del quoziente $\mathscr{E}^{0,1}(X)/\bar\partial\mathscr{E}^{0,0}(X))$ è uguale allo spazio delle correnti T, di tipo $(1,0)$, che soddisfano l'equazione $\bar\partial T = 0$. Per il teorema di regolarità, queste correnti sono equivalenti a forme regolari di tipo $(1,0)$ e $\bar\partial$-chiuse. Quindi $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O})$ ed $H^0(X, \Omega^1)$ sono due spazi di dimensione finita duali l'uno dell'altro ed hanno perciò la stessa dimensione. □

Proposizione 5.2. *Per una superficie di Riemann compatta e connessa, i generi geometrico e topologico coincidono.*

Dimostrazione. Dalla successione esatta corta di fasci

$$0 \longrightarrow \underset{\sim}{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathscr{O} \xrightarrow{\ d\ } \Omega^1 \longrightarrow 0$$

ricaviamo la successione esatta lunga di coomologia

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \underset{\sim}{\mathbb{C}}) &\longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \Omega^1) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \underset{\sim}{\mathbb{C}}) &\longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \Omega^1) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{H}^2(X, \underset{\sim}{\mathbb{C}}) &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{H}^0(X, \mathbb{C})$ ed $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O})$ sono entrambi isomorfi a $\mathbb{C}$, l'applicazione $\mathrm{H}^0(X, \underset{\sim}{\mathbb{C}}) \to \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O})$ è surgettiva e quindi abbiamo la successione esatta

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \Omega^1) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \underset{\sim}{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \Omega^1) \longrightarrow \mathrm{H}^2(X, \underset{\sim}{\mathbb{C}}) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

da cui ricaviamo, tenuto conto che per la Proposizione 5.2 $\mathrm{H}^0(X, \varOmega^1)$ ed $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O})$ hanno la stessa dimensione, che

$$2\, g(X) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{H}(X, \underset{\sim}{\mathbb{C}})) \leq \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{H}^0(X, \varOmega^1)) + \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O})) = 2P_g(X)$$

Indichiamo con $\overline{\varOmega}^1$ il fascio dei germi di 1-forme antiolomorfe su X. Coniugando l'inclusione $\mathrm{H}^0(X, \varOmega^1) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(X, \underset{\sim}{\mathbb{C}})$, otteniamo l'inclusione $\mathrm{H}^0(X, \overline{\varOmega}^1) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(X, \underset{\sim}{\mathbb{C}})$.

Poiché $\varOmega^1 \cap \overline{\varOmega}^1 = \underset{\sim}{0}$, da $\mathrm{H}^0(X, \varOmega^1) \oplus \mathrm{H}^0(X, \overline{\varOmega}^1) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(X, \underset{\sim}{\mathbb{C}})$ segue che $2P_g(X) \leq g(X)$ e quindi, poiché avevamo già verificato la diseguaglianza opposta, vale l'uguaglianza. □

Abbiamo dimostrato in particolare che la coomologia di de Rham di una superficie di Riemann connessa e compatta si possono calcolare utilizzando forme olomorfe ed anti-olomorfe.

Corollario 5.3. *Se X è una superficie di Riemann connessa e compatta, allora*

$$\begin{cases} \mathrm{H}^1(X, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{H}^0(X, \varOmega^1) \oplus \mathrm{H}^0(X, \overline{\varOmega}^1), \\ \mathrm{H}^2(X, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{H}^1(X, \varOmega^1) \simeq \mathrm{H}^1(X, \overline{\varOmega}^1) \simeq \mathbb{C}. \end{cases} \tag{5.5}$$

Dimostrazione. Abbiamo verificato la prima affermazione nella dimostrazione della Proposizione 5.2. Per la seconda, dobbiamo ricordare che $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ per la dualità di Poincaré, perché le superfici di Riemann sono orientate. □

6. Dati di Cousin

Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta. Un divisore meromorfo $D \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{D})$ si rappresenta in modo unico come una somma

$$D = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \nu_i {\cdot} p_i, \quad \text{con } p_1, \ldots, p_n \text{ punti distinti di } X \text{ e } \nu_i \in \mathbb{Z}^*. \tag{6.1}$$

Indichiamo con $\{D\}$ il fibrato olomorfo in rette ad esso associato ed s_D una sezione meromorfa definita da un dato di Cousin di D. Possiamo descriverla a partire da un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_h\}$ di X assegnando su ogni U_h una funzione meromorfa $f_h \in \mathcal{M}^*(U_h)$ che è olomorfa e non nulla su $U_h \backslash \{p_1, \ldots, p_n\}$ e che, in ciascun punto p_i di $U_h \cap \{p_1, \ldots, p_n\}$, ha o al più uno zero di ordine ν_i, nel caso $\nu_i > 0$, oppure al più un polo di ordine $-\nu_i$, nel caso in cui $\nu_i < 0$. I quozienti $g_{i,j} = f_i/f_j$ sono uguali, sulle intersezioni $U_i \cap U_j$, alle funzioni di transizione del fibrato $\{D\}$ e le $\{f_h\}$ rappresentano la sezione s_D.

Proposizione 6.1. *Abbiamo una successione esatta lunga in coomologia:*

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(X,\mathscr{O}^*) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X,\mathcal{M}^*) \xrightarrow{div} \mathrm{H}^0(X,\mathscr{D}) \longrightarrow \\ \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(X,\mathscr{O}^*) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X,\mathcal{M}^*) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X,\mathscr{D}) \longrightarrow \cdots \end{array} \square$$

Questa successione esatta lunga sintetizza diverse nozioni che avevamo introdotto in precedenza nello studio dei fibrati vettoriali in rette.

Infatti, l'applicazione $\mathrm{H}^0(X,\mathcal{M}^*) \xrightarrow{div} \mathrm{H}^0(X,\mathscr{D})$ è quella che fa corrispondere ad una funzione meromorfa f su X il suo divisore $div(f)$.

Gli elementi di $\mathrm{H}^1(X,\mathscr{O}^*)$ *sono le classi di equivalenza di fibrati olomorfi in rette su* X.

Infatti una classe di coomologia di $\mathrm{H}^1(X,\mathscr{O}^*)$ è rappresentata, per un ricoprimento aperto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ di X, dal dato di funzioni $g_{ij} \in \mathscr{O}^*(U_{ij})$, per ogni $(i,j) \in \mathscr{N}_1(\mathscr{U})$, che soddisfano

$$g_{ji} = g_{ij}^{-1} \text{ su } U_{ij} \quad \text{e} \quad g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1 \text{ su } U_{ijk}\,.$$

Un tale dato si dice un *dato di Cousin moltiplicativo*. Se $\mathscr{V} \underset{\tau}{\prec} \mathscr{U}$ è un raffinamento di $\mathscr{U}$, diciamo che i dati di Cousin moltiplicativi $g^{\tau}_{hk} = g_{\tau(h),\tau(k)}\big|_{V_{hk}} \in \mathscr{O}^*(V_{hk})$ *rappresentano* i dati (g_{ij}) nel raffinamento $\mathscr{V}$. Dato un ricoprimento aperto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ di X, due dati di Cousin moltiplicativi $(g_{ij} \in \mathscr{O}^*(U_{ij}))$ e $(g'_{ij} \in \mathscr{O}^*(U_{ij}))$ sono equivalenti nel ricoprimento $\mathscr{U}$ se esistono funzioni $f_i \in \mathscr{O}^*(U_i)$, per $i \in I$, tali che $g_{ij}f_i = g'_{ij}f_j$ in U_{ij}.

Due dati di Cousin moltiplicativi definiscono la stessa classe in $\mathrm{H}^1(X,\mathscr{O}^*)$ se i loro rappresentanti in uno stesso ricoprimento $\mathscr{U}$ di X sono equivalenti.

L'omomorfismo $\delta : \mathrm{H}^0(X,\mathscr{D}) \to \mathrm{H}^1(X,\mathscr{O}^*)$ *è quello che fa corrispondere a un divisore meromorfo* D *la classe di equivalenza* $\{D\}$ *dei fibrati olomorfi in rette ad esso associati.*

Infatti un elemento D di $\mathrm{H}^0(X,\mathscr{D})$ si descrive assegnando un ricoprimento aperto $\mathscr{U} = \{U_i\}$ di X e una famiglia di funzioni meromorfe $f_i \in \mathcal{M}^*(U_i)$ tali che $g_{ij} = f_j^{-1}f_i \in \mathscr{O}^*(U_{ij})$. Le (g_{ij}) sono i dati di Cousin moltiplicativi che definiscono un fibrato olomorfo in rette e quindi l'elemento corrispondente $\delta(D) = \{D\}$ in $\mathrm{H}^1(X,\mathscr{O}^*)$.

7. Coomologia di Cech a coefficienti nel fascio $\mathscr{O}$.

Siano X una superficie di Riemann ed $\mathscr{O}$ il fascio dei germi delle funzioni olomorfe su X.

Indichiamo con $\mathscr{E}^{r,s}$ il fascio dei germi di forme differenziali di tipo (r,s) a coefficienti complessi di classe $\mathscr{C}^\infty$. I fasci $\mathscr{E}^{r,s}$ sono fasci fini di $\mathscr{E}$-moduli. Vale il

Teorema 7.1. *Siano X una superficie di Riemann, $\mathscr{O}$ il fascio dei germi delle funzioni olomorfe ed Ω il fascio dei germi delle 1-forme olomorfe su X. I fasci $\mathscr{O}$ ed Ω ammettono le risoluzioni fini:*

$$0 \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{E}^{0,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{E}^{0,1} \longrightarrow 0 \tag{7.1}$$

$$0 \longrightarrow \Omega \longrightarrow \mathscr{E}^{1,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{E}^{1,1} \longrightarrow 0 \tag{7.2}$$

Dimostrazione. Sia U un aperto di un atlante di X, con carta locale z. Una qualsiasi $\alpha \in \mathscr{E}^{0,1}(U)$ si scrive nella forma $\alpha = f(z)\, d\bar z$, ove f è una funzione a valori complessi, di classe $\mathscr{C}^\infty$, sull'aperto $z(U) \subset \mathbb{C}$. Per il Teorema 9.1 del Cap. IV esiste una funzione $u \in \mathscr{E}^{0,0}(z(U))$, tale che $(\partial u/\partial \bar z) = f$ in $z(U)$. Allora $u(z)$ è una funzione di $\mathscr{E}^{0,0}(U)$ tale che $\bar\partial u = \alpha$ in U. Da questo segue che (7.1) è esatta. Analogamente, nell'aperto U di una carta locale z, una forma $\beta \in \mathscr{E}^{1,1}(U)$ si scrive nella forma $f(z)\, dz \wedge d\bar z$ per una f a valori complessi, di classe $\mathscr{C}^\infty$, sull'aperto $z(U) \subset \mathbb{C}$. Se la funzione $u \in \mathscr{E}^{0,0}(z(U))$ risolve l'equazione $(\partial u/\partial \bar z) = f$ in $z(U)$, allora $\alpha = -u(z)dz \in \mathscr{E}^{1,0}(U)$ risolve $\bar\partial\alpha = \beta$. Quindi anche (7.2) è esatta. □

8. Teorema di dualità ed indice di specialità

Dato un divisore meromorfo D su X, indichiamo con $\{D\}$ un fibrato vettoriale in rette ad esso associato. Dato un ricoprimento $\mathscr{U} = \{U_i\}$ di X mediante aperti coordinati (U_i, z_i) tali che ciascun punto p del supporto di D sia contenuto in uno solo degli aperti di $\mathscr{U}$ e ne sia il centro p_i, possiamo definire una sezione s_D di $\{D\}$ ponendo

$$s_D(p) = (z_i(p))^{D(p_i)} \quad \text{su } U_i$$

e le funzioni di transizione di $\{D\}$, per il ricoprimento $\mathscr{U}$, mediante

$$g_{i,j}(z) = \frac{(z_i(p))^{D(p_i)}}{(z_j(p))^{D(p_j)}} \quad \text{se } p \in U_{i,j}.$$

Indichiamo con $\mathscr{E}_D$ il fascio dei germi di sezioni $\mathscr{C}^\infty$ di $\{D\}$. Se $u = (u_i)$ è una sezione di $\mathscr{E}_D$, allora

$$\frac{\partial u_i}{\partial \bar z_i} = \frac{\partial (g_{i,j} u_j)}{\partial \bar z_i} = g_{i,j} \frac{\partial \bar z_j}{\partial \bar z_i} \frac{\partial u_j}{\partial \bar z_j}. \tag{8.1}$$

Questo di permette di definire il $\bar\partial$ sulle sezioni di $\mathscr{E}_D$ come sezioni del fibrato in rette $\{F\} \otimes \{\bar K\}$, ove abbiamo indicato qui con $\{K\}$ il fibrato canonico, definito sul ricoprimento $\mathscr{U}$, dalle funzioni di transizione

$$k_{i,j} = \frac{dz_j}{dz_i} \quad \text{su } U_{i,j}. \tag{8.2}$$

Osserviamo che $\{D\} \otimes \{\bar K\}$ è un fibrato in rette complesse, ma *non è* olomorfo. Indichiamo con $\mathscr{E}^1_D$ il fascio dei germi delle sue sezioni.

Proposizione 8.1. *La successione di fasci*

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(D) \longrightarrow \mathscr{E}_D \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{E}^1_D \longrightarrow 0 \tag{8.3}$$

è esatta ed è una risoluzione fine del fascio $\mathscr{O}(D)$. Abbiamo quindi, per ogni aperto U di X,

$$\begin{cases} \mathrm{H}^0(U,\mathscr{O}(D)) = \{\mathscr{E}_D(U) \mid \bar\partial u{=}0\}, \\ \mathrm{H}^1(U,\mathscr{O}(D)) = \mathscr{E}^1_D(U)/[\bar\partial\mathscr{E}_D(U)]. \end{cases} \tag{8.4}$$

Dimostrazione. Tutte le affermazioni sono conseguenza della risolubilità locale, in $\mathbb{C}$, dell'equazione $\partial u/\partial\bar z{=}f$, per arbitrari secondi membri $f{\in}\mathscr{C}^\infty$. □

Se σ è una sezione di $\{D\}\otimes\{\bar K\}$ e τ una sezione di $\{D\}^{-1}\otimes\{K\}$, il prodotto $\tau{\cdot}\sigma$ è una sezione di $\{K\}\otimes\{\bar K\}$ ed ha quindi un significato invariante l'integrale

$$(\tau|\sigma) = \iint_X \tau{\cdot}\sigma. \tag{8.5}$$

Nell'atlante $\mathscr{U}$ possiamo scrivere $\tau = \tau_i dz_i$ e $\sigma = \sigma_i d\bar z_i$ su U_i e quindi, per una partizione dell'unità $\{\chi_i\}$ subordinata ad $\mathscr{U}$ è

$$\iint_X \tau{\cdot}\sigma = \sum\nolimits_i \iint_{zi(U_i)} \chi_i\tau_i\sigma_i\, dz_i\wedge d\bar z_i.$$

Troviamo ora una formula d'integrazione per parti per l'operatore $\bar\partial$. Siano $\tau{\in}\mathscr{E}_{D^{-1}\otimes K}(X)$ ed $u{\in}\mathscr{E}_D$. Allora

$$\begin{aligned}\iint_X \tau{\cdot}\bar\partial u = \sum\nolimits_i \iint_{z_i(U_i)} \chi_i\tau_i{\cdot}\frac{\partial u}{\partial\bar z_i} dz_i\wedge d\bar z_i = -\sum\nolimits_i \iint_{z_i(U_i)} \frac{\partial(\chi_i\tau_i)}{\partial\bar z_i}{\cdot}\frac{\partial u}{\partial\bar z_i} dz_i\wedge d\bar z_i \\ = \iint_X [\bar\partial\tau]\cdot u\end{aligned}$$

ove l'ultimo integrale ha senso perché $\bar\partial\tau$ è una sezione del fibrato in rette $\{D\}^{-1}\otimes\{K\}\otimes\{\bar K\}$ e quindi il prodotto $[\bar\partial\tau]\cdot u$ è una sezione di $\{K\}\otimes\{\bar K\}$.

L'operatore $\bar\partial : \mathscr{E}_D(X) \to \mathscr{E}^1_D(X)$ è ellittico ed ha quindi immagine chiusa. Per il teorema astratto di dualità dell'analisi funzionale, il duale del quoziente $\mathscr{E}^1_D(U)/[\bar\partial\mathscr{E}_D(U)]$ è il nucleo, nello spazio delle distribuzioni, dell'operatore duale $\bar\partial : \mathscr{D}'(U,\{D\}^{-1}\otimes\{K\}) \to \mathscr{D}'(U,\{D\}^{-1}\otimes\{K\}\otimes\{\bar K\})$. Poiché anche questo operatore è ellittico, questo nucleo consiste dei sezioni di classe $\mathscr{C}^\infty$, che sono le sezioni olomorfe del fibrato $\{D\}^{-1}\otimes\{K\}$. La moltiplicazione per s_D definisce un isomorfismo lineare di $\mathrm{H}^0(X,\mathscr{O}(\{D\}^{-1}\otimes\{K\})$ sullo spazio $\mathscr{Ab}^D(X)$ dei differenziali abeliani ω con $\mathscr{div}(\omega){\geq}D$. Abbiamo ottenuto

Teorema 8.2. *Sia D un differenziale meromorfo su X. Allora* $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}(D))$ *è uno spazio vettoriale di dimensione complessa finita, uguale all'indice di specialità di D.* □

9. Formula di Riemann-Roch

Diamo in questo paragrafo un'altra dimostrazione della formula di Riemann-Roch.

Teorema 9.1. *Siano X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere g e D un divisore meromofo in X. Allora*

$$\dim_{\mathbb{C}} |D| = \deg(D) - g + \imath(D). \tag{9.1}$$

9.1. Il caso dei divisori positivi. Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta, di genere g. Fissiamo un divisore positivo $D \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{D}^+)$, con $D = \sum_{h=1}^{m} \nu_h p_h$, ove $\nu_h \in \mathbb{Z}_+$ per $h=1, \ldots, m$ e $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$ è un sottoinsieme finito di X.

Come all'inizio del §8, fissiamo un fibrato in rette olomorfo $\{D\}$ ed una sua sezione olomorfa s_D con $\mathit{div}(s_D) = D$. Indichiamo con $\mathscr{O}(D)$ il fascio dei germi delle sezioni olomorfe del fibrato $\{F\}$. Per mezzo della sezione s_D possiamo definire un omomorfismo iniettivo di fasci:

$$\mathscr{O} \ni f \longrightarrow f \cdot s_D \in \mathscr{O}(D).$$

Il fascio quoziente $\mathscr{Q} = (\mathscr{O}(D)/(\mathscr{O} \cdot s_D))$ è definito da

$$\mathscr{Q}_p = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad p \in X \backslash P \\ \mathbb{C}^{\nu_h} & \text{se} \quad p = p_h \in P. \end{cases}$$

È immediato constatare che $\mathscr{Q}$ è un fascio fiacco e quindi $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{Q})=0$ per ogni $q > 0$. Dalla successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{O}(D) \longrightarrow \mathscr{Q} \longrightarrow 0 \tag{9.2}$$

otteniamo la successione esatta lunga:

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}) \xrightarrow{s_D} \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(\{D\})) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathscr{Q}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}(\{D\})) \longrightarrow 0$$

Ricordiamo ora che:

1. $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}) = 1$ perché le funzioni olomorfe su X sono costanti;
2. $\dim_{\mathbb{C}} |D| = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(\{D\})) - 1$;
3. $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{Q}) \simeq \bigoplus_{h=1}^{m} \mathbb{C}^{\nu_h}$ ha dimensione complessa uguale al grado $\deg(D)$ del divisore D: $\deg(D) = \sum_{h=0}^{m} \nu_h$;

4. $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}) = g$. Infatti, utilizzando la risoluzione fine

$$0 \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{E}^{0,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{E}^{0,1} \longrightarrow 0$$

del fascio $\mathscr{O}$, dimostriamo che il gruppo di coomologia di Cech $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O})$ è isomorfo al primo gruppo di coomologia del complesso :

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}^{0,0}(X) \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{E}^{0,1}(X) \longrightarrow 0 .$$

Abbiamo un'applicazione naturale

$$(\dagger) \qquad \lambda : \mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X) \ni \alpha \to [\bar\alpha] \in \mathrm{H}^1_{\bar\partial}(\mathscr{E}^{0,*}(X), \bar\partial) = \frac{\mathscr{E}^{0,1}(X)}{\bar\partial(\mathscr{E}^{0,0}(X))} .$$

Essa è un isomorfismo. Infatti, se $\alpha \in \mathscr{E}^{0,1}(X)$, allora $\partial\alpha = d\alpha$ verifica

$$\iint_X \partial\alpha = \iint_X d\alpha = 0$$

e quindi esiste $v \in \mathscr{E}^{0,0}(X)$ tale che $\partial\bar\partial v = \partial\alpha$. Quindi $\alpha - \bar\partial v$ è equivalente ad α in $\mathrm{H}^1_{\bar\partial}(\mathscr{E}^{0,*}(X), \bar\partial)$ e $\overline{\alpha - \bar\partial v}$ è un differenziale abeliano di prima specie. Ciò dimostra che λ è surgettiva.

Sia ora $\alpha \in \mathcal{Ab}_{\mathrm{I}}(X)$ e supponiamo che $\bar\alpha = \bar\partial u$ per una $u \in \mathscr{E}^{0,0}(X)$. Poiché α è un differenziale abeliano, $\bar\partial\alpha = 0$ e quindi otteniamo $\partial\bar\partial u = 0$. Poiché X è compatta e connessa, questo implica che u è costante e quindi $\alpha = \partial\,\bar u = 0$.

5. Abbiamo dimostrato nel § 8 che $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}(\{D\})) = \imath(D)$ (l'indice di specialità del divisore D).

Poiché la somma alternata delle dimensioni degli spazi vettoriali di una successione esatta di spazi vettoriali ed applicazioni lineari è zero, otteniamo

$$1 - (\dim_{\mathbb{C}} |D| + 1) - \deg(D) + g - \imath(D) = 0,$$

che è proprio la formula di Riemann-Roch.

9.2. Il caso dei divisori meromorfi. Siano X una superficie di Riemann connessa e compatta di genere g e D un divisore meromorfo su X. Scriviamo $D = D_0 - D_\infty$ come differenza di divisori olomorfi con supporti disgiunti. Fissiamo un fibrato $\{D_\infty\}$ associato a D_∞ ed una sua sezione non nulla s_∞, con $\mathcal{div}(s_\infty) = D_\infty$. Indichiamo con $\mathscr{Q}(D_\infty)$ il fascio quoziente $\mathscr{O}(D_\infty)/s_\infty \cdot \mathscr{O}$. Abbiamo allora la successione esatta corta di fasci di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(D) \xrightarrow{\cdot s_\infty} \mathscr{O}(D_0) \longrightarrow \mathscr{Q}(D_\infty) \longrightarrow 0,$$

da cui ricaviamo la successione esatta lunga in coomologia

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(D)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(D_0)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathscr{Q}(D_\infty)) \to \\ \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}(D)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}(D_0)) \longrightarrow \quad 0, \end{aligned}$$

perché $\mathscr{Q}(D_\infty)$ è un fascio fiacco e quindi i gruppi di coomologia a coefficienti in $\mathscr{Q}(D_\infty)$ sono nulli in dimensione positiva. Abbiamo allora

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(D)) - \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(D_0)) + \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(\mathscr{Q}(D_\infty)) \\ \qquad\qquad - \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}(D)) - \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}(D_0)) = 0 \end{cases}$$

Poiché

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(D)) = \dim_{\mathbb{C}} |D|+1, \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}(D)) = \imath(D), \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(\mathscr{Q}(D_\infty)) = \deg(D_\infty), \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(D_0)) - \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}(D_0)) \\ \qquad\qquad = \dim_{\mathbb{C}} |D_0|+1-\imath(D_0) = \deg(D_0)+1, \end{cases}$$

(l'ultima uguaglianza è la formula di Riemann-Roch per i divisori olomorfi) otteniamo la formula di Riemann-Roch anche nel caso dei divisori meromorfi.

Parte 4

Appendice: Fasci e coomologia di Cech

CAPITOLO XVII

Fasci e coomologia di Cech

1. Fasci e morfismi di fasci d'insiemi

Definizione 1.1. Un *fascio d'insiemi* è un fibrato topologico $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ in cui la proiezione π sia un omeomorfismo locale.

Lo spazio X è la *base*, $\mathscr{S}$ lo *spazio totale* o *étalé* e π la *proiezione sulla base* del fascio. La fibra $\mathscr{S}_x = \pi^{-1}(x)$ si dice la *spiga* su $x \in X$, o l'insieme dei *germi* di $\mathscr{S}$ in x.

Le spighe $\mathscr{S}_x$ sono sottospazi discreti di $\mathscr{S}$ e sono chiuse se e soltanto se $\pi(\mathscr{S}) \subseteq X$ è uno spazio T_1. Infatti la proiezione π è aperta e quindi $\pi(\mathscr{S})$ ha la topologia quoziente, cioè la più fine tra quelle che rendano la proiezione π continua.

Quando ciò non crei confusione, si usa indicare il fascio $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ con la stessa lettera $\mathscr{S}$ che denota il suo spazio totale.

Esempio 1.1. Siano X uno spazio topolgico ed Y uno spazio discreto. Allora $X \times Y \xrightarrow{\pi_X} X$, con $\pi_X(x, y) = x$, è un fascio d'insiemi, che si dice il *fascio costante d'insieme* Y.

Esempio 1.2. Sia $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ un rivestimento di uno spazio topologico X ed $\mathscr{S}$ un aperto di $\tilde{X}$. Allora $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ è un fascio d'insiemi di base X.

Definizione 1.2. Se $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ ed $\mathscr{S}' \xrightarrow{\pi'} X'$ sono due fasci d'insiemi, un morfismo di fibrati

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \xrightarrow{\Phi} & \mathscr{S}' \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ X & \xrightarrow[\phi]{} & X' \end{array}$$

si dice un *morfismo di fasci*.

Quando $X = X'$ e $\phi = \mathrm{id}_X$, chiameremo Φ un *morfismo di fasci su* X.

Definizione 1.3. Se $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ è un fascio su X ed Y un sottospazio di X, allora $\pi^{-1}(Y)$, che indicheremo con $\mathscr{S}|_Y$, è lo spazio totale del fascio $\mathscr{S}|_Y \xrightarrow{\pi} Y$, di base Y, che chiamiamo la *restrizione ad* Y del fascio $\mathscr{S}$.

Più in generale,

Lemma 1.1. *Sia* $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ *un fascio d'insiemi su* X, Y *uno spazio topologico ed* $f : Y \to X$ *un'applicazione continua. Allora*

$$f^*\mathscr{S} = \{(q, \xi) \in Y \times \mathscr{S} \mid f(q) = \pi(\xi)\}, \tag{1.1}$$

$$\varpi(q, \xi) = q, \quad \forall (q, \xi) \in f^*\mathscr{S}, \tag{1.2}$$

definisce un fascio $f^*\mathscr{S} \xrightarrow{\varpi} Y$ *di base* Y.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che ϖ è un omeomorfismo locale. Fissiamo un punto $(q_0, \xi_0) \in f^*\mathscr{S}$. Poiché $\mathscr{S}$ è un fascio, esistono un intorno aperto A di ξ_0 in $\mathscr{S}$ ed un intorno aperto U di $p_0 = f(q_0)$ in X tali che la restrizione $\pi|_A : A \to U$ sia un omeomorfismo. Poiché f è continua, possiamo trovare un intorno aperto V di q_0 in Y con $f(V) \subset U$. Allora $D = (V \times A) \cap f^*\mathscr{S}$ è un aperto di $f^*\mathscr{S}$ e l'applicazione

$$V \ni q \to (q, \pi|_A^{-1}(f(q))) \in D$$

è un'applicazione continua che inverte la $\varpi|_D : D \ni (q, \xi) \to q \in V \subset Y$. La dimostrazione è completa. □

Definizione 1.4. Il fascio $f^*\mathscr{S} \xrightarrow{\varpi} Y$ definito nel Lemma 1.1 si dice il *fascio immagine inversa,* o *pull-back*, di $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ mediante $f \in \mathscr{C}(Y, X)$.

Definizione 1.5. Un sottospazio $\mathscr{T}$ di $\mathscr{S}$ definisce un *sottofascio* di $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ se $\mathscr{T} \xrightarrow{\pi} X$ è ancora un fascio su X.

Lemma 1.2. *Sia* $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ *un fascio su* X. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sottospazio* $\mathscr{T}$ *di* $\mathscr{S}$ *sia lo spazio totale di un sottofascio di* $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ *è che* $\mathscr{T}$ *sia aperto in* $\mathscr{S}$. □

Definizione 1.6. Se $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ ed $\mathscr{S}' \xrightarrow{\pi'} X$ sono due fasci su X, il loro *prodotto fibrato*, o *somma di Whitney*, è il fascio d'insiemi su X che ha come spazio totale

$$\mathscr{S} \oplus_X \mathscr{S}' = \{(\xi, \xi') \in \mathscr{S} \times \mathscr{S}' \mid \pi(\xi) = \pi(\xi')\}, \tag{1.3}$$

con proiezione definita da

$$\varpi : \mathscr{S} \oplus_X \mathscr{S}' \ni (\xi, \xi') \longrightarrow \pi(\xi) = \pi'(\xi') \in X. \tag{1.4}$$

Osserviamo che $\varpi(\mathscr{S} \oplus_X \mathscr{S}') = \pi(\mathscr{S}) \cap \pi'(\mathscr{S}')$.

Questa definizione si estende ad un qualsiasi numero finito di fasci d'insiemi su X. In particolare, indicheremo con $\mathscr{S}^p$ la somma di Whitney di p copie del fascio $\mathscr{S}$:

$$\mathscr{S}^p = \underbrace{\mathscr{S} \oplus_X \cdots \oplus_X \mathscr{S}}_{p \text{ volte}}.$$

Definizione 1.7. Sia $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio d'insiemi su X ed Y un sottospazio di X. Una *sezione continua* di $\mathscr{S}$ su Y è un'applicazione $s \in \mathscr{C}(Y, \mathscr{S})$ tale che

$$\pi \circ s = \mathrm{id}_Y.$$

Indicheremo con $\mathscr{S}(Y)$, l'insieme di tutte le sezioni continue su $Y \subset X$ del fascio $\mathscr{S}$.

Se $s \in \mathscr{S}(Y)$ ed $y \in Y$, il valore di s in y si indica con s_y, od $s_{(y)}$, e si dice il *germe* di s in y.

Proposizione 1.3. *Sia $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio d'insiemi su X.*

(1) *Se U è un aperto di X, ogni $s \in \mathscr{S}(U)$ definisce un omeomorfismo di U su un aperto $s(U)$ di $\mathscr{S}$.*
(2) *La famiglia di aperti $\{s(U) \mid U^{\text{aperto}} \subset X, \quad s \in \mathscr{S}(U)\}$ è una base della topologia di $\mathscr{S}$.*
(3) *Per ogni $\xi \in \mathscr{S}$ esiste un intorno aperto U di $\pi(\xi)$ in X ed una $s \in \mathscr{S}(U)$ tale che $\xi = s_{(\pi(\xi))}$.*
(4) *Se $Y \subset X$ ed $s, s' \in \mathscr{S}(Y)$, allora l'insieme*

$$\{y \in Y \mid s_{(y)} = s'_{(y)}\} \tag{1.5}$$

è un aperto di Y. □

Definizione 1.8. Un fascio d'insiemi $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ si dice *di Hausdorff* se il suo spazio totale $\mathscr{S}$ è di Hausdorff.

Proposizione 1.4 (Principio di continuazione analitica). *Sia $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio di Hausdorff. Se $Y \subset X$, $s, s' \in \mathscr{S}(Y)$ ed $s_{(y_0)} = s'_{(y_0)}$ in un punto $y_0 \in Y$, allora $s_{(y)} = s'_{(y)}$ per ogni punto y della componente connessa di y_0 in Y.*

Dimostrazione. Infatti, se $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio di Hausdorff, l'insieme dei punti in cui i germi di due sezioni in $\mathscr{S}(Y)$ coincidono è aperto e chiuso in Y. □

2. Prefasci d'insiemi

Definizione 2.1. Sia X uno spazio topologico. Un *prefascio d'insiemi* su X è un funtore controvariante $\mathbb{S}$ tra la categoria $\mathrm{Ap}(X)$ degli aperti di X, con i morfismi d'inclusione, e la categoria $\mathfrak{E}$ degli insiemi, con i morfismi di applicazioni tra insiemi.

Definire un prefascio d'insiemi significa cioè assegnare una corrispondenza

$$\mathbb{S} : \mathrm{Ap}(X) \ni U \longrightarrow \mathbb{S}(U) \in \mathfrak{E}, \tag{2.1}$$

e per ogni coppia di aperti $U \subseteq V$ di X un'*applicazione di restrizione* $\rho^V_U : \mathbb{S}(V) \to \mathbb{S}(U)$ tale che

$$\begin{cases} \rho^U_U = \mathrm{id}_{\mathbb{S}(U)}, & \forall U \in \mathrm{Ap}(X), \\ \rho^V_U \circ \rho^W_V = \rho^W_U, & \forall U, V, W \in \mathrm{Ap}(X) \ \text{ con } \ U \subset V \subset W. \end{cases} \tag{2.2}$$

Indicheremo il prefascio $(X, \mathbb{S}, \rho)$ con la sola lettera $\mathbb{S}$, ove ciò non provochi confusione.

Definizione 2.2. Siano $(X, \mathbb{S}, \rho)$ ed $(X, \mathbb{S}', \rho')$ due prefasci d'insiemi sullo stesso spazio topologico X. Un morfismo di prefasci $\Phi : (X, \mathbb{S}, \rho) \to (X, \mathbb{S}', \rho')$ è il dato, per ogni aperto U di X, di un'applicazione $\Phi_U : \mathbb{S}(U) \to \mathbb{S}'(U)$, tale che, per ogni coppia di aperti $U \subset V \subset X$ vi sia un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}(V) & \xrightarrow{\Phi_V} & \mathbb{S}'(V) \\ {\scriptstyle \rho^V_U}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho'^V_U} \\ \mathbb{S}(U) & \xrightarrow{\Phi_U} & \mathbb{S}'(U). \end{array} \tag{2.3}$$

Lemma 2.1. *Se $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ è un fascio d'insiemi su X, allora la corrispondenza*

$$\mathrm{Ap}(X) \ni U \longrightarrow \mathscr{S}(U) \tag{2.4}$$

è un prefascio d'insiemi su X. □

Definizione 2.3. Il prefascio $U \to \mathscr{S}(U)$ si dice *associato* al fascio $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$. Lo indicheremo con $\Gamma\mathscr{S}$.

Esempio 2.1. Siano X, Y due spazi topologici. Associamo ad ogni aperto U di X lo spazio $\mathscr{C}(U, Y)$ delle applicazioni continue di U in Y. Con le applicazioni naturali di restrizione, questo si dice il *prefascio delle applicazioni continue di X in Y*.

Esempio 2.2. Siano M, N due varietà differenziabili di classe $\mathscr{C}^\omega$ e k un ordinale con $0 \leq k \leq \omega$. Facciamo corrispondere ad ogni aperto $U \subset M$ l'insieme $\mathscr{C}^k(U, N)$ delle applicazioni di classe $\mathscr{C}^k$ da U in N. Con le restrizioni naturali, otteniamo il *prefascio delle applicazioni di classe $\mathscr{C}^k$ di M in N*.

Esempio 2.3. Se M ed N sono varietà complesse, indichiamo con $\mathscr{O}(M, N)$, per ogni aperto U di M, l'insieme delle applicazioni olomorfe di U in N. Con le restrizioni naturali, questo è il *prefascio delle applicazioni olomorfe di M in N*.

Esempio 2.4. Sia X uno spazio topologico ed Y un insieme. Se poniamo $\mathscr{S}(U) = Y$ per ogni aperto U di X e $\rho^V_U = \mathrm{id}_Y$ per ogni coppia di aperti $U \subset V$ di X, otteniamo il *prefascio delle applicazioni costanti di X in Y*.

3. Fascio associato ad un prefascio e prefasci canonici

Dato un prefascio $(X, \mathbb{S}, \rho)$ possiamo definire, per ogni punto $p \in X$, il limite diretto

$$\tilde{\mathbb{S}}_p = \varinjlim_{U^{\text{aperto}} \ni p} \mathbb{S}(U). \tag{3.1}$$

Esso è definito come il quoziente dell'unione disgiunta $\bigsqcup_{U^{\text{aperto}} \ni p} \mathbb{S}(U)$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$\mathbb{S}(U_1) \ni s_1 \sim s_2 \in \mathbb{S}(U_2) \Longleftrightarrow \exists p \in U_3^{\text{aperto}} \subset U_1 \cap U_2 \text{ tale che } r_{U_3}^{U_1}(s_1) = r_{U_3}^{U_2}(s_2).$$

Definizione 3.1. Chiamiamo $\tilde{\mathbb{S}}_p$ l'insieme, o la *spiga*, dei *germi* di sezioni di $\mathbb{S}$ in p.

Se U è un aperto di X, $p \in U$ ed $s \in \mathbb{S}(U)$, indichiamo con $s_{(p)} = \rho_p^U(s)$ il *germe definito da s in p.*

Dato un prefascio $(X, \mathbb{S}, \rho)$, siano

$$\tilde{\mathbb{S}} = \bigsqcup_{p \in X} \tilde{\mathbb{S}}_p, \quad \pi : \tilde{\mathbb{S}} \longrightarrow X \text{ con } \pi(\tilde{\mathbb{S}}_p) = \{p\}. \tag{3.2}$$

Proposizione 3.1. *Sia $(X, \mathbb{S}, \rho)$ è un prefascio, ed $\tilde{\mathbb{S}} \xrightarrow{\pi} X$ sia definita dalla* (3.2). *Consideriamo su $\tilde{\mathbb{S}}$ la topologia che ha come base degli aperti gli*

$$A(U, s) = \{s_{(p)} \mid p \in U\}, \quad \textit{con } U \in \mathrm{Ap}(X),\ s \in \mathbb{S}(U).$$

Allora $\tilde{\mathbb{S}} \xrightarrow{\pi} X$ è un fascio d'insiemi su X. □

Definizione 3.2. Il fascio $\tilde{\mathbb{S}} \xrightarrow{\pi} X$ definito dalla (3.2) si dice *associato al prefascio* $(X, \mathbb{S}, \rho)$.

Se $\tilde{\mathbb{S}}$ è il fascio associata al prefascio $\mathbb{S}$, abbiamo un morfismo canonico di prefasci

$$\Phi_U : \mathbb{S}(U) \longrightarrow \tilde{\mathbb{S}}(U) \tag{3.3}$$

che fa corrispondere ad $s \in \mathbb{S}(U)$ la sezione $U \ni p \longrightarrow s_{(p)} \in \tilde{\mathbb{S}}_p \subset \tilde{\mathbb{S}}$.

Osservazione 3.2. Non è detto, in generale, che questo morfismo sia iniettivo o surgettivo.

Ad esempio, se $\mathbb{S}$ è il prefascio delle applicazioni costanti di X in un insieme Y con almeno due elementi, ed X contiene un aperto U non connesso, allora Φ_U è iniettiva, ma non surgettiva. Infatti $\tilde{\mathbb{S}}$ è in questo caso il prefascio delle applicazioni *localmente* costanti di X in Y e quindi $\tilde{\mathbb{S}}(U)$ contiene applicazioni non costanti, mentre $\mathbb{S}(U)$ consiste delle sole applicazioni costanti.

Per costruire un esempio in cui Φ non sia iniettiva, consideriamo uno spazio X che contenga almeno due punti ed in cui i punti siano chiusi e fissiamo una coppia d'insiemi Y, Z con $Y \subsetneq Z$. Fissato un elemento $y_0 \in Y$, poniamo

$$\mathbb{S}(U) = \begin{cases} Z & \text{se } U = X, \\ Y & \text{se } U^{\text{aperto}} \subsetneq X, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_U^X(z) = y_0 & \forall z \in Z, \quad \forall U^{\text{aperto}} \subsetneq X, \\ \rho_U^V(y) = y & \forall y \in Y, \quad \forall U^{\text{aperto}} \subset V^{\text{aperto}} \subsetneq X. \end{cases}$$

Il fascio associato è il fascio costante $X \times Y \xrightarrow{\pi_X} X$. La $\Phi_X : \mathbb{S}(X) \to \tilde{\mathbb{S}}(X)$ non è iniettiva perché associa ad ogni elemento di $\mathbb{S}(X) = Z$ la sezione costante $s_{(p)} = y_0$ per ogni $p \in X$.

Definizione 3.3. Un prefascio $(X, \mathbb{S}, \rho)$ si dice *canonico* se, per ogni aperto U di X, la $\Phi_U : \mathbb{S}(U) \to \tilde{\mathbb{S}}(U)$ è bigettiva.

Proposizione 3.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un prefascio* $(X, \mathbb{S}, \rho)$ *sia canonico è che valgano le due proprietà:*

(S1) *Se* $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ *è una qualsiasi famiglia di aperti di* X, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, *ed* $s, s' \in \mathbb{S}(U)$ *soddisfano* $r^U_{U_i}(s) = r^U_{U_i}(s')$ *per ogni* $i \in I$, *allora* $s = s'$;

(S2) *Se* $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ *è una qualsiasi famiglia di aperti di* X, $U = \bigcup_i U_i$, *per ogni famiglia di* $s_i \in \mathbb{S}(U_i)$, *che soddisfino* $r^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = r^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)$ *per ogni* $i, j \in I$, *esiste un* $s \in \mathbb{S}(U)$ *tale che* $r^U_{U_i}(s) = s_i$ *per ogni* $i \in I$.

Dimostrazione. *Le condizioni* (S1) *ed* (S2) *sono necessarie.* Sia $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di aperti di X, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ e supponiamo che $s, s' \in \mathbb{S}(U)$ soddisfino $r^U_{U_i}(s) = r^U_{U_i}(s')$ per ogni $i \in I$. Abbiamo allora

$$(\Phi_U(s))|_{U_i} = \Phi_{U_i}(r^U_{U_i}(s)) = \Phi_{U_i}(r^U_{U_i}(s')) = (\Phi_U(s'))|_{U_i}, \quad \forall i \in I$$
$$\Longrightarrow (\Phi_U(s)) = (\Phi_U(s'))$$

e questo implica che $s = s'$, perché Φ_U è, per ipotesi, iniettiva.

Supponiamo ora che siano assegnate $s_i \in \mathbb{S}(U_i)$, per $i \in I$, e che queste soddisfino $r^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = r^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)$ per ogni $i, j \in I$. Le $\Phi_{U_i}(s_i)$ soddisfano allora

$$\Phi_{U_i}(s_i)|_{U_i \cap U_j} = \Phi_{U_i \cap U_j}(r^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i)) = \Phi_{U_i \cap U_j}(r^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)) = \Phi_{U_j}(s_j)|_{U_i \cap U_j}, \quad \forall i, j \in I.$$

Esiste quindi un'unica sezione globale $\sigma \in \tilde{\mathbb{S}}(U)$ tale che $\Phi_{U_i}(s_i) = \sigma|_{U_i}$ per ogni $i \in I$. Poiché ϕ_U è surgettiva, $\sigma = \Phi_U(s)$ per una $s \in \mathbb{S}(U)$. Da

$$\Phi_{U_i}(r^U_{U_i}(s)) = \Phi_U(s)|_{U_i} = \sigma|_{U_i} = \Phi_{U_i}(s_i), \quad \forall i \in I$$

otteniamo che $r^U_{U_i}(s) = s_i$, per l'iniettività delle Φ_{U_i}.

Le condizioni (S1) *ed* (S2) *sono sufficienti.* Sia U un qualsiasi aperto di X. Se $s, s' \in \mathbb{S}(U)$ e $\Phi_U(s) = \Phi_U(s')$, allora $s_{(p)} = s'_{(p)}$ per ogni $p \in U$. Ciò significa che per ogni $p \in U$ eiste un intorno aperto U_p di p in U tale che $r^U_{U_p}(s) = r^U_{U_p}(s')$. Per la condizione $(S1)$ questo implica che $s = s'$. Quindi $\Phi_U : \mathbb{S}(U) \to \tilde{\mathbb{S}}(U)$ è iniettiva.

Sia ora $\sigma \in \tilde{\mathbb{S}}(U)$. Per ogni punto $p \in U$ esistono un intorno aperto U_p di p in U ed una $s_p \in \mathbb{S}(U_p)$ tali che $\Phi_{U_p}(s_p) = \sigma|_{U_p}$. Abbiamo poi

$$\Phi_{U_{p_1}\cap U_{p_2}}(r^{U_{p_1}}_{U_{p_1}\cap U_{p_2}}(s_{p_1})) = \sigma|_{U_{p_1}\cap U_{p_2}} = \Phi_{U_{p_1}\cap U_{p_2}}(r^{U_{p_2}}_{U_{p_1}\cap U_{p_2}}(s_{p_2})).$$

Abbiamo già dimostrato che le $\Phi_{U_{p_1}\cap U_{p_2}}$ sono iniettive. Quindi

$$r^{U_{p_1}}_{U_{p_1}\cap U_{p_2}}(s_{p_1}) = r^{U_{p_2}}_{U_{p_1}\cap U_{p_2}}(s_{p_2}), \quad \forall p_1, p_2 \in U.$$

Per $(S2)$ esiste allora una $s \in \mathbb{S}(U)$ tale che $r^U_{U_p}(s) = s_p$ per ogni $p \in U$. Abbiamo allora $\Phi_U(s) = \sigma$. Abbiamo così dimostrato anche la surgettività di Φ_U. La dimostrazione è completa. □

Corollario 3.4. *Il prefascio $\Gamma\mathscr{S}$ associato ad un fascio $\mathscr{S}$ su X è sempre canonico.*

4. Il fascio immagine diretta

Se $(X, \mathbb{S}, \rho)$ è un prefascio sullo spazio topologico X, Y è un altro spazio topologico ed $f : X \to Y$ un'applicazione continua, definiamo un prefascio su Y ponendo

$$f_*\mathbb{S}(V) = \mathbb{S}(f^{-1}(V)), \quad \forall V \in \mathrm{Ap}(Y), \tag{4.1}$$

$$(f_*\rho)^{V_2}_{V_1}(s) = \rho^{f^{-1}(V_2)}_{f^{-1}(V)_1)}(s) \;\; \text{se } V_1, V_2 \in \mathrm{Ap}(Y),\, V_1 \subset V_2, \quad s \in f_*\mathbb{S}(V_2). \tag{4.2}$$

Definizione 4.1. Il prefascio $(Y, f_*\mathbb{S}, f_*\rho)$ si dice *immagine diretta* di $(X, \mathbb{S}, \rho)$ mediante l'applicazione continua f.

Proposizione 4.1. *L'immagine diretta di un fascio canonico è un fascio canonico.* □

Definizione 4.2. Se $\mathscr{S}$ è un fascio sullo spazio topologico X ed $f : X \to Y$ un'applicazione continua a valori in uno spazio topologico Y, il fascio $f_*\tilde{\Gamma}\mathscr{S}$ si indica con $f_*\mathscr{S}$ e si dice *immagine diretta* del fascio $\mathscr{S}$ mediante l'applicazione continua f.

Osservazione 4.2. Un germe $\tau_{(q)}$ nel fascio immagine diretta $f_*\mathscr{S}$ è definito da una sezione $s \in \mathscr{S}(f^{-1}(V))$ per un intorno aperto V di q in Y. In particolare, per ogni $p \in f^{-1}(q)$ vi è un germe $s_{(p)}$ di $\mathscr{S}$ in p che corrisponde a τ_q. In particolare, abbiamo un'inclusione naturale $(f^*\mathscr{S})_{q_0} \hookrightarrow \bigsqcup_{p\in f^{-1}(q_0)}\mathscr{S}_p$ e, per ogni $p_0\,\mathrm{in}f^{-1}(q_0)$, la f definisce un'applicazione naturale di germi

$$\hat{f}_{p_0} : (f_*\mathscr{S})_{q_0} \longrightarrow \mathscr{S}_{p_0}$$

che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
(f_*\mathscr{S})_{q_0} \arrow[rr, "\hat{f}_{p_0}"] \arrow[dr] & & \mathscr{S}_{p_0} \arrow[dl] \\
& \bigsqcup_{p\in f^{-1}(q_0)}\mathscr{S}_p &
\end{tikzcd}$$

in cui la freccia a destra è l'inclusione naturale $\mathscr{S}_{p_0} \hookrightarrow \bigsqcup_{p\in f^{-1}(q_0)}\mathscr{S}_p$.

Proposizione 4.3. *Siano $\mathscr{S}, \mathscr{S}'$ due fasci sulla stessa base X, $\Phi : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ un morfismo di fasci. Siano poi Y, Z spazi topologici ed $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ applicazioni continue. Allora:*

(1) *Risulta definito un morfismo di fasci*

$$f_*\Phi : f_*\mathscr{S} \longrightarrow f_*\mathscr{S}', \tag{4.3}$$

in modo tale che

$$f_*\Phi(f_*\mathscr{S})(V) = (\Phi(\mathscr{S}))(f^{-1}(V)) = (f_*\mathscr{S}')(V), \quad \forall V \in \mathrm{Ap}(Y). \tag{4.4}$$

(2) *Abbiamo*

$$(g\circ f)_*\mathscr{S} = g_*(f_*\mathscr{S}). \tag{4.5}$$

(3) *Abbiamo*

$$(g\circ f)_*\Phi = g_*(f_*\Phi). \tag{4.6}$$

5. Fasci dotati di struttura algebrica

Definizione 5.1. Un *fascio di gruppi abeliani* è un fascio d'insiemi $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$, su ogni spiga $\mathscr{S}_x$ del quale sia assegnata una struttura di gruppo abeliano, in modo tale che la:

$$\mathscr{S} \oplus_X \mathscr{S} \ni (\xi_1, \xi_2) \to \xi_1 - \xi_2 \in \mathscr{S} \tag{5.1}$$

sia un morfismo di fasci (basta cioè che sia un'applicazione continua tra gli spazi étalé).

Indichiamo con $0_{(p)}$ l'elemento neutro di $\mathscr{S}_p$ e con $0 : X \to \mathscr{S}$ la *sezione nulla*, che associa ad ogni $p \in X$ l'elemento neutro $0_{(p)}$ di $\mathscr{S}_p$. Chiaramente $0 \in \mathscr{S}(X)$ è una sezione continua.

Osserviamo che le spighe $\mathscr{S}_p$ di un fascio di gruppi abeliani contengono per ogni p l'elemento neutro e quindi sono non vuote.

Per ogni sottospazio Y di X, l'insieme $\mathscr{S}(Y)$ delle sezioni continue di $\mathscr{S}$ su Y è in modo naturale un gruppo abeliano, con l'operazione:

$$\begin{aligned} &\mathscr{S}(Y)\times\mathscr{S}(Y) \ni (s_1, s_2) \to s_1 - s_2 \in \mathscr{S}(Y) \\ &\text{ove} \quad (s_1 - s_2)_{(p)} = s_{1,(p)} - s_{2,(p)} \quad \forall p \in Y. \end{aligned} \tag{5.2}$$

DEFINIZIONE 5.2. Sia $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio di gruppi abeliani, Y un sottospazio di X ed $s \in \mathscr{S}(Y)$. Il *supporto* di s è l'insieme

$$\operatorname{supp} s = \{p \in Y \mid s_{(p)} \neq 0_{(p)}\}. \tag{5.3}$$

OSSERVAZIONE 5.1. Il supporto di una sezione $s \in \mathscr{S}(Y)$ è un chiuso di Y, perché il luogo dei punti in cui $s_{(p)} = 0_{(p)}$ è aperto.

DEFINIZIONE 5.3. Chiamiamo *supporto* del fascio di gruppi abeliani $\mathscr{S}$ l'insieme:

$$\operatorname{supp} \mathscr{S} = \{x \in X \mid \mathscr{S}_p \neq \{0_{(p)}\}\}. \tag{5.4}$$

DEFINIZIONE 5.4. Un fascio $\mathscr{S}$ di gruppi abeliani su X si dice *un fascio di anelli* se è assegnato un morfismo di fasci:

$$\mathscr{S} \oplus_X \mathscr{S} \ni (\sigma_1, \sigma_2) \to \sigma_1 \sigma_2 \in \mathscr{S} \tag{5.5}$$

che definisca, su ogni spiga $\mathscr{S}_x$, insieme alla struttura di gruppo abeliano già assegnata, una struttura di anello.

Supporremo sempre nel seguito che tale anello sia commutativo e unitario e che l'applicazione $1 : X \to \mathscr{S}$, che associa ad ogni $p \in X$ l'unità $1_{(p)}$ dell'anello $\mathscr{S}_p$, sia continua.

PROPOSIZIONE 5.2. *Sia $\mathscr{S}$ un fascio di anelli su X. Allora:*

$$\operatorname{supp} \mathscr{S} = \{x \in X \mid 1_{(p)} \neq 0_{(p)}\}. \tag{5.6}$$

In particolare, il supporto di un fascio di anelli su X è chiuso.

DEFINIZIONE 5.5. Sia $\mathscr{A}$ un fascio di anelli su X. Un *fascio di $\mathscr{A}$-moduli* su X è un fascio di gruppi abeliani per cui sia definito un morfismo di fasci:

$$\mathscr{A} \oplus_X \mathscr{S} \to \mathscr{S} \tag{5.7}$$

che definisca, su ciascuna spiga $\mathscr{S}_x$, una struttura di $\mathscr{A}_x$-modulo.

In modo del tutto analogo al caso della categoria dei gruppi abeliani, per ogni aperto U di X le sezioni di $\mathscr{A}(U)$ formano un anello e quelle di $\mathscr{S}(U)$ un $\mathscr{A}(U)$-modulo.

Se $\mathscr{S}_1, \ldots, \mathscr{S}_m$ sono fasci di $\mathscr{A}$-moduli, anche $\mathscr{S}_1 \oplus_X \cdots \oplus_X \mathscr{S}_m$ è un fascio di $\mathscr{A}$-moduli, e in modo naturale, si può definire anche il fascio di $\mathscr{A}$-moduli $\mathscr{S}_1 \otimes_{\mathscr{A}} \cdots \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{S}_m$.

Se $\mathscr{S}_i = \mathscr{A}$ per $i = 1, \ldots, m$, scriveremo $\mathscr{S}_1 \oplus_X \cdots \oplus_X \mathscr{S}_m = \mathscr{A}^m$.

6. Morfismi di $\mathscr{A}$-moduli e fasci quozienti

Sia $\mathscr{A}$ un fascio di anelli su X, che considereremo fissato una volta per tutte.

Definizione 6.1. Dati due fasci di $\mathscr{A}$-moduli $\mathscr{S}, \mathscr{S}'$, un morfismo di fasci:

$$\Phi : \mathscr{S} \to \mathscr{S}' \tag{6.1}$$

si dice un *morfismo di $\mathscr{A}$-moduli* se, per ogni $x \in X$, l'applicazione tra le spighe:

$$\Phi_x : \mathscr{S}_x \to \mathscr{S}'_x \tag{6.2}$$

è un morfismo di $\mathscr{A}_x$-moduli.

Gli $\mathscr{A}$-moduli, con i morfismi di $\mathscr{A}$-moduli, formano una *categoria*.

Definizione 6.2. Un sottofascio $\mathscr{I}$ di $\mathscr{A}$ si dice un *fascio di ideali* se, per ogni $x \in X$, l'insieme dei germi $\mathscr{I}_x$ è un ideale di $\mathscr{A}_x$. Un sottofascio $\mathscr{T}$ di un fascio di $\mathscr{A}$-moduli $\mathscr{S}$ è un fascio di sotto-$\mathscr{A}$-moduli di $\mathscr{S}$ se, per ogni $x \in X$, $\mathscr{T}_x$ è un sotto-$\mathscr{A}_x$-modulo di $\mathscr{S}_x$.

Proposizione 6.1. (1) *Se $\mathscr{S}', \mathscr{S}''$ sono due fasci di sotto-$\mathscr{A}$-moduli del fascio di $\mathscr{A}$-moduli $\mathscr{S}$, allora anche:*

$$\mathscr{S}' + \mathscr{S}'' = \bigsqcup_{x \in X} (\mathscr{S}'_x + \mathscr{S}''_x) \quad ed \quad \mathscr{S}' \cap \mathscr{S}'' = \bigsqcup_{x \in X} (\mathscr{S}'_x \cap \mathscr{S}''_x) \tag{6.3}$$

sono fasci di sotto-$\mathscr{A}$-moduli di $\mathscr{S}$.

(2) *Se* (6.1) *è un morfismo di fasci di $\mathscr{A}$-moduli, allora:*

$$\ker \Phi = \bigsqcup_{x \in X} \ker \Phi_x \quad \text{è un sotto-}\mathscr{A}\text{-modulo di } \mathscr{S}, \tag{6.4}$$

$$\operatorname{Imm} \Phi = \bigsqcup_{x \in X} \operatorname{Imm} \Phi_x \quad \text{è un sotto-}\mathscr{A}\text{-modulo di } \mathscr{S}'. \quad \square \tag{6.5}$$

Le usuali nozioni di monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo si estendono in modo ovvio ai fasci di $\mathscr{A}$-moduli.

Definizione 6.3. Una sequenza di $\mathscr{A}$-moduli e di $\mathscr{A}$-morfismi:

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{S}_{h-1} \xrightarrow{\phi_{h-1}} \mathscr{S}_h \xrightarrow{\phi_h} \mathscr{S}_{h+1} \longrightarrow \cdots \qquad (-\infty \leq a < h < b \leq +\infty), \tag{6.6}$$

si dice una *$\mathscr{A}$-successione*. Diciamo che (6.6) è un *complesso* se:

$$\operatorname{Imm} \Phi_{h-1} \subset \ker \Phi_h \quad \forall a < h-1 < h < b \tag{6.7}$$

Diciamo che (6.6) è *esatta* in $\mathscr{S}_h$ se:

$$\operatorname{Imm} \Phi_{h-1} = \ker \Phi_h. \tag{6.8}$$

Diciamo che (6.6) è *esatta*, o *aciclica* se è esatta per ogni h con $a < h-1 < h < b$.

Una $\mathscr{A}$*-successione esatta corta* è una $\mathscr{A}$ successione esatta della forma:

$$\tilde{0} \longrightarrow \mathscr{S}' \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathscr{S} \xrightarrow{\ \beta\ } \mathscr{S}'' \longrightarrow \tilde{0}, \tag{6.9}$$

dove abbiamo indicato con $\tilde{0}$ il fascio di $\mathscr{A}$-moduli in cui per ogni $x \in X$ la spiga in x è l'$\mathscr{A}_x$-modulo nullo.

Osservazione 6.2. Se (6.1) è un morfismo di $\mathscr{A}$-moduli, allora:

$$\tilde{0} \longrightarrow \ker \Phi \longrightarrow \mathscr{S} \longrightarrow \operatorname{Imm} \Phi \longrightarrow \tilde{0} \tag{6.10}$$

è una $\mathscr{A}$-successione esatta corta.

Definizione 6.4. Se $\mathscr{S}'$ è un sotto-$\mathscr{A}$-modulo di $\mathscr{S}$, definiamo l'$\mathscr{A}$-modulo quoziente $\mathscr{S}/\mathscr{S}'$ ponendo:

$$\mathscr{S}/\mathscr{S}' = \bigsqcup_{x \in X} \mathscr{S}_x/\mathscr{S}'_x, \tag{6.11}$$

ove su ogni spiga $\mathscr{S}_x/\mathscr{S}'_x$ si considera la struttura di $\mathscr{A}_x$-modulo quoziente.

In particolare, se $\mathscr{I}$ è un fascio di ideali di $\mathscr{A}$, il fascio quoziente $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ è un fascio di anelli su X.

La proiezione naturale definisce un morfismo di $\mathscr{A}$-moduli:

$$\pi : \mathscr{S} \to \mathscr{S}/\mathscr{S}' \tag{6.12}$$

ed otteniamo una $\mathscr{A}$-successione esatta corta:

$$\tilde{0} \longrightarrow \mathscr{S}' \longrightarrow \mathscr{S} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathscr{S}/\mathscr{S}' \longrightarrow \tilde{0}. \tag{6.13}$$

Proposizione 6.3. *Il funtore* $\Gamma(U, \cdot\,)$ *è esatto a sinistra: cioè, per ogni aperto U di X ed ogni successione esatta corta* (6.10) *otteniamo una successione esatta:*

$$0 \longrightarrow \mathscr{S}'(U) \longrightarrow \mathscr{S}(U) \longrightarrow \mathscr{S}''(U). \tag{6.14}$$

Osservazione 6.4. Il funtore $\Gamma(U, \cdot\,)$ non è, in generale, esatto a destra: questo significa che l'ultima applicazione in (6.14) non è necessariamente surgettiva.

Definizione 6.5. Dato un morfismo (6.1), il fascio quoziente $\mathscr{S}'/\operatorname{Imm}\Phi$ si indica anche con $\operatorname{coker}\Phi$. Abbiamo naturalmente una $\mathscr{A}$-successione esatta corta:

$$\tilde{0} \longrightarrow \operatorname{Imm} \Phi \longrightarrow \mathscr{S}' \longrightarrow \operatorname{coker} \Phi \longrightarrow \tilde{0}. \tag{6.15}$$

Scriveremo nel seguito, per semplicità, 0 invece di $\tilde{0}$ per indicare il fascio nullo di $\mathscr{A}$-moduli.

7. Coomologia di Cech con coefficienti in un fascio

Siano X uno spazio topologico ed $\mathscr{S}$ un fascio di gruppi abeliani su X.

Fissiamo un ricoprimento aperto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ di X. Per ogni intero $q \geq 0$, fissati $i_0, i_1, \dots, i_q \in I$ denotiamo con $U_{i_0,i_1,\dots,i_q}$ l'intersezione = $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_q}$. Indichiamo con $\mathscr{N}_q(\mathscr{U})$ l'insieme delle $(q+1)$-uple di indici distinti di I tali che $U_{i_0,i_1,\dots,q} \neq \emptyset$.

Definizione 7.1. Sia $\mathscr{C}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S})$ il gruppo abeliano delle *q-cocatene alternate di $\mathscr{U}$ con coefficienti in $\mathscr{S}$*: esso consiste di tutte le

$$(f_{i_0,i_1,\dots,i_q}) \in \prod\nolimits_{(i_0,\dots,i_q)\in\mathscr{N}_q(\mathscr{U})} \mathscr{S}(U_{i_0,i_1,\dots,i_q})$$

che soddisfano[1]:

$$f_{i_{\sigma_0},i_{\sigma_1},\dots,i_{\sigma_q}} = \varepsilon(\sigma) f_{i_0,i_1,\dots,i_q} \ \forall \sigma \in \mathbf{S}_{q+1}.$$

Indichiamo con $\delta_q^{\mathscr{U}} = \delta_q = \delta$ l'applicazione:

$$\delta_q : \mathscr{C}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S}) \ni (f_{i_0,i_1,\dots,i_q}) \longrightarrow ((\delta f)_{i_0,i_1,\dots,i_{q+1}}) \in \mathscr{C}^{q+1}(\mathscr{U}, \mathscr{S}) \tag{7.1}$$

definita da:

$$(\delta f)_{i_0,i_1,\dots,i_{q+1}} = \sum\nolimits_{j=0}^{q+1} (-1)^j f_{i_0,\dots,\hat{i}_j\dots,i_{q+1}}|_{U_{i_0,i_1,\dots,i_{q+1}}}). \tag{7.2}$$

Le q-cocatene $f \in \mathscr{C}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S})$ che soddisfano $\delta(f) = 0$ si dicono *q-cocicli*; quelle della forma $\delta_{q-1}(\phi)$, con $\phi \in \mathscr{C}^{q-1}(\mathscr{U}, \mathscr{S})$, si dicono q-cobordi.

Indicheremo con $\mathscr{Z}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S})$ il gruppo dei q-cocicli e con $\mathscr{B}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S})$ il gruppo dei q-cobordi.

Lemma 7.1. *Per ogni $q \geq 0$ risulta* $\delta_{q+1} \circ \delta_q = 0$.

Dimostrazione. Se $f = (f_{i_0,\dots,i_q}) \in \mathscr{C}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S})$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
(\delta_{q+1} \circ \delta_q f)_{i_0,\dots,i_{q+2}} &= \sum\nolimits_{j=0}^{q+2} (-1)^j (\delta_q f)_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{q+1}}|_{U_{i_0,\dots,i_{q+2}}} \\
&= \sum\nolimits_{j=0}^{q+2} \sum\nolimits_{h=0}^{j-1} (-1)^{j+h} f_{i_0,\dots,\hat{i}_h,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{q+1}}|_{U_{i_0,\dots,i_{q+2}}} \\
&\quad - \sum\nolimits_{j=0}^{q+2} \sum\nolimits_{h=j+1}^{q+1} (-1)^{j+h} f_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,\hat{i}_h,\dots,i_{q+1}}|_{U_{i_0,\dots,i_{q+2}}} \\
&= \sum\nolimits_{0\leq j<h\leq q+1} f_{i_0,\dots,\hat{i}_h,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{q+1}}|_{U_{i_0,\dots,i_{q+2}}} \\
&\quad - \sum\nolimits_{0\leq h<j\leq q+1} f_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,\hat{i}_h,\dots,i_{q+1}}|_{U_{i_0,\dots,i_{q+2}}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

[1]Abbiamo indicato con $\mathbf{S}_{q+1}$ il gruppo delle permutazioni dei $(q+1)$ elementi $\{0, 1, \dots, q\}$. Se $\sigma \in \mathbf{S}_{q+1}$, il simbolo $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ indica la sua segnatura.

Quindi, per ogni intero non negativo q, il gruppo $\mathscr{B}^q(\mathscr{U},\mathscr{S})$ dei q-cobordi è un sottogruppo del gruppo $\mathscr{Z}^q(\mathscr{U},\mathscr{S})$ dei q-cocicli.

La successione dei gruppi delle cocatene e degli omomorfismi $\delta_q = \delta_q^{\mathscr{U}}$ che li legano formano un *complesso*[2] di gruppi abeliani e di omomorfismi :
(7.3)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \mathscr{C}^0(\mathscr{U},\mathscr{S}) & \xrightarrow{\delta_0} & \mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathscr{S}) & \xrightarrow{\delta_1} & \mathscr{C}^2(\mathscr{U},\mathscr{S}) & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots \to \mathscr{C}^{q-1}(\mathscr{U},\mathscr{S}) & \xrightarrow{\delta_{q-1}} & \mathscr{C}^q(\mathscr{U},\mathscr{S}) & \xrightarrow{\delta_q} & \mathscr{C}^{q+1}(\mathscr{U},\mathscr{S}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Definizione 7.2. Indichiamo con δ_{-1} l'applicazione nulla $0 = \mathscr{C}^{-1}(\mathscr{U},\mathscr{S}) \to \mathscr{C}^0(\mathscr{U},\mathscr{S})$. Con questa convenzione, definiamo per ogni intero $q \geq 0$ il *q-esimo gruppo di coomologia di Cech a coefficienti in $\mathscr{S}$ del ricoprimento $\mathscr{U}$* come il quoziente:

$$\mathrm{H}^q(\mathscr{U},\mathscr{S}) = \frac{\ker\delta_q}{\operatorname{im}\delta_{q-1}} = \frac{\mathscr{Z}^q(\mathscr{U},\mathscr{S})}{\mathscr{B}^q(\mathscr{U},\mathscr{S})}. \tag{7.4}$$

Osserviamo che, poiché $\mathscr{S}$ è un fascio, $\mathrm{H}^0(\mathscr{U},\mathscr{S}) \simeq \mathscr{Z}^0(\mathscr{U},\mathscr{S}) \simeq \mathscr{S}(X)$. Infatti gli elementi (f_i) di $\mathscr{Z}^0(\mathscr{U},\mathscr{S})$ sono tutti e soli quelli della forma $f_i = f|_{U_i}$ per una $f \in S(X)$ e la f è univocamente determinata dalle sue restrizioni agli aperti U_i del ricoprimento.

Un *raffinamento* del ricoprimento aperto $\mathscr{U}$ è il dato di un altro ricoprimento aperto $\mathscr{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ e di una *funzione di raffinamento* $\tau : J \to I$, tale che $V_j \subset U_{\tau_j}$ per ogni $j \in J$.

Scriveremo $\mathscr{V} \prec_\tau \mathscr{U}$ per indicare che $\mathscr{V}$ è un raffinamento di $\mathscr{U}$ con funzione di raffinamento τ.

Se $\mathscr{V} \prec_\tau \mathscr{U}$, la τ induce un omomorfismo dei cocicli alternati a coefficienti in $\mathscr{S}$ dei due ricoprimenti:

$$\tau^* = \tau^*_q : \mathscr{C}^q(\mathscr{U},\mathscr{S}) \longrightarrow \mathscr{C}^q(\mathscr{V},\mathscr{S}), \quad \text{definita da}$$
$$(\tau^* f)_{j_0,\dots,j_q} = f_{j_0,\dots,j_q}|_{V_{j_0,\dots,j_q}} \quad \forall (j_0,\dots,j_q) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{V}).$$

Abbiamo:

$$\delta_q^{\mathscr{V}} \circ \tau^*_q = \tau^*_{q+1} \circ \delta_q^{\mathscr{U}} \qquad \text{per ogni} \quad q = 0, 1, \dots. \tag{7.5}$$

Valgono dunque le inclusioni

$$\tau^*_q(\mathscr{Z}^q(\mathscr{U},\mathscr{S})) \subset \mathscr{Z}^q(\mathscr{V},\mathscr{S}) \quad \text{e} \quad \tau^*_q(\mathscr{B}^q(\mathscr{U},\mathscr{S})) \subset \mathscr{B}^q(\mathscr{V},\mathscr{S}).$$

Per passaggio ai quozienti, otteniamo un omomorfismo

$$\hat{\tau}^*_q : \mathrm{H}^q(\mathscr{U},\mathscr{S}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathscr{V},\mathscr{S}) \qquad \text{per ogni} \quad q = 0, 1, \dots \tag{7.6}$$

[2]La parola *complesso* significa che il nucleo di ciascun omomorfismo contiene l'immagine del precedente.

Definizione 7.3. Il *q-esimo gruppo* $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{S})$ *della coomologia di Cech di X a coefficienti nel fascio* $\mathscr{S}$ è il limite induttivo, rispetto ai raffinamenti, dei gruppi $\mathrm{H}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S})$ al variare di $\mathscr{U}$ nella famiglia dei ricoprimenti aperti di X:

$$\check{\mathrm{H}}^q(X, \mathscr{S}) = \operatorname*{inj\,lim}_{\mathscr{U}} \mathrm{H}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S}) \qquad \text{per ogni} \quad q = 0, 1, \dots \tag{7.7}$$

Una classe di coomologia in $\check{\mathrm{H}}^q(X, \mathscr{S})$ è rappresentata da un q-cociclo $f \in \mathscr{Z}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S}))$, modulo la relazione di equivalenza che identifica f a $\tau_q^*(f) + \delta_{q-1}^{\mathscr{V}}(g)$ se $\mathscr{V} \prec_\tau \mathscr{U}$ e $g \in \mathscr{Z}^{q-1}(\mathscr{V}, \mathscr{S}))$.

Possiamo definire i gruppi di coomologia di Cech anche come gruppi di coomologia di un complesso di cocatene. A questo scopo definiamo, per ogni intero $q \geq 0$, il gruppo abeliano $\mathscr{C}^q(X, \mathscr{S})$ delle q-cocatene in X a coefficienti nel fascio di gruppi abeliani $\mathscr{S}$ come il limite induttivo rispetto ai ricoprimenti aperti e ai raffinamenti :

$$\mathscr{C}^q(X, \mathscr{S}) = \operatorname*{inj\,lim}_{\mathscr{U}} \mathscr{C}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S}) \tag{7.8}$$

Per definizione di limite induttivo, un elemento di $\mathscr{C}^q(X, \mathscr{S})$ è rappresentato da una $f = (f_{i_0, i_1, \dots, i_q}) \in \mathscr{C}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S})$ e due q-cocicli $f^h = (f^h_{i_0, i_1, \dots, i_q}) \in \mathscr{C}^q(\mathscr{U}^h, \mathscr{S})$ $(h = 1, 2)$ definiscono lo stesso elemento di $\mathscr{C}^q(X, \mathscr{S})$ se esiste un raffinamento comune $\mathscr{V} \prec_{\tau_h} \mathscr{U}^h$ (per $h = 1, 2$) tale che $\tau_1^*(f^1) = \tau_2^*(f^2)$. Poiché l'addizione commuta con le applicazioni indotte dai raffinamenti, gli insiemi $\mathscr{C}^q(X, \mathscr{S})$ hanno una struttura naturale di gruppi abeliani. Ancora, poiché le applicazioni di cobordo commutano con gli omomorfismi indotti dai raffinamenti, otteniamo un complesso di gruppi abeliani e di omomorfismi :

(7.9)
$$\begin{array}{l} 0 \to \mathscr{C}^0(X, \mathscr{S}) \xrightarrow{\delta_0^X} \mathscr{C}^1(X, \mathscr{S}) \xrightarrow{\delta_1^X} \mathscr{C}^2(X, \mathscr{S}) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \to \mathscr{C}^{q-1}(X, \mathscr{S}) \xrightarrow{\delta_{q-1}^X} \mathscr{C}^q(X, \mathscr{S}) \xrightarrow{\delta_q^X} \mathscr{C}^{q+1}(X, \mathscr{S}) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Quando ciò non possa creare confusione, scriveremo a volte per semplicità δ_q, o anche δ, invece di δ_q^X.

I sottogruppi

$$\begin{array}{ll} \mathscr{Z}^q(X, \mathscr{S}) = \ker \delta_q^X & \text{dei } q\text{-cocicli in } \mathscr{C}^q(X, \mathscr{S}) \text{ e} \\ \mathscr{B}^q(X, \mathscr{S}) = \delta_{q-1}^X(\mathscr{C}^{q-1}(X, \mathscr{S})) & \text{dei } q\text{-cobordi di } \mathscr{C}^q(X, \mathscr{S}) \end{array}$$

sono i limiti induttivi (rispetto alle applicazioni di raffinamento) dei corrispondenti sottogruppi $\mathscr{Z}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S})$ e $\mathscr{B}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S})$. Il q-esimo gruppo di coomologia di Cech è allora dato da:

$$\check{\mathrm{H}}^q(X,\mathscr{S}) = \frac{\ker\,\delta_q^X}{\operatorname{im}\delta_{q-1}^X} = \frac{\mathscr{Z}^q(X,\mathscr{S})}{\mathscr{B}^q(X,\mathscr{S})}. \tag{7.10}$$

Siano $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ ed $\mathscr{F} \xrightarrow{\varpi} X$ due fasci di gruppi abeliani sullo spazio topologico X e $\Phi : \mathscr{S} \to \mathscr{F}$ un omomorfismo di fasci di gruppi abeliani. Per ogni aperto U di X esso definisce un omomorfismo $\Phi_U : \mathscr{S}(U) \to \mathscr{F}(U)$, che ci permette di costruire, assegnato un ricoprimento $\mathscr{U}$ di X, un omomorfismo naturale tra le q cocatene alternate di $\mathscr{U}$ a coefficienti in $\mathscr{S}$ e in $\mathscr{F}$:

$$\begin{cases} \Phi_q : \mathscr{C}^q(\mathscr{U},\mathscr{S}) \longrightarrow \mathscr{C}^q(\mathscr{U},\mathscr{F}) \\ \big(\Phi_q(f)\big)_{i_0,i_1,\dots,i_q} = (\Phi_{U_{i_0,i_1,\dots,i_q}}(f_{i_0,i_1,\dots,i_q})). \end{cases} \tag{7.11}$$

Si verifica facilmente che gli omomorfismi Φ_q commutano con le operazioni di cobordo δ_q dei due complessi di cocatene alternate a coefficienti in $\mathscr{S}$ e in $\mathscr{F}$. Risultano quindi definite applicazioni naturali

$$\Phi_* = \Phi_{q_*} : \mathrm{H}^q(\mathscr{U},\mathscr{S}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathscr{U},\mathscr{F}) \tag{7.12}$$

per ogni $q = 0, 1, \dots$. Queste applicazioni a loro volta commutano con gli omomorfismi dei raffinamenti e quindi, finalmente, otteniamo un'applicazione naturale:

$$\Phi_* = \Phi_{q_*} : \check{\mathrm{H}}^q(X,\mathscr{S}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^q(X,\mathscr{F}) \tag{7.13}$$

per ogni $q = 0, 1, \dots$.

Osserviamo che per passaggio al quoziente otteniamo ancora omomorfismi $\Phi_q : \mathscr{C}^q(X,\mathscr{S}) \longrightarrow \mathscr{C}^q(X,\mathscr{F})$ che commutano con le operazioni di cobordo e quindi l'omomorfismo Φ_{q_*} tra i gruppi di coomologia si può definire anche a partire dagli omomorfismi dei gruppi di cocatene. Abbiamo il diagramma commutativo (a righe esatte):

(7.14)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{B}^q(X,\mathscr{S}) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_q"'] & \mathscr{Z}^q(X,\mathscr{S}) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_q"'] & \check{\mathrm{H}}^q(X,\mathscr{S}) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_q"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{B}^q(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & \mathscr{Z}^q(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & \check{\mathrm{H}}^q(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

8. Il teorema di Serre

I gruppi di coomologia di Cech hanno buone proprietà rispetto ai morfismi di fasci quando si assuma che lo spazio di base X sia paracompatto.

Ricordiamo che uno spazio topologico X si dice *paracompatto* se è di Hausdorff e se ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento localmente finito. Gli spazi paracompatti sono normali e tutti gli spazi metrizzabili sono paracompatti. Per uno spazio topologico connesso e localmente compatto, la paracompattezza equivale all'essere unione numerabile di insiemi compatti (numerabile all'infinito).

Se X è paracompatto ed $\mathscr{S}$ un fascio su X, i gruppi di coomologia di Cech $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{S})$ si possono calcolare utilizzando soltanto ricoprimenti aperti localmente finiti.

Lemma 8.1. *Sia X uno spazio normale ed $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un suo ricoprimento aperto localmente finito. Possiamo allora trovare un ricoprimento aperto $\mathscr{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ di X tale che $\bar{V}_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$.*

Dimostrazione. Bene-ordiniamo l'insieme I [3]. Costruiremo il ricoprimento $\mathscr{V}$ per induzione transfinita, in modo che

(1) $\bar{V}_i \subset U_i \quad \forall i \in I$,
(2) $\forall j \in I$, $\{V_i \mid i \preceq j\} \cup \{U_i \mid i \succ j\}$ è un ricoprimento aperto di X.

Dimostriamo induttivamente la proposizione

(P_{j_0}) *Gli aperti V_i sono definiti per ogni $i \prec j_0$ in modo che la* (1) *valga per $i \prec j_0$ e che, per ogni $h \in I$ con $h \prec j_0$, la famiglia di aperti*

$$\{V_i \mid i \preceq h\} \cup \{U_i \mid i \succ h\}$$

sia un ricoprimento aperto di X.

L'affermazione (P_{j_0}) è banalmente vera se j_0 è il minimo di I.

Osserviamo inoltre che, se (P_{j_0}) è valida per uno $j_0 \in I$, allora:

$$\mathscr{V}_{j_0} = \{V_i \mid i \prec j_0\} \cup \{U_i \mid i \succeq j_0\}$$

è un ricoprimento aperto di X. Infatti, se $x \in X$, allora $I_x = \{i \in I \mid x \in U_i\}$ è finito perché $\mathscr{U}$ è localmente finito. Se qualche $i \in I_x$ è $\succeq j_0$, allora $\mathscr{V}_{j_0}$ contiene un aperto U_i che contiene x. Altrimenti, indichiamo con j' il più grande elemento di I_x. Poiché per l'ipotesi induttiva

$$\{V_i \mid i \preceq j'\} \cup \{U_i \mid i \succ j'\}$$

è un ricoprimento aperto di X, $x \in V_i$ per qualche $i \preceq j' \prec j_0$ e dunque appartiene a un $V_i \in \mathscr{V}_{j_0}$.

Consideriamo ora l'insieme

$$F = \complement\left(\bigcup_{j\prec j_0} V_j \cup \bigcup_{j\succ j_0} U_j\right).$$

[3] Ciò significa che I è totalmente ordinato rispetto ad una relazione $\prec$ e che ogni sottoinsieme non vuoto di I ammette minimo rispetto a $\prec$.

Esso è un chiuso contenuto in U_{j_0} in quanto $\mathscr{V}_{j_0}$ è un ricoprimento di X. Essendo X uno spazio T_4, il chiuso F ha un intorno chiuso G contenuto in U_{j_0}. Posto $V_{j_0} = \mathring{G}$, chiaramente

$$\{V_i \mid i \preceq j_0\} \cup \{U_i \mid i \succ j_0\}$$

è un ricoprimento aperto di X e vale la (1) per $j \preceq j_0$. Se I ammette massimo e j_0 è il massimo di I, allora $\mathscr{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ soddisfa la tesi del Lemma. Se j_0 non è il massimo di I, abbiamo ottenuto la $(P_{j'_0})$ ove j'_0 è l'elemento di I successivo a j_0 (esso è ben definito come il minimo dell'insieme non vuoto $\{i \in I \mid i \succ j_0\}$ di I). Per induzione transfinita otteniamo quindi una famiglia $\mathscr{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ tale che valgano le (1), (2). Chiaramente $\mathscr{V}$ è un ricoprimento aperto di X: se $x \in X$ e j è il minimo indice in I tale che $x \notin U_j$, la (2) ci dice che $x \in V_i$ per qualche $i \preceq j$.

La dimostrazione è completa. □

Da questo Lemma ricaviamo il seguente:

Lemma 8.2. *Sia X uno spazio normale ed $\mathscr{U}$ un suo ricoprimento aperto localmente finito. Fissiamo un intero $q \geq 0$ e supponiamo che, per ogni $(i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{U})$ sia assegnato un ricoprimento aperto $\mathscr{W}^{i_0,i_1,\dots,i_q} = \{W_\alpha^{i_0,i_1,\dots,i_q}\}_{\alpha \in A_{i_0,i_1,\dots,i_q}}$ di $U_{i_0,i_1,\dots,i_q}$. Allora esiste un raffinamento $\mathscr{V} \prec_\tau \mathscr{U}$, mediante un ricoprimento aperto $\mathscr{V} = \{V_j\}_{j\in J}$, tale che :*

(8.1)
$$\begin{cases} \forall (j_0, j_1, \dots, j_q) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{V}) \;\; \textit{tale che} \;\; (\tau(j_0), \tau(j_1), \dots, \tau(j_q)) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{U}) \\ \exists \alpha \in A_{\tau(j_0),\tau(j_1),\dots,\tau(j_q)} \quad \textit{tale che} \quad V_{j_0,j_1,\dots,j_q} \subset W_\alpha^{\tau(j_0),\tau(j_1),\dots,\tau(j_q)} . \end{cases}$$

Dimostrazione. Per il Lemma 8.1 possiamo trovare un ricoprimento $\Gamma = \{\Omega_i\}_{i\in I}$ tale che $\bar{\Omega}_i \subset U_i$ per ogni indice $i \in I$. Il ricoprimento Γ è anch'esso localmente finito.

Per ogni $p \in X$, l'insieme I_p degli indici i per cui $U_i \cap G_p \neq \emptyset$ è finito.

Osserviamo che $\{\bar{\Omega}_i\}_{i\in I\setminus I_p}$ è una famiglia di chiusi localmente finita. Quindi la loro unione $\bigcup_{i\in I\setminus I_p} \bar{\Omega}_i$ è un chiuso che non contiene il punto p e perciò

$$\tilde{V}_p = \left(\bigcap_{i\in I_p} U_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i\in I\setminus I_p} \bar{\Omega}_i \right)$$

è un intorno aperto di p.

Per ogni $(i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{U}) \cap I_p^{q+1}$ scegliamo $\alpha = \alpha_{i_0,i_1,\dots,i_q} \in A_{i_0,i_1,\dots,i_q}$ tale che $p \in W_\alpha^{i_0,i_1,\dots,i_q}$.

A questo punto, definiamo per ogni $p \in X$:

$$V_p = \begin{cases} \tilde{V}_p & \text{se} \quad \mathscr{N}_q(\mathscr{U}) \cap I_p^{q+1} = \emptyset \\ \bigcap_{(i_0,i_1,\dots,i_q)\in \mathscr{N}_q(\mathscr{U})\cap I_p^{q+1}} (W_{\alpha_{i_0,i_1,\dots,i_q}}^{i_0,i_1,\dots,i_q} \cap \tilde{V}_p) & \text{se} \quad \mathscr{N}_q(\mathscr{U}) \cap I_p^{q+1} \neq \emptyset . \end{cases}$$

Definiamo $\mathscr{V} = \{V_p\}_{p\in X}$. Abbiamo $\mathscr{V} \prec_\tau \mathscr{U}$, con una funzione di raffinamento $\tau : X \ni x \to \tau(x) \in I$ che si può scegliere imponendo la sola condizione che $\tau(p) \in I_p$ per ogni $p \in X$. Per costruzione, se $p_0, p_1, \ldots, p_q$ sono punti distinti di X tali che $(p_0, p_1, \ldots, p_q) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{V})$ e $(\tau(p_0), \tau(p_1), \ldots, \tau(p_q)) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{U})$, allora $\tau(p_i) \in I_{p_j}$ per ogni $0 \leq i, j \leq q$ e

$$V_{p_0,p_1,\ldots,p_q} \subset W^{\tau(p_0),\tau(p_1),\ldots,\tau(p_q)}_{\alpha_{\tau(p_0),\tau(p_1),\ldots,\tau(p_q)}}.$$

Quindi $\mathscr{V} \prec_\tau \mathscr{U}$ soddisfa la tesi del Lemma. □

Dimostriamo ora che, se X è paracompatto, il funtore $\mathscr{S} \to \mathscr{C}^q(X, \mathscr{S})$, dalla categoria dei fasci di gruppi abeliani su X a quella dei gruppi abeliani, è esatto. Abbiamo cioè:

Teorema 8.3. *Sia X uno spazio paracompatto e sia*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathscr{G} \xrightarrow{\ \beta\ } \mathscr{H} \longrightarrow 0 \tag{8.2}$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani. Allora per ogni intero $q \geq 0$ la successione di gruppi abeliani :

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}^q(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\ \alpha_q\ } \mathscr{C}^q(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\ \beta_q\ } \mathscr{C}^q(X,\mathscr{H}) \longrightarrow 0 \tag{8.3}$$

è esatta.

Dimostrazione. (a) Dimostriamo che $\mathscr{C}^q(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha_q} \mathscr{C}^q(X,\mathscr{G})$ è iniettiva.

Sia $f \in \mathscr{C}^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$, per un qualsiasi ricoprimento aperto $\mathscr{U}$ di X. Dire che l'elemento di $\mathscr{C}^q(X,\mathscr{G})$ definito da $\alpha_q(f)$ è nullo, equivale a dire che esiste un raffinamento $\mathscr{V} \prec_\tau \mathscr{U}$ tale che $\tau^*_q \circ \alpha_q(f) = 0$. Questa relazione ci dà $\alpha_q(\tau^*(f)) = 0$. Poiché $(\alpha_q(\tau^* f))_{j_0,j_1,\ldots,j_q} = \alpha_{V_{j_0,j_1,\ldots,j_q}}((\tau^* f)_{j_0,j_1,\ldots,j_q})$ per ogni $(j_0, j_1, \ldots, j_q) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{V})$ e la $\alpha_{V_{j_0,j_1,\ldots,j_q}} : \mathscr{S}(V_{j_0,j_1,\ldots,j_q}) \to \mathscr{F}(V_{j_0,j_1,\ldots,j_q})$ è iniettiva, ne segue che $\tau^* f = 0$ e quindi f definisce l'elemento nullo di $\mathscr{C}^q(X,\mathscr{F})$.

(b) Dimostriamo l'esattezza della successione

$$\mathscr{C}^q(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\ \alpha_q\ } \mathscr{C}^q(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\ \beta_q\ } \mathscr{C}^q(X,\mathscr{H}).$$

Sia γ un elemento di $\mathscr{C}^q(X,\mathscr{G})$ con $\alpha_q(\gamma) = 0$. Sia $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto localmente finito di X e sia $g \in \mathscr{C}^q(\mathscr{U},\mathscr{G})$ una q-cocatena che rappresenta γ. A meno di passare a un raffinamento localmente finito di $\mathscr{U}$, possiamo supporre che $\alpha_q(g) = 0$. Per l'esattezza di (8.2), per ogni $(i_0, i_1, \ldots, i_q) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{U})$ possiamo trovare un intorno aperto $W_p^{i_0,i_1,\ldots,i_q}$ di p in $U_{i_0,i_1,\ldots,i_q}$ ed una $f_p^{i_0,i_1,\ldots,i_q} \in \mathscr{F}(W_p^{i_0,i_1,\ldots,i_q})$ tale che $r^{U_{i_0,i_1,\ldots,i_q}}_{W_p^{i_0,i_1,\ldots,i_q}}(g_{i_0,i_1,\ldots,i_q}) = \alpha_{U_{i_0,i_1,\ldots,i_q}}(f_p^{i_0,i_1,\ldots,i_q})$. Per il Lemma 8.2 esiste un raffinamento aperto $\mathscr{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ di $\mathscr{U}$, che possiamo scegliere localmente finito:

$$\mathscr{V} \prec_\tau \mathscr{U}$$

tale che per ogni $(j_0, j_1, \ldots, j_q) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{V})$ con $(\tau(j_0), \tau(j_1), \ldots, \tau(j_q)) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{U})$, possiamo trovare un punto $p(j_0, j_1, \ldots, j_q)$ con

$$V_{j_0,j_1,\ldots,j_q} \subset W^{\tau(j_0),\tau(j_1),\ldots,\tau(j_q)}_{p(j_0,j_1,\ldots,j_q)} \subset U_{\tau(j_0),\tau(j_1),\ldots,\tau(j_q)}\,.$$

Definiamo un elemento $\phi \in \mathscr{C}^q(\mathscr{V}, \mathscr{F})$ ponendo :

$$\phi_{j_0,j_1,\ldots,j_q} = r^{W^{\tau(j_0),\tau(j_1),\ldots,\tau(j_q)}_{p(j_0,j_1,\ldots,j_q)}}_{V_{j_0,j_1,\ldots,j_q}} \left(f^{\tau(j_0),\tau(j_1),\ldots,\tau(j_q)}_{p(j_0,j_1,\ldots,j_q)}\right) \quad \text{per } (j_0, j_1, \ldots, j_q) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{V})\,.$$

Se indichiamo con $[\phi]$ l'elemento di $\mathscr{C}^q(X, \mathscr{F})$ definito da ϕ, abbiamo $\alpha_q([\phi]) = \gamma$.

(c) La dimostrazione della surgettività dell'applicazione $\mathscr{C}^q(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\beta_q} \mathscr{C}^q(X, \mathscr{H})$ è del tutto analoga a quella di (b). □

Osserviamo che abbiamo ottenuto, con la dimostrazione di questo teorema, l'enunciato più preciso :

Proposizione 8.4. *Sia X uno spazio topologico e sia*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathscr{G} \tag{8.4}$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X. Allora, per ogni $q \geq 0$, otteniamo una successione esatta di gruppi abeliani:

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}^q(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\ \alpha_q\ } \mathscr{C}^q(X, \mathscr{G})\,. \tag{8.5}$$

Supponiamo ora che X sia paracompatto. Allora se la successione di fasci di gruppi abeliani :

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathscr{G} \xrightarrow{\ \beta\ } \mathscr{H} \tag{8.6}$$

è esatta, è esatta anche la successione di gruppi abeliani:

$$\mathscr{C}^q(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\ \alpha_q\ } \mathscr{C}^q(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\ \beta_q\ } \mathscr{C}^q(X, \mathscr{H})\,. \tag{8.7}$$

Come conseguenza del Teorema 8.3 otteniamo il

Teorema 8.5 (Serre). *Se X è paracompatto e*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathscr{G} \xrightarrow{\ \beta\ } \mathscr{H} \longrightarrow 0 \tag{8.2}$$

è una successione esatta di gruppi abeliani su X, allora possiamo definire, per ogni intero $q \geq 0$, un omomorfismo

$$\vartheta_q : \mathrm{H}^q(X, \mathscr{H}) \longrightarrow \mathrm{H}^{q+1}(X, \mathscr{F}) \tag{8.8}$$

in modo tale che la seguente successione lunga di gruppi di coomologia risulti esatta :
(8.9)
$$\begin{array}{llllllll}
0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(X,\mathscr{F}) & \xrightarrow{\alpha_{0*}} & \mathrm{H}^0(X,\mathscr{G}) & \xrightarrow{\beta_{0*}} & \mathrm{H}^0(X,\mathscr{H}) & \longrightarrow \\
 & \xrightarrow{\vartheta_0} & \mathrm{H}^1(X,\mathscr{F}) & \xrightarrow{\alpha_{1*}} & \cdots & & & \\
 & & & & \cdots & \xrightarrow{\beta_{q-1_*}} & \mathrm{H}^{q-1}(X,\mathscr{H}) & \longrightarrow \\
 & \xrightarrow{\vartheta_{q-1}} & \mathrm{H}^q(X,\mathscr{F}) & \xrightarrow{\alpha_{q*}} & \mathrm{H}^q(X,\mathscr{G}) & \xrightarrow{\beta_{q*}} & \mathrm{H}^q(X,\mathscr{H}) & \longrightarrow \\
 & \xrightarrow{\vartheta_q} & \mathrm{H}^{q+1}(X,\mathscr{F}) & \xrightarrow{\alpha_{q+1_*}} & \cdots & & &
\end{array}$$

La dimostrazione è conseguenza del Teorema 8.3 e del risultato generale di algebra omologica:

Teorema 8.6. *Siano*

$$\begin{aligned}
(A^*, a_*) &= \{0 \to A_0 \xrightarrow{a_0} A_1 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_{q-1}} A_q \xrightarrow{a_q} A_{q+1} \xrightarrow{a_{q+1}} \cdots\}\\
(B^*, b_*) &= \{0 \to B_0 \xrightarrow{b_0} B_1 \xrightarrow{b_1} \cdots \xrightarrow{b_{q-1}} B_q \xrightarrow{b_q} B_{q+1} \xrightarrow{b_{q+1}} \cdots\}\\
(C^*, c_*) &= \{0 \to C_0 \xrightarrow{c_0} C_1 \xrightarrow{c_1} \cdots \xrightarrow{c_{q-1}} C_q \xrightarrow{c_q} C_{q+1} \xrightarrow{c_{q+1}} \cdots\}
\end{aligned}$$

complessi di gruppi abeliani e siano, per q intero ≥ 0*,*
(8.10)
$$H^q(A^*, a_*) = \frac{\ker a_q}{\operatorname{im} a_{q-1}}, \quad H^q(B^*, b_*) = \frac{\ker b_q}{\operatorname{im} b_{q-1}}, \quad H^q(C^*, c_*) = \frac{\ker c_q}{\operatorname{im} c_{q-1}}$$

i loro gruppi di coomologia. Supponiamo siano assegnati per ogni intero $q \geq 0$ *omomorfismi*

(8.11) $$\phi_q : A_q \longrightarrow B_q \quad e \quad \psi_q : B_q \longrightarrow C_q$$

tali che il diagramma :
(8.12)

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_0 & \xrightarrow{a_0} & A_1 & \xrightarrow{a_1} & \cdots & \xrightarrow{a_{q_1}} & A_q & \xrightarrow{a_q} & A_{q+1} & \xrightarrow{a_{q+1}} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\phi_0} & & \downarrow{\scriptstyle\phi_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle\phi_q} & & \downarrow{\scriptstyle\phi_{q+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & B_0 & \xrightarrow{b_0} & B_1 & \xrightarrow{b_1} & \cdots & \xrightarrow{b_{q_1}} & B_q & \xrightarrow{b_q} & B_{q+1} & \xrightarrow{b_{q+1}} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\psi_0} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle\psi_q} & & \downarrow{\scriptstyle\psi_{q+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & C_0 & \xrightarrow{c_0} & C_1 & \xrightarrow{c_1} & \cdots & \xrightarrow{c_{q_1}} & C_q & \xrightarrow{c_q} & C_{q+1} & \xrightarrow{c_{q+1}} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

sia commutativo e con le colonne esatte. Allora esisono, per ogni intero $q \geq 0$*, omomorfismi*

$$\vartheta_q : \mathrm{H}^q(C^*, c_*) \longrightarrow \mathrm{H}^{q+1}(A^*, a_*) \tag{8.13}$$

tali che la successione lunga di coomologia :
(8.14)

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(A^*, a_*) & \xrightarrow{\phi_{0*}} & \mathrm{H}^0(B^*, b_*) & \xrightarrow{\psi_{0*}} & \mathrm{H}^0(C^*, c_*) & \longrightarrow \\
 & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathrm{H}^1(A^*, a_*) & \xrightarrow{\phi_{1*}} & \cdots & & & \\
 & & & & \cdots & \xrightarrow{\psi_{q-1_*}} & \mathrm{H}^{q-1}(C^*, c_*) & \longrightarrow \\
 & \xrightarrow{\varphi_{q-1}} & \mathrm{H}^q(A^*, a_*) & \xrightarrow{\phi_{q*}} & \mathrm{H}^q(B^*, b_*) & \xrightarrow{\psi_{0*}} & \mathrm{H}^q(C^*, c_*) & \longrightarrow \\
 & \xrightarrow{\varphi_q} & \mathrm{H}^{q+1}(A^*, a_*) & \xrightarrow{\phi_{q+1_*}} & \cdots & & &
\end{array}$$

sia esatta.

Dimostrazione. Costruiamo in primo luogo gli omomorfismi ϑ_q. A questo scopo dimostriamo che:

(1) Per ogni $z_q \in \ker c_q$ esistono $y_q \in B_q$ ed $x_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ tali che :

$$\begin{cases} \psi_q(y_q) = z_q \\ \phi_{q+1}(x_{q+1}) = b_q(y_q) \end{cases} \tag{8.15}$$

(2) La x_{q+1} in (8.15) è univocamente determinata modulo l'addizione di un elemento di $\operatorname{im} a_q$.

(3) Se z'_q è un altro elemento di $\ker c_q$, che differisce da z_q per un elemento di $\operatorname{im} c_{q-1}$, ed $x'_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ $y'_q \in B_q$ risolvono:

$$\begin{cases} \psi_q(y'_q) = z'_q \\ \phi_{q+1}(x'_{q+1}) = b_q(y'_q)\,, \end{cases} \tag{8.16}$$

allora $x_{q+1} - x'_{q+1} \in \operatorname{im} a_q$.

(1) Sia $z_q \in C_q$ con $c_q(z_q) = 0$. Poiché per ipotesi l'omomorfismo $\psi_q : B_q \to C_q$ è surgettivo, esiste un elemento $y_q \in B_q$ tale che $z_q = \psi_q(y_q)$. Risulta:

$$\psi_{q+1}(b_q(y_q)) = c_q(\psi_q(y_q)) = c_q(z_q) = 0.$$

Poiché per ipotesi la successione

$$0 \longrightarrow A_{q+1} \xrightarrow{\phi_{q+1}} B_{q+1} \xrightarrow{\psi_{q+1}} C_{q+1} \longrightarrow 0$$

è esatta, vi è un unico elemento $x_{q+1} \in A_{q+1}$ tale che

$$\phi_{q+1}(x_{q+1}) = b_q(y_q).$$

Abbiamo:

$$\phi_{q+2}(a_{q+1}(x_{q+1})) = b_{q+1}(\phi_{q+1}(x_{q+1})) = (b_{q+1} \circ b_q)(y_q) = 0$$

e quindi

$$a_{q+1}(x_{q+1}) = 0$$

perché ϕ_{q+2} è un omomorfismo iniettivo. Gli elementi $y_q \in B_q$ e $x_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ trovati risolvono (8.15).

(2) Siano $\tilde{y}_q \in B_q$ e $\tilde{x}_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ soluzione di:

$$\begin{cases} \psi_q(\tilde{y}_q) = z_q, \\ \phi(\tilde{x}_{q+1}) = b_q(\tilde{y}_q). \end{cases}$$

Allora $\psi_q(\tilde{y}_q - y_q) = 0$ e, per l'esattezza della successione:

$$0 \longrightarrow A_q \xrightarrow{\phi_q} B_q \xrightarrow{\psi_q} C_q \longrightarrow 0$$

esiste un unico elemento $x_q \in A_q$ tale che $\tilde{y}_q - y_q = \phi_q(x_q)$. Abbiamo perciò:

$$\phi_{q+1}(\tilde{x}_{q+1} - x_{q+1}) = b_q(\tilde{y}_q - y_q) = b_q(\phi_q(x_q)) = \phi_{q+1}(a_q(x_q)).$$

Poiché l'omomorfismo $\phi_{q+1} : A_{q+1} \to B_{q+1}$ è iniettivo, ricaviamo che $\tilde{x}_{q+1} = x_{q+1} + a_q(x_q)$.

(3) Tenuto conto della (2), per dimostrare (3) è sufficiente verificare che, se $z_{q-1} \in C_{q-1}$, il sistema:

$$\begin{cases} \psi_q(y''_q) = c_{q_1}(z_{q-1}) \\ \phi_{q+1}(x''_{q+1}) = b_q(y''_q) \end{cases} \tag{$*$}$$

ammette una soluzione $y''_q \in B_q$, $x''_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ con $x''_{q+1} \in \operatorname{im} a_q$. Poiché $\psi_{q_1} : B_{q-1} \to C_{q-1}$ è per ipotesi un omomorfismo surgettivo, possiamo trovare $y_{q_1} \in B_{q-1}$ tale che $\psi_{q-1}(y_{q-1}) = z_{q-1}$. Allora

$$\psi_q(b_{q-1}(y_{q-1})) = c_{q-1}(\psi_{q-1}(y_{q-1})) = c_{q-1}(z_{q-1})$$

e quindi, poiché $b_q(b_{q-1}(y_{q-1}) = 0$, la coppia $y''_q = b_{q-1}(y_{q-1})$, $x''_{q+1} = 0$ è soluzione di $(*)$.

Dimostriamo ora l'esattezza di (8.6). Per semplicità di notazioni, dato un qualsiasi elemento $x_q \in \ker a_q$ (risp. $y_q \in \ker b_q$, $z_q \in \ker c_q$) indicheremo con $[x_q]$ (risp. $[y_q]$, $[z_q]$) la corrispondente classe di q-coomologia in $\mathrm{H}^q(A_*, a_*)$ (risp. in $\mathrm{H}^q(B_*, b_*)$, $\mathrm{H}^q(C_*, c_*)$).

Esatteza in $\mathrm{H}^q(A_*, a_*)$ Sia $x_q \in \ker a_q$. Se $\phi_{q_*}([x_q]) = 0$, allora esiste un elemento $y_{q-1} \in B_{q-1}$ tale che $\phi_q(x_q) = b_{q-1}(y_{q-1})$. L'elemento $z_{q-1} = \psi_{q-1}(y_{q-1})$ di C_{q-1} soddisfa:

$$c_{q-1}(z_{q-1}) = c_{q-1}(\psi_{q-1}(y_{q-1})) = \psi_q(b_{q-1}(y_{q-1}) = \psi_q \circ \phi_q(x_q) = 0.$$

Quindi $z_{q-1} \in \ker c_{q-1}$ definisce una classe di coomologia $[z_{q-1}]$ in $\mathrm{H}^{q-1}(C_*, c_*)$ e $\vartheta_{q-1}([z_{q-1}]) = [x_q]$.

Ciò dimostra l'esattezza di (8.6) in $\mathrm{H}^q(A_*, a_*)$.

Esatteza in $\mathrm{H}^q(B_*, b_*)$ Sia $y_q \in \ker b_q$. Se $\psi_{q_*}([y_q]) = 0$, allora esiste $z_{q-1} \in C_{q-1}$ tale che $\psi_q(y_q) = c_{q-1}(z_{q-1})$. Poiché abbiamo supposto che $\psi_{q-1} : B_{q-1} \longrightarrow C_{q-1}$ sia iniettiva, esiste un elemento $y_{q-1} \in B_{q-1}$ tale che $z_{q-1} = \psi_{q-1}(y_{q-1})$. Abbiamo allora:

$$\psi_q(y_q - b_{q-1}(y_{q-1})) = \psi(y_q) - c_q(\psi_{q-1}(y_{q-1})) = \psi(y_q) - c_q(z_{q-1}) = 0.$$

Per l'esattezza della successione

$$0 \longrightarrow A_q \xrightarrow{\phi_q} B_q \xrightarrow{\psi_q} C_q \longrightarrow 0$$

v'è un unico $x_q \in A_q$ tale che $\phi_q(x_q) = y_q - b_{q-1}(y_{q-1})$. Abbiamo

$$\phi_{q+1}(a_q(x_q)) = b_q(\phi_q(x_q)) = b_q(y_q - b_{q-1}(y_{q-1})) = 0.$$

Per l'iniettività dell'omomorfismo $\phi_{q+1} : A_{q+1} \to B_{q+1}$, otteniamo che $a_q(x_q) = 0$. Quindi x_q definisce una classe di coomologia $[x_q] \in \mathrm{H}^q(A_*, a_*)$ tale che

$$\phi_{q_*}([x_q]) = [\phi_q(x_q)] = [y_q + b_{q-1}(y_{q-1})] = [y_q].$$

Questo dimostra l'esattezza di (8.6) in $\mathrm{H}^q(B_*, b_*)$.

Esatteza in $\mathrm{H}^q(C_*, c_*)$ Sia $z_q \in \ker c_q$ e siano $y_q \in B_q$, $x_{q+1} \in \ker a_{q+1}$ tali che valga la (8.15). Sia $[z_q] \in \mathrm{H}^q(C_*, c_*)$ la classe di coomologia definita da z_q. Se $\vartheta_q([z_q]) = 0$, allora esiste un elemento $x_q \in A_q$ tale che $x_{q+1} = a_q(x_q)$. Abbiamo

$$b_q(y_q) = \phi_{q+1}(x_{q+1}) = \phi_{q+1}(a_q(x_q)) = b_q(\phi_q(x_q)).$$

Quindi $y'_q = y_q - \phi_q(x_q) \in \ker b_q$ e definisce pertanto una classe di coomologia $[y'_q] \in \mathrm{H}^q(B_*, b_*)$ tale che:

$$\psi_{q*}([y'_q]) = [\psi_q(y'_q)] = [\psi_q(y_q)] = [z_q]\,.$$

Questo dimostra l'esattezza di (8.6) in $\mathrm{H}^q(C_*, c_*)$. □

9. Un teorema di algebra omologica

In questo paragrafo enunceremo e dimostreremo un risultato generale sui complessi bi-graduati che utilizzeremo poi nei paragrafi successivi per discutere alcune proprietà della coomologia di Cech.

Definizione 9.1. Un *complesso doppio di cocatene* è il dato di una famiglia $\{A_{r,s}\}_{r,s\in\mathbb{N}}$ di gruppi abeliani, indicizzati con le coppie di interi non negativi, e di due famiglie di omomorfismi:

$$d' = d'_{r,s} : A_{r,s} \longrightarrow A_{r+1,s} \quad \text{e} \quad d''_{r,s} : A_{r,s} \longrightarrow A_{r,s+1} \quad \forall r, s \in \mathbb{N} \tag{9.1}$$

tali che:

$$\begin{cases} d'_{r+1,s} \circ d'_{r,s} = 0 & \forall r, s \in \mathbb{N}\,, \\ d''_{r,s+1} \circ d''_{r,s} = 0 & \forall r, s \in \mathbb{N}\,, \\ d'_{r,s+1} \circ d''_{r,s} + d''_{r+1,s} \circ d'_{r,s} = 0 & \forall r, s \in \mathbb{N}\,. \end{cases} \tag{9.2}$$

Poniamo $A = \bigoplus_{(r,s)\in\mathbb{N}^2} A_{r,s}$ e definiamo $d' : A \to A$ e $d'' : A \to A$ mediante

$$d'((a_{r,s})_{r,s\in\mathbb{N}}) = (a'_{r,s})_{r,s\in\mathbb{N}} \quad \text{con} \begin{cases} a'_{0,s} = 0 \ \text{ e} \\ a'_{r,s} = d'_{r-1,s}(a_{r-1,s}) \text{ se } r \geq 1\,, \end{cases} \tag{9.3}$$

$$d''((a_{r,s})_{r,s\in\mathbb{N}}) = (a''_{r,s})_{r,s\in\mathbb{N}} \quad \text{con} \begin{cases} a''_{r,0} = 0 \ \text{ e} \\ a''_{r,s} = d''_{r,s-1}(a_{r,s-1}) \text{ se } s \geq 1\,. \end{cases} \tag{9.4}$$

Definiamo poi

$$d : A \ni a \longrightarrow d'(a) + d''(a) \in A. \tag{9.5}$$

La (9.2) si può esprimere mediante:

$$d \circ d = 0. \tag{9.6}$$

Poniamo:

$$A_{[q]} = \bigoplus_{r+s=q} A_{r,s}. \tag{9.7}$$

Allora $d(A_{[q]}) \subset A_{[q+1]}$. Risulta quindi definito, per ogni intero $q \geq 0$, un omomorfismo $d_q = d : A_{[q]} \ni a_{[q]} \to d(a_{[q]}) \in A_{[q+1]}$ con $d_{q+1} \circ d_q = 0$ per ogni $q \geq 0$, e $d = (d_q)$ è il *differenziale totale* del complesso:

$$0 \longrightarrow A_{[0]} \xrightarrow{d_0} A_{[1]} \xrightarrow{d_1} A_{[2]} \xrightarrow{d_2} \cdots \tag{9.8}$$

Indicheremo i gruppi di *coomologia del complesso totale* con :

$$\mathrm{H}^q(A_{[*]}, d_*) = \frac{\ker d_q}{\operatorname{im} d_{q-1}}. \tag{9.9}$$

Abbiamo poi le due famiglie numerabili di complessi di cocatene

$$(A_{*,s}, d'_{*,s}) = \left\{0 \longrightarrow A_{0,s} \xrightarrow{d'_{0,s}} A_{1,s} \xrightarrow{d'_{1,s}} A_{2,s} \xrightarrow{d'_{2,s}} \cdots\right\}$$

per ogni $s \in \mathbb{N}$,

$$(A_{r,*}, d''_{r,*}) = \left\{0 \longrightarrow A_{r,0} \xrightarrow{d''_{0,s}} A_{r,1} \xrightarrow{d''_{1,s}} A_{r,2} \xrightarrow{d''_{2,s}} \cdots\right\}$$

per ogni $r \in \mathbb{N}$,

e indicheremo i loro gruppi di coomologia con :

$$\begin{aligned} {}''E^{q,s} &= \mathrm{H}^q(A_{*,s}, d'_{*,s}) = \frac{\ker d'_{q,s}}{\operatorname{im} d'_{q-1,s}} \quad \text{ed} \\ {}'E^{r,q} &= \mathrm{H}^q(A_{r,*}, d''_{r,*}) = \frac{\ker d''_{r,q}}{\operatorname{im} d''_{r,q-1}}. \end{aligned} \tag{9.10}$$

La *successione spettrale*[4] mette in relazione i gruppi di coomologia $\mathrm{H}^q(A_{*,s}, d'_{*,s})$, $\mathrm{H}^q(A_{r,*}, d''_{r,*})$ e i gruppi di coomologia $\mathrm{H}^q(A_{[*]}, d_*)$ del complesso totale.

Osserviamo che per le (9.2) abbiamo in particolare :

$$d'_{r,s}(\ker d''_{r,s}) \subset \ker d''_{r+1,s} \quad \text{e} \quad d'_{r,s}(\operatorname{im} d''_{r,s-1}) \subset \operatorname{im} d''_{r,s}\,,$$

ove abbiamo posto per convenzione $d'_{-1,s} = 0$ e $d''_{r,-1} = 0$ per ogni $r, s \in \mathbb{N}$. Definiamo gli omomorfismi $[d'_{r,s}] : {}'E^{r,s} \to {}'E^{r+1,s}$ per passaggio al quoziente, mediante il diagramma commutativo a righe esatte:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{im} d''_{r,s-1} \arrow[r] \arrow[d, "d'_{r,s-1}"'] & \ker d''_{r,s} \arrow[r] \arrow[d, "d'_{r,s}"'] & {}'E^{r,s} \arrow[r] \arrow[d, "{[d'_{r,s}]}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{im} d''_{r+1,s-1} \arrow[r] & \ker d''_{r+1,s} \arrow[r] & {}'E^{r+1,s} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{9.11}$$

Per ogni intero $s \geq 0$, otteniamo un complesso:

$$0 \longrightarrow {}'E^{0,s} \xrightarrow{[d'_{0,s}]} {}'E^{1,s} \xrightarrow{[d'_{1,s}]} {}'E^{2,s} \xrightarrow{[d'_{2,s}]} \cdots \tag{9.12}$$

---

[4]Vedi ad esempio : Roger Godement: **Topologie algébrique et théorie des faisceaux** (Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252), Hermann, Paris, 1973, pp viii+283.

In modo analogo, definendo gli omomorfismi $[d''_{r,s}] : {}''E^{r,s} \to {}''E^{r,s+1}$ mediante i diagrammi commutativi a righe esatte:

(9.13)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\, d'_{r-1,s} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{r-1,s}"'] & \ker d'_{r,s} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{r,s}"'] & {}''E^{r,s} \arrow[r] \arrow[d, "{[d''_{r,s}]}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\, d'_{r-1,s+1} \arrow[r] & \ker d'_{r,s+1} \arrow[r] & {}''E^{r,s+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ed otteniamo quindi, per ogni intero $r \geq 0$, un complesso :

(9.14)
$$0 \longrightarrow {}''E^{r,0} \xrightarrow{[d''_{r,0}]} {}''E^{r,1} \xrightarrow{[d''_{r,1}]} {}''E^{r,2} \xrightarrow{[d''_{r,2}]} \cdots$$

Indichiamo come al solito con

(9.15)
$$\mathrm{H}^q({}'E^{*,s}, [d'_{*,s}]) = \frac{\ker[d'_{q,s}]}{\mathrm{im}\,[d'_{q-1,s}]} \quad \text{e} \quad \mathrm{H}^q({}''E^{r,*}, [d''_{r,*}]) = \frac{\ker[d''_{r,q}]}{\mathrm{im}\,[d'_{r,q-1}]}$$

i gruppi di coomologia dei complessi (9.12) e (9.14).

Lemma 9.1. *Per ogni intero $q \geq 0$ vi è un unico omomorfismo*

(9.16)
$$j'_q : \mathrm{H}^q({}'E^{*,0}, [d'_{*,0}]) \to \mathrm{H}^q(A_{[*]}, d_*)$$

che renda commutativo il diagramma a colonne esatte:

(9.17)
$$\begin{tikzcd}
\ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0} \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_q \arrow[d] \\
\mathrm{H}^q({}'E^{*,0}, [d'_{*,0}]) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^q(A_{[*]}, d_*) \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Ogni elemento di $\mathrm{H}^q({}'E^{*,0}, [d'_{*,q}])$ è rappresentato da una classe di coomologia di $\mathrm{H}^0(A_{q,*}, d''_{q,*})$, cioè da un $x_{q,0} \in \ker d''_{q,0}$.

La condizione di cociclo $[d'_{q,0}][x_{q,0}] = 0$ dà $d'_{q,0}x_{q,0} = 0$ e dunque abbiamo un'applicazione surgettiva naturale $\ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0} @ >>> \mathrm{H}^q({}'E^{*,0}, [d'_{*,0}])$. Osserviamo che se $x_{q,0} \in \ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0}$, allora $d\, x_{q,0} = d_q x_{q,0} = d'_{q,0}x_{q,0} + d''_{q,0}x_{q,0} = 0$ e quindi $\ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0} \hookrightarrow \ker d_q$. Se $x_{q,0} = d' x_{q-1,0} = d'_{q-1,0}x_{q-1,0}$ per un elemento $x_{q-1,0} \in \ker d''_{q-1,0}$, allora abbiamo $d\, x_{q-1,0} = d' x_{q-1,0} = x_{q,0}$. Quindi l'inclusione $\ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0} \hookrightarrow \ker d_q$ trasforma cobordi in cobordi ed otteniamo per passaggio al quoziente il diagramma commutativo (9.17). □

Osservazione 9.2. Siano q ed s due interi con $q \geq 0$ ed $s > 0$. Un elemento di ${}'E^{q,s}$ è la classe di equivalenza in $\mathrm{H}^s(A_{q,*}, d''_{q,*})$ di un elemento $x_{q,s} \in A_{q,s}$ che soddisfa $d'' x_{q,s} = 0$. Supponiamo che esso rappresenti un cociclo, cioè che

$$[d'][x_{q,s}] = [d'x_{q,s}] = 0 \text{ in } \mathrm{H}^s(A_{q+1,*}, d''_{q+1,*}).$$

Poiché $s > 0$, ciò significa che esiste un elemento $x_{q+1,s-1} \in A_{q+1,s-1}$ tale che $d'x_{q,s} = d''x_{q+1,s-1}$.

Vale la seguente :

Proposizione 9.3. *Con le notazioni introdotte sopra : se*

$$'E^{q,j} = \mathrm{H}^j(A_{q,*}, d''_{q,*}) = 0$$

per ogni coppia d'interi $j, q > 0$*, allora gli omomorfismi*

$$j'_q \ : \mathrm{H}^q('E^{*,0}, [d'_{*,0}])@ >>> \mathrm{H}^q(A_{[*]}, d_*)$$

sono isomorfismi per ogni intero $q \geq 0$*.*

Dimostrazione. Osserviamo che per $q = 0$ abbiamo

$$\mathrm{H}^0('E^{*,0}, [d'_{*,0}]) \simeq \ker d'_{0,0} \cap d''_{0,0}, \qquad \mathrm{H}^0(A_{[*]}, d_*) \simeq \ker d_0 \,,$$

e quindi j'_0 è sempre un isomorfismo perché $\ker d_0 = \ker d'_{0,0} \cap d''_{0,0}$.

Dimostriamo ora l'ismomorfismo per $q > 0$.

j'_q *è iniettiva.* Sia $x_{q,0} \in \ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0}$ un rappresentante di una classe di $\mathrm{H}^q('E^{*,0}, [d'_{*,0}])$. Se $j'_q([x_{q,0}]) = 0$, esiste un elemento $y_{[q-1]} \in A_{[q-1]}$ tale che $d_{q-1}y_{[q-1]} = x_{q,0}$. Decomponiamo $y_{[q-1]}$:

$$y_{[q-1]} = y_{q-1,0} + y_{q-2,1} + \cdots + y_{1,q-2} + y_{0,q-1}, \quad \text{con} \quad y_{r,s} \in A_{r,s}\,.$$

L'equazione $d_{q-1}y_{[q-1]} = x_{q,0}$ equivale al sistema :

$$(*) \qquad \begin{cases} d'_{q-1,0}y_{q-1,0} = x_{q,0} \\ d'_{q-2,1}y_{q-2,1} + d''_{q-1,0}y_{q-1,0} = 0 \\ \qquad \cdots\cdots \\ d'_{0,q-1}y_{0,q-1} + d''_{1,q-2}y_{1,q-2} = 0 \\ d''_{0,q-1}y_{0,q-1} = 0\,. \end{cases}$$

In particolare, $x_{q,0}$ definisce la classe nulla in $\mathrm{H}^q('E^{*,0}, [d'_{*,0}])$ se esiste una soluzione $y_{[q]}$ di $(*)$ con $y_{j,q-j-1} = 0$ per ogni $j < q-1$.

Se $q = 1$, ogni soluzione di $(*)$ è della forma $y_{[0]} = y_{0,0}$. Quindi : j'_1 è *sempre iniettiva.*

Per dimostrare l'iniettività di j'_q per gli interi $q > 1$, dimostreremo per ricorrenza che per ogni $0 \leq k \leq q-1$

(P'_k) esiste una soluzione $y^k_{[q-1]}$ di $(*)$ con $y^k_{j,q-j-1} = 0$ se $j < k$.

Abbiamo già osservato che l'ipotesi che $j'_q([x_{q,0}]) = 0$ ci dice che ciò è vero per $k = 0$. Supponiamo ora, per un intero k con $0 \leq k < q-1$, di avere una soluzione $y^k_{[q-1]}$ di $d_{q-1}y^k_{[q-1]} = x_{q,0}$ con $y^k_{j,q-j-1} = 0$ se $j < k$. In particolare per $(*)$ risulta $d''_{k,q-k-1}y^k_{k,q-k-1} = 0$. È $(q-k-1) > 0$ e perciò per ipotesi

$\mathrm{H}^{q-k-1}(A_{k,*}, d''_{k,*}) = 0$ e dunque esiste un elemento $z_{k,q-k-2} \in A_{k,q-k-2}$ tale che $d''_{k,q-k-2} z_{k,q-k-2} = y^k_{k,q-k-1}$. Allora $y^{k+1}_{[q-1]} = y^k_{[q-1]} - d_{q-2}\, z_{k,q-k-2}$ soddisfa $d_{q-1}\, y^{k+1}_{[q-1]} = x_{q,0}$ e $y^{k+1}_{j,q-j-1} = 0$ se $j < k + 1$.

La $y^{q-1}_{[q-1]}$ è della forma $y^{q-1}_{[q-1]} = x_{q-1,0}$ e quindi l'equazione $d_{[q-1]} y^{q-1}_{[q-1]} = x_{q,0}$ significa che $d'_{q-1,0} x_{q-1,0} = x_{q,0}$ e $d''_{q-1,0} x_{q-1,0} = 0$. Questo prova che $x_{q,0}$ rappresenta la classe di coomologia nulla in $\mathrm{H}^q({}'E^{*,0}, [d'_{*,0}])$.

j'_q *è surgettiva.* Sia η una classe di coomologia in $\mathrm{H}^q(A_{[*]}, d_*)$. Sia $x_{[q]} \in \ker d_q$ un suo rappresentante. Scriviamo $x_q = x_{q,0} + x_{q-1,1} + \cdots + x_{1,q-1} + x_{0,q}$. L'equazione $d_q x_{[q]} = 0$ equivale al sistema:

$$(**) \qquad \begin{cases} d'_{q,0} x_{q,0} = 0 \\ d'_{q-1,1} x_{q-1,1} + d''_{q,0} x_{q,0} = 0 \\ \qquad \cdots\cdots \\ d'_{0,q} x_{0,q} + d''_{1,q-1} x_{1,q-1} = 0 \\ d''_{0,q} x_{0,q} = 0\,. \end{cases}$$

Se fosse $x_{j,q-j} = 0$ per ogni $j < q$, allora $x_{[q]} = x_{q,0}$ e per $(**)$ l'elemento $x_{q,0}$ apparterrebbe a $\ker d''_{q,0} \cap \ker d'_{q,0}$ e definirebbe una classe di coomologia ξ di $\mathrm{H}^q({}'E^{*,0}, [d'_{*,0}])$ con $j'_q(\xi) = \eta$. Per dimostrare la surgettività di j'_q dimostreremo quindi per ricorrenza:

$$(P''_k) \qquad \begin{cases} \text{per ogni intero } k \text{ con } 0 \leq k \leq q \text{ esiste un rappresentante} \\ x^k_{[q]} \in \ker d_q \text{ di } \eta \text{ con } x^k_{j,q-j} = 0 \text{ per ogni intero } j < k. \end{cases}$$

Per $k = 0$ possiamo scegliere come $x^0_{[q]}$ un qualsiasi rappresentante di η in $\ker d_q$. Supponiamo ora che $0 < k < q$ e vi sia un $x^k_{[q]} \in \eta$ con $x^k_{j,q-j} = 0$ per ogni intero $j < k$. Abbiamo in particolare $d''_{k,q-k} x_{k,q-k} = 0$. Poiché $q - k > 0$, per ipotesi $\mathrm{H}^{q-k}(A_{k,*}, d''_{k,*}) = 0$ e quindi esiste $y_{k,q-k-1} \in A_{k,q-k-1}$ tale che $d''_{k,q-k-1} y_{k,q-k-1} = x_{k,q-k}$. Poniamo allora $x^{k+1}_{[q]} = x^k_{[q]} - d_{q-1} y_{k,q-k-1}$, ottenendo in questo modo un elemento $x^{k+1}_{[q]} \in \eta$ con $x^{k+1}_{j,q-j} = 0$ se $j < k + 1$.

Per $k = q$, l'elemento $x^q_{[q]} = x^q_{q,0} \in \ker d'_{q,0} \cap \ker d''_{q,0}$ definisce una classe $\xi \in \mathrm{H}^q({}'E^{*,0}, [d'_{*,0}])$ con $j'_q(\xi) = \eta$. □

In modo del tutto analogo, abbiamo:

Proposizione 9.4. *Per ogni intero $q \geq 0$ vi è un unico omomorfismo*

$$(9.18) \qquad j''_q : \mathrm{H}^q({}''E^{0,*}, [d''_{0,*}]) \longrightarrow \mathrm{H}^q(A_{[*]}, d_*)$$

che renda commutativo il diagramma a colonne esatte:

$$
\begin{array}{ccc}
\ker d'_{0,q}\cap\ker d''_{0,q} & \longrightarrow & \ker d_q \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathrm{H}^q({}''E^{0,*},[d''_{0,*}]) & \longrightarrow & \mathrm{H}^q(A_{[*]},d_*) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
0 & & 0
\end{array}
\tag{9.19}
$$

Se

$$''E^{j,q}=\mathrm{H}^j(A_{*,q},d'_{*,q})=0$$

per ogni coppia d'interi $j,q>0$*, allora gli omomorfismi* (9.18) *sono isomorfismi per ogni intero* $q\geq 0$*.*

10. Il teorema di Leray sui ricoprimenti aciclici

Sia $\mathscr{S}$ un fascio su uno spazio topologico X. Ad ogni aperto Ω di X associamo la *restrizione* $\mathscr{S}|_\Omega$ *di* $\mathscr{S}$ *ad* Ω. Essa si definisce con la corrispondenza che ad ogni aperto U di Ω associa il gruppo $\mathscr{S}|_\Omega(U)=\mathscr{S}(U)$.

Se q è un intero non negativo, porremo $\mathrm{H}^q(\Omega,\mathscr{S}):=\mathrm{H}^q(\Omega,\mathscr{S}|_\Omega)$. Per ogni ricoprimento aperto $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ di X, $\mathscr{U}\cap\Omega:=\{U_i\cap\Omega\}_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto di Ω. Possiamo quindi definire per ogni intero $q\geq 0$ delle applicazioni naturali :

$$\mathscr{C}^q(\mathscr{U},\mathscr{S})\xrightarrow{\rho^{\mathscr{U}}_{\mathscr{U}\cap\Omega}}\mathscr{C}^q(\mathscr{U}\cap\Omega,\mathscr{S}|_\Omega)\longrightarrow\mathscr{C}^q(\Omega,\mathscr{S}|_\Omega):=\mathscr{C}^q(\Omega,\mathscr{S}).$$

Poiché le operazioni di restrizione e di cobordo commutano, avremo anche :

$$\rho^{\mathscr{U}}_{\mathscr{U}\cap\Omega}(\mathscr{Z}^q(\mathscr{U},\mathscr{S}))\subset\mathscr{Z}^q(\mathscr{U}\cap\Omega,\mathscr{S}),\quad \rho^{\mathscr{U}}_{\mathscr{U}\cap\Omega}(\mathscr{B}^q(\mathscr{U},\mathscr{S}))\subset\mathscr{B}^q(\mathscr{U}\cap\Omega,\mathscr{S}),$$

Fissato un ricoprimento aperto $\mathscr{U}$, definiamo per ogni intero $q\geq 0$ il fascio $\mathscr{C}^q_{\mathscr{U}}\mathscr{S}$, facendo corrispondere ad ogni aperto Ω di X il gruppo $\mathscr{C}^q(\mathscr{U}\cap\Omega,\mathscr{S})$.

Poiché $\mathscr{S}$ è un fascio, per ogni aperto Ω di X abbiamo una successione esatta :

$$
\begin{array}{ccccccc}
0\longrightarrow & \mathscr{S}(\Omega) & \xrightarrow{\iota_\Omega} & \mathscr{C}^0_{\mathscr{U}}\mathscr{S}(\Omega) & \xrightarrow{\delta_0^{\mathscr{U}\cap\Omega}} & \mathscr{C}^1_{\mathscr{U}}\mathscr{S}(\Omega) \\
 & & & \Big\| & & \Big\| \\
 & & & \mathscr{C}^0(\mathscr{U}\cap\Omega,\mathscr{S}) & & \mathscr{C}^1(\mathscr{U}\cap\Omega,\mathscr{S})
\end{array}
\tag{10.1}
$$

ed otteniamo perciò la successione esatta di fasci

$$0\longrightarrow\mathscr{S}\xrightarrow{\ \iota\ }\mathscr{C}^0_{\mathscr{U}}\mathscr{S}\xrightarrow{\delta_q^{\mathscr{U}\cap *}}\mathscr{C}^1_{\mathscr{U}}\mathscr{S}.$$

Gli omomorfismi di cobordo $\delta_q^{\mathscr{U}\cap\Omega} : \mathscr{C}^q_{\mathscr{U}}\mathscr{S}(\Omega) \to \mathscr{C}^{q+1}_{\mathscr{U}}\mathscr{S}(\Omega)$ definiscono un omomorfismo di fasci :

$$\delta_q^{\mathscr{U}\cap *} : \mathscr{C}^q_{\mathscr{U}}\mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{C}^{q+1}_{\mathscr{U}}\mathscr{S}. \tag{10.2}$$

Vale il seguente :

Lemma 10.1. *Se $\mathscr{U}$ è un ricoprimento aperto localmente finito di X, allora la successione di fasci di gruppi abeliani Sia X uno spazio paracompatto. Allora, per ogni fascio di gruppi abeliani $\mathscr{S}$ su X, la successione di fasci :*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{S} & \xrightarrow{\iota} & \mathscr{C}^0_{\mathscr{U}}\mathscr{S} & \xrightarrow{\delta_0^{\mathscr{U}\cap *}} & \mathscr{C}^1_{\mathscr{U}}\mathscr{S} & \xrightarrow{\delta_1^{\mathscr{U}\cap *}} & \cdots \\ \cdots & \xrightarrow{\delta_{q-2}^{\mathscr{U}\cap *}} & \mathscr{C}^{q-1}_{\mathscr{U}}\mathscr{S} & \xrightarrow{\delta_{q-1}^{\mathscr{U}\cap *}} & \mathscr{C}^q_{\mathscr{U}}\mathscr{S} & \xrightarrow{\delta_q^{\mathscr{U}\cap *}} & \mathscr{C}^{q+1}_{\mathscr{U}}\mathscr{S} & \xrightarrow{\delta_{q+1}^{\mathscr{U}\cap *}} & \cdots \end{array} \tag{10.3}$$

è esatta.[5]

Dimostrazione. Abbiamo osservato sopra che $\operatorname{im}\iota = \ker\delta_0^{\mathscr{U}\cap *}$.

Resta quindi da dimostrare che $\operatorname{im}\delta_{q-1}^{\mathscr{U}\cap *} = \ker\delta_q^{\mathscr{U}\cap *}$ quando $q > 0$.

Sia $q > 0$, $p \in X$ e sia $\xi \in \mathscr{C}^q_{\mathscr{U}}\mathscr{S}_p$ con $\delta_q^{\mathscr{U}\cap *}(\xi) = 0$. Possiamo rappresentare ξ mediante una $f \in \mathscr{C}^q(\mathscr{U}\cap\Omega, \mathscr{S})$, ove Ω è un intorno aperto di p in X. A meno di sostituire Ω con un intorno più piccolo di p in X, possiamo supporre che $\delta_q^{\mathscr{U}\cap\Omega}(f) = 0$.

Sia I_p l'insieme finito degli indici $i \in I$ per cui $p \in U_i$. Allora

$$W = \Omega \cap \left(\bigcap_{i\in I_p} U_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i\in I\setminus I_p} \bar{U}_i\right)$$

è un intorno aperto di p in X e $\mathscr{U}\cap W$ contiene solo un numero finito di aperti non vuoti, tutti contenenti il punto p. Inoltre per ogni $(i_0, i_1, \ldots, i_q) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{U}\cap W)$ abbiamo $W \subset U_{i_0,i_1,\ldots,i_q}$. Definiamo allora $\phi \in \mathscr{C}^{q-1}(\mathscr{U}\cap W, \mathscr{S})$ fissando arbitrariamente un indice $i_0 \in I_p$ e ponendo $\phi_{i_1,\ldots,i_q} = r^{U_{i_0,i_1,\ldots,i_q}}_{U_{i_1,\ldots,i_q}\cap W}(f_{i_0,i_1,\ldots,i_q})$. Abbiamo (dove per semplicità di notazione abbiamo omesso le funzioni di restrizione) :

$$\left(\delta_{q-1}(\phi)\right)_{j_0,j_1,\ldots,j_q} = \sum_{h=0}^{q} (-1)^h f_{i_0,j_0,\ldots,\hat{j}_h,\ldots,j_q} = f_{j_0,\ldots,j_q},$$

per la condizione che $\delta_q^{\mathscr{U}\cap\Omega}(f) = 0$.

La dimostrazione è completa. □

Dalla Proposizione 8.4 otteniamo allora :

[5] Diciamo anche che (10.3) è una *risoluzione* del fascio $\mathscr{S}$.

Proposizione 10.2. *Sia $\mathscr{U}$ un ricoprimento aperto localmente finito di uno spazio paracompatto X. Allora per ogni fascio di gruppi abeliani $\mathscr{S}$ su X e per ogni intero $q \geq 0$ abbiamo una successione esatta di gruppi abeliani :*

$$
\begin{array}{rllll}
 & 0 \longrightarrow & \mathscr{C}^q(X, \mathscr{S}) & \xrightarrow{\iota_q} & \mathscr{C}^q(X, \mathscr{C}^0_{\mathscr{U}}\mathscr{S}) \longrightarrow \\
 & \xrightarrow{(\delta_0^{\mathscr{U}\cap *})_q} & \mathscr{C}^q(X, \mathscr{C}^1_{\mathscr{U}}\mathscr{S}) & \xrightarrow{(\delta_1^{\mathscr{U}\cap *})_q} & \cdots \\
(10.4) & & \cdots & \xrightarrow{(\delta_{h-2}^{\mathscr{U}\cap *})_q} & \mathscr{C}^q(X, \mathscr{C}^{h-1}_{\mathscr{U}}\mathscr{S}) \longrightarrow \\
 & \xrightarrow{(\delta_{h-1}^{\mathscr{U}\cap *})_q} & \mathscr{C}^q(X, \mathscr{C}^h_{\mathscr{U}}\mathscr{S}) & \xrightarrow{(\delta_h^{\mathscr{U}\cap *})_q} & \mathscr{C}^q(X, \mathscr{C}^{h+1}_{\mathscr{U}}\mathscr{S}) \xrightarrow{(\delta_{h+1}^{\mathscr{U}\cap *})_q} \cdots
\end{array}
$$

Un ricoprimento aperto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ di X si dice $\mathscr{S}$-aciclico se

$$(10.5)\quad \mathrm{H}^j(U_{i_0,i_1,\dots,i_q}, \mathscr{S}) = 0 \quad \forall q \geq 0\,,\ \forall (i_0, i_1, \dots, i_q) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{U}),\ \ \forall j > 0\,.$$

Vale il :

Teorema 10.3 (Leray). *Sia $\mathscr{S}$ un fascio su uno spazio topologico paracompatto X. Se $\mathscr{U}$ è un ricoprimento aperto localmente finito ed $\mathscr{S}$-aciclico di X, allora gli omomorfismi naturali :*

$$\mathrm{H}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(X, \mathscr{S}) \tag{10.6}$$

sono isomorfismi per ogni intero $q \geq 0$.

Dimostrazione. Poniamo

$$A_{r,s} = \mathscr{C}^r(X, \mathscr{C}^s_{\mathscr{U}}\mathscr{S})$$

per ogni coppia di interi $r, s \geq 0$, e definiamo gli omomorfismi

$$\begin{cases} d'_{r,s} : A_{r,s} \longrightarrow A_{r+1,s} \\ d''_{r,s} : A_{r,s} \longrightarrow A_{r,s+1} \end{cases}$$

ponendo $d'_{r,s}$ uguale al differenziale del complesso :

$$
\begin{array}{llll}
0 \longrightarrow \mathscr{C}^0(X, \mathscr{C}^s_{\mathscr{U}}\mathscr{S}) & \xrightarrow{\delta_0} \mathscr{C}^1(X, \mathscr{C}^s_{\mathscr{U}}\mathscr{S}) & \xrightarrow{\delta_1} & \cdots \\
\qquad\cdots & \xrightarrow{\delta_{q-1}} \mathscr{C}^q(X, \mathscr{C}^s_{\mathscr{U}}\mathscr{S}) & \xrightarrow{\delta_q} & \mathscr{C}^{q+1}(X, \mathscr{C}^s_{\mathscr{U}}\mathscr{S}) \xrightarrow{\delta_{q+1}} \cdots
\end{array}
$$

e definendo $d''_{r,s}$ come gli omomorfismi indotti da quelli del complesso di fasci (10.3):

$$d''_{r,s} = (\delta_r^{\mathscr{U}\cap *})_s : \mathscr{C}^r(X, \mathscr{C}^s_{\mathscr{U}}\mathscr{S}) \longrightarrow \mathscr{C}^r(X, \mathscr{C}^{s+1}_{\mathscr{U}}\mathscr{S})\,.$$

Per la Proposizione 10.2, abbiamo $'E^{r,s} = 0$ per ogni $r \geq 0$ ed ogni $s > 0$ ed $'E^{r,0} = \mathscr{C}^r(X, \mathscr{S})$. Abbiamo perciò :

$$H^q('E^{*,0}, [d'_{*,0}]) = H^q(X, \mathscr{S})$$

e, per la Proposizione 9, l'applicazione :

$$j'_q : \mathrm{H}^q(X, \mathscr{S}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(A_{[*]}, d_*)$$

è un isomorfismo per ogni $q \geq 0$. Osserviamo come questo isomorfismo sia conseguenza delle ipotesi che X sia paracompatto ed $\mathscr{U}$ localmente finito, e sia valido a prescindere dall'ipotesi che $\mathscr{U}$ sia $\mathscr{S}$-aciclico.

Indichiamo, per ogni $q \geq 0$, con $N_q(\mathscr{U})$ l'insieme :

$$N_q(\mathscr{U}) = \left\{ \{i_0, i_1, \ldots, i_q\} \,|\, (i_0, i_1, \ldots, i_q) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{U}) \right\} .$$

Abbiamo allora :

$$A_{r,s} \simeq \prod\nolimits_{\{i_0,i_1,\ldots,i_s\} \in N_s(\mathscr{U})} \mathscr{C}^r(U_{i_0,i_1,\ldots,i_s}, \mathscr{S}) .$$

Per verificare questo isomorfismo, definiamo per ogni aperto Ω di X il fascio $\mathscr{S}^{\Omega}$ mediante :

$$\mathscr{S}^{\Omega}(U) = \mathscr{S}(U \cap \Omega) \text{ per ogni aperto } U \text{ di } X.$$

Il fascio $\mathscr{C}^s_{\mathscr{U}}\mathscr{S}$ è prodotto diretto, localmente finito, dei fasci $\mathscr{S}^{U_{i_0,i_1,\ldots,i_s}}$. Per la Proposizione 10.2 l'isomorfismo di fasci :

$$\mathscr{C}^s_{\mathscr{U}}\mathscr{S} \simeq \prod\nolimits_{\{i_0,i_1,\ldots,i_s\} \in N_s(\mathscr{U})} \mathscr{S}^{U_{i_0,i_1,\ldots,i_s}}$$

dà l'isomorfismo di gruppi abeliani :

$$\begin{aligned} A_{r,s} &= \mathscr{C}^r(X, \mathscr{C}^s_{\mathscr{U}}\mathscr{S}) \\ &\simeq \prod\nolimits_{\{i_0,i_1,\ldots,i_s\} \in N_s(\mathscr{U})} \mathscr{C}^r(X, \mathscr{S}^{U_{i_0,i_1,\ldots,i_s}}) \\ &\simeq \prod\nolimits_{\{i_0,i_1,\ldots,i_s\} \in N_s(\mathscr{U})} \mathscr{C}^r(U_{i_0,i_1,\ldots,i_s}, \mathscr{S}) . \end{aligned}$$

Gli omomorfismi $d'_{r,s}$ si fattorizzano attraverso gli omomorfismi

$$\delta_r^{U_{i_0,i_1,\ldots,i_s}} : \mathscr{C}^r(U_{i_0,i_1,\ldots,i_s}, \mathscr{S}) \longrightarrow \mathscr{C}^{r+1}(U_{i_0,i_1,\ldots,i_s}, \mathscr{S}) .$$

Quindi l'ipotesi che il ricoprimento $\mathscr{U}$ sia $\mathscr{S}$-aciclico ci dà $''E^{r,s} = 0$ per ogni $s \geq 0$ ed ogni $r > 0$.

Abbiamo poi : $''E^{0,s} \simeq \mathscr{C}^s(\mathscr{U}, \mathscr{S})$

Auindi, per la Proposizione 9.4, *per ogni ricoprimento aperto localmente finito $\mathscr{U}$ di X paracompatto* l'omomorfismo

$$j''_q : \mathrm{H}^q(''E^{0,*}, [d''_{0,*}]) \simeq \mathrm{H}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(A_{[*]}, d_*)$$

è un isomorfismo per ogni $q \geq 0$.

Componendo i due isomorfismi, per ogni intero $q \geq 0$, otteniamo l'ismomorfismo cercato :

$$(j''_q)^{-1} \circ j'_q : \mathrm{H}^q(X, \mathscr{S}) \xrightarrow{\ \simeq\ } \mathrm{H}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S}), \quad \forall q \geq 0 .$$

$\square$

Osservazione 10.4. Ricordiamo che, senza nessuna ipotesi sul ricoprimento $\mathscr{U}$, ma come conseguenza della definizione di fascio, l'omomorfismo

$$\mathrm{H}^0(\mathscr{U},\mathscr{S}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X,\mathscr{S})$$

è sempre un isomorfismo e che l'omomorfismo

$$\mathrm{H}^1(\mathscr{U},\mathscr{S}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X,\mathscr{S})$$

è sempre iniettivo.

11. Il Teorema di de Rham

Sia $\mathscr{S}$ un fascio di gruppi abeliani su uno spazio topologico X. Si dice *risoluzione* di $\mathscr{S}$ una qualsiasi successione esatta di fasci su X:

$$0 \longrightarrow \mathscr{S} \xrightarrow{\ \iota\ } \mathscr{S}_0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathscr{S}_1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathscr{S}_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \tag{11.1}$$

La risoluzione (11.1) di $\mathscr{S}$ si dice *aciclica* se $\mathrm{H}^q(X,\mathscr{S}_h)=0$ per ogni $q>0$ ed $h\geq 0$.

Teorema 11.1 (de Rham). *Se X è uno spazio paracompatto e* (11.1) *è una risoluzione aciclica di un fascio $\mathscr{S}$ su X, allora i gruppi di coomologia di Cech* $\mathrm{H}^q(X,\mathscr{S})$ *sono isomorfi ai gruppi di coomologia* $\mathrm{H}^q(\mathscr{S}_*(X),\alpha_*)$ *del complesso :*

(11.2)

$$0 \longrightarrow \mathscr{S}_0(X) \xrightarrow{\alpha_{0*}} \mathscr{S}_1(X) \xrightarrow{\alpha_{1*}} \mathscr{S}_2(X) \xrightarrow{\alpha_{2*}} \mathscr{S}_3(X) \xrightarrow{\alpha_{3*}} \cdots$$

Dimostrazione. Utilizziamo i risultati e le notazioni del paragrafo §9. Per ogni coppia di interi non negativi r,s definiamo il gruppo abeliano

$$A_{r,s}=\mathscr{C}^r(X,\mathscr{S}_s)\,.$$

Definiamo un complesso doppio di cocatene introducendo gli omomorfismi :

$$d'_r := \delta_r : A_{r,s}=\mathscr{C}^r(X,\mathscr{S}_s)\ni f \longrightarrow \delta_r(f)\in A_{r+1,s}=\mathscr{C}^{r+1}(X,\mathscr{S}_s)\,,$$

$$d''_s := (-1)^r(\alpha_{s*})_r : A_{r,s}=\mathscr{C}^r(X,\mathscr{S}_s)\ni f \longrightarrow (-1)^r(\alpha_{s*})_r(f)\in \mathscr{C}^r(X,\mathscr{S}_{s+1})\,.$$

Per l'ipotesi che (11.1) sia una risoluzione e per la Proposizione 8.4, $'E^{r,s}=0$ per ogni $r\geq 0$ e per ogni $s>0$. Per l'ipotesi che (11.1) sia aciclica, $''E^{r,s}=0$ per ogni $r>0$ e per ogni $s\geq 0$. Abbiamo poi :

$$\begin{array}{lcl} 'E^{r,0}=\mathscr{C}^r(X,\mathscr{S}) & \text{e} & \mathrm{H}^q('E^{*,0},[d'_{*,0}])=\mathrm{H}^q(X,\mathscr{S})\,;\\ ''E^{0,s}=\mathscr{S}_s(X) & \text{e} & \mathrm{H}^q(''E^{0,*},[d''_{0,*}])=\mathrm{H}^q(\mathscr{S}_*(X),\alpha_*)\,. \end{array}$$

Per la Proposizione 9, per ogni $q\geq 0$ l'omomorfismo

$$j'_q : \mathrm{H}^q('E^{*,0},[d'_{*,0}])=\mathrm{H}^q(X,\mathscr{S}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(A_{[*]},d_*)$$

è un isomorfismo. Per la Proposizione 9.4, per ogni $q \geq 0$ l'omomorfismo

$$j''_q : \mathrm{H}^q({}''E^{0,*}, [d''_{0,*}]) = \mathrm{H}^q(\mathscr{S}_*(X), \alpha_*) \longrightarrow \mathrm{H}^q(A_{[*]}, d_*)$$

è un isomorfismo. Allora

$$(j''_q)^{-1} \circ j'_q : \mathrm{H}^q(X, \mathscr{S}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathscr{S}_*(X), \alpha_*)$$

è per ogni $q \geq 0$ l'ismomorfismo cercato. □

Osservazione 11.2. L'isomorfismo $j'_q : \mathrm{H}^q(X, \mathscr{S}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(A_{[*]}, d_*)$ vale sotto la semplice ipotesi che (11.1) sia una risoluzione di $\mathscr{S}$. Quindi, sotto questa ipotesi è comunque definito un omomorfismo

$$j''_q : \mathrm{H}^q(\mathscr{S}_*(X), \alpha_*) \longrightarrow \mathrm{H}^q(X, \mathscr{S})\,.$$

Esso è un isomorfismo quando (11.1) è aciclica su X.

12. Fasci fiacchi

Per utilizzare il Teorema di de Rham, è utile definire alcune categorie di fasci che sono coomologicamente banali: risoluzioni acicliche ottenute utilizzando fasci di questi tipi ci permettono di ricondurre il calcolo della coomologia di Cech a quello della coomologia di complessi differenziali.

Definizione 12.1. Un fascio $\mathscr{F}$ su uno spazio topologico X si dice *fiacco* se per ogni aperto Ω di X l'applicazione di restrizione: $r^X_\Omega : \mathscr{F}(X) \longrightarrow \mathscr{F}(\Omega)$ è surgettiva.

Esempio 12.1. Consideriamo su $\mathbb{CP}^n$ la topologia di Zariski, in cui gli aperti sono i complementari di sottovarietà algebriche. Allora il fascio $\tilde{\mathbb{C}}$ delle funzioni localmente costanti su $\mathbb{CP}^n$ è fiacco.

Esempio 12.2. Sia $\mathscr{S}$ un fascio su uno spazio topologico X. Indichiamo con $\mathscr{S}^\sharp$ il *fascio dei germi di sezioni discontinue*[6] di $\mathscr{S}$, associato al prefascio canonico

$$\mathrm{Ap}(X) \ni U \longrightarrow \{f \in \mathscr{S}^U \mid \pi \circ f_{(p)} = p,\ \forall p \in U\}.$$

Il fascio $\mathscr{S}^\sharp$ è un fascio fiacco ed abbiamo un ovvio morfismo iniettivo di fasci $\mathscr{S} \hookrightarrow \mathscr{S}^\sharp$.

Proposizione 12.1. *L'immagine diretta di un fascio fiacco mediante un'applicazione continua è un fascio fiacco.*

[6] Cioè non necessariamente continue.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio fiacco sullo spazio topologico X, Y un altro spazio topologico ed $f \in \mathscr{C}(X, Y)$. Sia V un aperto di Y. Abbiamo allora un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{S}(X) & \xrightarrow{r^X_{f^{-1}(V)}} & \mathscr{S}(f^{-1}(V)) \\ \| & & \| \\ f_*\mathscr{S}(Y) & \xrightarrow[r^Y_V]{} & f_*\mathscr{S}(V). \end{array}$$

Dalla surgettività di $\mathscr{S}(X) \xrightarrow{r^X_{f^{-1}(V)}} \mathscr{S}(f^{-1}(V))$ segue quella di $f_*\mathscr{S}(Y) \xrightarrow{r^Y_V} f_*\mathscr{S}(V)$. $\square$

PROPOSIZIONE 12.2. *Sia*

$$0 \longrightarrow \mathscr{S}' \xrightarrow{\phi} \mathscr{S} \xrightarrow{\psi} \mathscr{S}'' \longrightarrow 0$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X. Se $\mathscr{S}'$ è fiacco, allora, per ogni aperto U di X la successione

$$0 \longrightarrow \mathscr{S}'(U) \xrightarrow{\phi} \mathscr{S}(U) \xrightarrow{\psi} \mathscr{S}''(U) \longrightarrow 0$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché la restrizione ad un aperto di un fascio fiacco è ancora un fascio fiacco, possiamo, per semplicità, limitarci a considerare il caso in cui $U = X$. L'esattezza in $\mathscr{S}'(X)$ ed $\mathscr{S}(X)$ è conseguenza della definizione di fascio. Basterà quindi dimostrare che $\psi : \mathscr{S}(X) \to \mathscr{S}''(X)$ è surgettiva. Sia $s'' \in \mathscr{S}''(X)$ e consideriamo la famiglia

$$\Phi = \{(U, s_U) \mid U \in \mathrm{Ap}(X),\ s_U \in \mathscr{S}(U),\ \psi(s_U) = s''|_U\}.$$

Introduciamo la relazione d'ordine su Φ:

$$(U, s_U) \preceq (V, s_V) \Longleftrightarrow U \subset V,\ s_U = s_V|_U.$$

Chiaramente Φ è una famiglia induttiva. Per il Lemma di Zorn essa ammette un elemento massimale (U_0, s_{U_0}). Se $U_0 = X$, abbiamo ottenuto la tesi. Supponiamo per assurdo che $U_0 \neq X$ e sia $p_0 \in \complement U_0$. Vi è allora un intorno V di p_0 in X ed una sezione $s_V \in \mathscr{S}(V)$ tale che $\psi(s_V) = s''|_V$. Se $V \cap U_0 = \emptyset$, allora

$$s_{U_0 \cup V} = \begin{cases} s_{U_0} & \text{su } U_0, \\ v_V & \text{su } V \end{cases}$$

ci dà un elemento $(U_0 \cup V, s_{U_0 \cup V}) \gneqq (U_0, s_{U_0})$, contraddicendo la massimalità. Quindi $U_0 \cap V \neq \emptyset$ e $\psi(u_{U_0}|_{U_0 \cap V} - u_V|_{U_0 \cap V}) = 0$. Esiste allora

$s'_{U_0\cap V} \in \mathscr{S}'(U_0 \cap V)$ tale che $\phi(s'_{U_0\cap V}) = u_{U_0}|_{U_0\cap V} - u_V|_{U_0\cap V}$. Poiché $\mathscr{S}'$ è fiacco, abbiamo $s'_{U_0\cap V} = s'|_{U_0\cap V}$ per una $s' \in \mathscr{S}'(X)$. Allora

$$s_{U_0\cup V} = \begin{cases} s_{U_0} & \text{su } U_0, \\ s_V + \phi(s')|_V & \text{su } V \end{cases}$$

è un elemento di $\mathscr{S}(U_0 \cup V)$ e $(U_0 \cup V, s_{U_0\cup V}) \gneqq (U_0, s_{U_0})$ contraddice la massimalità. Quindi $U_0 = X$. La dimostrazione è completa. □

Segue allora

Proposizione 12.3. *Sia*

$$0 \longrightarrow \mathscr{S}' \xrightarrow{\ \phi\ } \mathscr{S} \xrightarrow{\ \psi\ } \mathscr{S}'' \longrightarrow 0$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X. Se $\mathscr{S}'$ e $\mathscr{S}$ sono fiacchi, allora anche $\mathscr{S}''$ è fiacco.

Dimostrazione. Se U è un aperto di X ed $s''_U \in \mathscr{S}''(U)$, per la Proposizione 12.2 esiste un $s_U \in \mathscr{S}(U)$ tale che $\phi(s_U) = s''_U$. Poiché abbiamo supposto che $\mathscr{S}$ fosse fiacco, vi è una $s \in \mathscr{S}(X)$ tale che $s_U = s|_U$. È allora $\psi(s) \in \mathscr{S}'(X)$ e $\psi(s)|_U = s''_U$. □

Proposizione 12.4. *Se*

$$0 \longrightarrow \mathscr{S}^0 \xrightarrow{\ \delta_0\ } \mathscr{S}^1 \xrightarrow{\ \delta_1\ } \mathscr{S}^2 \longrightarrow \cdots$$

è una successione esatta di fasci di gruppi abeliani fiacchi, allora, per ogni aperto U di X, la successione di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow \mathscr{S}^0(U) \xrightarrow{\ \delta_0\ } \mathscr{S}^1(U) \xrightarrow{\ \delta_1\ } \mathscr{S}^2(U) \longrightarrow \cdots$$

è esatta.

Dimostrazione. L'esattezza in $\mathscr{S}^0(U)$ è conseguenza della definizione di fascio. Per ogni $h \geq 0$ abbiamo per ipotesi una successione esatta corta di fasci

$$0 \longrightarrow \widetilde{\ker}\,\delta_h \longrightarrow \mathscr{S}^h \xrightarrow{\ \delta_h\ } \widetilde{\ker}\,\delta_{h+1} \longrightarrow 0.$$

Dalla Proposizione 12.3 segue per ricorrenza che tutti i fasci $\widetilde{\ker}\,\delta_h$ sono fiacchi. La tesi segue allora dalla Proposizione 12.2. □

Vale il seguente :

Lemma 12.5. *Se $\mathscr{F}$ è un fascio di gruppi abeliani fiacco su X, allora*

$$\mathrm{H}^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = 0 \tag{12.1}$$

per ogni $q > 0$ ed ogni ricoprimento aperto localmente finito $\mathscr{U}$ di X.

Dimostrazione. Sia $q > 0$ e sia $f = (f_{i_0,i_1,\dots,i_q}) \in \mathscr{Z}^q(\mathscr{U},\mathscr{F})$. Sia $\prec$ un buon ordinamento di I. Per ogni $i \in I$ che non sia massimo in I, indicheremo con $i+1$ l'elemento di I successivo ad i: $i+1$ è il minimo dell'insieme $\{j \in I \mid j \succ i\}$. Per ogni $i \in I$ definiamo gli aperti:

$$\Omega_i = \bigcup_{j \prec i} U_j \quad \text{e} \quad \Omega'_i = U_i \cup \Omega_i\,.$$

Supponiamo che, per un indice $\nu \in I$ fissato, $f^{(\nu)} \in \mathscr{Z}^q(\mathscr{U},\mathscr{S})$ abbia la proprietà:

$$(\dagger) \qquad r^{U_{i_0,i_1,\dots,i_q}}_{U_{i_0,i_1,\dots,i_q}\cap\Omega_\nu}(f^{(\nu)}_{i_0,i_1,\dots,i_q}) = 0 \qquad \forall (i_0,i_1,\dots,i_q) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{U}).$$

Esiste allora una $\psi^{(\nu)} \in \mathscr{C}^{q-1}(\mathscr{U},\mathscr{S})$ tale che

$$\begin{cases} (i) & r^{U_{i_1,\dots,i_q}}_{U_{i_1,\dots,i_q}\cap\Omega_\nu}(\psi^{(\nu)}_{i_1,\dots,i_q}) = 0 \qquad \forall (i_0,i_1,\dots,i_q) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{U})\,, \\ (ii) & \psi^{(\nu)}_{i_1,\dots,i_q} = 0 \quad \text{se} \quad (\nu,i_1,\dots,i_q) \notin \mathscr{N}_q(\mathscr{U}) \\ (iii) & r^{U_{i_0,i_1,\dots,i_q}}_{U_{i_0,i_1,\dots,i_q}\cap\Omega'_\nu}((f^{(\nu)} - \delta_{q-1}\psi^{(\nu)})_{i_0,i_1,\dots,i_q}) = 0 \quad \forall (i_0,i_1,\dots,i_q) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{U})\,. \end{cases}$$

Per ogni $(i_1,\dots,i_q) \in \mathscr{N}_{q-1}(\mathscr{U})$ per cui $(\nu,i_1,\dots,i_q) \in \mathscr{N}_q(\mathscr{U})$, vi è un elemento $\eta \in \mathscr{S}(U_{\nu,i_1,\dots,i_q} \cup \Omega_\nu)$ la cui restrizione a $U_{\nu,i_1,\dots,i_q}$ è $f^{(\nu)}_{\nu,i_1,\dots,i_q}$ e la cui restrizione a Ω_ν è 0. Poiché il fascio $\mathscr{S}$ è fiacco, vi è allora una $\tilde{\eta} \in \mathscr{S}(X)$ la cui restrizione a $U_{\nu,i_1,\dots,i_q} \cup \Omega_\nu$ è uguale a η. Definiamo $\psi^{(\nu)}_{i_1,\dots,i_q}$ come la restrizione di $\tilde{\eta}$ a $U_{i_1,\dots,i_q}$. Se $(\nu,i_1,\dots,i_q) \notin \mathscr{N}_q(\mathscr{U})$ poniamo $\psi^{(\nu)}_{i_1,\dots,i_q} = 0$ su $U_{i_1,\dots,i_q}$. Chiaramente, possiamo fare in modo che la $\psi^{(\nu)}$ sia alternata rispetto agli indici $((i_1,\dots,i_q) \in \mathscr{N}_{q-1}(\mathscr{U})$, dimodochè $\psi^{(\nu)} \in \mathscr{C}^{q-1}(\mathscr{U},\mathscr{S})$.

La $\psi^{(\nu)}$ così costruita gode ovviamente delle proprietà (i), (ii). Per dimostrare che gode anche della (iii), basta verificare che

$$r^{U_{i_0,i_1,\dots,i_q}}_{U_{\nu,i_0,i_1,\dots,i_q}}((f - \delta_{q-1}\psi^{(\nu)})_{i_0,i_1,\dots,i_q}) = 0 \quad \text{se} \quad (\nu,i_0,i_1,\dots,i_q) \in \mathscr{N}_{q+1}(\mathscr{U})\,,$$

in quanto $\Omega'_\nu = U_\nu \cup \Omega_\nu$ e

$$r^{U_{i_0,i_1,\dots,i_q}}_{U_{i_0,i_1,\dots,i_q}\cap\Omega_\nu}(f_{i_0,i_1,\dots,i_q}) = 0 \quad \text{per ipotesi e}$$

$$r^{U_{i_0,i_1,\dots,i_q}}_{U_{i_0,i_1,\dots,i_q}\cap\Omega_\nu}((\delta_{q-1}\psi^{(\nu)})_{i_0,i_1,\dots,i_q}) = 0 \quad \text{per la definizione di} \quad \psi^{(\nu)}\,.$$

Su $U_{\nu,i_0,\dots,i_q}$ risulta:

$$(\delta_{q-1}\psi^{(\nu)})_{i_0,\dots,i_q} = \sum_{h=0}^{q} (-1)^h f_{\nu,i_0,\dots,\hat{i}_h,\dots,i_q} = f_{i_0,\dots,i_q}$$

per la condizione di cociclo $\delta_q f = 0$, e questo mostra che vale anche la (ii).

Se $i_{\min}$ è il minimo di I, poniamo $f^{(i_{\min})} = f$. La (†) è verificata banalmente, perché $\Omega_{i_{\min}} = \emptyset$, e la costruzione appena descritta ci permette di trovare una $\psi^{(i_{\min})}$ che soddisfa (i) e (ii) per $\nu = i_{\min}$. Definiamo $f^{(i_{\min}+1)} = f - \delta_{q-1}(\psi^{(i_{\min})})$.

Dimostriamo per induzione transfinita che è possibile costruire delle famiglie $\{f^{(\nu)}\}_{\nu\in I}$, con $f^{(\nu)} \in \mathscr{Z}^q(\mathscr{U}, \mathscr{S})$, e $\{\psi^{(\nu)}\}_{\nu\in I}$, con $\psi^{(\nu)} \in \mathscr{C}^{q-1}(\mathscr{U}, \mathscr{S})$, che verifichino per ogni $\nu \in I$ le proprietà (†), (i), (ii), (iii) e

(‡) $$f^{(\nu+1)} = f^{(\nu)} - \delta_{q-1}(\psi^{(\nu)}) \quad \forall \nu \in I \quad \text{che non sia massimo.}$$

Fissiamo ora un $\mu \in I$ con $\mu > i_{\min}$ e supponiamo che si siano già ottenute le $\psi^{(j)}$ per tutti gli indici $j < \mu$. Consideriamo ora la somma

$$\sum_{j<\mu} \psi^{(j)}\,.$$

Poiché $\mathscr{U}$ è localmente finita, per ogni punto p di X esiste un intorno Ω_p di p che interseca soltanto un numero finito di aperti U_i del ricoprimento. Quindi per ogni $(i_1, \ldots, i_q) \in \mathscr{N}_{q-1}(\mathscr{U})$ le somme

$$\sum_{j<\mu} r^{U_{i_1,\ldots,i_q}}_{U_{i_1,\ldots,i_q}\cap\Omega_p}(\psi^{(j)}_{i_1,\ldots,i_q})$$

contengono soltanto un numero finito di addendi diversi da zero. Infatti, per la proprietà (ii), è $r^{U_{i_1,\ldots,i_q}}_{U_{i_1,\ldots,i_q}\cap\Omega_p}(\psi^{(j)}_{i_1,\ldots,i_q}) = 0$ se $(j, i_1, \ldots, i_q) \notin \mathscr{N}_q(\mathscr{U} \cap \Omega_p)$ e per la scelta di Ω_p il numero di tali j, per ogni scelta di $(i_1, \ldots, i_q) \in \mathscr{N}_{q-1}(\mathscr{U})$, è finito. Possiamo allora definire :

$$f^{(\mu)} = f - \delta_{q-1}\left(\sum_{j<i} \psi^{(j)}\right).$$

Osserviamo che, se i ammette un elemento precedente, cioè se $\mu = \nu + 1$ per qualche $\nu \in I$, allora vale la (‡).

Per la prima parte della dimostrazione, possiamo definire $\psi^{(\mu)}$ in modo che siano soddisfatte le (i), (ii), (iii) (con μ al posto di ν).

Una volta costruite le famiglie $\{f^{(\nu)}\}$ e $\{\psi^{(\nu)}\}$, osserviamo che la somma :

$$\psi = \sum_{\nu\in I} \psi^{(\nu)}$$

definisce un elemento $\psi \in \mathscr{C}^{q-1}(\mathscr{U}, \mathscr{S})$ e che

(♣) $$\delta_{q-1}(\psi) = f.$$

Ciò è vero perché, per ogni aperto Ω di X, se $(i_1, \ldots, i_q) \in \mathscr{N}_{q-1}(\mathscr{U})$ e $(\nu, i_1, \ldots, i_q) \notin \mathscr{N}_q(\mathscr{U} \cap \Omega)$, abbiamo $r^{U_{i_1,\ldots,i_q}}_{U_{i_1,\ldots,i_q}\cap\Omega}(\psi^{(\nu)}_{i_1,\ldots,i_q}) = 0$. Quindi, poiché

$\mathscr{U}$ è localmente finito, le somme

$$\sum_{\nu \in I} \psi^{(\nu)}_{i_1,\dots,i_q}$$

sono localmente finite. Analogamente, $r^{U_{i_0,i_1,\dots,i_q}}_{U_{i_0,i_1,\dots,i_q}\cap\Omega}\left((f^{(\nu)} - f^{(\nu+1)})_{i_0,i_1,\dots,i_q}\right) = 0$ a meno che qualcuna delle $(q+1)$ uple $(\nu, i_0, \dots, \hat{i}_h, \dots, i_q)$ o $(\nu+1, i_0, \dots, \hat{i}_h, \dots, i_q)$ non appartengano a $\mathscr{N}_q(\mathscr{U} \cap \Omega)$. Perciò anche le somme:

$$\sum_{\nu \in I} (f^{\nu}_{i_0,\dots,i_q} - f^{\nu+1}_{i_0,\dots,i_q})$$

sono localmente finite e

$$\sum_{\nu \in I} (f^{\nu}_{i_0,\dots,i_q} - f^{\nu+1}_{i_0,\dots,i_q}) = f_{i_0,\dots,i_q}.$$

Otteniamo perciò la (♣), e quindi la tesi. □

Utilizziamo il Lemma 12.5 per dimostrare il:

Teorema 12.6. *Sia X uno spazio paracompatto. Allora, per ogni fascio fiacco $\mathscr{S}$ su X abbiamo* $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{S}) = 0$ *per ogni* $q > 0$.

Dimostrazione. La tesi è conseguenza del Lemma 12.5, perché, essendo X paracompatto, i gruppi di coomologia di Cech si possono calcolare utilizzando i ricoprimenti aperti localmente finiti. □

CAPITOLO XVIII

Il complesso di Cech-de Rham

1. Il teorema di de Rham

Teorema 1.1. *Sia M una varietà differenziabile paracompatta ed $\mathscr{S}$ un fascio di $\mathscr{E}$-moduli su M. Allora*

$$H^q(\mathscr{U},\mathscr{S}) = 0, \quad \forall q \geq 1, \tag{1.1}$$

per ogni ricoprimento aperto $\mathscr{U}$ di M.

Dimostrazione. Ricordiamo che, per ogni intero $q \geq 0$,

$$\mathscr{C}^h(\mathscr{U},\mathscr{S}) = \{(f_{i_1,\dots,i_h}) \mid f_{i_1,\dots,i_h} \in \mathscr{S}(U_{i_1,\dots,i_h}),\ f_{i_{\sigma_1},\dots,i_{\sigma_h}} = \varepsilon(\sigma) f_{i_1,\dots,i_h}\} \tag{1.2}$$

e che il differenziale del complesso

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{C}^h(\mathscr{U},\mathscr{S}) \xrightarrow{\delta} \mathscr{C}^{h+1}(\mathscr{U},\mathscr{S}) \xrightarrow{\delta} \mathscr{C}^{h+2}(\mathscr{U},\mathscr{S}) \longrightarrow \cdots$$

è definito da

$$\delta : \mathscr{C}^h(\mathscr{U},\mathscr{S}) \longrightarrow \mathscr{C}^{h+1}(\mathscr{U},\mathscr{S}),$$

$$(\delta(f_{i_0,\dots,i_h}))_{i_0,i_1,\dots,i_{h+1}} = \sum\nolimits_{j=0}^{h+1} (-1)^j f_{i_0,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_{h+1}}|_{U_{i_0,i_1,\dots,i_{h+1}}}.$$

Sia $\{\chi_i\}_{i\in I}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\mathscr{U}$. Definiamo

$$\chi : \mathscr{C}^{h+1}(\mathscr{U},\mathscr{S}) \longrightarrow \mathscr{C}^h(\mathscr{U},\mathscr{S}) \quad \text{mediante}$$

$$(\chi(f_{i_0,\dots,i_h}))_{i_1,\dots,i_h} = \sum\nolimits_{i\in I} [\chi_i f_{i,i_1,\dots,i_h}], \quad \text{ove}$$

$$\mathscr{S}(U_{i_1,\dots,i_h}) \ni [\chi_i f_{i,i_1,\dots,i_h}] = \begin{cases} \chi_i f_{i,i_1,\dots,i_h} & \text{in } U_{i,i_1,\dots,i_h}, \\ 0 & \text{in } U_{i_1,\dots,i_h} \setminus U_{i,i_1,\dots,i_h}. \end{cases}$$

La tesi segue allora dall'identità

$$(\delta \circ \chi + \chi \circ \delta) f = f, \quad \forall f \in \mathscr{C}^h(\mathscr{U},\mathscr{S}),\ \forall h \geq 1.$$

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}(\chi \circ \delta(f))_{i_0,\dots,i_h} &= \chi\Big(\sum\nolimits_{j=0}^{h+1} (-1)^j f_{i_0,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_{h+1}}|_{U_{i_0,i_1,\dots,i_{h+1}}}\Big) \\ &= \sum\nolimits_i \chi_i f_{i_0,\dots,i_h} - \sum\nolimits_{j=0}^{h} [\chi_i f_{i,i_0,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_h}]\end{aligned}$$

$$= f_{i_0,\dots,i_h} - \sum_{j=0}^{h}(-1)^j[\chi_i f_{i,i_0,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_h}]$$
$$= f_{i_0,\dots,i_h} - (\delta\circ\chi(f))_{i_0,\dots,i_h}.$$

□

Se $\mathscr{S}$ è un fascio su M ed $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di M, definiamo

$$\text{(1.3)} \qquad \delta_0 : \mathscr{S}(M) \longrightarrow \mathscr{C}^0(\mathscr{U},\mathscr{S}), \quad \text{mediante} \quad (\delta_0 s)_i = s|_{U_i}, \quad \forall i\in I.$$

Se $\mathscr{S}$ è un fascio di gruppi abeliani, allora la

$$\text{(1.4)} \qquad 0 \longrightarrow \mathscr{S}(M) \xrightarrow{\delta_0} \mathscr{C}^0(\mathscr{U},\mathscr{S}) \xrightarrow{\delta} \mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathscr{S})$$

è esatta per defininizione di fascio.

Dal Teorema 1.1 otteniamo allora

Corollario 1.2. *Se M è una varietà differenziabile paracompatta ed $\mathscr{S}$ un fascio di $\mathscr{E}$-moduli su M, allora la successione*

$$\text{(1.5)} \qquad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{S}(M) & \xrightarrow{\delta_0} & \mathscr{C}^0(\mathscr{U},\mathscr{S}) & \xrightarrow{\delta} & \mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathscr{S}) \\ & \xrightarrow{\delta} & \mathscr{C}^2(\mathscr{U},\mathscr{S}) & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{\delta} & \mathscr{C}^h(\mathscr{U},\mathscr{S}) \\ & \xrightarrow{\delta} & \mathscr{C}^{h+1}(\mathscr{U},\mathscr{S}) & \xrightarrow{\delta} & \mathscr{C}^{h+2}(\mathscr{U},\mathscr{S}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

è esatta. □

Per ogni intero $q \geq 0$, i germi di forme differenziali alternate omogenee di grado q formano un fascio di $\mathscr{E}$-moduli su M, che denoteremo con Ω^q.

Per ogni coppia di interi non negativi h, q definiamo

(1.6)
$$\mathscr{C}^h(\mathscr{U},\Omega^q) = \{f = (f_{i_0,\dots,i_h}) \mid f_{i_0,\dots,i_h} \in \Omega^q(U_{i_0,\dots,i_h}),\ f_{i_{\sigma_0},\dots,i_{\sigma_h}} = \varepsilon(\sigma) f_{i_0,\dots,i_h}\}.$$

Abbiamo i due omomorfismi

$$d : \mathscr{C}^h(\mathscr{U},\Omega^q) \longrightarrow \mathscr{C}^h(\mathscr{U},\Omega^{q+1}), \quad \text{con}$$
$$(df)_{i_0,\dots,i_h} = (df_{i_0,\dots,i_h}),$$
$$\delta : \mathscr{C}^h(\mathscr{U},\Omega^q) \longrightarrow \mathscr{C}^{h+1}(\mathscr{U},\Omega^q), \quad \text{con}$$
$$(\delta f)_{i_0,i_1,\dots,i_h} = \sum_{j=0}^{h}(-1)^j f_{i_0,\dots,\widehat{i_j},\dots,i_h}|_{U_{i_0,i_1,\dots,i_h}}.$$

Osserviamo che

$$d\circ\delta = \delta\circ d.$$

Lemma 1.3. *Sia M una varietà differenziabile paracompatta. Sia $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di M. Allora*

(1) *per ogni* $f_q \in \mathscr{Z}^q(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}})$ *esistono una successione* $\{f^h_{q-h}\}$ *ed un elemento* f^q *con le proprietà:*

$$\begin{cases} f^h_{q-h-1} \in \mathscr{C}^{q-h-1}(\mathscr{U}, \Omega^h), & h = 0, 1, \ldots, q-1 \\ f^q \in \mathscr{Z}^q(M), \\ f_q = \delta f^0_{q-1}, \\ d f^h_{q-h-1} = \delta f^{h+1}_{q-h-2}, & h = 0, \ldots, q-2, \\ d f^{q-1}_0 = \delta_0 f^q. \end{cases} \tag{1.7}$$

(2) *Se* $f_q \in \mathscr{B}^q(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}})$*, ed* $\{f^h_{q-h}\}$*,* f^q *soddisfano le* (1.7)*, allora* $f^q \in \mathscr{B}^q(M)$.

Dimostrazione. (1). Costruiamo le f^h_{q-h-1} per ricorrenza su h. Per $h = 0$, osserviamo che $f_q \in \mathscr{Z}^q(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \subset \mathscr{Z}^q(\mathscr{U}, \Omega^0)$. Possiamo quindi definire la f^0_{q-1} utilizzando il Teorema 1.1, perché $\Omega^0 \simeq \mathscr{E}$. Supponiamo di aver costruito $f^0_{q-1}, \ldots, f^h_{q-h-1}$ con $f^j_{q-j-1} \in \mathscr{C}^{q-j-1}(\mathscr{U}, \Omega^j)$ per $0 \leq j \leq h < q-1$ con

$$\begin{cases} f_q = \delta f^0_{q-1}, \\ d f^0_{q-1} = \delta f^1_{q-2}, \\ \qquad \ldots \\ d f^{h-2}_{q-h+1} = \delta f^{h-1}_{q-h}, \\ d f^{h-1}_{q-h} = \delta f^h_{q-h-1}. \end{cases}$$

Allora

$$\delta(d f^h_{q-h-1}) = d \circ \delta f^h_{q-h-1} = d^2 f^{h-1}_{q-h} = 0$$

e quindi, per il Teorema 1.1 esiste $f^{h+1}_{q-h-2} \in \mathscr{C}^{q-h-2}(\mathscr{U}, \Omega^{h+1})$ tale che

$$\delta f^{h+1}_{q-h-2} = d f^h_{q-h-1}.$$

Dopo aver ottenuto le f^h_{q-h-1} per $h = 0, \ldots, q-1$, osserviamo che

$$d f^{q-2}_1 = \delta f^{q-1}_o \Longrightarrow \delta(d f^{q-1}_o) = d \circ \delta f^{q-1}_o = d^2 f^{q-2}_1 = 0.$$

Per il Corollario 1.2 vi è allora una $f^q \in \Omega^q(M)$ per cui $\delta_0(f^q) = d f^q_0$. Chiaramente $f^q \in \mathscr{Z}^q(M)$.

(2). Esaminiamo dapprima il caso $q = 1$. Abbiamo allora $f_1 \in \mathscr{Z}^1(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}})$, $f^0_0 \in \mathscr{C}^0(\mathscr{U}, \mathscr{E})$, $f^1 \in \mathscr{Z}^1(M)$ ed

$$\begin{cases} f_1 = \delta f^0_0, \\ d f^0_0 = \delta_0 f^1. \end{cases}$$

Se $f_1 = \delta g_0$, con $g_0 \in \mathscr{C}^0(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}})$, allora $\delta(f^0_0 - g^0_0) = 0$ ed esiste quindi una $g \in \mathscr{E}(M)$ tale che $f^0_0 - g^0_0 = \delta_0(g)$. Questa ci dà $dg = f^1$.

Supponiamo ora che $q \geq 2$ e che $f_q = \delta g_{q-1}$, con $g_{q-1} \in \mathscr{C}^{q-1}(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}})$. Assegnata una sequenza $\{f^h_{q-h-1}\}_{0\leq h\leq q-1}$, costruiamo un'altra seguenza $\{g^h_{q-h-2}\}_{0\leq h\leq q-2}$, con

$$\begin{cases} g^h_{q-h-2} \in \mathscr{C}^{q-h-2}(\mathscr{U}, \Omega^h), \quad \text{per} \quad h = 0, \dots, q-2, \\ f^0_{q-1} = g_{q-1} + \delta g^0_{q-2}, \\ f^h_{q-h-1} = dg^{h-1}_{q-h-1} + \delta g^h_{q-h-2}, \quad \text{per} \quad h = 1, \dots, q-2. \end{cases}$$

Ragioniamo per ricorrenza. Abbiamo

$$\delta(f^0_{q-1} - g_{q-1}) = f_q - f_q = 0 \Longrightarrow \exists g^0_{q-2} \in \mathscr{C}^{q-2}(\mathscr{U}, \Omega^0) \text{ t.c. } f^0_{q-1} = g_{q_1} + \delta g^0_{q-2}.$$

Se abbiamo definito le g^j_{q-j-2} per $j = 0, \dots, h < q-2$, abbiamo

$$\begin{aligned} &\delta f^{h+1}_{q-h-2} = df^h_{q-h-1} = d(\delta g^h_{q-h-2}) = \delta(dg^h_{q-h-2}) \\ &\Longrightarrow \exists g^{h+1}_{q-h-3} \in \mathscr{C}^{q-h-3}(\mathscr{U}, \Omega^{h+1}) \text{ t.c. } f^{h+1}_{q-h-2} = dg^h_{q-h-2} + \delta g^{h+1}_{q-h-3} \end{aligned}$$

per il Teorema 1.1. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} &\delta f^{q-1}_0 = df^{q-2}_1 = d(\delta g^{q-2}_0) = \delta(dg^{q-2}_0) \\ &\qquad \Longrightarrow \exists g^{q-1} \in \Omega^{q-1}(M) \text{ t.c. } f^{q-1}_0 - dg^{q-2}_0 = \delta_0(g^{q-1}). \end{aligned}$$

Abbiamo allora $f^q = dg^{q-1}$. La dimostrazione è completa. □

Otteniamo così il

Teorema 1.4. *Sia M una varietà differenziabile paracompatta ed $\mathscr{U}$ un suo ricoprimento aperto. Allora per ogni q la* (1.7) *definisce per passaggio ai quozienti un omomorfismo*

$$\lambda_q : H^q(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \longrightarrow H^q(M). \tag{1.8}$$

L'omomorfismo λ_0 è un isomorfismo e λ_1 iniettivo, per ogni ricoprimento $\mathscr{U}$ di M.

Dimostrazione. Per $q = 0$ la λ_0 è l'identità tra i due gruppi, identificati allo spazio delle funzioni reali localmente costanti su M. Il fatto che l'omomorfismo λ sia definito per $q \geq 1$ è stato dimostrato nel Lemma 1.3 Dimostriamo l'iniettività di λ_1. Siano quindi $f_1 \in \mathscr{Z}^1(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}})$, $f^0_0 \in \mathscr{C}^0(\mathscr{U}, \mathscr{E})$, $f^1 \in \mathscr{Z}^1(M)$ ed

$$\begin{cases} f_1 = \delta f^0_0, \\ df^0_0 = \delta_0 f^1. \end{cases}$$

Se $f^1 = dg^0$ per qualche $g^0 \in \mathscr{C}^\infty(M)$, otteniamo

$$d(f^0_0 - \delta_0(g^0)) = \delta_0(f^1 - dg^0) = 0.$$

Quindi

$$f^0_0 - \delta_0(g^0) \in \mathscr{C}^0(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}}), \quad \text{e} \quad \delta(f^0_0 - \delta_0(g^0)) = \delta(f^0_0) = f_1.$$

Ciò dimostra che λ_1 è iniettiva. $\square$

Esempio 1.1. Consideriamo il ricoprimento $\mathscr{U} = \{U_1, U_2\}$ del toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, ove U_1 ed U_2 sono gli aperti

$$U_1 = \pi(\{(x,y) \mid \tfrac{1}{3} < x < \tfrac{2}{3}\}), \quad U_2 = \pi(\{(x,y) \mid x - \tfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}\}),$$

ove $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ è la proiezione nel quoziente. Osserviamo che $U_1 \cap U_2 = U_{1,2}$ ha due componenti connesse. È quindi $\mathscr{C}^0(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \simeq \mathbb{R}^2$, $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \simeq \mathbb{R}^2$. Poiché $\tilde{\mathbb{R}}(T^2) = \mathbb{R}$, la $\delta : \mathscr{C}^0(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \to \mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}})$ ha rango 1. Quindi $H^1(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$. L'applicazione $\lambda_1 : H^1(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \to H^1(T^2)$ è quindi, in questo caso, iniettiva e non nulla, ma non surgettiva.

Teorema 1.5. *Sia M una varietà differenziabile ed $\mathscr{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un suo buon ricoprimento. Allora l'omomorfismo* (1.8) *è un isomorfismo per ogni $q \geq 0$.*

Dimostrazione. Abbiamo osservato che λ_q è un isomorfismo per $q = 0$.

Sia $f^1 \in \mathscr{Z}^1(M)$. Poiché gli aperti di $\mathscr{U}$ sono contrattili, esiste una $f_0^0 \in \mathscr{C}^0(\mathscr{U}, \mathscr{E})$ tale che

$$df_0^0 = \delta_0 f^1.$$

Allora δf_0^0 soddisfa

$$d(\delta f_0^0) = \delta \circ df_0^0 = \delta \circ \delta_0 f^1 = 0$$

e quindi $f_1 = \delta f_0^0 \in \mathscr{Z}^1(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}})$.

Se fosse $f^1 = dg^0$ per qualche $g^0 \in \Omega^0(M) = \mathscr{E}(M)$, avremmo

$$\delta_0 f^1 = \delta_0(dg^0) = d \circ \delta_0(g^0) = df_0^0 \Longrightarrow u_0^0 = f_0^0 - \delta_0(g^0) \in \mathscr{C}^0(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}}),$$

$$\delta u_0^0 = \delta f_0^0 = f_1 \in \mathscr{B}^1(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}}).$$

La corrispondenza

$$\underset{\in \mathscr{Z}^1(M)}{f^1} \longrightarrow \underset{\in \mathscr{C}^0(\mathscr{U}, \Omega^0)}{f_0^0} \longrightarrow \underset{\in \mathscr{Z}^1(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}})}{\delta f_0^0}$$

definisce quindi per passaggio al quoziente un'applicazione $\psi_1 : H^1(M) \to H^1(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}})$ che inverte la λ_1.

Generalizziamo questa costruzione e costruiamo, anche per ogni $q \geq 2$, un'applicazione $\psi_q : H^q(M) \longrightarrow H^q(M, \tilde{\mathbb{R}})$ che inverta la λ_q.

Sia $f^q \in \mathscr{Z}^q(M)$, con $q \geq 2$. Dico che esiste una successione

$$f_0^{q-1} \in \mathscr{C}^0(\mathscr{U}, \Omega^{q-1}),\; f_1^{q-2} \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \Omega^{q-2}),\; \ldots,\; f_{q-1}^0 \in \mathscr{C}^{q-1}(\mathscr{U}, \Omega^0) \tag{1.9}$$

tale che

$$(1.10)\qquad \begin{cases} df_0^{q-1} = \delta_0 f^q, \\ df_1^{q-2} = \delta f_0^{q-1}, \\ \quad\cdots\cdots \\ df_{q-1}^0 = \delta f_{q-2}^1. \end{cases}$$

Infatti, poiché gli U_i sono contrattili, per ogni $i \in I$ possiamo trovare una forma $f_i^{q-1} \in \Omega^{q-1}(U_i)$ tale che

$$df_i^{q-1} = f|_{U_i}, \quad \forall i \in I.$$

Possiamo quindi definire $f_0^{q-1} = (f_i^{q-1})_{i\in I} \in \mathscr{C}^0(\mathscr{U}, \Omega^{q-1})$. Supponiamo per ricorrenza di aver definito $f_0^{q-1}, \dots, f_h^{q-h-1}$ con

$$\begin{cases} f_r^{q-r-1} \in \mathscr{C}^r(\mathscr{U}, \Omega^{q-r-1}), & 0 \le r \le h, \\ df_0^{q-1} = \delta_0 f^q, \\ df_r^{q-r-1} = \delta f_{r-1}^{q-r}, & 1 \le r \le h. \end{cases}$$

Abbiamo

$$d \circ \delta f_h^{q-h-1} = \delta \circ df_h^{q-h-1} = \delta^2 f_{h-1}^{q-h} = 0$$

e quindi

$$\exists f_{h+1}^{q-h-2} \in \mathscr{C}^{h+1}(\mathscr{U}, \Omega^{q-h-2}) \quad \text{tale che} \quad df_{h+1}^{q-h-2} = \delta f_h^{q-h-1}.$$

Abbiamo quindi ottenuto la successione (1.9). Sia

$$f_q = \delta f_{q-1}^0.$$

Poiché

$$df_q = d \circ \delta f_{q-1}^0 = \delta \circ df_{q-1}^0 = \delta^2 f_{q-2}^1 = 0,$$

$f_q = (f_{i_0,\dots,i_q})$ con $f_{i_0,\dots,i_q}$ costante su $U_{i_0,\dots,i_q}$. Quindi $f_q \in \mathscr{C}^q(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}})$. Inoltre

$$\delta f_q = \delta^2 f_{q-1}^0 = 0 \Longrightarrow f_q \in \mathscr{Z}^q(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}}).$$

Per dimostrare che la classe di coomologia definita da f_q in $H^q(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}})$ dipende solo dalla classe di coomologia di f^q, è sufficiente verificare che, se (1.9) è una successione che soddisfa (1.10) ed $f^q = dg^{q-1}$ per una $g^{q-1} \in \Omega^{q-1}(M)$, allora $f_q \in \mathscr{B}^q(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}})$. Abbiamo infatti

$$\begin{gathered} f^q = dg^{q-1} \Longrightarrow d(f_0^{q-1} - \delta_0 g^{q-1}) = 0 \\ \Longrightarrow \exists g_0^{q-2} \in \mathscr{C}^0(\mathscr{U}, \Omega^{q-2}) \ \text{ t.c. } \ f_0^{q-1} - \delta_0 g^{q-1} = dg_0^{q-2} \\ \Longrightarrow df_1^{q-2} = \delta f_0^{q-1} = \delta(\delta_0 g^{q-1} + dg_0^{q-2}) = \delta \circ dg_0^{q-2} = d\delta g_0^{q-2} \\ \Longrightarrow d(f_1^{q-2} - \delta g_0^{q-2}) = 0 \\ \Longrightarrow \exists g_1^{q-3} \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \Omega^{q-3}) \ \text{ t.c. } \ f_1^{q-2} - \delta g_0^{q-2} = dg_1^{q-3} \Longrightarrow \cdots \end{gathered}$$

Possiamo cioè costruire per ricorrenza una successione $g_r^{q-r-2} \in \mathscr{C}^r(\mathscr{U}, \Omega^{q-r-2})$, per $r = 0, 1, \ldots, q-2$ tale che

$$\begin{cases} f^q = dg^{q-1}, \\ f_0^{q-1} - \delta_0 g^{q-1} = dg_0^{q-2}, \\ f_r^{q-r-1} - \delta g_{r-1}^{q-r-1} = dg_r^{q-r-2} \quad 1 \leq r \leq q-2. \end{cases}$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} df_{q-1}^0 = \delta f_{q-2}^1 = \delta d g_{q-2}^0 &\Longrightarrow d(f_{q-1}^0 - \delta g_{q-2}^0) = 0 \\ &\Longrightarrow g_{q-1} = f_{q-1}^0 - \delta g_{q-2}^0 \in \mathscr{C}^{q-1}(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}}), \end{aligned}$$

da cui $f_q = \delta g_{q-1}$. Quindi la (1.9), (1.10) definisce un'applicazione

$$\psi_q : H^q(M) \longrightarrow H^q(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}}), \tag{1.11}$$

che, per le (1.10) è l'inversa di λ_q. □

Osservazione 1.6. Si possono costruire buoni ricoprimenti di M a partire da una sua triangolazione. A partire da una triangolazione $\mathscr{K}$ di M, ad ogni vertice $p \in \mathscr{K}_0$ possiamo associare l'aperto U_p formato dall'unione di tutte le parti interne relative dei simplessi di $\mathscr{K}$ che contengono p, ovvero la parte interna della stella di p in $\mathscr{K}$. La famiglia $\{U_p \mid p \in \mathscr{K}_0\}$ è allora un buon ricoprimento, localmente finito, di M.

Esempio 1.2. Otteniamo un buon ricoprimento della sfera S^n nel modo seguente.

Consideriamo la frontiera di un simplesso $(n+1)$-dimensionale Σ circoscritto e sia $\pi : \Sigma \to S^n$ l'omeomorfismo ottenuto per restrizione dalla proiezione

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \ni x \to \frac{x}{|x|} \in S^n.$$

Siano $F_0, \ldots, F_n$ le facce di Σ. Allora gli

$$U_i = \pi(\sigma \setminus F_i), \quad i = 0, \ldots, n$$

sono gli aperti di un buon ricoprimento di S^n. Abbiamo allora

$$\mathscr{C}^h(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}}) \simeq \mathbb{R}^{\binom{n+1}{h}} \simeq \Lambda^h \mathbb{R}^{n+1}.$$

Per descrivere questo isomorfismo, Fissiamo una base $e_0, \ldots, e_n$ di $\mathbb{R}^{n+1}$, e facciamo corrispondere ad $(x_{i_0,\ldots,i_h}) \in \mathscr{C}^h(\mathscr{U}, \tilde{\mathbb{R}})$ l'elemento

$$\sum\nolimits_{0 \leq i_0 < \cdots < i_h \leq n} x_{i_0,\ldots,i_h} e_{i_0} \wedge \cdots \wedge e_{i_h}.$$

Abbiamo allora un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{C}^h(\mathscr{U},\tilde{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\ \delta\ } & \mathscr{C}^{h+1}(\mathscr{U},\tilde{\mathbb{R}}) \\
{\scriptstyle\simeq}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\simeq} \\
\Lambda^h\mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow[e\wedge\cdot]{} & \Lambda^{h+1}\mathbb{R}^{n+1}
\end{array}$$

per $0 \leq h \leq n-1$, con $e = e_0 + \cdots + e_n$.

Si verifica facilmente che

$$\Lambda^h\mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{e\wedge\cdot} \Lambda^{h+1}\mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{e\wedge\cdot} \Lambda^{h+2}\mathbb{R}^{n+1}$$

è esatta per $0 \leq h \leq n$. Ne ricaviamo un'altra dimostrazione del fatto che

$$H^q(S^n) \simeq H^q(\mathscr{U},\tilde{\mathbb{R}}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } q = 0, n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Prolungamento di sezioni

Teorema 2.1. *Sia $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio su uno spazio paracompatto X. Se Y è un chiuso di X ed $s_Y \in \mathscr{S}(Y)$, allora esiste un intorno aperto U di Y in X ed una sezione $s_U \in \mathscr{S}(U)$ tale che $s_U|_Y = s_Y$.*

Dimostrazione. Poiché X è paracompatto, possiamo trovare un ricoprimento aperto localmente finito $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ di Y in X tale che per ogni $i \in I$ vi sia una sezione $s_i \in \mathscr{S}(U_i)$ tale che $s_i|_{Y\cap U_i} = s_Y|_{Y\cap U_i}$. Fissiamo un altro ricoprimento aperto $\mathscr{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ di Y con $\bar{V}_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$. Osserviamo che, se $i, j \in I$, gli insiemi

$$F_{i,j} = \{p \in \bar{V}_i \cap V_j \mid s_{i(p)} \neq s_{j(p)}\}$$

sono chiusi che non intersecano Y. Poiché la famiglia $\{F_{i,j}\}_{i,j\in I}$ è localmente finita, l'unione $F = \bigcup_{i,j\in I} F_{i,j}$ è un chiuso che non interseca Y. Allora

$$U = \bigcup_{i\in I} V_i \setminus F$$

è un intorno aperto di Y in X e possiamo definire su U una sezione $s_U \in \mathscr{S}(U)$ con $s_U|_Y = S_Y$ ponendo

$$s_U = s_i \quad \text{su} \quad V_i \setminus F.$$

□

3. Fasci molli

DEFINIZIONE 3.1. Un fascio d'insiemi $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ si dice *molle*[1], o *soffice*[2] se, per ogni chiuso Y di X l'applicazione di restrizione

$$\mathscr{S}(X) \ni s \longrightarrow s|_Y \in \mathscr{S}(Y) \tag{3.1}$$

è surgettiva.

ESEMPIO 3.1. Per il Teorema 2.1 Ogni fascio fiacco è molle.

ESEMPIO 3.2. Se X è paracompatto, il fascio $\tilde{\mathscr{C}}$ dei germi di funzioni reali continue su X è molle.

Sia infatti Y un sottoinsieme chiuso di X ed $s \in \tilde{\mathscr{C}}(Y)$. Per ogni punto $q \in Y$, esiste un intorno U_q di q in X ed una $\sigma_q \in \mathscr{C}(U_q)$ tale che $(\sigma_q)_{(p)} = s_{(p)}$ per ogni $p \in Y \cap U_q$. Consideriamo il ricoprimento aperto $\mathscr{U} = \{U_q \mid q \in Y\} \cup \{X \setminus Y\}$ di X e sia $\{\chi_q\} \cup \{\chi_*\}$ una partizione continua dell'unità su X con $\operatorname{supp}\chi_q \subset U_q$, $\operatorname{supp}\chi_* \subset X \setminus Y$. Allora

$$\tilde{s}(p) = \sum\nolimits_{\operatorname{supp}\chi_q \ni p} \chi_q(p)\sigma_q(p)$$

è una funzione in $\mathscr{C}(X)$ con $\tilde{s}_{(p)} = s_{(p)}$ per ogni $p \in Y$.

La proprietà di essere *molle* è una proprietà locale. Abbiamo infatti

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} X$ un fascio su uno spazio paracompatto X. Se ogni punto $p \in X$ ha un intorno aperto U_p in X tale che*

$$\forall F \text{ chiuso in } X \text{ e contenuto in } U_p \text{ la restrizione } \mathscr{S}(U_p) \longrightarrow \mathscr{S}(F) \text{ è surgettiva,}$$

allora $\mathscr{S}$ è molle.

DIMOSTRAZIONE. Sia Y un chiuso di X ed $s_Y \in \mathscr{S}(Y)$ una sezione di $\mathscr{S}$ su Y. Possiamo allora trovare un ricoprimento aperto localmente finito $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X tale che:

(1) per ogni $i \in I$ con $U_i \cap Y \neq \emptyset$ esiste una $s_i \in \mathscr{S}(U_i)$ tale che $s_i|_{Y \cap U_i} = s|_{Y \cap U_i}$;
(2) per ogni $i \in I$ ed ogni chiuso F di X tale che $F \subset U_i$ la restrizione $\mathscr{S}(U_i) \to \mathscr{S}(F)$ è surgettiva.

Fissiamo un raffinamento $\mathscr{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ di $\mathscr{U}$ con $\bar{V}_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$ e poniamo, per ogni sottoinsieme J di I,

$$F_J = \bigcup\nolimits_{i \in J} \bar{V}_i.$$

Sia

$$\Phi = \{(s_J, J) \mid J \subset I, \quad s_J \in \mathscr{S}(F_J), \quad s_J|_{Y \cap F_J} = s_Y|_{Y \cap F_J}\}.$$

[1]In francese *mou*.

[2]In inglese, *soft*.

Definiamo su Φ la relazione d'ordine

$$(s_J, J) \leq (s_K, K) \iff J \subset K, \quad s_K|_{F_J} = s_J.$$

Chiaramente Φ è non vuota e induttiva. Essa ha pertanto un elemento massimale (s_{J_0}, J_0). Dimostriamo che $J_0 = I$. Se così non fosse, fissiamo $i_0 \in I \setminus J_0$. Consideriamo allora la sezione

$$s^*_{i_0} = \begin{cases} s_{J_0} & \text{su } \ F_{J_0} \cap F_{i_0}, \\ s_i & \text{su } \ F_{i_0} \cap Y. \end{cases}$$

Poiché $F^*_{i_0} = (F_{J_0} \cap F_{i_0}) \cup (F_{i_0} \cap Y)$ è un chiuso contenuto in U_{i_0}, per ipotesi possiamo prolungare $s^*_{i_0} \in \mathscr{S}(F^*_{i_0})$ ad una sezione $\tilde{s}_{i_0} \in \mathscr{S}(U_{i_0})$. Allora

$$s_{J_0 \cup \{i_0\}} = \begin{cases} s_{J_0} & \text{su } \ F_{J_0}, \\ \tilde{s}_{i_0} & \text{su } \ F_{i_0} \end{cases}$$

definisce un elemento $(s_{J_0 \cup \{i_0\}}, J_0 \cup \{i_0\})$ di Φ con $(s_{J_0 \cup \{i_0\}}, J_0 \cup \{i_0\}) \gneqq (s_{J_0}, J_0)$. Abbiamo ottenuto una contraddizione, che dimostra che $J_0 = I$. La dimostrazione è completa. □

Proposizione 3.2. *Supponiamo che X sia paracompatto e sia*

$$0 \longrightarrow \mathscr{S}' \xrightarrow{\ \phi\ } \mathscr{S} \xrightarrow{\ \psi\ } \mathscr{S}'' \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani. Se $\mathscr{S}'$ è molle, allora la successione

$$0 \longrightarrow \mathscr{S}'(X) \longrightarrow \mathscr{S}(X) \longrightarrow \mathscr{S}''(X) \longrightarrow 0 \tag{3.3}$$

è esatta.

Dimostrazione. L'esattezza in $\mathscr{S}'(X)$ ed in $\mathscr{S}(X)$ è conseguenza della definizione di fascio. È quindi sufficiente dimostrare che $\mathscr{S}(X) \xrightarrow{\psi} \mathscr{S}''(X)$ è surgettiva.

Sia $s'' \in \mathscr{S}''(X)$. Per ipotesi, possiamo trovare un ricoprimento aperto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X, che possiamo supporre localmente finito per la paracompattezza di X, e sezioni $s_i \in \mathscr{S}(U_i)$, tali che

$$\psi(s_i) = s''|_{U_i}, \quad \forall i \in I.$$

Sia $\mathscr{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X con la proprietà che $\bar{V}_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$. Bene-ordiniamo I e dimostriamo che, posto $Y_i = \bigcup_{j \leq i} \bar{V}_j$, è possibile trovare una famiglia di sezioni

$$\sigma_i \in \mathscr{S}(Y_i) \ \text{ tali che } \ \psi(\sigma_i) = s''|_{Y_i}, \quad \sigma_i|_{Y_j} = \sigma_j|_{Y_j} \text{ se } j \prec i. \tag{3.4}$$

Infatti, sia J l'insieme degli indici $h \in I$ per cui si possono costruire le $\sigma_i \in \mathscr{S}(Y_i)$, per $i \leq h$, in modo che valgano le (3.4) per $i \leq h$. L'insieme J è non vuoto perché contiene il minimo di I. Supponiamo per assurdo che $J \neq I$. Sia allora h_0 il minimo di $I \setminus J$. L'unione $Y' = \bigcup_{i \prec h_0} \bar{V}_i$ è un chiuso di X perché unione localmente finita di chiusi. Definiamo una sezione $\sigma' \in \mathscr{S}(Y')$ ponendo

$$\sigma'|_{Y_i} = \sigma_i|_{Y_i} \text{ per } i \prec h_0.$$

Poiché $\mathscr{S}$ è molle, esiste una sezione $\tilde{\sigma}' \in \mathscr{S}(X)$ tale che $\sigma' = \tilde{\sigma}'|_{Y'}$. Osserviamo ora che $\phi(\tilde{\sigma}' - s_{h_0})$ è definita e si annulla in tutti i punti di $\bar{V}_{h_0} \cap Y'$. Per l'esattezza di (3.2) esiste allora una sezione $s' \in \mathscr{S}'(\bar{V}_{h_0} \cap Y')$ tale che $(\tilde{\sigma}' - s_{h_0})|_{\bar{V}_{h_0} \cap Y'} = \phi(s')$. Poiché $\mathscr{S}'$ è molle, esiste una $\tilde{s}' \in \mathscr{S}'(X)$ tale che $s' = \tilde{s}'|_{\bar{V}_{h_0} \cap Y'}$. Definiamo allora l'elemento σ_{h_0} ponendo

$$\sigma_{h_0} = \begin{cases} \sigma_i & \text{su } \ Y_i \ \text{ se } \ i \prec h_0, \\ s_{h_0} + \phi(\tilde{s}') & \text{su } \ \bar{V}_{h_0}. \end{cases}$$

Allora $\sigma_{h_0} \in \mathscr{S}(Y_{h_0})$ e la famiglia $\{\sigma_i \mid i \preceq h_0\}$ soddisfa le (3.4) per ogni $i \preceq h_0$. Quindi $h_0 \in J$ ci dà una contraddizione e dimostra che è possibile definire una famiglia $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ che soddisfi le (3.4) per ogni $i \in I$. Otteniamo allora

$$\psi(s) = s'', \quad \text{con } \ s \in \mathscr{S}(X) \ \text{ definito da } s|_{Y_i} = \sigma_i, \ \ \forall i \in I.$$

□

Teorema 3.3. *Siano X uno spazio pracompatto e*

$$0 \longrightarrow \mathscr{S}' \xrightarrow{\alpha} \mathscr{S} \xrightarrow{\beta} \mathscr{S}'' \longrightarrow 0 \tag{3.5}$$

una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X. Se $\mathscr{S}$ ed $\mathscr{S}'$ sono molli, anche $\mathscr{S}''$ è molle.

Dimostrazione. Sia Y un sottoinsieme chiuso di X ed $s'' \in \mathscr{S}''(Y)$. Per la Proposizione 3.2, esiste una sezione $s \in \mathscr{S}(Y)$ tale che $\alpha(s) = s''$. Poiché $\mathscr{S}$ è molle, abbiamo $s = \tilde{s}|_Y$ per una sezione $\tilde{s} \in \mathscr{S}(X)$. Allora $\tilde{s}'' = \alpha(\tilde{s}) \in \mathscr{S}''(X)$ ed $s''|_Y = s''$. □

Teorema 3.4. *Se*

$$0 \longrightarrow \mathscr{S}^0 \xrightarrow{\delta_0} \mathscr{S}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathscr{S}^2 \longrightarrow \cdots \tag{3.6}$$

è una successione esatta di fasci molli di gruppi abeliani, allora anche la successione

$$0 \longrightarrow \mathscr{S}^0(X) \xrightarrow{\delta_0} \mathscr{S}^1(X) \xrightarrow{\delta_1} \mathscr{S}^2(X) \longrightarrow \cdots \tag{3.7}$$

è esatta.

Dimostrazione. L'esattezza in $\mathscr{S}^0(X)$ è conseguenza della definizione di fascio.

Per ogni intero $h \geq 0$, per ipotesi la successione esatta corta di fasci

$$0 \longrightarrow \ker \tilde{\delta}_h \longrightarrow \mathscr{S}^h \xrightarrow{\delta_h} \ker \tilde{\delta}_{h+1} \longrightarrow 0.$$

è esatta. Poiché $\ker \tilde{\delta}_0$ è il fascio nullo, che è banalmente molle, segue per ricorrenza, dal Teorema 3.3, che $\ker \tilde{\delta}_h$ è un fascio molle per ogni intero $h \geq 0$. Otteniamo quindi per ogni intero $h \geq 0$, per la Proposizione 3.2, una successione esatta di fasci

$$0 \longrightarrow \ker \tilde{\delta}_h(X) \longrightarrow \mathscr{S}^h(X) \xrightarrow{\delta_h} \ker \tilde{\delta}_{h+1}(X) \longrightarrow 0,$$

che dimostra l'esattezza di (3.7) in $S^h(X)$. □

Sia $\mathscr{S}$ un fascio di gruppi abeliani su uno spazio topologico X ed $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X.

Definizione 3.2. Se $s \in \mathscr{S}(X)$, chiamiamo *partizione di s su X subordinata ad $\mathscr{U}$* una successione $\{s_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{S}(X)$ tale che

(3.8) $\quad \operatorname{supp} s_i \subset U_i, \quad \{\operatorname{supp} s_i\}_{i\in I}$ è localmente finita, $\quad s = \sum_{i\in I} s_i.$

Abbiamo

Teorema 3.5 (Esistenza di partizioni). *Se X è uno spazio paracompatto ed $\mathscr{S}$ un fascio molle di gruppi abeliani, allora, per ogni ricoprimento aperto $\mathscr{U}$ di X ed ogni $s \in \mathscr{S}(X)$ esiste una partizione di s su X subordinata ad $\mathscr{U}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ un raffinamento localmente finito di $\mathscr{U}$, con funzione di raffinamento $j \to i_j$ e $\bar{V}_j \subset U_{i_j}$ per ogni $j \in J$. Siano $\{W_j\}_{j\in J}$, $\{G_j\}_{j\in J}$ altri ricoprimenti aperti di X con $\bar{W}_j \subset G_j \subset \bar{G}_j \subset V_j$ per ogni $j \in J$.

Bene-ordiniamo l'insieme J e dimostriamo per induzione transfinita che è possibile trovare sezioni $\sigma_j \in \mathscr{S}(X)$ con $\operatorname{supp} \sigma_j \subset V_j$ e

$$\sum_{h\leq j} \sigma_{h(p)} = s_{(p)}, \quad \forall p \in \bigcup_{h\leq j} \bar{W}_h.$$

Per ogni $j \in J$, poniamo $Y_j = \bigcup_{h\leq j} \bar{W}_h \cup \complement G_j$. Gli insiemi Y_j sono chiusi perché unione localmente finita di chiusi. Se $j_0 = \min J$, definiamo $s^*_{j_0} \in \mathscr{S}(Y_{j_0})$ ponendo

$$s^*_{j_0} = \begin{cases} s & \text{su } \bar{W}_{j_0}, \\ 0 & \text{su } \complement G_{j_0} \end{cases}$$

Poiché $\mathscr{S}$ è molle, esiste una sezione $s_{j_0} \in \mathscr{S}$ con $\sigma_{j_0}|_{Y_{j_0}} = s^*_{j_0}$.

Supponiamo che $j > j_0$ e di aver costruito σ_h per ogni $h < j$. Definiamo allora una sezione $s_j^* \in \mathscr{S}(Y_j)$ ponendo

$$s_j^* = \begin{cases} s - \sum_{h<j}\sigma_j & \text{su } \bar{W}_j, \\ 0 & \text{su } \complement G_j \cup \bigcup_{h<j}\bar{W}_h. \end{cases}$$

La sezione è ben definita perché

$$(s - \sum\nolimits_{h<j}\sigma_j)_{(p)} = 0_{(p)}, \quad \forall p \in \bar{W}_j \cap (\bigcup\nolimits_{h<j}\bar{W}_h).$$

Poiché $\mathscr{S}$ è molle, esiste una sezione $\sigma_j \in \mathscr{S}(X)$ tale che $s_j^* = \sigma_j|_{Y_j}$. Chiaramente $\operatorname{supp}\sigma_j \subset \bar{G}_j \subset V_j$. Ciò dimostra l'esistenza della successione $\{\sigma_j\}_{j\in J}$. Basterà allora porre

$$s_i = \sum\nolimits_{i_j=i}\sigma_j$$

per avere la (3.8). □

Dal Teorema 3.5 ricaviamo immediatamente:

Teorema 3.6. *Se $\mathscr{A}$ è un fascio d'anelli molle sullo spazio paracompatto X, allora ogni fascio di $\mathscr{A}$-moduli su X è molle.*

Dimostrazione. Siano $\mathscr{M}$ un fascio di $\mathscr{A}$-moduli su X, Y un chiuso di X e $\mu \in \mathscr{M}(Y)$ una sezione di $\mathscr{M}$ su Y. Esistono allora un ricoprimento aperto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ di Y in X e sezioni $\mu_i \in \mathscr{M}(U_i)$ tali che $\mu_i|_{U_i\cap Y} = \mu|_{U_i\cap Y}$ per ogni $i \in I$. Per il Teorema 3.5 esiste una partizione $\{\chi_i\} \cup \{\chi_*\}$ di $1 \in \mathscr{A}(X)$ su X subordinata al ricoprimento $\mathscr{U} \cup \{X \setminus Y\}$. Definiamo

$$\alpha_i = \begin{cases} \chi_i\mu_i & \text{su } U_i, \\ 0 & \text{su } X \setminus U_i. \end{cases}$$

Allora

$$\tilde{\mu} = \sum\nolimits_{i\in I}\alpha_i \in \mathscr{M}(X) \quad \text{e} \quad \tilde{\mu}|_Y = \mu.$$

□

4. Fasci fini

Definizione 4.1. Un fascio $\mathscr{S}$ di gruppi abeliani su uno spazio topologico X si dice *fine*[3] se il fascio $\widetilde{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathscr{S}, \mathscr{S})$ è molle.

Teorema 4.1. *Sia X uno spazio paracompatto.*

(1) *Ogni fascio fine è su X è molle.*
(2) *Siano $\mathscr{S}$, $\mathscr{T}$ due fasci di gruppi abeliani su X. Se $\mathscr{S}$ è fine, allora anche $\mathscr{S} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{T}$ è fine.*

[3]Inglese: fine; Francese: fin

5. Fasci differenziali

Sia X uno spazio topologico.

DEFINIZIONE 5.1. Un *fascio graduato* su X è il dato di una successione $\mathscr{A}^* = (\mathscr{A}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ di fasci.

Siano $\mathscr{A}^* = (\mathscr{A}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathscr{B}^* = (\mathscr{B}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ due fasci graduati su X. Un *morfismo di grado k* tra $\mathscr{A}^*$ e $\mathscr{B}^*$ è una successione $(f^n : \mathscr{A}^n \to \mathscr{B}^{n+k})$ di morfismi di fasci.

Un *fascio differenziale su X* è il dato di un fascio graduato di gruppi abeliani $\mathscr{A}^* = (\mathscr{A}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ su X e di un morfismo di fasci abeliani di grado k

$$(\mathscr{A}^*, \delta^*) = (\delta^n : \mathscr{A}^n \to \mathscr{A}^{n+k})_{n\in\mathbb{Z}} \tag{5.1}$$

tale che

$$\delta^{n+k} \circ \delta^n = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{5.2}$$

Associamo ad un fascio differenziale $(\mathscr{A}^*, \delta^*)$ i fasci

$$\mathscr{Z}^n(\mathscr{A}^*, \delta^*) = \ker(\mathscr{A}^n \xrightarrow{\delta^n} \mathscr{A}^{n+k}), \tag{5.3}$$

$$\mathscr{B}^n(\mathscr{A}^*, \delta^*) = \operatorname{Im}(\mathscr{A}^{n-k} \xrightarrow{\delta^{n-k}} \mathscr{A}^n), \tag{5.4}$$

$$\mathscr{H}^n(\mathscr{A}^*, \delta^*) = \mathscr{Z}^n(\mathscr{A}^*, \delta^*)\big/\mathscr{B}^n(\mathscr{A}^*, \delta^*). \tag{5.5}$$

Il fascio $\mathscr{H}^n(\mathscr{A}^*, \delta^*)$ si dice il *fascio derivato di grado n di* $(\mathscr{A}^*, \delta^*)$.

Considereremo nel seguito, per semplicità e senza perdita di generalità, soltanto differenziali di grado 1.

6. Risoluzione d'un fascio

Sia $\mathscr{A}$ un fascio di gruppi abeliani di base X.

DEFINIZIONE 6.1. Una *risoluzione coomologica* di $\mathscr{A}$ è una successione esatta di fasci di gruppi abeliani della forma

$$0 \longrightarrow \mathscr{A} \xrightarrow{\jmath} \mathscr{L}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathscr{L}^1 \xrightarrow{\delta^1} \mathscr{L}^2 \xrightarrow{\delta^2} \cdots \tag{6.1}$$

ESEMPIO 6.1 (Cocatene di Alexander-Spanier). Sia X uno spazio topologico ed $\mathbb{A}$ un gruppo abeliano. Per ogni intero non negativo n, associamo ad ogni aperto U di X il gruppo abeliano delle applicazioni $f : U^{n+1} \to \mathbb{A}$. Otteniamo così un prefascio canonico, associato al fascio $\mathscr{F}^n(X, \mathbb{A})$, che si dice il *fascio delle cocatene di Alexander-Spanier di grado n di X a valori in* $\mathbb{A}$.

Ad $f : U^{n+1} \to \mathbb{A}$ associamo l'applicazione $\delta^n_U f : U^{n+2} \to \mathbb{A}$ definita da

$$(\delta^n f)(x_0, \dots, x_{n+1}) = \sum\nolimits_{h=0}^{n+1} (-1)^h f(x_0, \dots, \widehat{x_h}, \dots, x_{n+1}). \tag{6.2}$$

Da questa otteniamo un morfismo di fasci di gruppi abeliani

$$\delta^n : \mathscr{F}^n(X, \mathbb{A}) \longrightarrow \mathscr{F}^{n+1}(X, \mathbb{A}). \tag{6.3}$$

Indicando con $\tilde{\mathbb{A}}$ il fascio semplice di base X e fibra $\mathbb{A}$, abbiamo

$$\tilde{\mathbb{A}} = \ker(\delta^0 : \mathscr{F}^0(X, \mathbb{A}) \to \mathscr{F}^1(X, \mathbb{A})). \tag{6.4}$$

La

(6.5)

$$0 \to \tilde{\mathbb{A}} \longrightarrow \mathscr{F}^0(X, \mathbb{A}) \xrightarrow{\delta^0} \mathscr{F}^1(X, \mathbb{A}) \xrightarrow{\delta^1} \mathscr{F}^2(X, \mathbb{A}) \to \cdots$$

è una risoluzione del fascio semplice $\tilde{\mathbb{A}}$ su X.

Siano infatti $n \geq 1$ ed $f : U^{n+1} \to \mathbb{A}$. Fissato un qualsiasi punto $\bar{x} \in U$, poniamo

$$g : U^n \ni (x_0, \dots, x_{n-1}) \longrightarrow f(\bar{x}, x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{A}.$$

Otteniamo allora

$$\begin{aligned}(\delta_U^{n-1} g)(x_0, \dots, x_n) &= \sum\nolimits_{h=0}^{n} (-1)^h f(\bar{x}, x_0, \dots, \widehat{x_h}, \dots, x_n)\\ &= f(x_0, \dots, x_n) - (\delta_U^n f)(\bar{x}, x_0, \dots, x_n),\end{aligned}$$

e quindi $\delta_U^{n-1} g = f$ se $\delta_U^n f = 0$.

7. Risoluzione canonica d'un fascio

Sia $\mathscr{A}$ un fascio di gruppi abeliani sullo spazio topologico X. Per ogni aperto U di X indichiamo con

$$\mathscr{F}^0(U, \mathscr{A}) = \{s : U \to \mathscr{A} \mid \pi \circ s = \mathrm{id}_U\} \tag{7.1}$$

il gruppo abeliano delle sezioni (non necessariamente continue) di $\mathscr{A}$ su U. Allora $U \to \mathscr{F}^0(U, \mathscr{A})$ è un prefascio canonico. Il fascio associato, che indicheremo con $\mathscr{F}^0(\mathscr{A})$, è un fascio fiacco, ed abbiamo un'inclusione canonica

$$\jmath : \mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{F}^0(\mathscr{A}). \tag{7.2}$$

Definiamo per ricorrenza:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{Z}^1(\mathscr{A}) = \mathscr{F}^0(\mathscr{A})/\mathscr{A}, && \mathscr{F}^1(\mathscr{A}) = \mathscr{F}^0(\mathscr{Z}^1(\mathscr{A}))\\
&\mathscr{Z}^2(\mathscr{A}) = \mathscr{F}^1(\mathscr{A})/\mathscr{Z}^1(\mathscr{A}), && \mathscr{F}^2(\mathscr{A}) = \mathscr{F}^0(\mathscr{Z}^2(\mathscr{A}))\\
&\quad\dots\dots && \quad\dots\dots\\
&\mathscr{Z}^n(\mathscr{A}) = \mathscr{F}^{n-1}(\mathscr{A})/\mathscr{Z}^{n-1}(\mathscr{A}), && \mathscr{F}^n(\mathscr{A}) = \mathscr{F}^0(\mathscr{Z}^n(\mathscr{A}))\\
&\mathscr{Z}^{n+1}(\mathscr{A}) = \mathscr{F}^n(\mathscr{A})/\mathscr{Z}^n(\mathscr{A}), && \mathscr{F}^{n+1}(\mathscr{A}) = \mathscr{F}^0(\mathscr{Z}^{n+1}(\mathscr{A})).
\end{aligned}$$

Abbiamo degli omomorfismi naturali

$$\delta^n : \mathscr{F}^n(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{F}^{n+1}(\mathscr{A}), \tag{7.3}$$

che si ottengono componendo la proiezione nel quoziente

$$\mathscr{F}^n(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{Z}^{n+1}(\mathscr{A}) = \mathscr{F}^n(\mathscr{A})\big/\mathscr{Z}^n(\mathscr{A})$$

con l'inclusione

$$\mathscr{Z}^{n+1}(\mathscr{A}) \hookrightarrow \mathscr{F}^0(\mathscr{Z}^{n+1}(\mathscr{A})) = \mathscr{F}^{n+1}(\mathscr{A}).$$

Dalla costruzione che abbiamo descritto si ha

Teorema 7.1. *Per ogni fascio $\mathscr{A}$ di gruppi abeliani la*

$$0 \to \mathscr{A} \xrightarrow{\ \jmath\ } \mathscr{F}^0(\mathscr{A}) \xrightarrow{\ \delta^0\ } \mathscr{F}^1(\mathscr{A}) \xrightarrow{\ \delta^1\ } \mathscr{F}^2(\mathscr{A}) \to \cdots \tag{7.4}$$

è una risoluzione del fascio $\mathscr{A}$ mediante fasci fiacchi.

Indice analitico