ANALISI COMPLESSA
Funzioni di più variabili

Mauro Nacinovich

Indice

CAPITOLO 1

Funzioni olomorfe in $\mathbb{C}^n$ e complesso di Dolbeault

1. Funzioni olomorfe

Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$. Il fibrato tangente $T\Omega$ di Ω si può identificare al prodotto cartesiano $\Omega \times \mathbb{C}^n$. Le sue fibre hanno quindi una struttura complessa naturale, data dalla moltiplicazione per l'unità immaginaria.

Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione complessa, di classe $\mathcal{C}^1$, definita su Ω. Il *differenziale* di f nel punto $z \in \Omega$ è un'applicazione $\mathbf{R}$-lineare $df(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

Definizione I.1.1. Una funzione a valori complessi f, definita e di classe $\mathcal{C}^1$ su un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$, si dice olomorfa su Ω se il suo differenziale

$$df(z) : T_z\Omega \simeq \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} \simeq T_{f(z)}\mathbb{C}$$

è $\mathbb{C}$-lineare in ogni punto $z \in \Omega$. Indicheremo nel seguito con $\mathcal{O}(\Omega)$ l'insieme di tutte le funzioni olomorfe su Ω.

In generale, una funzione a valori complessi f, definita su un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$, si dice *olomorfa* in un punto z_0 di Ω se esiste un intorno aperto U di z_0 in Ω tale che la restrizione $f|_U$ sia di classe $\mathcal{C}^1$ in Ω ed $f|_U \in \mathcal{O}(U)$.

Siano

$z_1, \ldots, z_n$ le coordinate complesse di $\mathbb{C}^n$

ed indichiamo con

$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ le coordinate reali corrispondenti,
dimodoché $z_j = x_j + iy_j$ per $j = 1, \ldots, n$.

Il differenziale di una funzione complessa f, definita e di classe $\mathcal{C}^1$ su un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$, è:

$$\begin{aligned} df &= \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j \right) \\ &= \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right) \end{aligned}$$

dove $\partial/\partial z_j$ e $\partial/\partial \bar{z}_j$ non sono derivate parziali rispetto a delle coordinate, ma sono operatori differenziali alle derivate parziali omogenei del primo ordine, a coefficienti complessi costanti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right). \end{aligned}$$

Abbiamo perciò :

Lemma I.1.2. *Le funzioni olomorfe sull'aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ sono le soluzioni $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$ del sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali omogeneo del prim'ordine :*

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f = 0 \quad \textit{per} \quad 1 \leq j \leq n\,. \tag{1.1.1}$$ □

Proposizione I.1.3. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ ed $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ una funzione olomorfa in Ω. Allora in ogni punto $z^0 \in \Omega$ esistono i limiti*

$$\lim_{\substack{t \in \mathbb{C} \\ t \to 0}} \frac{f(z^0 + te_j) - f(z^0)}{t} = \frac{\partial f(z^0)}{\partial z_j}, \quad \textit{per} \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.1.2}$$

Dimostrazione. Per la formula del differenziale, abbiamo infatti, per w in un intorno di 0 in $\mathbb{C}^n$,

$$f(z^0 + w) = f(z^0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(z^0)}{\partial z_j} w_j + o(|w|) \quad \text{per} \quad w \to 0,$$

da cui otteniamo la tesi. □

Poniamo ancora :

$$\partial f = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j\,, \tag{1.1.3}$$

$$\bar{\partial} f = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j\,. \tag{1.1.4}$$

Abbiamo così una decomposizione del differenziale nella sua componente $\mathbb{C}$-lineare e nella sua componente anti-$\mathbb{C}$-lineare:

$$df = \partial f + \bar{\partial} f\,. \tag{1.1.5}$$

Introduciamo ancora l'operatore differenziale alle derivate parziali

$$d^c f = \sum_{j=1}^{n} \big(\frac{\partial f}{\partial x_j} dy_j - \frac{\partial f}{\partial y_j} dx_j\big), \tag{1.1.6}$$

dimodoché

$$\partial f = \tfrac{1}{2}(df + i d^c f). \tag{1.1.7}$$

Indichiamo con $T^{*p,q}\Omega$ il fibrato vettoriale complesso su Ω le cui fibre, in ciascun punto $p \in \Omega$, sono forme in $T^{*p,q}(T_p\Omega)$. Possiamo allora considerare ∂ e $\bar\partial$ come operatori differenziali:

$$\partial : \mathcal{C}^{k+1}(\Omega, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^k(\Omega, T^{*1,0}\Omega)\,, \tag{1.1.8}$$

$$\bar\partial : \mathcal{C}^{k+1}(\Omega, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^k(\Omega, T^{*0,1}\Omega) \tag{1.1.9}$$

Abbiamo:

Proposizione I.1.4. *L'insieme $\mathcal{O}(\Omega)$ delle funzioni olomorfe su Ω è un'algebra complessa ed un anello commutativo unitario rispetto alla somma, al prodotto, e al prodotto per scalare usuale per le funzioni.*

Dimostrazione. Infatti le $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sono le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali omogeneo e del prim'ordine, per cui valgono le:

$$\begin{aligned} \bar\partial(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= \lambda_1 \bar\partial f_1 + \lambda_2 \bar\partial f_2 \quad \text{se } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C},\ f_1, f_2 \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{C}) \\ \bar\partial(f_1 f_2) &= f_1 \bar\partial f_2 + f_2 \bar\partial f_1 \quad \text{se } f_1, f_2 \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{C})\,. \end{aligned}$$

Quindi combinazioni lineari e prodotti finiti di funzioni olomorfe su Ω sono ancora funzioni olomorfe su Ω. □

Esempio I.1.5. Ogni polinomio $p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ si può scrivere in modo unico come polinomio di $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n, \bar z_1, \ldots, \bar z_n]$. Si verifica facilmente che, se Ω è un qualsiasi aperto non vuoto di $\mathbb{C}^n$, i polinomi p che definiscono una funzione olomorfa su Ω sono tutti e soli quelli di $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$, quelli cioè che sono indipendenti dalle indeterminate $\bar z_1, \ldots, \bar z_n$.

Possiamo estendere la definizione di funzione olomorfa al caso di applicazioni a valori in uno spazio vettoriale complesso, mediante:

Definizione I.1.6. Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ e Ω' un aperto di $\mathbb{C}^{n'}$. Un'applicazione $F : \Omega \to \Omega'$ si dice *olomorfa* se è di classe $\mathcal{C}^1$ e il suo differenziale

$$df(p) : T_p\Omega \simeq \mathbb{C}^n \longrightarrow T_p\Omega' \simeq \mathbb{C}^{n'}$$

è $\mathbb{C}$-lineare per ogni $p \in \Omega$.

Indichiamo con (x, y) le coordinate reali di $\mathbb{C}^n$, e con (x', y') quelle di $\mathbb{C}^{n'}$. Scriviamo quindi $F = \operatorname{Re} F + i \operatorname{Im} F$, con $\operatorname{Re} F, \operatorname{Im} F \in \mathbb{R}^{n'}$. Lo Jacobiano della F, pensata come un'applicazione differenziabile tra aperti di $\mathbb{R}^{2n}$ e di $\mathbb{R}^{2n'}$, è:

$$Jf(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re} F(p)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Re} F(p)}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial \operatorname{Im} F(p)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Im} F(p)}{\partial y} \end{pmatrix}\,.$$

Se le strutture complesse J, J' negli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}^{2n'}$, corrispondenti agli spazi vettoriali complessi $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{n'}$, si esprimono mediante le matrici:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J' = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n'} \\ I_{n'} & 0 \end{pmatrix}$$

le matrici reali delle applicazioni $\mathbb{C}$-lineari sono della forma

$$M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \quad \text{con } A, B \text{ matrici reali } n' \times n.$$

Otteniamo quindi la *forma reale delle equazioni di Cauchy-Riemann*:

Proposizione I.1.7. *L'applicazione di classe $\mathcal{C}^1$:*

$$F : \Omega_{\text{aperto}} \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow {\Omega'}_{\text{aperto}} \subset \mathbb{C}^{n'}$$

è olomorfa se e soltanto se:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \operatorname{Re} F}{\partial x} = \dfrac{\partial \operatorname{Im} F}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial \operatorname{Re} F}{\partial y} = -\dfrac{\partial \operatorname{Im} F}{\partial x}. \end{cases} \tag{1.1.10}$$

□

Poiché la composizione di due applicazioni $\mathbb{C}$-lineari è $\mathbb{C}$-lineare, abbiamo immediatamente:

Proposizione I.1.8. *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $\Omega' \subset \mathbb{C}^{n'}$, $\Omega'' \subset \mathbb{C}^{n''}$ aperti nei rispettivi spazi vettoriali. Se $F : \Omega \to \Omega'$ e $G : \Omega' \to \Omega''$ sono due applicazioni olomorfe, anche la loro composizione $G \circ F : \Omega \to \Omega''$ è un'applicazione olomorfa.* □

Vale poi il *teorema della funzione inversa*:

Proposizione I.1.9. *Sia $F : \Omega \to \mathbb{C}^n$ una funzione olomorfa definita su un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$, e sia $z^0 \in \Omega$. Se lo Jacobiano complesso:*

$$\frac{\partial F(z^0)}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(z^0)}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_1(z^0)}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(z^0)}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_n(z^0)}{\partial z_n} \end{pmatrix} \tag{1.1.11}$$

è invertibile, allora esistono un intorno aperto U di z^0 in Ω e un intorno aperto V di $F(z^0)$ in $\mathbb{C}^n$ tali che $F|_U^V : U \ni z \to F(z) \in V$ sia bigettiva. L'inversa $\left[F|_U^V\right]^{-1} : V \to U$ è allora anch'essa olomorfa.

Dimostrazione. Per una funzione olomorfa, la condizione che il suo Jacobiano complesso sia invertibile è equivalente al fatto che il suo differenziale nel punto sia invertibile. Possiamo quindi applicare il teorema dell'applicazione inversa, che sappiamo valido per applicazioni di classe $\mathcal{C}^1$ tra spazi vettoriali reali. L'inversa è allora olomorfa perché il differenziale dell'applicazione inversa è l'inverso del differenziale dell'applicazione data, e l'inversa di un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare è un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare. □

Anche il teorema delle funzioni implicite si estende immediatamente al caso olomorfo. Abbiamo:

Proposizione I.1.10. *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{C}^{m+n} = \mathbb{C}^m_w \times \mathbb{C}^n_z$ *e sia* $F = (F_1, \dots, F_m) : \Omega \to \mathbb{C}^m$ *un'applicazione olomorfa in* Ω*. Fissiamo un punto* $(w^0, z^0) = (w^0_1, \dots, w^0_m; z^0_1, \dots, z^0_n)$ *di* Ω *in cui* $F(w^0, z^0) = 0$ *e supponiamo che la matrice:*

$$\frac{\partial F(w^0,z^0)}{\partial w} = \left(\frac{\partial F_h(w^0,z^0)}{\partial w^k}\right)_{1\le h,k\le m} \tag{1.1.12}$$

sia invertibile. Allora esistono un intorno aperto ω *di* z^0 *in* $\mathbb{C}^n$ *ed un intorno aperto* ω' *di* w^0 *in* $\mathbb{C}^m$ *tali che*

(*i*) $\omega' \times \omega \subset \Omega$;
(*ii*) *per ogni* $z \in \omega$ *esiste uno ed un solo* $w = f(z) \in \omega'$ *tale che* $F(f(z), z) = 0$;
(*iii*) *l'applicazione* $f : \omega \to \omega'$ *definita in* (*ii*) *è olomorfa.*

Dimostrazione. Definiamo un'applicazione $G : \Omega \to \mathbb{C}^{n+m}_{u,v}$ ponendo $G(w, z) = (F(w, z), z)$. L'applicazione G è olomorfa e il suo Jacobiano complesso è dato da:

$$\frac{\partial G}{\partial(w,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial w} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Per il teorema dell'applicazione inversa, possiamo allora trovare un intorno di (w^0, z^0) in Ω, che possiamo scegliere della forma $\omega' \times \omega$, con ω' intorno aperto di w^0 in $\mathbb{C}^m$ ed ω intorno aperto di z^0 in $\mathbb{C}^n$, un intorno aperto V di $(0, z^0)$ in $\mathbb{C}^{m+n}$, ed un'applicazione olomorfa $H : V \to \omega' \times \omega$ tale che $G \circ H(u, v) = (u, v)$ per ogni $(u, v) \in V$. Posto $H(u, v) = (H'(u, v), H''(u, v))$ avremo quindi:

$$\begin{cases} F(H'(u,v), H''(u,v)) = u \\ H''(u,v) = v\,. \end{cases}$$

In particolare, quando $u = 0$, posto $f(z) = H'(0, z)$, otteniamo che f è definita e olomorfa su ω ed $F(f(z), z) = 0$. □

2. Formula integrale di Cauchy nel polidisco

Definizione I.2.1. Chiamiamo *polidisco* un sottoinsieme di $\mathbb{C}^n$ della forma $D = D_1 \times \cdots \times D_n$, ove D_1, ..., D_n sono dischi nel piano complesso $\mathbb{C}$:

$$D = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_j \in D_j \quad \text{per} \quad j = 1, \dots, n\}\,.$$

Il sottoinsieme $\partial_0 D = \partial D_1 \times \cdots \times \partial D_n$ della frontiera del polidisco D si dice la sua *frontiera distinta*.

Dalla formula di rappresentazione di Cauchy per le funzioni olomorfe di una variabile, ricaviamo la

Proposizione I.2.2. *Sia D un polidisco di $\mathbb{C}^n$ e sia $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}^0(\bar{D})$. Vale la formula di rappresentazione:*

(1.2.1)
$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 D} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \quad \forall\, z \in D\,.$$

Dimostrazione. Infatti, se f è olomorfa su D, per ogni $z^0 \in D$ fissato ed ogni $1 \leq j \leq n$, l'applicazione $D_j \ni t \to f(z_1^0, \ldots, z_{j-1}^0, t, z_{j+1}^0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}$ è olomorfa sul disco D_j e continua sulla sua chiusura. La (1.2.1) si ottiene allora iterando la formula di Cauchy per le funzioni olomorfe di una variabile. $\square$

Applicando la formula di rappresentazione, otteniamo la

Proposizione I.2.3. *Sia Ω è un aperto di $\mathbb{C}$. Le funzioni olomorfe su Ω sono analitiche reali su Ω. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e D un qualsiasi polidisco contenuto in Ω, la serie di Taylor di f calcolata nel centro di D converge uniformemente ad f, con tutte le derivate, su ogni compatto contenuto in D.*

Dimostrazione. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $z^0 \in \Omega$, fissiamo un polidisco $D = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, |z_j - z_j^0| < r_j\} \Subset \Omega$. Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, porremo come al solito $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ ed $a^\alpha = a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}$. Poniamo $\underline{e} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^n$. Abbiamo allora:

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} = \frac{1}{(\zeta - z)^{\underline{e}}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{\alpha + \underline{e}}} (z - z_0)^\alpha\,, \tag{1.2.2}$$

con convergenza uniforme per $(z, \zeta) \in K \times \partial D$, se $K \Subset D$. Dalla formula integrale di Cauchy otteniamo quindi:

$$\partial^\alpha f(z) = \frac{\alpha!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n}{(\zeta - z)^{\alpha + \underline{e}}}\,, \tag{1.2.3}$$

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\partial^\alpha f(z^0)}{\alpha!} (z - z^0)^\alpha\,, \qquad \forall z \in D \tag{1.2.4}$$

dove abbiamo posto

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\alpha_1} \circ \cdots \circ \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{\alpha_n}\,. \tag{1.2.5}$$

$\square$

Dalla formula di rappresentazione otteniamo:

Proposizione I.2.4. *Se f è una funzione continua sul polidisco chiuso:*

$$\bar{D}(z^0, \underline{r}) = \{|z_j - z_j^0| \leq r_j\,,\ 1 \leq j \leq n\} \subset \mathbb{C}^n \tag{1.2.6}$$

e olomorfa al suo interno, allora:

$$|\partial^\alpha f(z^0)| \leq \frac{\alpha!}{\underline{r}^\alpha} \cdot \sup_{z \in \partial_0 D(z^0, \underline{r})} |f(z)|\,. \quad \square \tag{1.2.7}$$

LEMMA I.2.5. *Siano Ω un aperto del piano complesso, K un compatto di Ω ed ω un intorno aperto di K, relativamente compatto in Ω. Allora, per ogni intero $m \geq 0$ esiste una costante $c_m > 0$ tale che*

$$\sup_{z\in K} |\partial^m f(z)| \leq c_m \iint_\omega |f(z)|\, dxdy \quad \forall f \in \mathcal{O}(\Omega). \tag{1.2.8}$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una funzione reale χ, di classe $\mathcal{C}^\infty$, con supporto compatto contenuto in Ω ed uguale ad 1 in un intorno aperto ω' di K. Abbiamo allora, per la formula di rappresentazione (13.2.1),

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\omega\setminus\omega'} \frac{\partial\chi(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}} \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \quad \forall f \in \mathcal{O}(\Omega), \quad \forall z \in K.$$

Avremo allora, derivando sotto il segno d'integrale

$$\partial^m f(z) = \frac{m!}{2\pi i} \iint_{\omega\setminus\omega'} \frac{\partial\chi(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}} \cdot \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \quad \forall f \in \mathcal{O}(\Omega), \quad \forall z \in K,$$

da cui segue facilmente la tesi, dal momento che la funzione

$$(z,\zeta) \to \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}} \cdot \frac{\partial\chi(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}$$

è uniformemente limitata per $(z,\zeta) \in K \times (\bar{\omega} \setminus \omega')$. □

COROLLARIO I.2.6. *Siano $K_{\text{compatto}} \subset \omega_{\text{aperto}} \Subset \Omega_{\text{aperto}} \subset \mathbb{C}^n$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ esiste allora una costante $C_\alpha = C_\alpha(K, \omega, \Omega)$ tale che:*

$$\sup_K |\partial^\alpha f(z)| \leq C_\alpha \|f\|_{L^1(\omega)} \qquad \forall f \in \mathcal{O}(\Omega)\,. \tag{1.2.9}$$

DIMOSTRAZIONE. Ricopriamo K con un numero finito di compatti $K^{(h)} \subset \omega$, della forma $K^{(h)} = K_1^{(h)} \times \cdots \times K_n^{(h)}$ con K_j^h compatto in $\mathbb{C}$ e per ciascun h siano $\omega_j^{(h)}$ aperti relativamente compatti di $\mathbb{C}$ tali che, per $\omega^{(h)} = \omega_1^{(h)} \times \cdots \times \omega_n^{(h)}$ risulti $K^{(h)} \Subset \omega^{(h)} \Subset \omega$. Si ricava immediatamente dal Lemma I.2.5 che, per ogni multiindice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ed ogni indice h vi è una costante $c_\alpha^{(h)} > 0$ tale che

$$\sup_{K^{(h)}} |\partial^\alpha f| \leq c_\alpha^{(h)} \|f\|_{L^1(\omega^{(h)})} \quad \forall f \in \mathcal{O}(\Omega).$$

La (1.2.9) segue con $C_\alpha = \sup_h c_\alpha^{(h)}$. □

COROLLARIO I.2.7. *Sia $\{f_\nu\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ una successione di funzioni olomorfe su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Se f_ν converge a una funzione f uniformemente sui compatti di Ω, allora la funzione f è olomorfa su Ω.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, dal Corollario I.2.6 segue che anche tutte le derivate delle f_ν convergono uniformemente sui compatti di Ω. Quindi la f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e soddisfa anch'essa il sistema di Cauchy-Riemann $\bar{\partial} f = 0$, onde $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. □

COROLLARIO I.2.8. *Sia $\{f_\nu\}$ una successione di funzioni olomorfe sull'aperto Ω di $\mathbb{C}^n$. Se $\{|f_\nu|\}$ è uniformemente limitata sui compatti di Ω, allora possiamo estrarre una successione $\{f_{k_\nu}\}$ che converge uniformemente sui compatti di Ω ad una funzione $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario I.2.6, la successione $\{f_\nu\}$ è anche equicontinua su ogni sottoinsieme compatto di Ω. Quindi, per il teorema di Ascoli-Arzelà, la $\{f_\nu\}$ ammette una sottosuccessione che converge uniformemente sui sottoinsiemi compatti di Ω. Il suo limite è una funzione olomorfa per il Corollario I.2.7. $\square$

Le funzioni olomorfe soddisfano il principio di continuazione unica, debole e forte, e il principio del massimo modulo:

TEOREMA I.2.9. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$. Allora:*

(1) *Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ si annulla su un aperto $\omega \subset \Omega$, allora f si annulla su tutte le componenti connesse di Ω che intersecano ω.*
(2) *Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ si annulla con tutte le derivate in un punto $z^0 \in \Omega$, allora f si annulla sulla componente connessa di z^0 in Ω.*
(3) *Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ed ω è un sottoinsieme aperto relativamente compatto in Ω, allora*

$$\sup_{z\in\omega} |f(z)| = \sup_{z\in\partial\omega} |f(z)| \,. \tag{1.2.10}$$

(4) *Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $|f|$ ha un massimo locale in $z^0 \in \Omega$, allora f è costante sulla componente connessa di z^0 in Ω.*

DIMOSTRAZIONE. (1)-(2) Poiché $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ è la somma della sua serie di Taylor nell'intorno di ogni punto, ne segue che l'insieme dei punti in cui essa si annulla con tutte le sue derivate è un sottoinsieme aperto e chiuso di Ω, e quindi unione di componenti connesse di Ω.

(3) La (1.2.10) è una facile conseguenza della maggiorazione di Cauchy (1.2.7), per $\alpha = 0$.

(4) Supponiamo che $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ abbia in z^0 un massimo locale del modulo. Se $f(z^0) = 0$, allora per l'ipotesi f si annulla in tutto un intorno di z^0 e quindi la tesi è verificata. Supponiamo quindi che $f(z^0) \neq 0$. A meno di sostituire ad Ω un intorno aperto connesso di z^0, possiamo supporre che $|f(z)| \leq |f(z^0)|$ per ogni $z \in \Omega$, e a meno di sostituire ad f la funzione $z \to f(z)/f(z^0)$, che sia $f(z_0) = 1$. Consideriamo la successione $\{f^\nu\}$. Per il Corollario I.2.8, possiamo estrarre una successione $\{f^{k_\nu}\}$ che converge, uniformemente sui compatti, a una funzione $f_0 \in \mathcal{O}(\Omega)$. Avremo:

$$\begin{cases} |f_0(z)| = 0 & \text{se} \quad |f(z)| < 1 \\ |f_0(z)| = 1 & \text{se} \quad |f(z)| = 1 \end{cases}$$

Poiché $|f_0|$ è continua in Ω, ed abbiamo supposto Ω connesso, ne segue che $|f_0(z)| = 1$ per ogni $z \in \Omega$, e quindi anche $|f(z)| = 1$ per ogni $z \in \Omega$.

Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} 0 = d\left(f\cdot\bar{f}\right) &= \underbrace{\bar{f}\cdot\partial f}_{\in T^{*1,0}\Omega} + \underbrace{f\cdot\overline{\partial f}}_{\in T^{*0,1}\Omega} \\ &\Longrightarrow [\partial f = 0] \Longrightarrow \left[df = \partial f + \bar\partial f = 0\right] \end{aligned}$$

e perciò f è costante su Ω. □

Ci sono diversi risultati che assicurano l'olomorfia di una funzione a partire da ipotesi più deboli di quelle descritte nella definizione. Ne ricordiamo due: il primo è dovuto ad Hartogs, il secondo a Rado:

Teorema I.2.10 (Hartogs). *Sia f una funzione a valori complessi, definita su un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$. Se, per ogni $z\in\Omega$, ed ogni intero j con $1\le j\le n$, la funzione di una variabile complessa $t\to f(z_1,\dots,z_{j-1},z_j+t,z_{j+1},\dots,z_n)$ è olomorfa per t in un intorno di 0 in $\mathbb{C}$, allora la f è olomorfa in Ω.*

Teorema I.2.11 (Radó). *Sia f una funzione continua a valori complessi, definita su un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$. Se f è olomorfa su $\Omega\setminus\{z\in\Omega \mid f(z)=0\}$, allora f è olomorfa in tutto Ω.*

3. Il complesso di Dolbeault

Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$. Indicheremo con $\mathcal{E}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ su Ω, a valori complessi. Esso è un'algebra unitaria e commutativa complessa e un anello commutativo unitario con le operazioni usuali di somma e prodotto di funzioni e di prodotto di una funzione per uno scalare. Indichiamo con:

$$\mathcal{E}^*(\Omega) = \bigoplus_{h=0}^{2n} \mathcal{E}^{(h)}(\Omega)$$

l'algebra esterna delle forme differenziali su Ω a coefficienti complessi, di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Indichiamo con $\mathrm{I}_n = \bigcup_{h\in\mathbb{N}}\{1,\dots,n\}^h$ l'insieme di tutti i multiindici $(i_1,\dots,i_h)$, ove gli i_j sono interi con $1\le i_j\le n$. Se $I\in\mathrm{I}_n$ scriveremo $|I|=h$ se $I\in\{1,\dots,n\}^h$. È conveniente introdurre la notazione:

$$\begin{aligned} dz^I &= dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_h} \\ d\bar{z}^I &= d\bar{z}_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{i_p} \\ &\quad \text{se } I=(i_1,\dots,i_h)\in\mathrm{I}_n\,. \end{aligned}$$

Poiché $\mathcal{E}^{(h)}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)\otimes_{\mathbb{C}}\Lambda^h_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$, la decomposizione dell'algebra di Grassmann complessa, descritta nel §1 del Capitolo 13, ci dà una decomposizione:

$$\mathcal{E}^*(\Omega) = \bigoplus_{0\le p,q\le n} \mathcal{E}^{p,q}(\Omega) \tag{1.3.1}$$

ove

$$\mathcal{E}^{p,q}(\Omega) = \left\{ {\sum}'_{|I|=p,\, |J|=q} f_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J \;\middle|\; f_{I,J} \in \mathcal{E}(\Omega) \right\} . \tag{1.3.2}$$

Il simbolo $\sum'$ significa che la somma è fatta sulle p-uple e q-uple di indici crescenti, cioè $I = (i_1, \dots, i_p)$ con $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ e $J = (j_1, \dots, j_q)$ con $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n$.

Lemma I.3.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$. L'operatore differenziale*

$$\bar{\partial} : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathcal{E}^{0,1}(\Omega)$$

si estende in modo unico ad un operatore differenziale lineare omogeneo del prim'ordine $\bar{\partial} : \mathcal{E}^*(\Omega) \to \mathcal{E}^*(\Omega)$, tale che:

$$\bar{\partial}(f\alpha) = (\bar{\partial} f) \wedge \alpha + f \cdot \bar{\partial}\alpha \qquad \forall f \in \mathcal{E}(\Omega)\,,\ \forall \alpha \in \mathcal{E}^*(\Omega) \tag{1.3.3}$$

$$\bar{\partial} \circ d = -d \circ \bar{\partial} \tag{1.3.4}$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(\alpha \wedge \beta) = \big(\bar{\partial}\alpha\big) \wedge \beta + (-1)^h \alpha \wedge \bar{\partial}\beta \\ \forall \alpha \in \mathcal{E}^{(h)}(\Omega)\,,\ \forall \beta \in \mathcal{E}^*(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

L'operatore $\bar{\partial}$ soddisfa:

$$\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0 \tag{1.3.6}$$

$$\bar{\partial}\left(\mathcal{E}^{p,q}(\Omega)\right) \subset \mathcal{E}^{p,q+1}(\Omega) \qquad \forall 0 \leq p, q \leq n\,. \tag{1.3.7}$$

Dimostrazione. Dalle (1.3.4) e (1.3.5) ricaviamo che $\bar{\partial}\left(dz^I \wedge d\bar{z}^J\right) = 0$ per ogni $I, J \in \mathrm{I}_n$. Ne segue che $\bar{\partial}$ è univocamente determinato dalla formula

$$\bar{\partial}\left(\sum_{I,J \in \mathrm{I}_n} f_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J \right) = \sum_{I,J \in \mathrm{I}_n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J\,. \tag{1.3.8}$$

In particolare vale la (1.3.7). Inoltre, se $\alpha \in \mathcal{E}^{p,q}(\Omega)$, allora $\bar{\partial}\alpha$ è la componente in $\mathcal{E}^{p,q+1}(\Omega)$ di $d\alpha$. La (1.3.6) è allora conseguenza del fatto che $\bar{\partial}^2\alpha$ è la componente in $\mathcal{E}^{p,q+2}(\Omega)$ di $d^2\alpha$, e $d^2 = 0$. □

Per ogni intero p con $0 \leq p \leq n$ ed ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ otteniamo così una successione di spazi vettoriali ed applicazioni lineari (operatori differenziali omogenei del prim'ordine):

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}^{p,0}(\Omega) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{E}^{p,1}(\Omega) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{E}^{p,2}(\Omega) & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots & \longrightarrow & \mathcal{E}^{p,q-1}(\Omega) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{E}^{p,q}(\Omega) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{E}^{p,q+1}(\Omega) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{E}^{p,n-1}(\Omega) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{E}^{p,n}(\Omega) & \longrightarrow & 0\,. \end{array} \tag{1.3.9}$$

Poiché $\bar{\partial}^2 = 0$, diciamo che (1.3.9) è un *complesso.*

Definizione I.3.2. Il complesso (1.3.9) si dice *complesso di Dolbeault* in grado p sull'aperto Ω. Le p-forme $\alpha \in \mathcal{E}^{p,0}(\Omega)$ che soddisfano l'equazione omogenea $\bar{\partial}\alpha = 0$ si dicono *p-forme olomorfe.* Lo spazio delle p-forme olomorfe su Ω si indica con $\Omega^p(\Omega)$ o anche $\mathrm{H}^{p,0}_{\bar\partial}(\Omega)$. Per ogni intero q, con $1 \leq q \leq n$, il quoziente:

$$\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(\Omega) := \frac{\ker\left(\bar\partial : \mathcal{E}^{p,q}(\Omega) \to \mathcal{E}^{p,q+1}(\Omega)\right)}{\mathrm{Imm}\left(\bar\partial : \mathcal{E}^{p,q-1}(\Omega) \to \mathcal{E}^{p,q}(\Omega)\right)} \tag{1.3.10}$$

si dice il *q-esimo gruppo di coomologia* del complesso di Dolbeault in grado p su Ω.

Per definizione, il q-esimo gruppo di coomologia di Dolbeault esprime l'ostruzione alla risolubilità del sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali:

$$\begin{cases} \beta \in \mathcal{E}^{p,q-1}(\Omega) \\ \bar\partial\beta = \alpha \in \mathcal{E}^{p,q}(\Omega) \end{cases} \tag{1.3.11}$$

sotto la condizione di integrabilità per il secondo membro

$$\bar\partial\alpha = 0\,. \tag{1.3.12}$$

Osserviamo che, per ogni aperto Ω di $\mathbb{C}^n$, è in modo naturale $\mathcal{E}^{p,q}(\Omega) \simeq \left[\mathcal{E}^{0,q}(\Omega)\right]^{\binom{n}{p}}$, e questa decomposizione è compatibile con l'azione di $\bar\partial$ su ciascuna delle componenti di $\left[\mathcal{E}^{0,q}(\Omega)\right]^{\binom{n}{p}}$. In particolare,

$$\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(\Omega) \simeq \left[\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(\Omega)\right]^{\binom{n}{p}}\,, \tag{1.3.13}$$

e quindi in diverse considerazioni che svolgeremo nel seguito per il complesso di Dolbeault potremo per semplicità ridurci al caso $p = 0$.

Indichiamo con $\mathcal{D}(\Omega)$ il sottospazio di $\mathcal{E}(\Omega)$ che consiste delle funzioni f che hanno supporto compatto in Ω, tali cioè che:

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{z \in \Omega \mid f(z) \neq 0\}} \Subset \Omega\,. \tag{1.3.14}$$

Se $\alpha \in \mathcal{E}^{p,q}(\Omega)$ si scrive nella forma:

$$\alpha = \sum\nolimits'_{|I|=p,\,|J|=q} \alpha_{I,J}\, dz^I \wedge d\bar z^J \quad \text{con } \alpha_{I,J} \in \mathcal{E}(\Omega)\,, \tag{1.3.15}$$

poniamo:

$$\mathrm{supp}(\alpha) = \bigcup_{|I|=p,\,|J|=q} \mathrm{supp}(\alpha_{I,J})\,. \tag{1.3.16}$$

Poiché:

$$\mathrm{supp}(\bar\partial\alpha) \subset \mathrm{supp}(\alpha)\,, \tag{1.3.17}$$

otteniamo il *complesso di Dolbeault* in grado p su Ω per le forme a supporto compatto:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}^{p,0}(\Omega) & \xrightarrow{\bar\partial} & \mathcal{D}^{p,1}(\Omega) & \xrightarrow{\bar\partial} & \mathcal{D}^{p,2}(\Omega) & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots & \longrightarrow & \mathcal{D}^{p,q-1}(\Omega) & \xrightarrow{\bar\partial} & \mathcal{D}^{p,q}(\Omega) & \xrightarrow{\bar\partial} & \mathcal{D}^{p,q+1}(\Omega) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{D}^{p,n-1}(\Omega) & \xrightarrow{\bar\partial} & \mathcal{D}^{p,n}(\Omega) & \longrightarrow & 0\,. \end{array} \tag{1.3.18}$$

Indichiamo con:

$$\mathrm{H}^{p,q}_{\mathrm{comp},\bar\partial}(\Omega) = \frac{\ker\left(\bar\partial : \mathcal{D}^{p,q}(\Omega) \to \mathcal{D}^{p,q+1}(\Omega)\right)}{\mathrm{Imm}\left(\bar\partial : \mathcal{D}^{p,q-1}(\Omega) \to \mathcal{D}^{p,q}(\Omega)\right)} \tag{1.3.19}$$

i gruppi di coomologia di Dolbeault per le forme a supporto compatto.

Nel prossimo paragrafo dimostreremo il seguente

Teorema I.3.3. *Se Ω è un qualsiasi aperto di $\mathbb{C}^n$, allora:*

$$\mathrm{H}^{p,n}_{\bar\partial}(\Omega) = 0 \qquad \forall 0 \leq p \leq n \tag{1.3.20}$$

$$\mathrm{H}^{p,0}_{\mathrm{comp},\bar\partial}(\Omega) = 0 \qquad \forall 0 \leq p \leq n \tag{1.3.21}$$

e, se $n \geq 2$ e $\mathbb{C}^n \setminus \Omega$ non ha componenti connesse compatte, allora:

$$\mathrm{H}^{p,1}_{\mathrm{comp},\bar\partial}(\Omega) = 0 \qquad \forall 0 \leq p \leq n\,. \tag{1.3.22}$$

4. Laplaciano in $\mathbb{R}^n$ e dimostrazione del Teorema I.3.3

Per dimostrare il Teorema I.3.3 utilizzeremo alcuni risultati sull'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^n$.

Lemma I.4.1. *Sia $\Delta = \sum \partial_i^2$ l'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^m$. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^m$ ed indichiamo con $\mathcal{H}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni armoniche, con la topologia della convergenza uniforme sui compatti di Ω. Allora:*

1. $\Delta : \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ *è surgettivo;*
2. *sia T una misura con supporto compatto in Ω. L'equazione $\Delta(u) = T$ ha una soluzione a supporto compatto in Ω se, e soltanto se,*
$$\int_\Omega Tf = 0 \quad \textit{per ogni} \quad f \in \mathcal{H}(\Omega).$$
3. *se Ω' è un aperto che contiene Ω e tale che $\Omega' \setminus \Omega$ non abbia componenti connesse compatte, allora le funzioni armoniche su Ω si approssimano, uniformemente sui compatti di Ω, con funzioni armoniche su Ω'.*

Dimostrazione. Una soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace è data da:

$$E(x) = \begin{cases} x^+ = \max\{x, 0\} & \text{se } m = 1 \\ -\log|x| & \text{se } m = 2 \\ \frac{-1}{(m-2)\omega_m |x|^{m-2}} & \text{se } m > 2 \end{cases} \tag{1.4.1}$$

ove[1] $\omega_m = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$ è la misura della superficie della sfera $(m-1)$-dimensionale $\{|x|=1\} \subset \mathbb{R}^m$. Il fatto che E sia soluzione fondamentale significa che, se T è una distribuzione a supporto compatto, allora:

$$u(x) = E * T(x) = \int T(y)E(x-y)d\lambda(y) \quad \text{risolve} \quad \Delta u = T \text{ in } \mathbb{R}^m\,. \tag{1.4.2}$$

Dimostriamo innanzi tutto la (2). Sia $T \in \mathcal{M}_c(\Omega, \mathbb{R})$ una misura con supporto compatto in Ω, ortogonale alle funzioni armoniche su Ω, e sia $u(x) = E * T(x)$. La u è definita su $\mathbb{R}^m$ ed armonica sul complementare del supporto di T in $\mathbb{R}^m$. Se $x \in \complement\Omega$ ed $\alpha \in \mathbb{N}^m$, allora $y \to (\partial_y^\alpha E)(x-y)$ è una funzione armonica su Ω, e quindi $\partial_x^\alpha u(x) = \int \left[(\partial_y^\alpha E)(x-y)\right] T(y) = 0$. Dunque u si annulla di ordine infinito su tutti i punti del complementare di $\operatorname{supp}(T)$ in $\mathbb{R}^m$ e perciò, per il teorema di continuazione unica forte, su tutte le componenti connesse di $\complement\operatorname{supp}(T)$ che intersechino il complementare di Ω.

Se poi $R = \sup_{\operatorname{supp}(T)} |x|$, per $|x| > R$ fissato possiamo sviluppare $E(x-y)$ in serie di polinomi omogenei:

$$E(x-y) = \sum_{h=0}^{\infty} p_h^{(x)}(y),$$

con convergenza uniforme su $\{|x| \leq R\}$ e quindi

$$u(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \int T_y p_h^{(x)}(y) = 0, \tag{1.4.3}$$

da cui otteniamo che il supporto di u è limitato, e dunque compatto. Poiché abbiamo già osservato che il supporto di u è contenuto in Ω, ne segue la (2).

Dimostriamo ora la (3). Per il teorema di Hahn-Banach l'applicazione di restrizione $\mathcal{H}(\Omega') \to \mathcal{H}(\Omega)$ ha immagine densa se e soltanto se:

$$\left.\begin{aligned} &T \in \mathcal{M}_c(\Omega, \mathbb{R}) \quad \text{e} \\ &\int Tf = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}(\Omega') \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \int Tf = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}(\Omega). \tag{1.4.4}$$

Sia quindi $T \in \mathcal{M}_c(\Omega, \mathbb{R})$ una misura regolare ortogonale a tutte le funzioni armoniche su Ω'. Consideriamo $u(x) = E * T(x)$. Per il punto (2) essa è ha supporto compatto contenuto in Ω' ed è armonica su $\complement\operatorname{supp}(T)$. Per il teorema di continuazione unica per le funzioni armoniche, la u sarà nulla su tutte le componenti connesse non compatte di $\Omega' \setminus \operatorname{supp}(T)$, e quindi su $\Omega' \setminus \Omega$ per l'ipotesi che $\Omega' \setminus \Omega$ non avesse componenti connesse compatte.

---

[1] Ricordiamo che la funzione *Gamma* è definita dall'integrale di Eulero: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ per $\operatorname{Re} z > 0$, ovvero dal prodotto infinito $1/\Gamma(z) = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^\infty \left[\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}\right]$ per $z \in \mathbb{C}$. Qui γ è la *costante di Eulero*, definita da $\gamma = \lim_{k\to\infty}\left[\left(\sum_{h=1}^k \frac{1}{h}\right) - \log k\right]$. Se k è un intero positivo, abbiamo: $\Gamma(k+1) = k!$, $\Gamma(k+\frac{1}{2}) = \frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}$.

Quindi $\mathrm{supp}(u) \subset \Omega$ e da questo segue che:

$$\int Tf = \int_\Omega \Delta u f = \int_\Omega u \Delta f = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}(\Omega), \tag{1.4.5}$$

e questo dimostra che l'applicazione di restrizione $\mathcal{H}(\Omega') \to \mathcal{H}(\Omega)$ ha immagine densa.

Dimostriamo infine la (1). Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^m$ ed $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Sia $\{K_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ una successione di compatti con:

$$\begin{aligned}
&K_\nu \subset \mathrm{int}(K_{\nu+1})\,,\\
&\Omega \setminus \mathrm{int}(K_n) \text{ non ha componenti connesse compatte,}\\
&\bigcup_\nu K_\nu = \Omega\,.
\end{aligned}$$

Per ogni ν poniamo:

$$u_\nu(x) = \int_{K_\nu} f(y) E(x-y) d\lambda(y)\,, \text{per } x \in \Omega.$$

Allora:

$$\Delta u_\nu(x) = f(x) \text{ su } \mathrm{int}(K_\nu).$$

Dico che possiamo trovare una successione di funzioni $v_\nu \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{int}(K_\nu))$ tali che, posto $K_{-1} = \emptyset$, risulti:

$$\Delta v_\nu(x) = f(x) \text{ su } \mathrm{int}(K_\nu) \qquad \text{e} \qquad \sup_{x \in K_{\nu-1}} |v_{\nu+1}(x) - v_\nu(x)| \leq 2^{-\nu}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Possiamo infatti scegliere $v_0 = u_0$ e, supposto di aver scelto $v_0, \dots, v_\nu$ per qualche $\nu \in \mathbb{N}$, osserviamo che $u_{\nu+1} - v_\nu \in \mathcal{H}(\mathrm{int}(K_\nu))$ e quindi per il punto (2) esiste una $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\sup_{x\in K_{\nu-1}} |u_{\nu+1}(x) - v_\nu(x) - h(x)| < 2^{-\nu}$. Possiamo allora scegliere $v_{\nu+1} = u_{\nu+1} - h$ su $\mathrm{int}(K_{\nu+1})$. Definiamo quindi una soluzione $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ di $\Delta u = f$ in Ω ponendo:

$$u(x) = v_\nu(x) + \sum_{h=0}^\infty (v_{\nu+h+1}(x) - v_{\nu+h}(x)) \quad \text{su} \quad \mathrm{int}(K_\nu)\,. \tag{1.4.6}$$

Infatti la serie a secondo addendo converge uniformemente su ogni compatto di $\mathrm{int}(K_\nu)$ ad una funzione armonica su $\mathrm{int}(K_\nu)$ e le diverse definizioni della u sugli aperti $\mathrm{int}(K_\nu)$ coincidono. □

Dimostrazione del Teorema I.3.3. Torniamo ora alla dimostrazione del Teorema I.3.3. Per dimostrare la (1.3.20) utilizziamo il Lemma I.4.1. L'operatore di Laplace in $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ si può scrivere nella forma:

$$\Delta = 4 \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial z_j}\,. \tag{1.4.7}$$

Un elemento $\alpha \in \mathcal{E}^{0,n}(\Omega)$ si scrive in modo unico come $\alpha = f d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n$. Se $u \in \mathcal{E}(\Omega)$ è soluzione di $\Delta(u) = f$, la

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{1 \le j_1 < \cdots < j_{n_1} \le n \\ j_h \neq j \ \forall 1 \le h \le n-1}} (-1)^{j+1} \frac{\partial u}{\partial z_j} d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_{n-1}} \in \mathcal{E}^{0,n-1}(\Omega)$$

è allora soluzione di $\bar{\partial}\beta = \alpha$.

La (1.3.21) è conseguenza del principio di continuazione unica per le funzioni olomorfe.

Dimostriamo ora la (1.3.22). Sia $\alpha \in \mathcal{D}^{0,1}(\Omega)$. Scriviamo $\alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j d\bar{z}_j$ con $\alpha_j \in \mathcal{D}(\Omega)$. La condizione che $\alpha \in \ker \bar{\partial}$ ci dà:

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial \bar{z}_h} = \frac{\partial \alpha_h}{\partial \bar{z}_j} \quad \forall 1 \le j < h \le n\,. \tag{1.4.8}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} u(z_1, z_2 \ldots, z_n) &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\alpha_1(\zeta, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta - z_1} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\alpha_1(z_1 - \zeta, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}\,. \end{aligned}$$

La seconda uguaglianza mostra che $u \in \mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$. Inoltre, è chiaro che $u = 0$ per $(z_2, \ldots, z_n)$ fuori da un compatto di $\mathbb{C}^{n-1}$. Per la formula di Cauchy-Martinelli (13.2.1) per le funzioni di una variabile, abbiamo $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} = \alpha_1$. Derivando sotto il segno d'integrale otteniamo poi, per $1 < j \le n$, sempre utilizzando le formule di Cauchy-Martinelli (13.2.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} &= -\frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\alpha_1(z_1 - \zeta, z_2, \ldots, z_n)/\partial \bar{z}_j}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \alpha_j(z_1 - \zeta, z_2, \ldots, z_n)/\partial \bar{z}_1}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \alpha_j\,. \end{aligned}$$

Quindi $\bar{\partial} u = \alpha$. Osserviamo poi che la u è olomorfa fuori dal supporto di α e nulla fuori da un compatto. Poiché per ipotesi $\complement\Omega$ non ha componenti connesse compatte, otteniamo in particolare che $u = 0$ su $\complement\Omega$, e quindi $\operatorname{supp}(u) \subset \Omega$. □

5. Singolarità eliminabili e teorema di Bochner-Fichera

Una fondamentale differenza tra le funzioni olomorfe di una e quelle di più variabili complesse è che le seconde, a differenza delle prime, non possono avere singolarità isolate.

Infatti, come conseguenza della (1.3.22), vale il seguente:

Teorema I.5.1 (Hartogs). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ e sia K un sottoinsieme compatto di Ω tale che $\Omega \setminus K$ sia connesso. Allora, se $n \ge 2$, per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ vi è una ed una sola $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $\tilde{f}(z) = f(z)$ per ogni $z \in \Omega$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una funzione $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ tale che:

$$\begin{aligned}
&0 \le \phi(z) \le 1 \ \forall z \in \mathbb{C}^n,\\
&K \subset \operatorname{int}(\{\phi(z) = 0\}) \subset \{\phi(z) < 1\} \Subset \Omega,\\
&\complement\Omega \subset \operatorname{int}(\{\phi(z) = 1\}).
\end{aligned}$$

Poiché $\bar\partial\phi$ è nulla in un intorno di $K \cup \partial\Omega$, la:

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{su} \quad \complement\Omega \\ f \cdot \bar\partial\phi & \text{su} \quad \Omega \setminus K \\ 0 & \text{su} \quad K \end{cases}$$

è una forma in $\mathcal{D}^{0,1}(\mathbb{C}^n)$ che soddisfa $\bar\partial\alpha = 0$. Per la (1.3.22) vi è allora un'unica $u \in \mathcal{D}^{0,0}(\mathbb{C}^n)$ tale che $\bar\partial u = \alpha$. La $\tilde f = f\phi - u$ è una funzione olomorfa su Ω. Inoltre, u è olomorfa fuori dal supporto di $\bar\partial\phi$. Poiché u è nulla fuori da un compatto, ne segue che $u = 0$ su un sottoinsieme aperto di $\Omega \setminus K$. È perciò $\tilde f = f$ su un aperto di $\Omega \setminus K$ e quindi $\tilde f = f$ su tutto $\Omega \setminus K$ per il teorema di continuazione unica, in quanto abbiamo supposto $\Omega \setminus K$ connesso. La $\tilde f$ così ottenuta definisce allora l'estensione cercata. $\square$

Vale inoltre il:

TEOREMA I.5.2 (Bochner - Fichera). *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{C}^n$, $n \ge 2$, con frontiera regolare di classe $\mathcal{C}^\infty$ e $\complement\bar\Omega$ connesso. Sia ρ una funzione reale di classe $\mathcal{C}^\infty$, definita in un intorno di $\partial\Omega$ in $\mathbb{C}^n$, con $\rho(z) = 0$ e $d\rho(z) \ne 0$ per ogni $z \in \partial\Omega$. Sia $f \in \mathcal{E}^{0,0}(\bar\Omega)$ una funzione che soddisfi l'equazione*[2]*:*

$$\bar\partial f(z) \wedge \bar\partial\rho(z) = 0 \quad \forall z \in \partial\Omega. \tag{1.5.1}$$

Allora esiste un'unica funzione $\tilde f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{E}^{0,0}(\bar\Omega)$ tale che $\tilde f(z) = f(z)$ per ogni $z \in \partial\Omega$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo per ricorrenza che esistono $\{f_h\} \subset \mathcal{E}^{0,0}(\bar\Omega)$ ed $\{\alpha_h\} \subset \mathcal{E}^{0,1}(\bar\Omega)$ tali che:

$$\begin{cases} f_0 = f \\ \bar\partial\left(\sum_{h=0}^m f_h\rho^m\right) = \rho^m\alpha_m \qquad \text{su } \partial\Omega \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.5.2}$$

Infatti, dalla (1.5.1), segue che si possono trovare $f_1 \in \mathcal{E}^{0,0}(\bar\Omega)$ e $\beta_1 \in \mathcal{E}^{0,1}(\bar\Omega)$ tali che:

$$\bar\partial f = \bar\partial f_0 = -f_1\bar\partial\rho + \rho\beta_1. \tag{1.5.3}$$

Abbiamo quindi:

$$\bar\partial\left(f_0 + f_1\rho\right) = \rho\underbrace{\left(\beta_1 + \bar\partial f_1\right)}_{=\alpha_1} \tag{1.5.4}$$

[2]La (1.5.1) è l'*equazione di Cauchy-Riemann tangenziale.*

Supponiamo di aver costruito f_h ed α_h per $h \leq m$, $m \geq 1$. Differenziando nella seconda delle (1.5.2), otteniamo:

$$0 = m\rho^{m-1}\bar{\partial}\rho \wedge \alpha_m + \rho^m \bar{\partial}\alpha_m \Longrightarrow \bar{\partial}\rho \wedge \alpha_m + \frac{1}{m}\rho\bar{\partial}\alpha_m = 0. \tag{1.5.5}$$

Da questa ricaviamo che:

$$\alpha_m = -(m+1)f_{m+1}\,\bar{\partial}\rho + \rho\beta_{m+1} \tag{1.5.6}$$

per opportune $f_{m+1} \in \mathcal{E}^{0,0}(\bar{\Omega})$, $\beta_{m+1} \in \mathcal{E}^{0,1}(\bar{\Omega})$. Quindi:

$$\bar{\partial}\left(\sum_{h=0}^{m+1} f_h \rho^h\right) = \rho^{m+1}\underbrace{\left((m+1)\bar{\partial}f_{m+1} + \beta_{m+1}\right)}_{=\alpha_{m+1}}. \tag{1.5.7}$$

La serie $f^* = \sum_{h=0}^{\infty} \rho^h f_h$ è una *soluzione formale* del sistema di Cauchy-Riemann $\bar{\partial}f^* = 0$ su $\partial\Omega$. Sia $g \in \mathcal{E}(\bar{\Omega})$ una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ tale che[3] $g - \sum_{h=0}^{m} f_h \rho^h = o(\rho^m)$ per ogni intero positivo m. Avremo allora $g = f$ su $\partial\Omega$ e $\bar{\partial}g = 0^\infty$ su $\partial\Omega$.

In particolare

$$\eta = \begin{cases} \bar{\partial}g & \text{su } \bar{\Omega} \\ 0 & \text{su } \complement\Omega \end{cases} \tag{1.5.8}$$

è una forma in $\mathcal{D}^{0,1}(\mathbb{C}^n)$, che soddisfa le condizioni di integrabilità $\bar{\partial}\eta = 0$. Per la (1.3.22) esiste una funzione $u \in \mathcal{D}^{0,0}(\mathbb{C}^n)$ per cui $\eta = \bar{\partial}u$ su $\mathbb{C}^n$. In particolare u è olomorfa su $\complement\Omega$ e si annulla fuori da un compatto. Per l'ipotesi che $\complement\Omega$ non avesse componenti connesse limitate, e per il teorema di continuazione unica, ne segue che $\operatorname{supp}(u) \subset \bar{\Omega}$. Quindi $g(z) - u(z) = \tilde{f}$ è olomorfa ed uguale ad f su $\partial\Omega$. Chiaramente l'estensione $\tilde{f}$ di f è univocamente determinata per il principio di massimo. □

Osservazione I.5.3. Possiamo riformulare e dimostrare il teorema sotto ipotesi di regolarità meno restrittive su $\partial\Omega$ e su f. Basterebbe supporre, ad esempio, la regolarità di classe $\mathcal{C}^4$ della frontiera e della funzione.

6. Il Lemma di Dolbeault

In questo paragrafo dimostriamo il:

[3] La g può essere costruita nel modo seguente. Fissiamo una funzione $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ con $\chi(t) = 1$ se $t > -(1/2)$ e $\chi(t) = 0$ se $t < -1$. Allora, pur di scegliere una successione $\{r_h\}$ con $r_h \nearrow +\infty$ in modo sufficientemente rapido, la serie:

$$g(z) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h(z)\chi(r_h\rho(z))\rho^h(z)$$

converge con tutte le derivate sui compatti di $\bar{\Omega}$ e definisce quindi una funzione su $\bar{\Omega}$ che soddisfa tutte le condizioni richieste.

TEOREMA I.6.1 (Lemma di Dolbeault). *Sia $D = D_1 \times \cdots \times D_n$ un polidisco di $\mathbb{C}^n$. Allora:*

$$\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(D) = 0 \qquad \forall 0 \le p \le n\,,\ \forall q \ge 1\,. \tag{1.6.1}$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente dimostrare la (1.6.1) nel caso $p = 0$. Osserviamo ancora che per il Teorema I.3.3 la tesi vale nel caso $q = n$. Supporremo quindi nel seguito che $p = 0$ e $1 \le q < n$.

Cominceremo con il dimostrare che,

[∗] *se $q \ge 1$, $\alpha \in \mathcal{E}^{0,q}(D)$ e $\bar\partial\alpha = 0$, allora per ogni polidisco $D' \Subset D$ possiamo trovare una $\beta' \in \mathcal{E}^{0,q-1}(D')$ tale che $\bar\partial\beta' = \alpha$ su D'.*

Indichiamo con $E^{q;k}(D)$, per $0 \le k \le n$, il sottospazio vettoriale delle $\alpha \in \mathcal{E}^{0,q}(D)$ che sono indipendenti da $d\bar z_j$ per $j > k$, che cioè si possono scrivere nella forma:

$$\alpha = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_q\le k} \alpha_{j_1,\dots,j_q} d\bar z_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar z_{j_q} \quad \text{con} \quad \alpha_{j_1,\dots,j_q} \in \mathcal{E}^{0,0}(D). \tag{1.6.2}$$

Dimostreremo, per induzione su k, che,

$$(P_r) \qquad \begin{cases} \text{se } \alpha \in E^{q;k}(D) \text{ e } \bar\partial\alpha = 0, \text{ allora per ogni polidisco } D' \Subset D \\ \text{esiste una } \beta \in \mathcal{E}^{0,q-1}(D') \text{ per cui } \bar\partial\beta = \alpha \text{ su } D'. \end{cases}$$

Il caso $k = 0$ è banale, in quanto $E^{q;0}(D) = 0$ se $q \ge 1$. Il caso $k = n$ è la tesi, perché $E^{q;n}(D) = \mathcal{E}^{0,q}(D)$. Supponiamo quindi che, per un k con $0 \le k < n$, la (P_r) sia valida per ogni $h \ge 1$ ed ogni coppia di polidischi $D' \Subset D$. Osserviamo ancora che, se α è data dalla (1.6.2) e $\bar\partial\alpha = 0$, avremo:

$$\frac{\partial\alpha_{j_1,\dots,j_q}}{\partial\bar z_h} = 0 \quad \forall 1 \le j_1 < \cdots < j_q \le k \quad \text{ed} \quad h > k\,. \tag{1.6.3}$$

Fissiamo $\alpha \in E^{q;k+1}(D)$ che soddisfi $\bar\partial\alpha = 0$. Scriviamo α nella forma:

$$\alpha = \alpha_0 + d\bar z_{k+1} \wedge \alpha_1 \quad \text{con} \quad \alpha_0 \in E^{q;k}(D)\,,\ \alpha_1 \in E^{q-1;k}(D)\,.$$

Possiamo supporre per semplicità che il polidisco D abbia centro 0 e che in particolare $D_{k+1} = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < R\}$. Se $0 < r < R$, fissiamo una funzione reale [4] χ_r, di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $\mathbb{C}$, che valga 1 in un intorno di $\{t \in \mathbb{C} \mid |t| \le r\}$ e sia uguale a 0 in un intorno di $\{t \in \mathbb{C} \mid |t| \le R\}$.

[4] Per costruire una tale χ_r, possiamo osservare che la funzione reale di una variabile reale τ:

$$\psi(\tau) = \frac{\int_{\max\{-1,\min\{\tau,1\}\}}^1 e^{1/(s^2-1)}ds}{\int_{-1}^1 e^{1/(s^2-1)}ds}$$

è definita e continua con tutte le sue derivate su $\mathbb{R}$, è uguale a 1 se $\tau \le -1$ ed uguale a 0 se $\tau \ge 1$. Possiamo quindi ad esempio scegliere:

$$\chi_r(t) = \psi\left(\frac{2|t|^2 - R^2 - r^2}{2(R^2 - r^2)}\right) \qquad \text{per} \quad t \in \mathbb{C}.$$

Poniamo quindi:

$$u_r(z_1,\dots,z_{k+1},\dots,z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{\chi_r(\zeta)\alpha_1(z_1,\dots,z_k,t,z_{k+2},\dots,z_n)}{t-z_{k+1}}d\,t\wedge d\,\bar t$$

Otteniamo allora, per la Proposizione XIII.2.10, che la restrizione di $\alpha-\bar\partial u_r$ al polidisco $D\cap\{|z_{k+1}|<r\}$ è una forma in $E^{q,r+1}(D\cap\{|z_{k+1}|<r\})$. Se D' è un polidisco con $D'\Subset D$, avremo $D'\Subset D''=(D\cap\{|z_{k+1}|<r\})$ pur di scegliere $r<R$ abbastanza vicino ad R. Applicando l'ipotesi induttiva alla restrizione di $\alpha-\bar\partial u_r$, potremo trovare $\beta'\in\mathcal{E}^{0,q-1}(D')$ tale che $\alpha-\bar\partial u_r=\bar\partial\beta'$ in D' e quindi $\beta=\beta'+u_r$ è una forma in $\mathcal{E}^{0,q-1}$ per cui $\bar\partial\beta=\alpha$ su D'. Questo completa la dimostrazione della (P_{k+1}), e quindi di [$*$].

Osserviamo che, dati due aperti $\Omega_1\Subset\Omega_2$ di $\mathbb{C}^n$ ed una forma $\eta\in\mathcal{E}^{p,q}(\Omega_2)$, è sempre possibile trovare una forma $\tilde\eta\in\mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n)$ con $\tilde\eta=\eta$ su Ω_1. Basta infatti, ad esempio, fissare una funzione ϕ di classe $\mathcal{C}^\infty$, a supporto compatto in Ω_2 ed uguale ad 1 in un intorno di $\bar\Omega_1$, e definire $\tilde\eta$ uguale a $\phi\cdot\eta$ su Ω_2 e uguale a 0 fuori di Ω_2. Potremo quindi enunciare diversamente il risultato appena dimostrato, dicendo che:

[$**$] *Se $\alpha\in\mathcal{E}^{0,q}(D)$, con $q\geq 1$, è una forma $\bar\partial$-chiusa su un polidisco $D\subset\mathbb{C}^n$ e D' è un polidisco relativamente compatto in D, allora esiste una $\beta\in\mathcal{E}^{0,q-1}(\mathbb{C}^n)$ tale che $\bar\partial\beta=\alpha$ in D'.*

Nel completare la dimostrazione di (1.6.1), discuteremo separatamente i casi $q=1$ e $q>1$.

Supponiamo dapprima che $q>1$. Sia $\{D_{(\nu)}\,|\,\nu\in\mathbb{N}\}$ una successione di policilindri con $D_{(\nu)}\Subset D_{(\nu+1)}$ e $D=\bigcup D_{(\nu)}$. Fissiamo $\alpha\in\mathcal{E}^{0,q}(D)$ con $\bar\partial\alpha=0$.

Dico che è possibile determinare una successione $\{\beta_\nu\}\subset\mathcal{E}^{0,q-1}(\mathbb{C}^n)$ con:

$$(i)\qquad \bar\partial\beta_\nu=\alpha\qquad\text{su}\quad D_\nu$$

$$(ii)\qquad \beta_{\nu+1}=\beta_\nu\qquad\text{su}\quad D_{\nu-1}\,.$$

Per [$**$] esiste infatti $\beta_0\in\mathcal{E}^{0,q-1}(\mathbb{C}^n)$ tale che $\bar\partial\beta_0=\alpha$ su $D_{(0)}$. Supponiamo per ricorrenza di aver costruito β_ν per $\nu\leq m\in\mathbb{N}$, e sia $\gamma\in\mathcal{E}^{0,q-1}(\mathbb{C}^n)$ una soluzione di $\bar\partial\gamma=\alpha$ su $D_{(m+1)}$. Allora la restrizione a $D_{(m)}$ della differenza $\beta_m-\gamma$ è una forma $\bar\partial$-chiusa in $\mathcal{E}^{0,q-1}(D_{(m)})$ e, poiché $(q-1)\geq 1$, per la [$**$] possiamo trovare $\eta\in\mathcal{E}^{0,q-2}(\mathbb{C}^n)$ tale che $\beta_m-\gamma=\bar\partial\eta$ su $D_{(m-1)}$. Possiamo quindi definire $\beta_{m+1}=\gamma+\bar\partial\eta$, e le condizioni (i) e (ii) sono allora soddisfatte. Utilizzando la successione $\{\beta_\nu\}$, definiamo una soluzione $\beta\in\mathcal{E}^{0,q-1}(D)$ di $\bar\partial\beta=\alpha$ ponendo $\beta=\beta_{\nu+1}$ su $D_{(\nu)}$.

Consideriamo ora il caso $q=1$. Sia $\alpha\in\mathcal{E}^{0,1}(D)$ una $(0,1)$ forma con $\bar\partial\alpha=0$. Sia $\{D_{(\nu)}\,|\,\nu\in\mathbb{N}\}$ una successione di policilindri con $D_{(\nu)}\Subset D_{(\nu+1)}$ e $D=\bigcup D_{(\nu)}$. Dico che, in questo caso, posso costruire una successione di funzioni $\{u_\nu\} \subset \mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$ tali che:

$$(a) \qquad \bar\partial u_\nu = \alpha \quad \text{su} \quad D_\nu$$

$$(b) \qquad |u_\nu(z) - u_{\nu-1}(z)| < 2^{-\nu} \qquad \forall z \in D_{\nu-2}\,.$$

Per la [$**$], possiamo trovare una $u_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$ tale che $\bar\partial u_0 = \alpha$ su $D_{(0)}$. Supponiamo per ricorrenza di aver già costruito u_ν, per $\nu \leq m$, in modo che le (a) e (b) siano verificate per tutti i $\nu \leq m$. Per la [$**$], possiamo trovare una $u \in \mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$ che verifica $\bar\partial u = \alpha$ su $D_{(m+1)}$. La differenza $u_m - u$ soddisfa allora $\bar\partial(u_m - u) = 0$ su $D_{(m)}$ e quindi definisce una funzione olomorfa su $D_{(m)}$. Poiché, per la Proposizione I.2.3, la serie di Taylor di $u_m - u$ con centro nel centro del polidisco $D_{(m)}$ converge uniformemente a $u_m - u$ su ogni compatto di $D_{(m)}$, possiamo trovare un polinomio olomorfo $g(z) \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$, tale che $\sup_{z\in\bar D_{(m-1)}} |u_m(z) - u(z) - g(z)| < 2^{-m}$. Allora le (a) e (b) sono verificate per $\nu \leq m+1$ se definiamo $u_{m+1} = u + g$.

Poniamo:

$$u'_\nu(z) = u_{\nu+1}(z) + \sum_{j=\nu+1}^{\infty} (u_{j+1} - u_j) \qquad \text{su} \quad D_{(\nu)}\,.$$

La serie a secondo membro converge uniformemente a una funzione olomorfa su D_ν per la (b). Quindi il secondo membro è ben definito e soddisfa $\bar\partial u'_\nu = \alpha$ su $D_{(\nu)}$. È poi $u'_\nu = u'_{\nu'}$ su $D_{(\nu'')}$ se $\nu'' < \nu, \nu'$. Possiamo perciò definire una soluzione $u \in \mathcal{E}(D)$ di $\bar\partial u = \alpha$ ponendo $u = u'_\nu$ su $D_{(\nu)}$. La dimostrazione è completa. $\square$

7. Un teorema di H.B. Laufer

Per studiare i gruppi di coomologia del complesso di Dolbeault si utilizzano spesso metodi di analisi funzionale, che forniscono informazioni sulla *finitezza* della loro dimensione come spazi vettoriali complessi. Risulta allora utile l'elegante risultato di H.B. Laufer [5] per il caso degli aperti di $\mathbb{C}^n$, che dimostriamo in questo paragrafo.

Teorema I.7.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ e siano p, q interi con $0 \leq p, q \leq n$. Allora il gruppo di coomologia di Dolbeault $\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(\Omega)$ o è nullo, o è uno spazio vettoriale complesso di dimensione infinita. Analogamente, anche il gruppo di coomologia di Dolbeault a supporti compatti $\mathrm{H}^{p,q}_{\mathrm{comp},\bar\partial}(\Omega)$ o è nullo, o è uno spazio vettoriale complesso di dimensione infinita.*

[5] Henry B. Laufer: *On the infinite dimensionality of the Dolbeault cohomology groups.* Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), pp.293-296.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che, se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}^{p,q-1}(\Omega) & \xrightarrow{\bar\partial} & \mathcal{E}^{p,q}(\Omega) & \xrightarrow{\bar\partial} & \mathcal{E}^{p,q+1}(\Omega) \\ {\scriptstyle f\cdot}\downarrow & & {\scriptstyle f\cdot}\downarrow & & {\scriptstyle f\cdot}\downarrow \\ \mathcal{E}^{p,q-1}(\Omega) & \xrightarrow{\bar\partial} & \mathcal{E}^{p,q}(\Omega) & \xrightarrow{\bar\partial} & \mathcal{E}^{p,q+1}(\Omega) \end{array} \tag{1.7.1}$$

e più in generale, se $P(z, D_z) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(z)\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_m}$, con $\partial_i = \partial/\partial z_i$, $a_\alpha \in \mathcal{O}(\Omega)$, è un operatore differenziale a coefficienti olomorfi in Ω, otteniamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}^{p,q-1}(\Omega) & \xrightarrow{\bar\partial} & \mathcal{E}^{p,q}(\Omega) & \xrightarrow{\bar\partial} & \mathcal{E}^{p,q+1}(\Omega) \\ {\scriptstyle P(z,D_z)}\downarrow & & {\scriptstyle P(z,D_z)}\downarrow & & {\scriptstyle P(z,D_z)}\downarrow \\ \mathcal{E}^{p,q-1}(\Omega) & \xrightarrow{\bar\partial} & \mathcal{E}^{p,q}(\Omega) & \xrightarrow{\bar\partial} & \mathcal{E}^{p,q+1}(\Omega), \end{array} \tag{1.7.2}$$

ove intendiamo che l'operatore differenziale si applichi a ciascuna componente delle forme.

Ne segue che i gruppi di coomologia $\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(\Omega)$ sono moduli a sinistra sia rispetto all'anello $\mathcal{O}(\Omega)$ delle funzioni olomorfe su Ω, sia rispetto all'anello $\mathcal{O}(\Omega)[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ degli operatori differenziali olomorfi su Ω.

Supponiamo ora che, per interi p, q fissati con $0 \leq p, q \leq n$ il gruppo di coomologia $\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(\Omega)$ sia uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita. Abbiamo allora $q \geq 1$, perché gli spazi delle funzioni e delle forme olomorfe su Ω, come spazi vettoriali complessi, hanno dimensione infinita.

Consideriamo $\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(\Omega)$ come un $\mathbb{C}[z_1]$-modulo per restrizione dell'anello $\mathcal{O}(\Omega)$ dei coefficienti. Supponiamo per assurdo che $\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(\Omega)$ abbia dimensione complessa $d > 0$ e sia $\xi_1, \ldots, \xi_d$ una sua base su $\mathbb{C}$. Poiché $\xi_j, z_1\xi_j, z_1^2\xi_j, ..., z_1^m\xi_j, ...$ essendo una successione con infiniti termini è linearmente dipendente, esisterà per ogni $j = 1, \ldots, d$, un polinomio non nullo $p_j(z_1) \in \mathbb{C}[z_1]$ tale che $p_j(z_1)\xi_j = 0$. Il prodotto $p_1(z_1)\cdots p_d(z_1)$ annullerà allora tutti gli elementi di $\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(\Omega)$. Dunque l'ideale $\mathcal{I}$ dei polinomi di $\mathbb{C}[z_1]$ che annullano tutti gli elementi di $\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(\Omega)$ è non banale. Poiché $\mathbb{C}[z_1]$ è un anello a ideali principali, sarà $\mathcal{I} = (p(z_1))$ per un polinomio monico $p(z_1)$ di grado positivo. Sia ora $f \in \mathcal{E}^{p,q}(\Omega)$ con $\bar\partial f = 0$ e consideriamo il prodotto $p'(z_1)f$. Risulta

$$p'(z_1)f = \partial_1(p(z_1)f) - p(z_1)\partial_1 f \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Poiché anche $\bar\partial(\partial_1 f) = 0$, sia $p(z_1)f$ che $p(z_1)\partial_1 f$ sono coomologhi a zero in $\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(\Omega)$. Esisteranno cioè $u, v \in \mathcal{E}^{p,q-1}$ tali che

$$\bar\partial u = p(z_1)f, \quad \bar\partial v = p(z_1)\partial_1 f \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Allora

$$p'(z_1)f = \bar\partial(\partial_1 u - v) \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Quindi, il prodotto per $p'(z_1)$ di qualsiasi (p,q)-forma $\bar\partial$-chiusa è coomologo a zero in $\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(\Omega)$. Ciò dimostra che $p'(z_1)$ appartiene all'ideale $\mathcal{I}$, ma ciò è assurdo perché p ha grado positivo.

Si ragiona in modo analogo per i gruppi $\mathrm{H}^{p,q}_{\mathrm{comp},\bar\partial}(\Omega)$. □

8. Il teorema di Radó

Dimostriamo in questo paragrafo il Teorema di Radó I.2.11:

Teorema I.8.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ ed $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ una funzione continua su Ω. Sia $U = \{z \in \Omega \mid f(z) \neq 0\}$. Se la restrizione di f ad U è una funzione olomorfa, allora f è olomorfa in Ω.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzi tutto la validità del Teorema nel caso $n = 1$. Possiamo allora supporre che $\Omega = \Delta = \{|t| < 1\}$ sia il disco unitario. Vale il seguente

Lemma I.8.2. *Sia $f \in \mathcal{O}(\bar\Delta)$ una funzione continua sulla chiusura del disco unitario di $\mathcal{C}$, la cui restrizione ad $U = \{t \in \mathbb{C} \mid f(t) \neq 0\}$ sia una funzione olomorfa non identicamente nulla. Allora, per ogni funzione g, olomorfa su U e continua su $\bar U$, vale la diseguaglianza:*

$$|g(t)| \leq \sup_{\tau \in \partial\Delta \cap \bar U} |g(\tau)|. \tag{1.8.1}$$

Dimostrazione. Osserviamo che, se g fosse identicamente nulla, non ci sarebbe nulla da dimostrare. Applichiamo il principio di massimo alla funzione $g^k f$, che è olomorfa su U e continua su $\bar U$. Abbiamo

$$|g^k(t)f(t)| \leq \sup_{\tau \in \partial U} |g^k(\tau)f(\tau)| = \sup_{\tau \in \partial\Delta \cap \bar U} |g^k(\tau)f(\tau)|, \quad \forall t \in U,$$

perché f è nulla sui punti di ∂U che non appartengono a $\partial\Delta$. Estraendo la radice k-esima, otteniamo

$$|g(t)| \sqrt[k]{|f(t)|} \leq \sup_{\tau \in \partial\Delta \cap \bar U} |g(\tau)| \sqrt[k]{\sup_{\tau \in \partial\Delta \cap \bar U} |f(\tau)|} \quad \forall k = 1, 2, \ldots$$

Otteniamo la (1.8.1) passando al limite per $k \to +\infty$. □

Dal Lemma I.8.2 ricaviamo

Lemma I.8.3. *Sia f una funzione complessa, continua sulla chiusura $\bar\Delta$ del disco unitario $\Delta \subset \mathbb{C}$ ed olomorfa sull'insieme U dei punti t di Δ in cui $f(t) \neq 0$. Se f non è identicamente nulla, l'insieme U è denso in Δ.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che U non sia denso in Δ. Possiamo allora fissare un punto $t_0 \in \Delta \setminus \bar U$, con

$$\mathrm{dist}(t_0, \partial U) < 1 - |t_0| = \mathrm{dist}(t_0, \partial\Delta).$$

La funzione $g(t) = 1/(t - t_0)$ è olomorfa su U e continua su $\bar U$, ma non soddisfa la (1.8.1). Abbiamo così ottenuto una contraddizione. La dimostrazione del Lemma è completa. □

Completiamo ora la dimostrazione del Teorema di Radó nel caso in cui Ω sia il disco unitario Δ di $\mathbb{C}$, e la f sia continua sulla chiusura $\bar{\Delta}$ di Δ. Per il teorema di approssimazione di Stone-Weierstrass, possiamo trovare una successione di polinomi $\{p_k(z)\} \subset \mathbb{C}[z]$ tali che

$$\sup_{t\in\partial\Delta} |\mathrm{Re}(f(t) - p_k(t))| < 2^{-k} \quad \text{per} \quad k = 1, 2, \dots .$$

Poiché le funzioni $e^{f(t)-p_k(t)}$ ed $e^{p_k(t)-f(t)}$ sono continue su $\bar{\Delta}$ ed olomorfe in U, otteniamo, per i Lemma I.8.2 e I.8.3 che

$$\sup_{\Delta} \left|e^{\mathrm{Re}(f(t)-p_k(t))}\right| = \sup_{\Delta} \left|e^{f(t)-p_k(t)}\right| = \sup_{\partial\Delta} \left|e^{f(t)-p_k(t)}\right| = \sup_{\partial\Delta} \left|e^{\mathrm{Re}(f(t)-p_k(t))}\right|$$
$$\sup_{\Delta} \left|e^{\mathrm{Re}(p_k(t)-f(t))}\right| = \sup_{\Delta} \left|e^{p_k(t)-f(t)}\right| = \sup_{\partial\Delta} \left|e^{p_k(t)-f(t)}\right| = \sup_{\partial\Delta} \left|e^{\mathrm{Re}(p_k(t)-f(t))}\right|$$

Da queste diseguaglianze ricaviamo che $\mathrm{Re}\, p_k(t)$ converge uniformemente a $\mathrm{Re} f(t)$ su $\bar{\Delta}$. Ne segue che $\mathrm{Re} f(t)$ è armonica, e quindi $\mathcal{C}^\infty$, nei punti di Δ. Analogamente si verifica che $\mathrm{Im} f(t)$ è armonica, e quindi $\mathcal{C}^\infty$, nei punti di Δ. Quindi f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su Δ, e soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann sull'aperto U, che è denso in Δ. Quindi soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann, e quindi è olomorfa, su Δ.

Consideriamo ora il caso generale. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, $U = \{z \in \Omega \mid f(z) \neq 0$ ed $f|_U \in \mathcal{O}(U)$. Dalla discussione precedente, segue che, per ogni aperto A di $\mathbb{C}$ ed ogni $\phi : A \to \Omega$ olomorfa, la $A \ni t \to f \circ \phi(t) \in \mathbb{C}$ è olomorfa in A. Il fatto che f sia olomorfa in Ω segue allora dal teorema di Hartogs I.2.10 sulla separata olomorfia. Possiamo comunque dare comunque una dimostrazione indipendente del fatto che f sia olomorfa in Ω. Osserviamo che è sufficiente dimostrare che f è olomorfa in z_0 per ogni $z_0 \in \Omega \setminus U$. Se $f = 0$ in un intorno di z_0, non c'è nulla da dimostrare. Se non è questo il caso, possiamo trovare una retta complessa ℓ per z_0 tale che la restrizione di f ad ℓ non sia nulla su un intorno in ℓ di z_0. Possiamo supporre che $z_0 = 0$ ed ℓ sia la retta $\ell = \{z_2 = 0, \ \dots, \ z_n = 0\}$. Per la discussione precedente, per ogni $z' = (z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ fissati, la $t \to f_{z'}(t) = f(t, z')$ è olomorfa su $A_{z'} = \{t \in \mathbb{C} \mid (t, z') \in \Omega\}$. In particolare, 0 è uno zero isolato di $f_0(t)$. Possiamo quindi trovare un numero reale $r_1 > 0$ tale che A_0 contenga il disco $\{|t| \leq r_1\}$ ed $f_0(t) \neq 0$ se $|t| = r_1$. Poiché f è continua, possiamo trovare allora un $\epsilon > 0$ tale che Ω contenga il polidisco chiuso $\bar{D} = \{|z_1| \leq r_1, \ |z_j| \leq \epsilon, \ 2 \leq j \leq n\}$, ed $f(z) \neq 0$ sulla frontiera ∂D di D. Consideriamo allora l'integrale

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 D} \frac{f(t_1, t_2, \dots, t_n)}{(t_1 - z_1) \cdots (t_n - z_n)} dt_1 \cdots dt_n.$$

Esso definisce una funzione olomorfa sull'insieme D dei punti interni del polidisco chiuso $\bar{D}$. Ma tale funzione coincide con f in tutti i punti di D: infatti, poiché f è olomorfa in un intorno di ∂D, otteniamo per la formula di Cauchy applicata ai punti $(t_1, z') \in \{|t_1| = r_1\} \times \{|z_j| < \epsilon,\ 2 \le j \le n\}$,

$$\tfrac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 D} \frac{f(t_1, t_2, \dots, t_n)}{(t_1 - z_1) \cdots (t_n - z_n)} dt_1 \cdots dt_n = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{|t_1| = r_1} \frac{f(t_1, z')}{t_1 - z_1} dt_1$$

e l'integrale a secondo membro dà $f(z_1, z')$ perché la $t \to f(t, z')$ è olomorfa in un intorno del disco $\{|t| \le r_1\}$. $\square$

CAPITOLO 2

Domini di olomorfia

1. Serie di potenze e domini di Reinhardt

Sia $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ un insieme di numeri complessi, indicizzati dai multiindici $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Chiamiamo *serie di potenze* in $\mathbb{C}^n$ l'espressione formale:

$$\phi = \sum\nolimits_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha = \sum\nolimits_{\alpha_1,\dots\alpha_n=0}^{\infty} a_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}. \tag{2.1.1}$$

Poiché l'insieme $\mathbb{N}^n$ dei multiindici non ha un buon ordinamento naturale, non possiamo definire la nozione di convergenza, come nel caso delle serie di potenze per funzioni di una variabile complessa, a partire da quella di convergenza per serie e successioni di funzioni. Ricordando però che, per le serie numeriche, l'assoluta convergenza è equivalente alla convergenza incondizionata, possiamo dare la seguente:

Definizione II.1.1. Si dice *dominio di convergenza* della serie di potenze (2.1.1) l'insieme $D(\phi)$ dei punti $z \in \mathbb{C}^n$ tali che la (2.1.1) converga assolutamente in un intorno di z.

Sia poi $B(\phi)$ l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}^n$ in cui $\sup\limits_{\alpha\in\mathbb{N}^n} |a_\alpha z^\alpha| < +\infty$.

Chiaramente $D(\phi) \subset \operatorname{int}(B(\phi))$. Volgiamo dimostrare che vale l'uguaglianza. In primo luogo, vale il seguente

Lemma II.1.2 (Abel). *Se $w \in B(\phi)$, allora il polidisco:*

$$\{|z_j| < |w_j|,\ j = 1,\dots,n\}$$

è contenuto nel dominio di convergenza $D(\phi)$ di (2.1.1).

Dimostrazione. Per ipotesi, esiste una costante positiva $C > 0$ tale che $|a_\alpha w^\alpha| \le C$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Se $(|z_j|/|w_j|) \le k_j < 1$, allora:

$$|a_\alpha z^\alpha| \le C k^\alpha = C k_1^{\alpha_1}\cdots k_n^{\alpha_n}$$

e la tesi segue allora dalla convergenza assoluta della serie:

$$\sum\nolimits_\alpha k^\alpha = \frac{1}{(1-k_1)\cdots(1-k_n)}.$$

□

Dal Lemma di Abel si ricava immediatamente:

Teorema II.1.3. *Il dominio di convergenza $D(\phi)$ della serie di potenze* (2.1.1) *è uguale alla parte interna di $B(\phi)$. Inoltre, la serie* (2.1.1) *converge normalmente in $D(\phi)$, quindi la somma definisce una funzione analitica $\phi(z)$ in $D(\phi)$.* $\square$

Teorema II.1.4. *Sia $\phi = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ una serie di potenze. Poniamo*

$$D^*(\phi) = \left\{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \left(e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_n}\right) \in D(\phi)\right\}. \tag{2.1.2}$$

Allora

$$D^*(\phi) \text{ è un aperto convesso di } \mathbb{R}^n, \tag{2.1.3}$$

$$\eta \in D^*(\phi) \text{ se vi è una } \xi \in D^*(\phi) \text{ con } \eta_j \le \xi_j \text{ per } j = 1, \dots, n. \tag{2.1.4}$$

Inoltre:

$$D(\phi) = \bigcup\nolimits_{\xi\in D^*(\phi)} \left\{z \in \mathbb{C}^n \middle| |z_j| \le e^{\xi_j} \ \ \forall j = 1, \dots, n.\right\}. \tag{2.1.5}$$

Dimostrazione. Introduciamo l'insieme $B^*(\phi)$ dei punti $\xi \in \mathbb{R}^n$ per cui

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{N}^n} |a_\alpha \exp(\langle\alpha|\xi\rangle)| < +\infty.$$

Per il Teorema II.1.3, $D^*(\phi)$ è la parte interna di $B^*(\phi)$. Se $\xi, \eta \in B^*(\phi)$, allora per una costante $C > 0$ abbiamo

$$|a_\alpha| \exp(\langle\alpha|\xi\rangle) \le C \quad \text{e} \quad |a_\alpha| \exp(\langle\alpha|\eta\rangle) \le C \qquad \forall\alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Se $\lambda, \mu \ge 0$ e $\lambda + \mu = 1$, abbiamo:

$$|a_\alpha| \exp(\langle\alpha|\lambda\xi + \mu\eta\rangle) = (|a_\alpha| \exp(\langle\alpha|\xi\rangle))^\lambda \, (|a_\alpha| \exp(\langle\alpha|\eta\rangle))^\mu \le C^\lambda C^\mu = C.$$

Questo dimostra che $B^*(\phi)$ è convesso. Le altre proprietà seguono facilmente. $\square$

Vogliamo dimostrare che viceversa, se $D^*(\phi)$ è un dominio convesso che soddisfa (2.1.4), allora la $D(\phi)$ definita da (2.1.5) è il dominio di convergenza di una serie di potenze. Diamo innanzi tutto la definizione:

Definizione II.1.5. Un *dominio di Reinhardt* è un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ tale che:

$$z \in \Omega, \ u_1, \dots, u_n \in S^1 \subset \mathbb{C} \Longrightarrow (u_1 z_1, \dots, u_n z_n) \in \Omega. \tag{2.1.6}$$

Teorema II.1.6. *Sia Ω un dominio di Reinhardt connesso e contenente l'origine e sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Allora la serie di Taylor*

$$\sum\nolimits_{\alpha\in\mathbb{N}^n} (1/\alpha!)\partial^\alpha f(0) z^\alpha$$

di f nell'origine converge normalmente ad f in Ω.

Dimostrazione. Il teorema segue dai risultati precedenti nel caso in cui $\Omega = \mathbb{C}^n$. Supponiamo ora che $\Omega \ne \mathbb{C}^n$. Sia $\epsilon > 0$ e sia

$$\Omega_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}^n | \mathrm{dist}(z, \complement\Omega) > \epsilon|z|\}.$$

Abbiamo $0 \in \Omega_\epsilon \subset \Omega$ ed Ω_ϵ è aperto. Indichiamo con Ω'_ϵ la componente connessa di Ω_ϵ che contiene 0. È $\Omega'_\epsilon \nearrow \Omega$. Per $z \in \Omega'_\epsilon$ poniamo:

$$g_\epsilon(z) = \tfrac{1}{(2\pi\, i)^n} \int_{|t_j|=1+\epsilon} \frac{f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)}{(t_1-1)\cdots(t_n-1)} dt_1 \cdots dt_n. \tag{2.1.7}$$

L'integrale è ben definito, perché abbiamo supposto che Ω sia un dominio di Reinhardt. Differenziando sotto il segno d'integrale, troviamo inoltre che g_ϵ è olomorfa in Ω'_ϵ. Scegliendo $|z|$ così piccolo che $(t_1 z_1, \dots, t_n z_n) \in \Omega$ per $|t_j| \leq (1+\epsilon)$, otteniamo che $f = g_\epsilon$ in un intorno di 0 e quindi in tutto Ω'_ϵ, perché Ω'_ϵ è connesso. A questo punto utilizziamo il fatto che:

$$\frac{1}{(t_1-1)\cdots(t_n-1)} = \sum_\alpha \frac{1}{t_1^{\alpha_1+1}} \cdots \frac{1}{t_n^{\alpha_n+1}} \tag{$*$}$$

con convergenza normale per $|t_j| = 1+\epsilon$. Sostituendo $(*)$ nell'integrando di (2.1.7) ed integrando per serie troviamo che $f(z) = \sum_\alpha f_\alpha(z)$ con:

$$f_\alpha(z) = \frac{1}{(2\pi\, i)^n} \int_{|t_j|=1+\epsilon} \frac{f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)}{t_1^{\alpha_1+1} \cdots t_n^{\alpha_n+1}}.$$

Ancora, in un intorno di 0, e quindi su tutto Ω'_ϵ per continuazione analitica, $f_\alpha(z) = z^\alpha \partial^\alpha f(0)/\alpha!$. La dimostrazione è completa. □

Definizione II.1.7. Un dominio di Reinhardt Ω si dice *logaritmicamente convesso* se:

$$\Omega = \bigcup\nolimits_{\xi \in \Omega^*} \left\{ z \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; |z_j| \leq e^{\xi_j}\,,\ \forall j = 1, \dots, n \right\} \tag{2.1.8}$$

per un sottoinsieme Ω^* di $\mathbb{R}^n$ con:

$$\Omega^* \text{ è un aperto convesso } \subset \mathbb{R}^n, \tag{2.1.9}$$

$$\eta \in \mathbb{R}^n, \xi \in \Omega^*,\ \eta_j \leq \xi_j\ \forall j = 1, \dots, n \Longrightarrow \eta \in \Omega^* \tag{2.1.10}$$

Poiché la parte interna dell'intersezione di una qualsiasi famiglia di domini di Reinhardt logaritmicamente convessi è ancora un dominio di Reinhardt logaritmicamente convesso, per ogni dominio di Reinhardt Ω ne esiste uno, logaritmicamente convesso, e più piccolo rispetto all'inclusione, $\tilde{\Omega}$, che lo contiene.

Definizione II.1.8. $\tilde{\Omega}$ si dice l'*inviluppo logaritmicamente convesso* di Ω.

Dai Teoremi II.1.4 e II.1.6 otteniamo:

Teorema II.1.9. *Se Ω è un dominio di Reinhardt connesso contenente l'origine e $\tilde{\Omega}$ il suo inviluppo logaritmicamente convesso, allora tutte le funzioni olomorfe in Ω si estendono in modo unico a funzioni olomorfe su $\tilde{\Omega}$.* □

Esempio II.1.10. Sia $\Omega = \{|z_1| < M,\ |z_2| < 1\} \cup \{|z_1| < 1,\ |z_2| < M\} \subset \mathbb{C}^2$, con $M > 1$. Allora $\tilde{\Omega} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 |\max\{|z_1|, |z_2|, |z_1 z_2|\} < M\}$.

2. Domini di olomorfia

Il dominio Ω di $\mathbb{C}^2$ dell'Esempio II.1.10 ha la proprietà che ogni funzione f olomorfa su Ω ammette un'estensione olomorfa $\tilde{f}$ a un dominio più grande $\tilde{\Omega}$. Allo stesso modo abbiamo visto (Teorema I.5.1) che, se Ω è un dominio di $\mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, e $K \Subset \Omega$ un compatto per cui $\Omega \setminus K$ sia connesso, l'applicazione di restrizione $\mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ è un'applicazione bigettiva.

Il fatto che, per $n \geq 2$, non tutti gli aperti di $\mathbb{C}^n$ siano domini di esistenza di una funzione olomorfa è una delle fondamentali differenze tra la teoria delle funzioni olomorfe di una e di più variabili complesse. Infatti, se Ω è un qualsiasi dominio di $\mathbb{C}$ con $\emptyset \neq \Omega \subsetneqq \mathbb{C}$, si può sempre trovare una funzione [1] $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ che non si possa prolungare analiticamente nell'intorno di nessun punto $z_0 \in \partial\Omega$.

Introduciamo la definizione:

Definizione II.2.1. Un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ si dice un *dominio di olomorfia* se non esistono due aperti Ω_1, Ω_2 con le seguenti proprietà:

(*i*) $\emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \cap \Omega\,$;
(*ii*) Ω_2 è connesso e non è contenuto in Ω;
(*iii*) Per ogni funzione $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ esiste una funzione $g \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ tale che $f = g$ su Ω_1.

Ogni dominio di olomorfia è il *dominio di esistenza* di una funzione olomorfa. Vale cioè il seguente

Teorema II.2.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché Ω sia un dominio di olomorfia è che esista una funzione $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ che non si possa prolungare analiticamente nell'intorno di nessun punto $z_0 \in \partial\Omega$.*

Dimostrazione. Diciamo che una funzione olomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ si prolunga analiticamente nell'intorno di qualche punto di $\partial\Omega$ se esistono una

[1] Per il *Teorema di Weierstrass*, dato un aperto Ω di $\mathbb{C}$, una successione $\{z_\nu\}$ senza punti di accumulazione in Ω ed una successione di interi $\{k_\nu\}$, è possibile trovare una funzione f, meromorfa in Ω ed olomorfa e $\neq 0$ in $\Omega \setminus \cup\{z_\nu\}$, tale che, per ogni ν, il prodotto $(z - z_\nu)^{-k_\nu} f(z)$ definisca una funzione olomorfa in un intorno di z_ν.

Sia $\{z_\nu\}$ una successione di punti di Ω che consiste di tutti i punti di Ω con coordinate razionali, ciascuno ripetuto un numero infinito di volte e $\{K_\nu\}$ una successione di compatti, con $K_\nu \subset \text{int}(K_{\nu+1})$ ed $\Omega = \bigcup K_\nu$. Costruiamo una successione di punti distinti $\{w_\nu\} \subset \Omega$ fissando, per ogni indice ν, un punto $w_\nu \in \Omega \setminus K_\nu$ con $|z_\nu - w_\nu| < \text{dist}(z_\nu, \complement\Omega)$ e $w_\nu \neq w_h$ se $h < \nu$. La successione di punti distinti $\{w_\nu\}$ è allora priva di punti di accumulazione in Ω ed ha tutta la frontiera $\partial\Omega$ come luogo di punti di accumulazione. Per il teorema di Weierstrass possiamo trovare una f, olomorfa su Ω, che ha $\{w_\nu\}$ come insieme di zeri, ed in w_ν uno zero di ordine ν. Tale f non può ammettere prolungamento analitico nell'intorno di nessun punto di $\partial\Omega$. Infatti, se per assurdo f si potesse prolungare nell'intorno di un punto $z_0 \in \partial\Omega$, il suo prolungamento dovrebbe avere in tale punto uno zero d'ordine infinito: ciò non è possibile per il principio di continuazione unica forte.

coppia di aperti $\omega_1(f), \omega_2(f)$ ed una $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\omega_2(f))$ tali che

$$\begin{aligned} \omega_2(f) \quad &\text{è connesso e} \quad \not\subset \Omega, \\ \emptyset \neq \omega_1(f) &\subset \omega_2(f) \cap \Omega, \\ f = \tilde{f} \quad &\text{in} \quad \omega_1(f). \end{aligned}$$

Osserviamo che, quando ciò si verifica, è, per il principio di continuazione unica, $f(z) = \tilde{f}(z)$ in tutti i punti di una componente connessa non vuota di $\omega_2(f) \cap \Omega$.

Fissiamo una base numerabile $\mathcal{B}$ di aperti connessi di $\mathbb{C}^n$. Poniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{B}' &= \{\omega \in \mathcal{B} \mid \omega \subset \Omega\}, \\ \mathcal{B}'' &= \{\omega \in \mathcal{B} \mid \omega \cap \partial\Omega \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Allora l'insieme

$$\mathcal{M} = \{(\omega', \omega'') \in \mathcal{B}' \times \mathcal{B}'' \mid \omega' \subset \omega''\}$$

è numerabile. Poniamo quindi $\mathcal{M} = \{(\omega'_\nu, \omega''_\nu)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$.

Per ogni ν indichiamo con $\mathcal{F}_\nu$ lo spazio

$$\mathcal{F}_\nu = \{(f, g) \in \mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\omega''_\nu) \mid f(z) = g(z) \quad \forall z \in \omega'_\nu\},$$

con la topologia di sottospazio dello spazio di Fréchet $\mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\omega''_\nu)$. Essendo sottospazi chiusi, ciascuno degli $\mathcal{F}_\nu$ è uno spazio di Fréchet.

Sia $\pi_\nu : \mathcal{F}_\nu \to \mathcal{O}(\Omega)$ la proiezione sulla prima coordinata. Se ogni funzione olomorfa su Ω ammettesse un prolungamento analitico in un intorno di un punto $z_0 \in \partial\Omega$, allora avremmo

$$\mathcal{O}(\Omega) = \bigcup_\nu \pi_\nu(\mathcal{F}_\nu).$$

Poiché $\mathcal{O}(\Omega)$, in quanto di Fréchet e quindi metrico completo, è uno spazio di Baire, almeno uno dei sottospazi dell'unione numerabile a secondo membro, diciamo $\pi_{\nu_0}(\mathcal{F}_{\nu_0})$ dovrebbe essere di seconda categoria. Per il teorema di Banach[2] avremmo allora $\pi_{\nu_0}(\mathcal{F}_{\nu_0}) = \mathcal{O}(\Omega)$, che contraddice la definizione di dominio d'olomorfia. □

3. Teoria elementare della convessità

Introduciamo ora la nozione di inviluppo di olomorfia e di convessità olomorfa.

Definizione II.3.1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ e sia K un compatto contenuto in Ω. L'Ω-*inviluppo di olomorfia* di K è l'insieme:

(2.3.1) $$\hat{K}_\Omega = \{z \in \Omega \,|\, |f(z)| \leq \sup\nolimits_{\zeta \in K} |f(\zeta)|, \ \forall f \in \mathcal{O}(\Omega)\}.$$

---

[2] Ricordiamo che uno *spazio di Fréchet* è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, la cui topologia sia definita da una metrica invariante per traslazioni e completa.

Il teorema di Banach ci dice che un'applicazione lineare e continua $\phi : X \to Y$ tra due spazi di Fréchet o è surgettiva, o ha immagine di prima categoria in Y. [cf. ad esempio: *Walter Rudin*, **Real and Complex Analysis**, McGraw-Hill (**1966**), Teorema 2.11].

Diciamo che Ω è *olomorficamente convesso* se:

$$\hat{K}_\Omega \Subset \Omega \text{ per ogni } K \Subset \Omega. \tag{2.3.2}$$

Esempio II.3.2. Se Ω è un aperto di $\mathbb{C}$ e K un compatto contenuto in Ω, allora $\hat{K}_\Omega$ è l'unione di K e di tutte le componenti connesse di $\Omega \setminus K$ che sono relativamente compatte in Ω. In particolare, tutti gli aperti di $\mathbb{C}$ sono olomorficamente convessi.

Se $n \geq 2$ ed U un intorno aperto di 0 in $\mathbb{C}^n$, allora $\Omega = U \setminus \{0\}$ non è olomorficamente convesso. Se infatti U contiene la palla chiusa $\{|z| \leq r\}$, con $r > 0$, allora $K = \{|z| = r\}$ è un compatto di Ω con $\hat{K}_\Omega = \{0 < |z| \leq r\}$ non compatto.

Le funzioni esponenziali $z \to \exp(\langle z, \zeta_0 \rangle)$ sono olomorfe su $\mathbb{C}^n$. Poiché:

$$|\exp(\langle z, \zeta_0 \rangle)| = \exp(\mathrm{Re}\,(\langle z, \zeta_0 \rangle),$$

utilizzando nella (2.3.1) le loro restrizioni ad $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, ricaviamo subito:

Lemma II.3.3. *Per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, è:*

$$\hat{K}_\Omega \subset \mathrm{ch}(K) \cap \Omega, \quad \forall K \Subset \Omega, \tag{2.3.3}$$

ove ch *indica l'inviluppo convesso reale. In particolare, $\hat{K}_\Omega$ è sempre limitato.* □

Definizione II.3.4. Sia D un intorno aperto relativamente compatto di 0 in $\mathbb{C}^n$, cerchiato rispetto all'origine, tale cioè che

$$z \in D,\ \tau \in \mathbb{C},\ |\tau| \leq 1 \Longrightarrow \tau z \in D.$$

Dato un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$, con $\emptyset \neq \Omega \subsetneqq \mathbb{C}^n$, chiamiamo *$D$-distanza dal bordo* di un punto $z \in \Omega$ il numero reale positivo:

$$\delta^D_\Omega(z) = \sup\{r > 0 \mid \{z\} + rD \subset \Omega\}\,. \tag{2.3.4}$$

Lemma II.3.5 (Thullen). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$, K un compatto di Ω, $D \subset \mathbb{C}^n$ un polidisco con centro nell'origine ed $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ una funzione olomorfa che soddisfi:*

$$|f(z)| \leq \delta^D_\Omega(z) \quad \forall z \in K. \tag{2.3.5}$$

Sia $z_0 \in \hat{K}_\Omega$. Allora, per ogni $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ la serie di Taylor di u con centro in z_0

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \tfrac{1}{\alpha!} \partial^\alpha u(z_0)(z - z_0)^\alpha \tag{2.3.6}$$

converge nel polidisco $\{z_0\} + |f(z_0)|\, D$.

Dimostrazione. Sia $D = \{|z_j| < r_j\}$. Se $0 < t < 1$, l'insieme:

$$\Phi_t = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, |z_j - w_j| \leq t r_j |f(w)| \text{ per qualche } w \in K\}$$

è compatto in Ω. Quindi $\sup_{\Phi_t} |u(z)| = M_t < +\infty$. Per le diseguaglianze di Cauchy otteniamo:

$$|\partial^\alpha u(w)| \cdot t^{|\alpha|} \cdot r^\alpha \cdot |f(w)|^{|\alpha|} \leq M_t \cdot \alpha! \quad \forall w \in K. \tag{2.3.7}$$

Poiché $w \to f^{|\alpha|}(w)\partial^\alpha u(w)$ è olomorfa in Ω, la disegualglianza (2.3.7) continua a valere per $w \in \hat{K}_\Omega$, da cui segue, che la (2.3.6) converge su $\{w\} + t\,|f(w)|\,D$ per ogni $0 < t < 1$ e $w \in \hat{K}_\Omega$, e quindi su $\{w\} + |f(w)|\,D$ per ogni $w \in \hat{K}_\Omega$. $\square$

Definizione II.3.6. Sia $\delta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ una qualsiasi funzione reale continua tale che

$$\delta(z) > 0 \text{ se } z \neq 0, \quad \delta(\lambda z) = |\lambda|\delta(z)\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall z \in \mathbb{C}^n. \tag{2.3.8}$$

Chiamiamo *δ-pseudodistanza* dal bordo nell'aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ la funzione continua, definita su Ω e a valori reali positivi:

$$\delta(z, \complement\Omega) = \inf_{w \in \complement\Omega} \delta(z - w). \tag{2.3.9}$$

Lemma II.3.7. *Sia $\delta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ una funzione reale continua che soddisfi* (2.3.8)*, e sia $D = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \delta(z) < 1\}$. Allora D è un aperto relativamente compatto di $\mathbb{C}^n$, cerchiato rispetto all'origine, e*

$$\delta(z, \complement\Omega) = \delta^D_\Omega(z). \tag{2.3.10}$$

Dimostrazione. Sia $z \in \Omega$. Se $0 < r < \delta^D_\Omega(z)$, allora $z + w \in \Omega$ per ogni $w \in \mathbb{C}^n$ con $\delta(w) < r$. Quindi, se $\zeta \notin \Omega$, e $w = \zeta - z$, abbiamo $\delta(w) \geq r$. Otteniamo perciò $\delta(\zeta - z) \geq r$ per ogni $\zeta \notin \Omega$ e quindi $\delta(z, \complement\Omega) \geq r$. Per l'arbitrarietà della scelta di r, otteniamo che $\delta(z, \complement\Omega) \geq \delta^D_\Omega(z)$.

Viceversa, se $0 < r < \delta(z, \complement\Omega)$, abbiamo $z + rD \subset \Omega$, e quindi $\delta^D_\Omega(z) \geq r$, da cui, per l'arbitrarietà di r, otteniamo la diseguaglianza $\delta^D_\Omega(z) \geq \delta(z, \complement\Omega)$. Vale perciò la (2.3.10). $\square$

Dal Lemma di Thullen otteniamo il

Teorema II.3.8. *Sia δ una funzione reale continua che soddisfa* (2.3.8)*. Se Ω è un dominio di olomorfia di $\mathbb{C}^n$, e K un compatto di Ω, allora:*

$$\left.\begin{array}{c} f \in \mathcal{O}(\Omega) \text{ e} \\ |f(z)| \leq \delta(z, \complement\Omega)\ \forall z \in K \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z)| \leq \delta(z, \complement\Omega)\ \forall z \in \hat{K}_\Omega. \tag{2.3.11}$$

In particolare:

$$\inf_{z \in K} \delta(z, \complement\Omega) = \inf_{z \in \hat{K}_\Omega} \delta(z, \complement\Omega). \tag{2.3.12}$$

Dimostrazione. La (2.3.12) si ottiene applicando la (2.3.11) alle costanti. Sarà quindi sufficiente dimostrare la (2.3.11).

Come nel Lemma II.3.7, poniamo $D = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \delta(z) < 1\}$. Se D è un polidisco, allora $\delta(z, \complement\Omega) = \delta^D_\Omega(z)$ e la tesi segue dal Lemma II.3.5, perché, per definizione di dominio di olomorfia, le serie di Taylor con centro in $w \in \hat{K}_\Omega$ delle $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ non possono convergere tutte in uno stesso polidisco che non sia contenuto in Ω.

Consideriamo ora la famiglia $\mathcal{P}$ che consiste di tutti gli aperti $g(\Delta)$ ottenuti facendo ruotare un polidisco $\Delta = \{|z_j| < r_j,\ 1 \leq j \leq n\}$ con centro nell'origine mediante un elemento g di $\mathbf{U}(n) = \{g \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \mid g^* g = I_n\}$. Allora

$$(*) \qquad \delta(z, \complement\Omega) = \delta_\Omega^D(z) = \inf\left\{\delta_\Omega^{g(\Delta)}(z) \middle| \Delta \in \mathcal{P},\ g \in \mathbf{U}(n),\ g(\Delta) \subset D\right\}.$$

Infatti, $\delta_\Omega^D(z) \leq \delta_\Omega^{g(\Delta)}(z)$ per ogni $g(\Delta) \subset D$. Quindi

$$(**) \qquad \delta(z, \complement\Omega) \leq \gamma(z) =: \inf\left\{\delta_\Omega^{g(\Delta)}(z) \middle| \Delta \in \mathcal{P},\ g \in \mathbf{U}(n),\ g(\Delta) \subset D\right\}.$$

Se poi, per $z \in \Omega$ fissato, $w \in \partial\Omega$ è un punto per cui $\delta(z, \complement\Omega) = \delta(z - w)$, possiamo, a meno di una rotazione, supporre che $z - w = \lambda_1 e_1$ (ove $e_1, \ldots, e_n$ è la base canonica di $\mathbb{C}^n$). Per ogni $\epsilon > 0$, possiamo trovare $\epsilon' > 0$ tale che D contenga il polidisco

$$\Delta_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| < \tfrac{\delta(e_1)}{1+\epsilon},\ |z_j| < \epsilon' \text{ per } 2 \leq j \leq n\}.$$

Osserviamo che $z + (1+2\epsilon)\delta(z-w)\Delta_\epsilon \not\subset \Omega$, e quindi $\delta_\Omega^{\Delta_\epsilon}(z) \leq (1+2\epsilon)\delta(z, \complement\Omega)$. Quindi, $\gamma(z) \leq (1+2\epsilon)\delta(z, \complement\Omega)$ per ogni $\epsilon > 0$, da cui, per la $(**)$, otteniamo la $(*)$.

Chiaramente la (2.3.11) vale anche quando D è ottenuto ruotando un polidisco mediante un elemento di $\mathbf{U}(n)$. Otteniamo perciò il caso generale come conseguenza della validità dell'enunciato nel caso del polidisco e della $(*)$. $\square$

Ricaviamo in questo modo la seguente caratterizzazione dei domini di olomorfia:

Teorema II.3.9. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *Ω è un dominio d'olomorfia;*
(ii) *Per ogni compatto $K \Subset \Omega$ è $\hat{K}_\Omega \Subset \Omega$ e per qualsiasi funzione di pseudodistanza δ:*

$$\sup_{z \in K} \frac{|f(z)|}{\delta(z, \complement\Omega)} = \sup_{z \in \hat{K}_\Omega} \frac{|f(z)|}{\delta(z, \complement\Omega)}; \tag{2.3.13}$$

(iii) *Per ogni compatto $K \Subset \Omega$ è $\hat{K}_\Omega \Subset \Omega$;*
(iv) *Esiste una funzione $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ che non può essere continuata olomorficamente oltre nessun punto della frontiera di Ω: non esiste cioè nessun aperto connesso ω, non contenuto in Ω, ma con $\omega \cap \Omega \neq \emptyset$, per cui vi sia una $g \in \mathcal{O}(\omega)$ con $g = f$ su un aperto non vuoto contenuto in $\omega \cap \Omega$.*

Dimostrazione. Abbiamo $(i) \Longrightarrow (ii)$ per il Teorema II.3.8, mentre l' implicazione $(ii) \Longrightarrow (iii)$ è banale e l'equivalenza $(i) \Longleftrightarrow (iv)$ segue dal Teorema II.2.2.

Basterà quindi dimostrare che $(iii) \Longrightarrow (iv)$.

Sia A un sottoinsieme numerabile e denso di Ω e sia $\{w_j\}$ una successione a valori in A in cui ogni punto di A sia ripetuto infinite volte. Fissiamo un polidisco D e, per ogni j, indichiamo con D_j il più grande polidisco della forma $\{w_j\} + rD$ contenuto in Ω.

Fissiamo una successione $\{K^{(j)}\}$ di compatti di Ω con $K^{(j)} \subset \operatorname{int}(K^{(j+1)})$ e $\bigcup K^{(j)} = \Omega$. Poiché $\hat{K}^{(j)}_\Omega \Subset \Omega$, esiste un punto $z_j \in D_j \setminus \hat{K}^{(j)}_\Omega$ e quindi una funzione $f_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ con $f_j(z_j) = 1$ e $|f_j| < 2^{-j}$ su $\hat{K}^{(j)}_\Omega$. Poiché la serie $\sum j 2^{-j}$ è convergente, il prodotto infinito:

$$f(z) = \prod_j (1 - f_j(z))^j$$

converge in Ω e definisce una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, che non è nulla su nessuna componente connessa di Ω. Tutte le derivate di f fino all'ordine $(j-1)$ si annullano in z_j. Se f potesse prolungarsi olomorficamente oltre qualche punto della frontiera di Ω, la f si potrebbe prolungare ad una funzione olomorfa definita su un intorno di qualche $\bar{D}_j$. Ma $\bar{D}_j$ contiene una successione $\{z_{h_k}\}$, che converge a un punto z_∞ in cui dovrebbe annullarsi con tutte le derivate. Questo implicherebbe $f = 0$ sulla componente connessa di w_j in Ω. Otteniamo così una contraddizione, che dimostra la validità di (iv). □

Abbiamo così ottenuto

TEOREMA II.3.10 (Cartan-Thullen). *Un dominio Ω di $\mathbb{C}^n$ è un dominio di olomorfia se e soltanto se è olomorficamente convesso.* □

COROLLARIO II.3.11. *Se $\Omega \subset \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ è un aperto convesso, allora Ω è un dominio di olomorfia.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se Ω è convesso, per ogni compatto $K \Subset \Omega$, abbiamo $\hat{K}_\Omega \subset \operatorname{ch}(K) \Subset \Omega$. □

COROLLARIO II.3.12. *Sia $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ una qualsiasi famiglia di aperti di olomorfia di $\mathbb{C}^n$. Allora $\Omega = \operatorname{int}\left(\bigcap_{i\in I} \Omega_i\right)$ è ancora un aperto di olomorfia.*

DIMOSTRAZIONE. Sia K un compatto contenuto in Ω e sia $r = \operatorname{dist}(K, \complement\Omega) = \inf_{\substack{z\in K \\ w \in \complement\Omega}} |z - w| > 0$. Poiché $\hat{K}_\Omega \subset \hat{K}_{\Omega_i}$ per ogni $i \in I$, abbiamo

$$\operatorname{dist}(\hat{K}_\Omega, \complement\Omega_i) \geq \operatorname{dist}(\hat{K}_{\Omega_i}, \complement\Omega_i) \geq r > 0 \quad \forall i \in I.$$

Poiché $\bigcup_{i\in I} \complement\Omega_i$ è denso in $\complement\Omega$, ne segue che $\operatorname{dist}(\hat{K}_\Omega, \complement\Omega) \geq r > 0$ e quindi, per la condizione (iii) del Teorema II.3.9, Ω è un dominio di olomorfia. □

COROLLARIO II.3.13. *Sia Ω un dominio di Reinhardt connesso e contenente l'origine. Sono equivalenti:*

(1) *Ω è il dominio di convergenza di una serie di potenze.*
(2) *Ω è un dominio di olomorfia.*
(3) *Ω è logaritmicamente convesso.*

DIMOSTRAZIONE. È (1) ⇒ (3) per il Teorema II.1.4. È poi (2) ⇒ (1) per il Teorema II.1.9. Basterà quindi dimostrare che (3) ⇒ (2).

Sia K un compatto contenuto in Ω. Poiché abbiamo supposto che Ω sia logaritmicamente convesso, possiamo trovare un insieme finito $Z \subset \Omega$ tale che $\zeta_i \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ se $\zeta \in Z$ e

$$K \subset \bigcup_{\zeta \in Z} \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, |z_j| \leq |\zeta_j| \; \forall j = 1, \dots, n\}.$$

Sia ora $z \in \mathbb{C}^n$ aderente a $\hat{K}_\Omega$. A meno di riordinare le coordinate, possiamo supporre sia, per un h con $0 \leq h \leq n$, $z_1 \cdots z_h \neq 0$ e $z_j = 0$ per $j > h$. Allora, per tutti i multiindici $\alpha \in \mathbb{N}^h$ abbiamo

$$|z_1^{\alpha_1} \cdots z_h^{\alpha_h}| \leq \sup_{\zeta \in Z} |\zeta_1^{\alpha_1} \cdots \zeta_h^{\alpha_h}|.$$

Passando ai logaritmi, otteniamo, con $\lambda_j = \alpha_j/(\alpha_1 + \cdots \alpha_h)$:

$$\lambda_1 \log|z_1| + \cdots + \lambda_h \log|z_h| \leq \sup_{\zeta \in Z} \left(\lambda_1 \log|\zeta_1| + \cdots + \lambda_h \log|\zeta_h|\right). \tag{2.3.14}$$

I λ_j sono arbitrari numeri razionali non negativi con somma 1. Per continuità la (2.3.14) vale per ogni scelta di h numeri reali non negativi con somma 1. Quindi il punto $(\log|z_1|, \dots, \log|z_h|)$ appartiene all'inviluppo convesso dell'insieme degli $(\eta_1, \dots, \eta_h) \in \mathbb{R}^h$ per cui $|\eta_j| \leq |\zeta_j|$ per $1 \leq j \leq h$ per qualche $\zeta \in Z$. Quindi $|z_j| \leq e^{\eta_j}$ per qualche $\eta \in \Omega^*$. Ciò dimostra che $\overline{\hat{K}_\Omega} \subset \Omega$; quindi $\hat{K}_\Omega \Subset \Omega$ e dunque, per la *(iii)* del Teorema II.3.9, che Ω è un dominio di olomorfia. □

Teorema II.3.14. *Se $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ è un dominio di olomorfia ed $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(\Omega)$, allora anche*

$$\Omega' = \bigcap_{j=1}^{m} \{z \in \Omega \,|\, |f_j(z)| < 1\} \tag{2.3.15}$$

è un dominio di olomorfia.

Dimostrazione. Sia K un compatto contenuto in Ω'. Allora $k_j = \min_K |f_j| < 1$ per $j = 1, \dots, m$. Quindi

$$\hat{K}_{\Omega'} \subset \hat{K}_\Omega \subset \bigcap_{j=1}^{m} \{z \in \Omega \,|\, |f_j(z)| \leq k_j\} \subset \Omega'.$$

Poiché Ω è un dominio d'olomorfia, $\hat{K}_\Omega$ è compatto e quindi anche $\hat{K}_{\Omega'}$ è compatto. Quindi Ω' è un dominio di olomorfia per la *(iii)* del Teorema II.3.9. □

Teorema II.3.15. *Siano Ω un dominio di olomorfia in $\mathbb{C}^n$ ed Ω' un dominio di olomorfia in $\mathbb{C}^{n'}$. Se $F : \Omega \to \mathbb{C}^{n'}$ è un'applicazione olomorfa, allora:*

$$F^{-1}(\Omega') = \{z \in \Omega | F(z) \in \Omega'\} \tag{2.3.16}$$

è un dominio d'olomorfia in $\mathbb{C}^n$.

Dimostrazione. Sia K un compatto contenuto in $F^{-1}(\Omega')$. Poiché $\hat{K}_{F^{-1}(\Omega')} \subset \hat{K}_\Omega$, e $\hat{K}_\Omega$ è compatto perché Ω è un dominio di olomorfia, sarà sufficiente dimostrare che $\hat{K}_{F^{-1}(\Omega')}$ è chiuso in Ω. L'insieme $K' = F(K) \subset \Omega'$ è compatto perché F è continua e quindi $\hat{K}'_{\Omega'}$ è compatto in Ω'. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega')$ e z appartiene alla chiusura in Ω di $\hat{K}_{F^{-1}(\Omega')}$, abbiamo:

$$|f(F(z))| \leq \sup_{w \in K} |f(F(w))| = \sup_{\zeta \in F(K)} |f(\zeta)|.$$

Quindi la chiusura in Ω di $\hat{K}_{F^{-1}(\Omega')}$ è contenuta in $F^{-1}\big(\hat{K}'_{\Omega'}\big)$, che è chiuso di Ω. Ciò completa la dimostrazione. □

Vale ancora il:

Teorema II.3.16. *Siano Ω ed Ω' due aperti di $\mathbb{C}^n$, con $\Omega \subset \Omega'$. Supponiamo che Ω' sia un dominio di olomorfia e che l'applicazione di restrizione $\mathcal{O}(\Omega') \to \mathcal{O}(\Omega)$ abbia immagine densa. Allora esiste un dominio di olomorfia $\tilde{\Omega} \subset \Omega' \subset \mathbb{C}^n$ tale che ogni funzione $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ si estenda in modo unico ad una $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$.*

Dimostrazione. Definiamo $\tilde{\Omega}$ come l'unione delle parti interne dei compatti $\hat{K}_{\Omega'}$ al variare di K tra i compatti contenuti in Ω. Poiché $\tilde{\Omega}$ contiene le parti interne delle palle chiuse contenute in Ω, è $\Omega \subset \tilde{\Omega}$. Inoltre, se K è un compatto contenuto in $\tilde{\Omega}$, fissiamo un altro compatto K' con $K \subset \text{int}K' \subset K' \Subset \tilde{\Omega}$. Possiamo trovare un numero finito di compatti $K_1, \ldots, K_m \Subset \Omega$ con $K' \subset \bigcup_{i=1}^m \text{int}(\hat{K}_{i\,\Omega'})$. Chiaramente $\hat{K}_\Omega \subset \hat{K}'_{\tilde{\Omega}} \subset \hat{K}'_{\Omega'} \subset \bigcup_{i=1}^m \hat{K}_{i\,\Omega'} \Subset \tilde{\Omega}$. Ciò dimostra che $\tilde{\Omega}$ è un dominio di olomorfia. □

Definizione II.3.17. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$. Se esiste un dominio di olomorfia $\tilde{\Omega}$ in $\mathbb{C}^n$ tale che

$$\Omega \subset \tilde{\Omega} \quad \text{e la restrizione} \quad \mathcal{O}(\tilde{\Omega}) \to \mathcal{O}(\Omega) \text{ è un isomorfismo,} \tag{2.3.17}$$

diciamo che $\tilde{\Omega}$ è l'*inviluppo d'olomorfia di* Ω.

4. Il teorema di Bochner sui tubi di $\mathbb{C}^n$

In questo paragrafo consideriamo speciali domini Ω di $\mathbb{C}^n$ che ammettono inviluppo d'olomorfia in $\mathbb{C}^n$.

Definizione II.4.1. Chiamiamo [3] *tubo aperto* di $\mathbb{C}^n$ un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ della forma $\Omega = \omega \times i\mathbb{R}^n$, con ω aperto di $\mathbb{R}^n$.

L'inviluppo convesso reale di un tubo è il tubo sull'inviluppo convesso della base:

$$\text{ch}\,(\omega \times i\mathbb{R}^n) = (\text{ch}(\omega)) \times i\mathbb{R}^n. \tag{2.4.1}$$

[3] cf. S.Bochner e W.T.Martin: *Functions of several complex variables*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1948.

TEOREMA II.4.2 (Bochner). *Sia $\Omega = \omega \times i\mathbb{R}^n$ un tubo, con ω aperto connesso in $\mathbb{R}^n$, e sia $\tilde{\Omega} = (\mathrm{ch}(\omega)) \times i\mathbb{R}^n$. Allora ogni funzione olomorfa su Ω si estende in modo unico a una funzione olomorfa su $\tilde{\Omega}$.*

In particolare, un tubo aperto connesso ammette un inviluppo di olomorfia in $\mathbb{C}^n$, e questo coincide con il suo inviluppo convesso.

Dimostriamo innanzi tutto un lemma sugli inviluppi di olomorfia in $\mathbb{C}^2$.

LEMMA II.4.3. *Sia $\Omega = \omega \times i\mathbb{R}^2$ un tubo in $\mathbb{C}^2$. Supponiamo che la base ω contenga il triangolo:*

$$\Delta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1\}, \tag{2.4.2}$$

inviluppo convesso di

$$L = \{(x_1, x_2) \in \Delta | x_1 x_2 = 0\}. \tag{2.4.3}$$

Poniamo, per $0 < \epsilon < (1/2)$:

$$\Lambda_\epsilon = \{(x_1, x_2) \in \Delta | x_1 + x_2 - \epsilon(x_1^2 + x_2^2) \leq 1 - \epsilon\} \tag{2.4.4}$$

e sia inoltre:

$$L_\epsilon^* = \{x + iy \in \mathbb{C}^2 | x \in L,\ y_1^2 + y_2^2 \leq (1/\epsilon)\}. \tag{2.4.5}$$

Allora l'Ω-inviluppo d'olomorfia di L_ϵ^* contiene Λ_ϵ.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo:

$$M_\epsilon = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, \mathrm{Re}\, z \in \Delta,\ z_1 + z_2 - \epsilon(z_1^2 + z_2^2) = 1 - \epsilon\}. \tag{2.4.6}$$

Indicando con x_j e y_j rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria della coordinata complessa z_j, abbiamo su M_ϵ:

$$x_1 + x_2 - \epsilon(x_1^2 + x_2^2) + \epsilon(y_1^2 + y_2^2) = 1 - \epsilon. \tag{2.4.7}$$

Poiché sul triangolo Δ è $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ ed $x_1 + x_2 \leq 1$, abbiamo $y_1^2 + y_2^2 \leq (1/\epsilon)$ su M_ϵ. Pertanto M_ϵ è compatto. Inoltre, M_ϵ è una varietà complessa di dimensione 1, con bordo contenuto in L_ϵ^*. Quindi il massimo della restrizione ad M_ϵ del modulo di una funzione di $\mathcal{O}(\Omega)$ è assunto in un punto di L_ϵ^*. In particolare, l'Ω-inviluppo di olomorfia di L_ϵ^* contiene l'insieme

$$\{(x_1, x_2) \in \Delta | x_1 + x_2 - \epsilon(x_1^2 + x_2^2) = 1 - \epsilon\}.$$

Applicando questo ragionamento agli omotetici $tL_\epsilon^* \subset L_\epsilon^*$, otteniamo che l'$\Omega$-inviluppo di olomorfia di L_ϵ^* contiene

$$\{(tx_1, tx_2) \in \Delta | x_1 + x_2 - \epsilon(x_1^2 + x_2^2) = 1 - \epsilon\}$$

per ogni $0 \leq t \leq 1$, e quindi Λ_ϵ. $\square$

Vale il seguente:

LEMMA II.4.4. *Se $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ è un aperto stellato rispetto all'origine, allora per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ possiamo trovare una successione $\{g_\nu\} \subset \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ che approssima f uniformemente sui compatti di Ω.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Poiché f è olomorfa in un intorno di $0 \in \mathbb{C}$, il suo sviluppo in serie di polinomi omogenei

$$\sum_{h=0}^{\infty} p_h(z), \quad \text{con } p_h \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] \text{ omogeneo di grado } h \tag{2.4.8}$$

è convergente in un intorno di 0. Infatti, se f è olomorfa in un intorno della palla chiusa $\{R|z| \le 1\}$, con $R > 0$, abbiamo, con $C = \sup_{R\,|z| \le 1} |f(z)|$, la diseguaglianza $|p_h(z)| \le C\, R^h |z|^h$, e quindi la (2.4.8), ottenuta dalla serie di Taylor nell'origine di f sommando tra loro i termini omogenei dello stesso grado, converge normalmente ad f in un intorno dell'origine. Per ogni ϵ con $0 < \epsilon \le 1$ poniamo:

$$f_\epsilon(z) = \sum\nolimits_{h=0}^{\infty} \frac{p_h(z)}{\Gamma(2+\epsilon h)}. \tag{2.4.9}$$

Poiché la funzione Γ è crescente su $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ e $\Gamma(2 + \epsilon h) \ge [1 + \epsilon h]!$, ne segue che la serie a secondo membro converge uniformemente su tutti i compatti di $\mathbb{C}^n$, e quindi definisce una funzione $f_\epsilon \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Osserviamo ancora che $\Gamma(m + 1) = m!$ per ogni numero intero m e quindi in particolare $\Gamma(2) = 1$.

Consideriamo ora la curva chiusa κ in $\mathbb{C}$ che consiste dei due segmenti

$$\{\tau = r \exp(\pm i\phi_0)\ 0 \le r \le 1\}, \quad \text{ove} \quad \frac{\pi}{2} < \phi_0 < \pi$$
$$\text{e dall'arco} \quad \{\tau = \exp i\phi \mid -\phi_0 \le \phi \le \phi_0\}.$$

Orientiamo κ in senso antiorario. Abbiamo allora la formula di rappresentazione[4] di Hankel:

$$\frac{1}{\Gamma(2+\zeta)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\kappa \tau^\zeta \exp\left[\frac{1}{\tau}\right] \frac{d\tau}{\tau}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \tag{2.4.10}$$

dove $\tau^\zeta = \exp(\zeta \log_0(\tau))$ e $\log_0(\tau)$ è il valore del logaritmo con $\operatorname{Im} \log_0(\tau) \in (-\pi, \pi)$. Otteniamo quindi, sommando sotto il segno d'integrale:

$$\begin{aligned} f_\epsilon(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_\kappa \sum\nolimits_{h=0}^{\infty} \tau^{\epsilon h} p_h(z) \exp\left[\frac{1}{\tau}\right] \frac{d\tau}{\tau} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_\kappa \sum\nolimits_{h=0}^{\infty} p_h(\tau^\epsilon z) \exp\left[\frac{1}{\tau}\right] \frac{d\tau}{\tau}. \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Abbiamo allora:

$$\frac{f(z) - \Gamma(2+\epsilon) f_\epsilon(z)}{\Gamma(2+\epsilon)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\kappa \tau^\epsilon \exp\left[\frac{1}{\tau}\right] (f(z) - f(\tau^\epsilon z)) \frac{d\tau}{\tau}. \tag{2.4.12}$$

[4] La formula classica, vedi ad esempio [*E. T. Whittaker and G. N. Watson*, **A Course of Modern Analysis**, Cambridge University Press, 1902], è l'integrale, sul contorno C ottenuto da κ mediante la trasformazione $\tau \to t = -1/\tau$:

$$\frac{1}{\Gamma(\zeta)} = \frac{i}{2\pi} \oint_C (-t)^{-\zeta} \exp(-t) dt.$$

La formula che utilizziamo si ottiene da quella classica per cambiamento di variabile.

Infatti questa relazione è senz'altro vera in un intorno di 0 e quindi, dal momento che il secondo membro è una funzione olomorfa su Ω, in tutto l'aperto Ω per continuazione unica. Su ogni compatto $K \Subset \Omega$, $f(\tau^{\epsilon} z)$ è ben definita per ϵ sufficientemente piccolo e converge uniformemente ad f. Ne segue che $f_{\epsilon} \to f$ uniformemente sui compatti di Ω per $\epsilon \searrow 0$. $\square$

Dimostrazione del Teorema II.4.2. Supponiamo dapprima che la base ω di Ω sia stellata rispetto all'origine, che cioè $tx \in \omega$ per ogni $x \in \omega$ e $t \in [0,1]$.

Poiché per il Lemma II.4.4 l'applicazione di restrizione $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{O}(\Omega)$ ha immagine densa, per il Teorema II.3.16 il tubo Ω ammette un inviluppo di olomorfia $\tilde{\Omega}$ in $\mathbb{C}^n$. Chiaramente, poiché Ω è invariante rispetto alle traslazioni $z \to z + iy$, per $y \in \mathbb{R}^n$, anche $\tilde{\Omega}$ sarà invariante rispetto alle traslazioni $z \to z + iy$, per $y \in \mathbb{R}^n$, e quindi sarà anch'esso un tubo della forma $\tilde{\omega} \times i\mathbb{R}^n$. Inoltre, poiché Ω è stellato rispetto all'origine, e quindi invariante rispetto alle trasformazioni $z \to tz$ per $0 < t \leq 1$, anche $\tilde{\Omega}$ risulterà invariante rispetto a tali trasformazioni, e quindi stellato rispetto all'origine.

Siano ora x^1, x^2 due elementi non nulli di $\tilde{\omega}$. A meno di una trasformazione linerare di $\mathbb{R}^n$, possiamo supporre che x^1 ed x^2 siano i vettori $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$ ed $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, rispettivamente. Poiché ω è stellato rispetto all'origine, con le notazioni del Lemma II.4.3, Ω contiene $\{z \in \mathbb{C}^n | (z_1, z_2) \in L^*_{\epsilon},\ z_j = 0 \text{ per } j > 2\}$ per ogni $0 < \epsilon \leq 1/2$. Poiché le restrizioni delle funzioni di $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ a Ω formano un sottospazio denso di $\mathcal{O}(\Omega)$, otteniamo dal Lemma II.4.3 che $\{z \in \mathbb{C}^n | (z_1, z_2) \in \Lambda_{\epsilon},\ z_j = 0 \text{ per } j > 2\}$ per ogni $0 < \epsilon \leq 1/2$ è contenuto in $\tilde{\Omega}$. Facendo tendere ϵ a zero, otteniamo che $\tilde{\omega}$ contiene il triangolo $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1, x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 < 1,\ x_j = 0 \text{ per } j > 2\}$. Questo dimostra che $\tilde{\omega}$ è convesso.

Consideriamo ora il caso in cui ω sia connesso, ma non necessariamente stellato rispetto all'origine. Non è restrittivo supporre che $0 \in \omega$. Sia $\tilde{\Omega} = \tilde{\omega} \times i\mathbb{R}^n$ il più grande tubo convesso, contente l'origine, tale che, per ogni funzione $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, ci sia una funzione $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$ che coincida con f in un intorno di 0. Dobbiamo dimostrare che $\Omega \subset \tilde{\Omega}$.

Se così non fosse, vi sarebbe un punto $x^0 \in \omega \setminus \tilde{\omega}$. Poiché ω è connesso, vi è un cammino continuo in ω che congiunge 0 ad x^0. Sia x^1 il primo punto di tale cammino che non sia contenuto in $\tilde{\omega}$ e sia $B \subset \mathbb{R}^n$ una palla con centro in x^1 contenuta in ω. Allora $\tilde{\omega} \cup B$ è stellato rispetto a un qualsiasi punto di $\tilde{\omega} \cap B$. Quindi, ogni funzione analitica sul tubo $(\tilde{\omega} \cup B) \times i\mathbb{R}^n$ si estende in modo unico a una funzione olomorfa in $\mathrm{ch}(\tilde{\omega} \cup B) \times i\mathbb{R}^n$. Questo contraddice la massimalità di $\tilde{\Omega}$. L'assurdo è provenuto dall'aver supposto che $\omega \not\subset \tilde{\omega}$. Quindi $\tilde{\omega} \supset \omega$. Poiché gli aperti convessi sono domini di olomorfia, ciò completa la dimostrazione. $\square$

Esempio II.4.5. Se $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ allora le componenti connesse dell'insieme $\mathrm{int}(\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x + iy) \neq 0\ \forall y \in \mathbb{R}^n\})$ sono convesse. Questo si ottiene considerando il tubo su cui è definita la funzione $1/f$.

COROLLARIO II.4.6. *Un tubo è un dominio di olomorfia se e soltanto se tutte le sue componenti connesse sono convesse.*

5. Domini di Runge

DEFINIZIONE II.5.1. Un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$ è un *dominio di Runge* se

(1) è un dominio di olomorfia,
(2) l'applicazione di restrizione $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{O}(\Omega)$ ha immagine densa.

In particolare, per ogni funzione olomorfa su un dominio di Runge Ω si può trovare una successione $\{p_\nu\} \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ può approssimare, uniformemente sui compatti di Ω, con polinomi olomorfi.

OSSERVAZIONE II.5.2. Per il Lemma II.4.4, i domini di olomorfia stellati rispetto ad un punto sono domini di Runge, ed ogni aperto di $\mathbb{C}^n$, stellato rispetto a un punto, ha un inviluppo di olomorfia che è un dominio di Runge.

OSSERVAZIONE II.5.3. Tutti gli aperti connessi e semplicemente connessi di $\mathbb{C}$ sono domini di Runge. Infatti, tutti gli aperti di $\mathbb{C}$ sono domini di olomorfia e per il Teorema di Runge[5], se Ω è un aperto di $\mathbb{C}$, la condizione necessaria e sufficiente affinché l'applicazione di restrizione $\mathcal{O}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\Omega)$ abbia immagine densa è che Ω sia semplicemente connesso.

DEFINIZIONE II.5.4. Indicheremo nel seguito con $\tilde{K}$ il $\mathbb{C}^n$-inviluppo di olomorfia di un compatto K di $\mathbb{C}^n$. Poiché i polinomi sono densi in $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, abbiamo:

$$\tilde{K} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid |P(z)| \leq \sup_{\zeta \in K} |P(\zeta)|,\ \forall P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] \right\}. \tag{2.5.1}$$

DEFINIZIONE II.5.5. Un compatto K di $\mathbb{C}^n$ che sia uguale al proprio $\mathbb{C}^n$-inviluppo di olomorfia si dice *polinomialmente convesso.* Un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$ si dice *polinomialmente convesso* se $\tilde{K} \Subset \Omega$ per ogni compatto $K \Subset \Omega$.

Abbiamo:

TEOREMA II.5.6. *Per un dominio di olomorfia Ω in $\mathbb{C}^n$ sono equivalenti:*

(1) *Ω è un dominio di Runge.*
(2) *Per ogni compatto $K \subset \Omega$ è $\tilde{K} = \hat{K}_\Omega$.*
(3) *Per ogni compatto $K \subset \Omega$ è $\tilde{K} \cap \Omega = \hat{K}_\Omega$.*
(4) *Per ogni compatto $K \subset \Omega$ è $\tilde{K} \cap \Omega \Subset \Omega$.*

DIMOSTRAZIONE. La (1) $\Rightarrow$ (3) è diretta conseguenza delle definizioni. Abbiamo chiaramente (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4), tenendo conto del fatto che Ω è, per ipotesi, un dominio di olomorfia.

[5]C.Runge: *Über die Darstellung willkrlicher Functionen*, Acta Math. **7** (1885/86), 387-392

Rimane da dimostrare che (4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). Per dimostrare queste implicazioni, dimostreremo preliminarmente alcuni risultati sulla risoluzione delle equazioni di Cauchy-Riemann non omogenee su intorni di domini polinomialmente convessi. $\square$

Definizione II.5.7. Diciamo che un compatto K di $\mathbb{C}^n$ gode della *proprietà di Cousin*[6] se,

$$\begin{cases} \forall 0 \leq p, q \leq n,\ \forall \omega^{\text{aperto}} \supset K,\ \forall f \in \mathcal{E}^{p,q+1}(\omega) \text{ con } \bar{\partial} f = 0 \text{ su } \omega, \\ \exists u \in \mathcal{E}^{p,q}(\omega'),\ \text{con } K \subset \omega'^{\text{aperto}} \subset \omega,\ \text{che risolva } \bar{\partial} u = f \text{ in } \omega'. \end{cases} \tag{2.5.2}$$

Definizione II.5.8. Siano $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ polinomi olomorfi. L'insieme:

$$L = L_{P_1,\ldots,P_m} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |P_j(z)| \leq 1 \text{ per } 1 \leq j \leq m\} \tag{2.5.3}$$

si dice il *poliedro analitico* di $P_1, \ldots, P_m$.

Osservazione II.5.9. I poliedri analitici compatti sono polinomialmente convessi.

Lemma II.5.10. *Sia K un compatto polinomialmente convesso di $\mathbb{C}^n$. Per ogni intorno aperto Ω di K in $\mathbb{C}^n$, possiamo trovare un poliedro analitico compatto $L = L_{P_1,\ldots,P_m}$ (con $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$) tale che*

$$K = \tilde{K} \subset L \subset \Omega. \tag{2.5.4}$$

Dimostrazione del Lemma II.5.10. Scegliamo innanzi tutto numeri reali positivi $a_1, \ldots, a_n$ tali che $\sup_{z \in K} |a_j z_j| = 1$ per ogni $j = 1, \ldots, n$ e sia $P_j = a_j z_j \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ per $j = 1, \ldots, n$. L'insieme

$$Q = \{|P_j(z)| \leq 1 \text{ per } 1 \leq j \leq n\}$$

è un compatto che contiene K. Poiché abbiamo supposto K polinomialmente convesso, per ogni punto $\zeta \in Q \cap \complement\Omega$, possiamo scegliere un polinomio olomorfo $P_\zeta \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ con $|P_\zeta(\zeta)| > 1 \geq \sup_{z \in K} |P_\zeta(z)|$. Gli insiemi $U_\zeta = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |P_\zeta(z)| > 1\}$ formano un ricoprimento aperto del compatto $Q \cap \complement\Omega$. Potremo quindi trovare $\zeta_1, \ldots, \zeta_k \in Q \cap \complement\Omega$ tali che $Q \cap \complement\Omega \subset \bigcup_{j=1}^k U_{\zeta_j}$. Avremo allora $K \subset L_{P_1,\ldots,P_n,P_{\zeta_1},\ldots,P_{\zeta_k}} \Subset \Omega$. $\square$

Indicheremo nel seguito con D il disco unitario *chiuso* di $\mathbb{C}$:

$$D = \{\tau \in \mathbb{C} \mid |\tau| \leq 1\}.$$

Lemma II.5.11 (Oka). *Sia $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ un polinomio olomorfo e sia μ_P l'applicazione di Oka:*

$$\mu_P : \mathbb{C}^n \ni z \to (z, P(z)) \in \mathbb{C}^{n+1}. \tag{2.5.5}$$

Sia K un compatto di $\mathbb{C}^n$ e poniamo:

$$K_P = \{z \in K \mid |P(z)| \leq 1\}. \tag{2.5.6}$$

[6] Pierre Cousin: *Sur les fonctions de n variables complexes.* Acta Math. **19** (1895), no. 1, 1-61.

Supponiamo che $K \times D \subset \mathbb{C}^{n+1}$ abbia la proprietà di Cousin. Allora:

(1) *K_P gode della proprietà di Cousin;*
(2) *Per ogni $0 \leq p, q \leq n$, per ogni intorno aperto ω di K_P in $\mathbb{C}^n$ ed ogni soluzione $f \in \mathcal{E}^{p,q}(\omega)$ di $\bar{\partial} f = 0$ in ω, possiamo trovare un intorno $\tilde{\omega}$ di $K \times D$ in $\mathbb{C}^{n+1}$ ed una soluzione $F \in \mathcal{E}^{p,q}(\tilde{\omega})$ di $\bar{\partial} F = 0$ in $\tilde{\omega}$, tale che $\mu_P^*(F) = f$ in un intorno di K_P* (proprietà del rialzamento).

Dimostrazione. Dimostriamo innanzi tutto la (2). Sia $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$ la proiezione nelle prime n coordinate, dimodochè $\pi \circ \mu_P$ sia l'identità su $\mathbb{C}^n$. Sia ω un intorno aperto di K_P in $\mathbb{C}^n$ e sia $f \in \mathcal{E}^{p,q}(\omega)$ una soluzione di $\bar{\partial} f = 0$ in ω. Allora $\pi^*(f) \in \mathcal{E}^{p,q}(\pi^{-1}(\omega))$ è soluzione di $\bar{\partial}\pi^*(f) = 0$ in $\pi^{-1}(\omega)$, che è un intorno aperto di:

$$\mu_P(K_P) = \{(z, w) \in K \times D \mid z \in K,\ w = P(z)\}.$$

Abbiamo $\mu_P^* \circ \pi^*(f) = (\pi \circ \mu_P)^*(f) = f$ su ω. Fissiamo ora una funzione reale $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\pi^{-1}(\omega))$ che valga 1 su un intorno di $\mu_P(K_P)$. Cerchiamo di determinare il rialzamento F di f nella forma

$$F = \phi \cdot \pi^*(f) - (w - P(z)) \cdot G,$$

con $G \in \mathcal{E}^{p,q}(\Omega)$, per un opportuno intorno aperto Ω di $K \times D$ in $\mathbb{C}^{n+1}$. Differenziando otteniamo:

$$\bar{\partial} F = \bar{\partial}\phi \wedge \pi^*(f) - (w - P(z)) \cdot \bar{\partial} G.$$

Poiché $\phi = 1$, e quindi $\bar{\partial}\phi = 0$, in un intorno dell'insieme dei punti di $K \times D$ in cui $w - P(z) = 0$, il secondo membro dell'equazione:

$$\bar{\partial} G = \begin{cases} \dfrac{\bar{\partial}\phi \wedge \pi^* f}{w - P(z)} & \text{se} \quad \phi \neq 1 \\ 0 & \text{se} \quad \phi = 1, \end{cases}$$

è definito e di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno di $K \times D$. Esso è $\bar{\partial}$-chiuso e quindi, per l'ipotesi che $K \times D$ goda della proprietà di Cousin, esiste una $G \in \mathcal{E}^{p,q}(\Omega)$ che risolve tale equazione in un intorno Ω di $K \times D$ in $\mathbb{C}^{n+1}$. Quindi la $F \in \mathcal{E}^{p,q}(\Omega)$ soddisfa $\bar{\partial} F = 0$ in un intorno $\tilde{\omega}$ di $K \times D$ in $\mathbb{C}^{n+1}$ e $\mu_P^*(F) = f$ in un intorno di K_P. Abbiamo così ottenuto la (2).

Dimostriamo ora la (1). Data una forma $f \in \mathcal{E}^{p,q+1}(\omega)$, con ω intorno aperto di K_P e $\bar{\partial} f = 0$ su ω, per il punto (2) possiamo trovare una $F \in \mathcal{E}^{p,q+1}(\Omega)$, per un intorno Ω di $K \times D$ in $\mathbb{C}^{n+1}$, che soddisfa $\bar{\partial} F = 0$ in Ω e $\mu_P^*(F) = f$ in un intorno di K_P. Poiché abbiamo supposto che $K \times D$ abbia la proprietà di Cousin, possiamo trovare un aperto Ω' con $K \times D \subset \Omega' \subset \Omega$ ed una $U \in \mathcal{E}^{p,q}(\Omega')$ tale che $\bar{\partial} U = F$ su Ω'. Allora $u = \mu_P^*(U)$ soddisfa $\bar{\partial} u = \mu_P^*(\bar{\partial} U) = \mu_P^*(F) = f$ in un intorno di K_P. □

Per iterazione, dal momento che, per il Lemma di Dolbeault (Teorema I.6.1), i polidischi godono della proprietà di Cousin, otteniamo:

TEOREMA II.5.12. *Siano* $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ *polinomi olomorfi. Consideriamo l'applicazione di Oka:*

$$\mu_{P_1,\dots,P_m} : \mathbb{C}^n \ni z \to (z, P_1(z), \dots, P_m(z) \in \mathbb{C}^{n+m}. \tag{2.5.7}$$

Sia Δ *un polidisco di* $\mathbb{C}^n$ *e sia*

$$K = \{z \in \Delta \mid |P_j(z)| \leq 1,\ 1 \leq j \leq m\}. \tag{2.5.8}$$

Allora:

(1) K *gode della proprietà di Cousin.*
(2) *Se* $0 \leq p, q \leq n$, ω *è un intorno aperto di* K *in* $\mathbb{C}^n$, *ed* $f \in \mathcal{E}^{p,q}(\omega)$ *è una forma* $\bar{\partial}$*-chiusa su* ω, *allora esiste un intorno aperto* Ω *di* $K \times D^m$ *in* $\mathbb{C}^{n+m}$ *ed una forma* $F \in \mathcal{E}^{p,q}(\Omega)$, $\bar{\partial}$*-chiusa in* Ω, *tale che* $f = \mu^*_{P_1,\dots,P_m}(F)$ *in un intorno aperto di* K. $\square$

Vale il seguente teorema di approssimazione:

TEOREMA II.5.13. *Sia* K *un compatto polinomialmente convesso di* $\mathbb{C}^n$ *ed* f *una funzione olomorfa su un intorno aperto* Ω *di* K *in* $\mathbb{C}^n$. *Esiste allora una successione di polinomi olomorfi* $\{g_\nu\} \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ *che approssima* f *uniformemente su* K.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un poliedro analitico $L_{P_1,\dots,P_m}$ con $K \subset L_{P_1,\dots,P_m} \subset \Omega$ e sia Δ un polidisco che contenga $L_{P_1,\dots,P_m}$. Per il Teorema II.5.12, esiste una funzione F, olomorfa in un intorno di $\Delta \times D^m$, tale che:

$$f(z) = F(z, P_1(z), \dots, P_m(z))$$

su un intorno di L in $\mathbb{C}^n$. La F si approssima uniformemente con una successione di polinomi $\{G_\nu\} \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m]$ su $\Delta \times D^m$ (possiamo ad esempio considerare le somme parziali della serie di Taylor di F con centro nel centro del polidisco $\Delta \times D^m$) e quindi $\{g_\nu = G_\nu(z, P_1(z), \dots, P_m(z))\} \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ è una successione di polinomi olomorfi che approssima f uniformemente su L (e quindi su K). $\square$

COMPLETAMENTO DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA II.5.6. Dal Teorema II.5.13 segue subito l'implicazione (2) $\Rightarrow$ (1). Dimostriamo ora la (4) $\Rightarrow$ (2).

Supponiamo che per Ω valga la proprietà (4) del Teorema II.5.6. Sia K un compatto contenuto nell'aperto Ω e poniamo:

$$K_1 = \tilde{K} \cap \Omega, \quad K_2 = \tilde{K} \cap \complement\Omega.$$

Sia K_1 che K_2 sono compatti, e $K \subset K_1$. Poiché sono disgiunti, la funzione f che è costantemente uguale a 0 su K_1 e ad 1 su K_2 è olomorfa in un intorno di $\tilde{K}$. Per il Teorema II.5.13, possiamo trovare una successione di polinomi $\{g_\nu\} \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ che approssima f uniformemente su K. In particolare per un ν sufficientemente grande avremo:

$$\sup_{z \in K_1} |g_\nu(z)| < \frac{1}{2} < \inf_{K_2} |g_\nu(z)|.$$

Per la definizione di $\tilde{K}$, abbiamo allora $K_2 = \emptyset$, e quindi vale la (2). □

Sui domini di Runge il complesso di Dolbeault è aciclico. Vale infatti il

Teorema II.5.14. *Se $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ è un dominio di Runge, allora:*

$$\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(\Omega) = 0 \quad \forall\, q = 1, 2, \dots, n,\ \forall\, p = 0, 1, \dots, n. \tag{2.5.9}$$

Dimostrazione. Per l'ipotesi che Ω sia un dominio di Runge, possiamo fissare una successione K_ν di compatti polinomialmente convessi di $\mathbb{C}^n$ tali che:

$$K_0 \subset \mathrm{int}(K_1) \subset K_1 \subset \cdots \subset K_\nu \subset \mathrm{int}(K_{\nu+1}) \subset \cdots$$

ed $\Omega = \bigcup K_\nu$. Poiché i K_ν hanno la proprietà di Cousin, data $f \in \mathcal{E}^{p,q+1}(\Omega)$ con $\bar\partial f = 0$ su Ω, possiamo trovare una successione di aperti $\{\omega_\nu\}$ con $K_\nu \subset \omega_\nu \subset \Omega$ ed una successione $\{u_\nu \in \mathcal{E}^{p,q}(\omega_\nu)\}$ tale che:

$$\bar\partial u_\nu = f \quad \text{su} \quad \omega_\nu \quad \text{per} \quad \nu = 0, 1, \dots \tag{2.5.10}$$

Dico che, se $q > 0$, possiamo scegliere le u_ν in modo che risulti

$$u_\nu = u_\mu \quad \text{su} \quad K_{\mu-1} \quad \text{se} \quad 1 \leq \mu < \nu. \tag{2.5.11}$$

Infatti, supponiamo di aver scelto u_h, per $h \leq k$, in modo che la condizione (2.5.11) sia verificata quando $1 \leq \mu < \nu \leq k$ e sia v una soluzione di $\bar\partial v = f$ in un intorno ω_{k+1} di K_{k+1}. Allora $v - u_k$ è una forma $\bar\partial$-chiusa in un intorno di K_k e, per la proprietà di Cousin, esiste una $w \in \mathcal{E}^{p,q-1}(\mathbb{C}^n)$, tale che $\bar\partial w = v - u_k$ in un intorno di K_k. Basterà allora scegliere $u_{k+1} = v - \bar\partial w$ su ω_{k+1}, perché ora la (2.5.11) sia verificata per $1 \leq \mu < \nu \leq k+1$. La soluzione $u \in \mathcal{E}^{p,q}(\Omega)$ di $\bar\partial u = f$ si otterrà allora ponendo $u = u_{h+1}$ su K_h per $h = 0, 1, \dots$.

Nel caso $q = 0$, sostituiamo alla condizione (2.5.11) la:

$$\sup_{K_\nu} |u_{\nu+1} - u_\nu| < 2^{-\nu} \quad \forall \nu = 0, 1, \dots \tag{2.5.12}$$

Supponiamo di aver ottenuto, per un $k \geq 1$, forme $u_0, u_1, \dots, u_k$ che soddisfino $\bar\partial u_\nu = f$ in ω_ν e (2.5.12) per $\nu \leq k-1$. Per la proprietà di Cousin possiamo trovare $v \in \mathcal{E}^{p,0}(\mathbb{C}^n)$ tale che $\bar\partial v = f$ su un intorno ω_{k+1} di K_{k+1} in Ω. Poiché $\bar\partial(v - u_k) = 0$ in un intorno di K_k, per il Teorema II.5.13 (applicato a ciascuna componente di $(v - u_k)$) potremo trovare una forma $g \in \mathcal{E}^{p,0}(\mathbb{C}^n)$, le cui componenti sono polinomi olomorfi, per cui $\sup_{K_\nu} |(v - u_k) - g| < 2^{-k}$. Porremo allora $u_{k+1} = v - g$. Otteniamo così per ricorrenza una successione $\{u_\nu\}$ che soddisfa (2.5.10) e (2.5.12). Troviamo allora una soluzione $u \in \mathcal{E}^{p,0}(\Omega)$ di $\bar\partial u = f$ ponendo:

$$u = u_\nu + \sum\nolimits_{j=\nu}^{\infty} (u_{j+1} - u_j) \quad \text{su} \quad K_\nu. \tag{2.5.13}$$ □

Definizione II.5.15. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$. Indichiamo con $\mathrm{H}^r_d(\Omega)$ i gruppi di coomologia di deRham di Ω:

$$\mathrm{H}^r_d(\Omega) = \frac{\ker(d : \mathcal{E}^{(r)}(\Omega) \to \mathcal{E}^{(r+1)})}{\mathrm{Imm}(\mathrm{d} : \mathcal{E}^{(\mathrm{r}-1)}(\Omega) \to \mathcal{E}^{(\mathrm{r})})}. \tag{2.5.14}$$

Abbiamo

Teorema II.5.16. *Se* Ω *è un aperto di* $\mathbb{C}^n$ *tale che* $\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(\Omega) = 0$ *per* $q > 0$*, allora* $\mathrm{H}^r_d(\Omega) = 0$ *per ogni* $r > n$*.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{E}^{(r)}(\Omega)$ una forma d-chiusa, con $r > n$. Scriviamo:

$$f = \sum\nolimits_{p+q=r} f^{p,q} \quad \text{con} \quad f^{p,q} \in \mathcal{E}^{p,q}(\Omega).$$

La condizione $r > n$ implica che $f^{p,q} = 0$ se $p = 0$ o $q = 0$. Dimostriamo quindi per ricorrenza su $0 \le q \le n$ che l'equazione:

$$du = f \quad \text{in} \quad \Omega \tag{2.5.15}$$

ha una soluzione $u \in \mathcal{E}^{(r-1)}(\Omega)$ se $f^{r-j,j} = 0$ quando $j > q$. Quest'affermazione è banalmente vera se $q = 0$, perché allora $f = 0$, ed è la tesi quando $q = n$. Supponiamo quindi di averla dimostrata per $q < q_0$ (con $1 \le q_0 < n$) e dimostriamola per $q = q_0$. Se $f^{r-j,j} = 0$ quando $j > q_0$, allora:

$$\bar\partial f^{r-q_0,q_0} = 0 \quad \text{su} \quad \Omega,$$

perché $\bar\partial f^{r-q_0,q_0}$ è la componente omogenea di bi-grado $(r - q_0, r - q_0 + 1)$ di df, ed abbiamo supposto che $df = 0$. Per ipotesi, poiché $q_0 > 0$, esiste una $v \in \mathcal{E}^{r-q_0,q_0-1}(\Omega)$ tale che $\bar\partial v = f^{r-q_0,q_0}$, cioè:

$$f' = f - dv = \sum_{q<q_0} g^{r-q,q} \quad \text{con} \quad g^{r-q,q} \in \mathcal{E}^{r-q,q}(\Omega).$$

Per l'ipotesi di ricorrenza, $f' = dw$ per una $w \in \mathcal{E}^{(r-1)}(\Omega)$ e quindi $f = d(v + w)$. La dimostrazione è completa. □

Definizione II.5.17. Dato un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$, indichiamo con $\Omega^p(\Omega)$ lo spazio delle *p-forme olomorfe* su Ω:

$$\Omega^p(\Omega) = \{f \in \mathcal{E}^{p,0}(\Omega) \mid \bar\partial f = 0 \quad \text{su} \quad \Omega\}. \tag{2.5.16}$$

Poiché $d\Omega^p(\Omega) \subset \Omega^{p+1}(\Omega)$, otteniamo un complesso:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{\ d\ } \Omega^1(\Omega) \xrightarrow{\ d\ } \Omega^2(\Omega) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \xrightarrow{\ d\ } \Omega^{n-1}(\Omega) \xrightarrow{\ d\ } \Omega^n(\Omega) \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

Corollario II.5.18. *Se* Ω *è un aperto di* $\mathbb{C}^n$ *con la proprietà che* $\mathrm{H}^{p,q}_{\bar\partial}(\Omega) = 0$ *per* $q > 0$*, allora la coomologia di deRham di* Ω *è isomorfa alla coomologia del complesso* (2.5.17)*:*

$$\mathrm{H}^r(\Omega) \simeq \frac{\ker(d : \Omega^r(\Omega) \to \Omega^{r+1}(\Omega))}{\mathrm{Imm}(d : \Omega^{r-1}(\Omega) \to \Omega^r(\Omega))}. \tag{2.5.18}$$

Osservazione II.5.19. Il Teorema appena dimostrato si applica in particolare ai domini di Runge di $\mathbb{C}^n$. Per questi domini vale in effetti un risultato più forte. È cioè:

$$\mathrm{H}^r_d(\Omega) = 0 \quad \forall r \ge n.$$

Nel caso $n = 1$ questa è in effetti la caratterizzazione dei domini di Runge di $\mathbb{C}$.

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo solo dimostrare che $\mathrm{H}^n_d(\Omega) = 0$. Osserviamo innanzi tutto che ogni classe di coomologia di $\mathrm{H}^n_d(\Omega) = 0$ ha un rappresentante in $\Omega^n(\Omega)$, cioè della forma:

$$\alpha = f(z)dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \quad \text{con} \quad f \in \mathcal{O}(\Omega). \tag{2.5.19}$$

Poiché abbiamo supposto che Ω sia un dominio di Runge, possiamo trovare una successione di polinomi olomorfi $f_\nu \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ tali che $f_\nu \to f$ uniformemente con tutte le derivate sui compatti di Ω. Si verifica facilmente che l'equazione $f_\nu = \partial g_\nu / \partial z_1$, essendo f_ν un polinomio olomorfo, ammette come soluzione un polinomio olomorfo $g_\nu \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, e quindi:

$$f_\nu dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n = d(g_\nu dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n).$$

D'altra parte, sappiamo che $d(\mathcal{E}^{n-1}(\Omega))$ è chiuso in $\mathcal{E}^n(\Omega)$ e quindi ne segue che α, essendo limite di una successione di forme esatte è essa stessa esatta. □

6. Sottovarietà analitiche in $\mathbb{C}^n$

Se U è un sottoinsieme di $\mathbb{C}^n$ ed $f_1, \dots, f_m$ sono funzioni a valori complessi definite su U, useremo la notazione

$$N(U; f_1, \dots, f_m) = \{z \in U \mid f_1(z) = 0, \dots, f_m(z) = 0\}. \tag{2.6.1}$$

DEFINIZIONE II.6.1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$. Chiamiamo *sottoinsieme analitico di* Ω un sottoinsieme A tale che per ogni punto $z_0 \in \Omega$ esista un intorno aperto U di z_0 in Ω ed un numero finito di funzioni olomorfe $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(U)$ tali che

$$A \cap U = N(U; f_1, \dots, f_m) = \{z \in U \mid f_1(z) = 0, \dots, f_m(z) = 0\}. \tag{2.6.2}$$

Diciamo che A è *proprio* se non contiene nessuna componente connessa di Ω.

OSSERVAZIONE II.6.2. Ogni sottoinsieme analitico di Ω è chiuso in Ω.

LEMMA II.6.3. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ ed A un suo sottoinsieme analitico. Se A è proprio, non ha punti interni. Inoltre, per ogni aperto connesso U di Ω, la differenza $U \setminus A$ è ancora connessa.*

DIMOSTRAZIONE. Senza perdere in generalità, possiamo supporre nel corso della dimostrazione che Ω sia connesso. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di Ω, in cui gli U_α siano aperti connessi e, per ogni indice α, vi siano $f_1^{(\alpha)}, \dots, f_{m_\alpha}^{(\alpha)} \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ tali che

$$A \cap U_\alpha = N\big(U_\alpha; f_1^{(\alpha)}, \dots, f_{m_\alpha}^{(\alpha)}\big).$$

Se $A \cap U_\alpha$ contenesse punti interni di A, sarebbe allora $U_\alpha \subset A$ per il teorema della continuazione unica. Quindi, se un altro aperto U_β del ricoprimento $\mathcal{U}$ intersecasse un U_α di $\mathcal{U}$ contenuto in A, anche U_β sarebbe contenuto in A, perché conterrebbe punti interni di A. Ne segue che l'unione Ω' di tutti gli

U_α per cui $A \cap U_\alpha$ ha parte interna non vuota e l'unione Ω'' di tutti gli U_α per cui $A \cap U_\alpha$ non ha punti interni sono due aperti di Ω con

$$\Omega' \subset A, \quad \Omega = \Omega' \cup \Omega'', \quad \Omega' \cap \Omega'' = \emptyset.$$

Poiché abbiamo supposto che Ω sia connesso, od Ω', oppure Ω'', coincidono con Ω. Quindi A non ha punti interni se $A \neq \Omega$.

Sia ora U un aperto connesso di Ω. Siano z_0, z_1 due punti distinti di $U \setminus A$. Poiché U è connesso per archi ed $U \setminus A$ è denso in U, possiamo congiungere z_0 a z_1 mediante una spezzata di vertici

$$z_0 = w_0, w_1, \ldots, w_k = z_1$$

con la proprietà che, per ogni $j = 1, \ldots, k$, $w_j \notin A$ ed U contenga la palla chiusa $\{z \in \mathbb{C}^n \mid |z - w_{j-1}| \leq 2\,|w_{j-1} - w_j|\}$, e che questa sia contenuta in uno degli aperti U_α. Per ogni j possiamo considerare allora l'applicazione olomorfa

$$\phi_j : D = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < 2\} \ni t \to w_{j-1} + t(w_j - w_{j-1}) \in U.$$

Osserviamo che $\phi_j^{-1}(A \cap U \cap U_\alpha)$ è contenuto in

$$\left\{t \in D \cap \phi_j^{-1}(U_\alpha) \mid f_1^\alpha(\phi_j(t)) = 0, \ \ldots, f_{m_\alpha}^\alpha(\phi_j(t)) = 0\right\},$$

che è un sottoinsieme analitico proprio del disco D e quindi un sottoinsieme discreto di D. Dunque $D \setminus \phi_j^{-1}(A \cap U \cap U_\alpha)$ è connesso per archi e pertanto $\phi_j(D) \setminus A$ è un connesso per archi che contiene w_{j-1} e w_j. Possiamo perciò costruire una successione di archi $\widehat{w_{j-1} w_j}$, che congiungono w_{j-1} a w_j senza intersecare A. Il loro prodotto è un arco che congiunge z_0 a z_1 senza intersecare A. $\square$

Definizione II.6.4. Sia A un sottoinsieme analitico di un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$ e z_0 un punto di A. La *codimensione* di A nel punto z_0 è il più grande intero non negativo k per cui esiste un sottospazio complesso affine S di dimensione k di $\mathbb{C}^n$ tale che z_0 sia un punto isolato di $A \cap S$., ed ogni sottospazio affine di dimensione $(k + 1)$

Dal Lemma II.6.3 otteniamo

Corollario II.6.5. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ ed A un sottoinsieme analitico di Ω. Se A è proprio, allora ha in ogni punto codimensione positiva.* $\square$

Definizione II.6.6. Sia A un sottoinsieme analitico di un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$. Un punto $z_0 \in A$ si dice *regolare* se esiste un intorno aperto U di z_0 in Ω ed $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(U)$ tali che

$$A \cap U = N(U; f_1, \ldots, f_k), \quad \text{con} \quad \operatorname{rank}_{\mathbb{C}} \frac{\partial(f_1, \ldots, f_k)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} = k. \tag{2.6.3}$$

I punti di A che non sono regolari si dicono *singolari*.

Osservazione II.6.7. Un punto z_0 di A è cioè regolare se esiste un intorno aperto U di z_0 in $\mathbb{C}^n$ tale che $A \cap U$ sia una sottovarietà differenziabile di U.

7. I teoremi di Riemann sulle singolarità rimovibili

Teorema II.7.1 (Primo teorema di Riemann sulle singolarità rimovibili). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ ed A un sottoinsieme analitico proprio di Ω. Allora ogni funzione olomorfa f, definita su $\Omega \setminus A$ e localmente limitata* [7] *nei punti di A si prolunga in modo unico ad una funzione $\tilde{f}$, olomorfa su Ω.*

Teorema II.7.2 (Secondo teorema di Riemann sulle singolarità rimovibili). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ e sia A un sottoinsieme analitico di Ω. Se in ogni punto $z \in S$ il sottoinsieme A ha codimensione maggiore o uguale di due, allora ogni funzione f, olomorfa su $\Omega \setminus S$, si prolunga in modo unico ad una funzione $\tilde{f}$, olomorfa su Ω.*

Dimostrazione dei Teoremi II.7.1 e II.7.2. Poiché, per il Lemma II.6.3, $\Omega \setminus A$ è un aperto denso di Ω, se una $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$ ammette un prolungamento continuo ad Ω, questo è unico. È perciò sufficiente dimostrare che ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$ si prolunga ad una funzione olomorfa nell'intorno di ciascun punto $z_0 \in A$.

Fissiamo quindi $z_0 \in A$. Sia k la codimensione di A in z_0. Possiamo supporre che $z_0 = 0$ e che 0 sia un punto isolato dell'intersezione con A del k-piano complesso $\ell_k = \{z_{k+1} = 0, \dots, z_n = 0\}$. Poiché 0 è un punto isolato, possiamo trovare $0 < r < R$ tali che $\{z \in \ell_k \mid r \leq |z_j| \leq R\,, 1 \leq j \leq k\} \subset \Omega \setminus A$. Poiché A è chiuso, possiamo allora trovare $\epsilon > 0$ tale che

$$\{z \in \mathbb{C}^n \mid r \leq |z_j| \leq R \text{ per } 1 \leq j \leq k, \text{ e } |z_j| \leq \epsilon \text{ per } k < j \leq n\} \subset \Omega \setminus A.$$

Definiamo allora, per un ρ reale con $r < \rho < R$,

$$g(z) = \tfrac{1}{(2\pi i)^k} \int_{|z_1|=\rho} \cdots \int_{|z_k|=\rho} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_k, z_{k+1}, \dots, z_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

La g definisce una funzione olomorfa nel polidisco

$$D = \{|z_j| < r \text{ per } 1 \leq j \leq k,\ |z_j| < \epsilon \text{ per } k < j \leq n\}.$$

Differenziando sotto il segno d'integrale, si verifica che le ipotesi del Teorema II.7.1 nel caso $k = 1$ e quelle meno restrittive del Teorema II.7.2 nel caso $k > 1$ ci garantiscono che $g - f$ si annulla con tutte le derivate nei punti di $\{z \in \ell_k \mid 0 < |z_j| < r \text{ per } 1 \leq j \leq k\}$. Quindi $f = g$ su $D \setminus A$, perché questo è un aperto connesso per il Lemma II.6.3, e perciò g prolunga la f olomorficamente in tutti i punti del polidisco D. Ciò completa la dimostrazione. □

[7] Dire che $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$ è localmente limitata nei punti di A significa che, per ogni $z_0 \in A$, esiste un intorno aperto U di z_0 in Ω ed una costante $C > 0$ tale che

$$|f(z)| \leq C \quad \forall z \in U \setminus A.$$

CAPITOLO 3

Pseudoconvessità e plurisubarmonicità in $\mathbb{C}^n$

1. Funzioni subarmoniche in $\mathbb{C}$

Definizione III.1.1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$. Una funzione $h \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ è *armonica* in Ω se verifica l'equazione:

$$\Delta h = 4\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{3.1.1}$$

Indichiamo con $\mathcal{H}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni armoniche su Ω.

Una funzione $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ si dice *subarmonica* su Ω se:

(1) è semicontinua superiormente, cioè $\{z \in \Omega | u(z) < k\}$ è aperto per ogni $k \in \mathbb{R}$;
(2) per ogni compatto K contenuto in Ω abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} h \in \mathcal{C}^0(K) \cap \mathcal{H}(\mathrm{int}(K)), \\ \text{ed } u(z) \le h(z) \ \ \forall z \in \partial K \end{aligned}\right\} \Longrightarrow u(z) \le h(z) \ \ \forall z \in K. \tag{3.1.2}$$

Lemma III.1.2. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$.*

(*i*) *Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, allora* $\operatorname{Re} f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
(*ii*) *Se Ω è un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{C}$, allora per ogni $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ esiste, unica a meno di costante, una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che* $h = \operatorname{Re} f$.

Dimostrazione. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, allora:

$$\Delta(\operatorname{Re} f) = 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(f + \bar{f}) = 2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0.$$

Sia ora $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ e supponiamo che Ω sia semplicemente connesso. La forma differenziale:

$$\alpha = d^c h := \frac{\partial h}{\partial x}dy - \frac{\partial h}{\partial y}dx$$

è chiusa e quindi, per l'ipotesi che Ω sia semplicemente connesso, esiste una funzione $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ tale che $dg = \alpha$. Chiaramente $f = h + ig \in \mathcal{O}(\Omega)$ è una funzione olomorfa che ha parte reale uguale ad h. Dalle equazioni di Cauchy-Riemann segue che la parte immaginaria di una funzione olomorfa è determinata dalla sua parte reale, su ciascuna componente connessa del dominio di definizione, a meno di una costante. $\square$

Abbiamo:

Teorema III.1.3. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$. Allora:*

(a) *L'insieme* $\mathcal{SH}(\Omega)$ *delle funzioni subarmoniche su* Ω *è un cono, cioè:*

$$u \in \mathcal{SH}(\Omega),\ c \in \mathbb{R},\ c > 0 \Longrightarrow c\,u \in \mathcal{SH}(\Omega). \tag{3.1.3}$$

(b) *Sia* $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *una famiglia di funzioni subarmoniche. Se* $u(z) = \sup_\alpha u_\alpha(z)$ *è semicontinua superiormente e a valori in* $[-\infty, +\infty)$*, allora* u *è anch'essa subarmonica.*

(c) *Se* $\{u_n\}_{n \in \mathbb{R}}$ *è una successione decrescente di funzioni di* $\mathcal{SH}(\Omega)$*, allora* $u(z) = \inf_n u_n(z) \in \mathcal{SH}(\Omega)$.

Dimostrazione. Le affermazioni (a) e (b) sono di facile verifica. Dimostriamo (c). Se $k \in \mathbb{R}$, è $\{u(z) < k\} = \bigcup_n \{u_n(z) < k\}$ e quindi aperto perché unione di aperti. Quindi u è semicontinua superiormente. Sia ora K un compatto di Ω ed $h \in \mathcal{C}^0(K) \cap \mathcal{H}(\mathrm{int}(K))$ con $h \geq u$ su ∂K. Fissiamo $\epsilon > 0$. Allora per ogni n l'insieme $F_n = \{z \in \partial K | u_n(z) \geq h(z) + \epsilon\}$ è compatto e $\bigcap_n F_n = \emptyset$. Quindi $F_{n_0} = \emptyset$ per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$ ed otteniamo perciò $u(z) \leq u_{n_0}(z) \leq h(z) + \epsilon$ per ogni $z \in K$. Per l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$ ne segue che $u(z) \leq h(z)$ su K, e ciò dimostra che u è subarmonica. □

Abbiamo ancora:

Teorema III.1.4. *Sia* $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ *una funzione semicontinua superiormente definita su un aperto* $\Omega \subset \mathbb{C}$*. Sono allora equivalenti:*

(1) u *è subarmonica su* Ω*;*

(2) *Se* D *è un disco chiuso contenuto in* Ω *ed* $f \in \mathbb{C}[z]$ *un polinomio olomorfo con* $\mathrm{Re}\, f \geq u(z)$ *su* ∂D*, allora* $\mathrm{Re}\, f \geq u(z)$ *su* D*;*

(3) *Sia, per* $\delta > 0$, $\Omega_\delta = \{z \in \Omega \mid \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) > \delta\}$*. Allora, per ogni misura positiva* $d\mu$ *con supporto in* $[0, \delta]$*:*

$$\left(2\pi \int d\mu(r)\right) u(z) \leq \int_0^{2\pi} \int u(z + r\exp(it))dt\, d\mu(r) \quad \forall z \in \Omega_\delta \tag{3.1.4}$$

(4) *Per ogni* $\delta > 0$ *esiste una misura positiva* $d\mu$ *con supporto in* $[0, \delta]$ *diverso da* $\{0\}$ *per cui valga la* (3.1.4).

(5) *In particolare, la* $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ *è subarmonica su* Ω *se e soltanto se è semicontinua superiormente e soddisfa una delle due diseguaglianze*

$$u(z) \leq \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + r\exp(it))dt \quad \forall z \in \Omega,\ \forall 0 < r < \mathrm{dist}(z, \partial\Omega), \tag{3.1.5}$$

$$u(z) \leq \tfrac{1}{\pi r^2} \iint_{|\zeta| \leq r} u(z + \zeta)d\lambda(\zeta) \quad \forall z \in \Omega,\ \forall 0 < r < \mathrm{dist}(z, \partial\Omega), \tag{3.1.6}$$

Dimostrazione. (5) è un caso particolare di (4). Sarà quindi sufficiente dimostrare l'equivalenza di (1), (2), (3), (4).

Chiaramente (1) $\Rightarrow$ (2), (3) $\Rightarrow$ (4) e quindi sarà sufficiente dimostrare che (2) $\Rightarrow$ (3) e (4) $\Rightarrow$ (1).

(2) $\Rightarrow$ (3). Sia $z \in \Omega_\delta$, per un $\delta > 0$, sia $0 < r \leq \delta$ e sia $\phi(t) = \sum_k a_k \exp(ikt)$ un polinomio trigonometrico reale tale che $u(z + r\exp(it)) \leq$

$\phi(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Abbiamo allora, per (2):

$$u(z) \le a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(t)dt. \tag{3.1.7}$$

Se ora ϕ è una qualsiasi funzione continua, periodica di periodo 2π, con $u(z+\exp(it)) \le \phi(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, possiamo trovare, per ogni $\epsilon > 0$, un polinomio trigomometrico $\phi_\epsilon(t)$ con $\phi(t) \le \phi_\epsilon(t) \le \phi(t)+\epsilon$. Otteniamo quindi, scrivendo la (3.1.7) per ϕ_ϵ, e passando al limite per $\epsilon \searrow 0$, che:

$$\begin{gathered} u(z) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(t)dt \\ \forall \phi \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}) \text{ con } u(z+r\exp(it)) \le \phi(t)\ \forall t \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{3.1.8}$$

Per la definizione d'integrale di una funzione semicontinua superiormente, otteniamo allora che:

$$u(z) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+r\exp(it))dt \quad \forall z \in \Omega,\ \forall 0<r<\operatorname{dist}(z,\partial\Omega). \tag{3.1.9}$$

Da questa segue facilmente la (3).

(4) $\Rightarrow$ (1). Sia K un compatto di Ω e sia $h \in \mathcal{C}^0(K) \cap \mathcal{H}(\operatorname{int}(K))$ con $h \ge u$ su ∂K. Supponiamo per assurdo sia $\sup_K(u-h) = M > 0$. Poiché $u-h$ è semicontinua superiormente, $u-h = M$ su un compatto non vuoto F contenuto in $\operatorname{int}(K)$. Fissiamo un punto $z_0 \in F$ che realizzi la distanza minima δ_0 da ∂K. Fissiamo $0<\delta<\delta_0$. Allora ogni circonferenza $\{z_0 + r\exp(it) \mid t \in \mathbb{R}\}$, con $0 < r \le \delta$, contiene un arco non vuoto su cui $u-h<M$. Se $d\mu$ è una misura con le proprietà in (4), allora:

$$\begin{aligned} M &= u(z_0) - h(z_0) \\ &> \left(2\pi\int d\mu(r)\right)^{-1}\iint (u(z_0+r\exp(it)) - h(z_0+r\exp(it))dt\,d\mu(r), \end{aligned}$$

che dà:

$$u(z_0) > \left(2\pi\int d\mu(r)\right)^{-1}\iint u(z_0+r\exp(it))dt\,d\mu(r),$$

ed otteniamo così una contraddizione. La dimostrazione è completa. □

La condizione (2) del Teorema III.1.4 si può enunciare in modo equivalente mediante il

Corollario III.1.5. *Sia $u : \Omega \to [-\infty,+\infty)$ una funzione semicontinua superiormente, definita su un aperto Ω di $\mathbb{C}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché u sia subarmonica in u è che, per ogni polinomio olomorfo $f(z) \in \mathbb{C}[z]$, la funzione $v(z) = u(z) - \operatorname{Re} f(z)$ soddisfi in Ω il principio di massimo* [1].

Come conseguenza, otteniamo:

[1] Ciò significa che, se $v(z)$ ha massimo locale in un punto z_0 di Ω, allora è costante sulla componente connessa di z_0 in Ω.

Proposizione III.1.6. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$. Allora:*

(1) $u_1, u_2 \in \mathcal{SH}(\Omega) \Longrightarrow u_1 + u_2 \in \mathcal{SH}(\Omega)$. *Quindi, $\mathcal{SH}(\Omega)$ è un cono convesso.*
(2) $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ *se e soltanto se per ogni punto z di Ω ha un intorno aperto ω in Ω tale che $u|_\omega \in \mathcal{SH}(\omega)$.*
(3) *Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, allora $\log|f| \in \mathcal{SH}(\Omega)$.*
(4) *Se $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa non decrescente e si pone $\phi(-\infty) = \inf \phi$, allora $\phi(u) \in \mathcal{SH}(\Omega)$.*
(5) *Se u_1, u_2 sono non negative su Ω, e se $\log u_1, \log u_2 \in \mathcal{SH}(\Omega)$, allora anche $\log(u_1 + u_2) \in \mathcal{SH}(\Omega)$.*

Dimostrazione. (1) Se u_1 ed u_2 sono semicontinue superiormente e soddisfano la proprietà della media (3.1.5), anche $u = u_1 + u_2$ è semicontinua superiormente e soddisfa la proprietà della media (3.1.5).

(2) È facile conseguenza della caratterizzazione della subarmonicità data nel Corollario III.1.5.

(3) Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Sia D un disco chiuso contenuto in Ω e $p \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio olomorfo tale che $\log|f(z)| \leq \operatorname{Re} p(z)$ su ∂D. Allora abbiamo $|f(z)\exp(-p(z))| \leq 1$ su ∂D e, poiché $f(z)\exp(-p(z))$ è olomorfa in Ω, per il principio di massimo otteniamo che $|f(z)\exp(-p(z))| \leq 1$ su D, cioè, passando ai logaritmi, $\log|f(z)| \leq \operatorname{Re} p(z)$ su D. Quindi $\log|f(z)|$ è subarmonica in Ω per la (2) del Teorema III.1.4.

(4) Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa crescente e poniamo $\phi(-\infty) = \inf_{\mathbb{R}}\phi$. Per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$, vi è un numero reale $k_0 \geq 0$ tale che

$$\phi(t) \geq \phi(t_0) + k_0(t - t_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Otteniamo quindi, se u è subarmonica in Ω:

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(u(z + r\exp(i\theta)))d\theta \geq \phi(t_0) + \tfrac{k_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(u(z + r\exp(i\theta)) - t_0\big)d\theta$$

Se scegliamo in questa diseguaglianza $t_0 = u(z)$, il secondo addendo a secondo membro è non negativo e quindi otteniamo

$$\phi(u(z)) \leq \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(u(z + r\exp(i\theta)))d\theta \quad \forall z \in \Omega \quad \text{e} \quad 0 < r < \operatorname{dist}(z, \partial\Omega).$$

Dunque $\phi(u)$ è subarmonica per il criterio (5) del Teorema III.1.4.

Verifichiamo la (5). Sia $f \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio olomorfo e D un disco con $D \Subset \Omega$ tale che $\log(u_1(z) + u_2(z)) \leq \operatorname{Re} f(z)$ se $z \in \partial D$. Poiché $(\log u_j) - \operatorname{Re} f$ è subarmonica, anche $u_j|\exp(-f)|$ è subarmonica e quindi $u = (u_1 + u_2)|\exp(-f)|$ è subarmonica. Essendo $u \leq 1$ su ∂D, è $u \leq 1$ in D e quindi $u = \log(u_1(z) + u_2(z)) \leq \operatorname{Re} f(z)$ se $z \in D$. Ciò dimostra la (5). $\square$

Proposizione III.1.7. *Sia $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$, non identicamente uguale a $-\infty$ su nessuna componente di Ω. Allora $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e*

$$\iint_\Omega u\Delta v d\lambda \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}) \text{ con } v \geq 0 \text{ in } \Omega. \tag{3.1.10}$$

Viceversa, ogni funzione $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *che soddisfi la* (3.1.10) *è uguale, a meno di un insieme di misura nulla, ad una funzione subarmonica su* Ω*. Se* χ *è una funzione reale di una variabile reale, continua, non nulla, non negativa e con supporto compatto, allora:*

$$\tilde{u}(z) = \left(\iint \chi(|\zeta|) d\lambda \right)^{-1} \lim_{t \searrow 0} \iint u(z - t\zeta)\chi(|\zeta|) d\lambda \tag{3.1.11}$$

è subarmonica e coincide quasi ovunque con la u*.*

In particolare, una funzione reale $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ *è subarmonica se e soltanto se:*

$$\Delta u(z) \geq 0 \quad \forall z \in \Omega. \tag{3.1.12}$$

Dimostrazione. La u è misurabile, in quanto è semicontinua superiormente. Inoltre, poiché la u è limitata superiormente su tutti i compatti contenuti in Ω, esiste sempre, finito o infinito, l'integrale di u sui compatti contenuti in Ω. Sia $z \in \Omega$. Supponiamo che $u(z) > -\infty$ e sia D è un disco chiuso di raggio r con centro in z, contenuto in Ω. Se $M = \sup_D u$, abbiamo

$$u(z) - M \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_D (u(\zeta) - M) d\lambda(\zeta) = -\frac{1}{\pi r^2} \iint_D |u(\zeta) - M| d\lambda(z).$$

Quindi $(u - M) \in \mathrm{L}^1(D)$ e ne segue che anche $u \in \mathrm{L}^1(D)$. Perciò, detto E l'insieme di tutti i punti z di Ω tali che u sia assolutamente integrabile in un intorno di z, otteniamo che $u(z) = -\infty$ in un intorno di ogni punto di $\Omega \cap \complement E$. Quindi sia E che $\Omega \cap \complement E$ sono aperti. Ciò dimostra che u è localmente L^1 su tutte le componenti connesse di Ω in cui non sia identicamente uguale a $-\infty$.

Sia $v \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ una funzione reale non negativa, di classe $\mathcal{C}^\infty$, a supporto compatto in Ω, e sia u una funzione subarmonica su Ω. Dalla

$$(2\pi) u(z) \leq \int_0^{2\pi} u(z + r\exp(i\theta)) d\theta \quad \forall z \in \Omega, \ \forall 0 < r < \mathrm{dist}(z, \partial\Omega)$$

otteniamo, moltiplicando per $v(z) \geq 0$ ed integrando rispetto a z,

$$\iint_\Omega u(z) \left(\int_0^{2\pi} [v(z - r\exp(i\theta)) - v(z)] d\theta \right) d\lambda(z), \qquad \forall 0 < r < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}(v), \complement\Omega).$$

Dividendo per $\pi r^2/2$, e passando al limite per $r \to 0^+$ otteniamo la (3.1.10). Infatti, per la formula di Taylor

$$\begin{aligned} v(z - r\exp(i\theta)) = v(z) &- \frac{\partial v(z)}{\partial x} r\cos\theta - \frac{\partial v(z)}{\partial y} r\sin\theta \\ &+ \frac{r^2}{2} \left(\frac{\partial v(z)}{\partial x^2} \cos^2\theta + \frac{\partial v(z)}{\partial y^2} \sin^2\theta + 2\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z \partial y} \sin\theta\cos\theta \right) + o(r^2), \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_0^{2\pi} [v(z - r\exp(i\theta)) - v(z)]d\theta = \frac{\pi r^2}{2}\Delta v(z) + o(r^2) \quad \text{per} \quad r \to 0^+.$$

Sia ora $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ una funzione reale di classe $\mathcal{C}^2$ che soddisfa $\Delta u \geq 0$ in Ω. Sia $0 \in \Omega$. Nelle coordinate polari con centro in Ω abbiamo

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \geq 0.$$

Posto

$$M(r) = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r\exp(i\theta))d\theta,$$

otteniamo

$$M''(r) + r^{-1}M'(r) \geq 0 \quad \text{per} \quad r > 0.$$

Ne segue che $rM'(r)$ è una funzione crescente. Poiché $rM'(r) \to 0$ per $r \to 0^+$, ne segue che $rM'(r) \geq 0$ per $r > 0$. Quindi $M'(r) \geq 0$ ed $M(r)$ è anch'essa crescente. In questo modo si dimostra che u soddisfa la condizione della media e perciò è subarmonica.

Consideriamo ora una funzione reale di variabile reale χ, di classe $\mathcal{C}^\infty$, positiva e con supporto compatto in $\mathbb{R}$. Poniamo, per t reale e positivo,

$$\phi_t(z) = t^{-2}\chi(z/t)\left(\iint \chi(|\zeta|)d\lambda\right)^{-1}.$$

Se $u \in \mathrm{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$, possiamo definire, su $\Omega_t = \{z \in \Omega \mid \operatorname{dist}(z, \complement\Omega) > t\}$,

$$u_t(z) = \iint u(\zeta)\phi_t(\zeta - z)d\lambda(\zeta).$$

Allora $u_t \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_t)$ e $u_t \to u$ in $\mathrm{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$, cioè $u_t \to u$ in $\mathrm{L}^1(K)$ per ogni compatto $K \Subset \Omega$. Se u è subarmonica, per il teorema della media la $u_t(z)$ decresce a u per $t \to 0^+$, cioè

$$u(z) = \lim_{t\to 0^+} u_t(z) = \inf_{0<t<\operatorname{dist}(z,\complement\Omega)} u_t(z), \quad \forall z \in \Omega.$$

Supponiamo ora che $u \in \mathrm{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ verifichi la (3.1.10). Derivando sotto il segno d'integrale, otteniamo allora $\Delta u_t \geq 0$ su Ω_t per ogni $t \geq 0$. Poiché $u_t \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_t, \mathbb{R})$, ne segue che $u_t \in \mathcal{SH}(\Omega_t)$. Poiché u_t è subarmonica, ne segue che

$$\phi_s * u_t(z) = \iint \phi_s(z - \zeta)u_t(\zeta)d\lambda(z)$$

è una famiglia decrescente rispetto ad $s \to 0^+$. Facendo tendere t a 0 ne segue che anche $u_s = \lim_{t\to 0^+}(\phi_s * u_t)$ è decrescente per $s \to 0^+$ e quindi $\inf_s u_s$ è una funzione subarmonica in Ω, uguale ad u quasi ovunque. $\square$

Definizione III.1.8. Una funzione reale di classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ si dice *strettamente subarmonica* in un punto $z_0 \in \Omega$ se

$$\Delta u(z_0) > 0. \tag{3.1.13}$$

Abbiamo:

Proposizione III.1.9. *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{C}$. *Se* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ *è non negativa e* $\log u \in \mathcal{SH}(\Omega)$*, allora* $\log(1+u)$ *è subarmonica e strettamente subarmonica su* $\Omega \setminus \{z \in \Omega | \nabla u(z) = 0,\ \Delta u(z) = 0\}$.

Dimostrazione. Poiché $\log u$ è subarmonica, abbiamo:

$$0 \leq \Delta \log u = u^{-2} \left(u\Delta u - |\nabla u|^2 \right).$$

È poi:

$$\Delta \log(1+u) = (1+u)^{-2} \left[\Delta u + \left(u\Delta u - |\nabla u|^2 \right) \right].$$

Poiché i due addendi nella parentesi quadra sono entrambi non negativi, $\Delta \log(1+u)$ si annulla solo quando entrambi sono nulli, e questo avviene esattamente quando sia Δu che ∇u si annullano. □

2. Il principio di Phragmén-Lindelöf

I moduli delle funzioni olomorfe, e, più in generale, le funzioni subarmoniche, soddisfano il principio di massimo: i loro valori all'interno di un dominio limitato si possono stimare con i valori da esse assunti alla frontiera del dominio.

Il principio di Phragmén-Lindelöf [2] estende il principio di massimo al caso di aperti non limitati, quando ci si restringa a funzioni che in esso soddisfino assegnate condizioni di crescita. Naturalmente, questo *principio* si articola in enunciati differenti nelle diverse situazioni che si possono considerare. Questi si applicano a diverse situazioni, dallo studio asintotico del comportamento al bordo di funzioni olomorfe, allo studio dei funzionali analitici e delle distribuzioni, alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali. Vale il seguente

Teorema III.2.1 (Phragmén-Lindelöf). *Sia* Ω *un angolo in* $\mathbb{C}$*, con vertice nell'origine:*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \alpha < \operatorname{Arg}(z) < \beta\} \tag{3.2.1}$$

con $-\pi \leq \alpha < \beta \leq \pi$. *Sia* $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ *una funzione subarmonica su* Ω *e semicontinua superiormente sulla sua chiusura* $\bar{\Omega}$. *Se*

$$\begin{cases} u(z) \leq 0 & \textit{per ogni } z \in \partial\Omega, \\ u(z) \leq C|z|^\delta & \textit{per ogni } z \in \Omega, \textit{ per un'opportuna costante } C > 0 \\ & \textit{e un numero reale } \delta \textit{ con } 0 \leq \delta < \pi/(\beta - \alpha), \end{cases} \tag{3.2.2}$$

allora

$$u(z) \leq 0 \quad \forall z \in \Omega. \tag{3.2.3}$$

[2]E.Phragmén, E.Lindelöf: *Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monognes dans le voisinage d'un point singulier.* Acta Math. **31** (1908), no. 1, 381-406

Dimostrazione. Possiamo supporre che, per un γ con $0 < \gamma < \pi$, sia $\alpha = -\gamma$ e $\beta = \gamma$, in modo che Ω sia simmetrico rispetto all'asse reale. La condizione in (3.2.2) ci dice che $\gamma\delta < \pi/2$. Fissiamo un numero reale positivo $\kappa > \delta$ per cui sia ancora $\gamma\kappa < \pi/2$. Poiché il dominio Ω non contiene punti del semiasse reale negativo, possiamo definire su Ω la funzione olomorfa $z^\kappa = \exp(\kappa \log(z))$, scegliendo la determinazione del logaritmo per cui $\log(z) \in \mathbb{R}$ se z è reale positivo. In particolare $\operatorname{Re} z^\kappa = r^\kappa \cos(\kappa\theta)$ (con $r = |z|$, $\theta \in \mathbb{R}$, $|\theta| \leq \gamma$ e $z = r\exp(i\theta)$) è una funzione armonica in Ω e quindi, per ogni numero reale $\epsilon > 0$, la funzione

$$v_\epsilon(z) = u(z) - \epsilon \operatorname{Re} z^\kappa$$

è una funzione subarmonica su Ω e semicontinua superiormente su $\bar{\Omega}$. È per ipotesi $\gamma\kappa < \pi/2$ e quindi

$$\operatorname{Re} z^\kappa = r^\kappa \cos(\kappa\theta) \quad \text{se } z = re^{i\theta} \in \Omega,\ (r > 0,\ |\theta| \leq \gamma).$$

Osserviamo ancora che $\cos(\kappa\gamma) > 0$ ed abbiamo

$$\operatorname{Re} z^\kappa \geq \cos(\kappa\gamma)|z|^\kappa \quad \text{in } \Omega.$$

Poiché $\delta < \kappa$, risulta $C\,R^\delta < \epsilon \cos(\kappa\gamma) R^\kappa$ se R è sufficientemente grande $(R > (C/(\epsilon\cos(\kappa\gamma)))^{1/(\kappa-\delta)})$. Quindi $v_\epsilon \leq 0$ sulla frontiera del dominio limitato $\{z \in \Omega \mid |z| < R\}$, se $R \gg 1$ e dunque, per il principio di massimo anche all'interno di tale dominio. Otteniamo così che $v_\epsilon \leq 0$ in Ω per ogni $\epsilon > 0$, da cui si ha la (3.2.3) passando al limite per $\epsilon \to 0^+$. □

Corollario III.2.2. *Sia Ω l'angolo definito dalla* (3.2.1) *e sia $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$. Se esistono costanti positive A, C, M e δ, con $0 \leq \delta < \pi/(\beta - \alpha)$ tali che*

$$\begin{cases} |f(z)| \leq M & \forall z \in \partial\Omega, \\ |f(z)| \leq C\exp(A|z|^\delta) & \forall z \in \Omega, \end{cases} \tag{3.2.4}$$

allora

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \Omega. \tag{3.2.5}$$

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema III.2.1 alla funzione plurisubarmonica $u(z) = \log|f(z)| - \log M$. □

Utilizzando il Teorema III.2.1 possiamo ancora dimostrare il principio di Phragmén-Lindelöf per funzioni subarmoniche con crescenza lineare su $\mathbb{C}$ e per funzioni intere di tipo esponenziale:

Teorema III.2.3. (1) *Se $u \in \mathcal{SH}(\mathbb{C})$ soddisfa*

$$\begin{cases} u(z) \leq A|z| & \forall z \in \mathbb{C}, \quad \textit{con } A \textit{ costante reale positiva,} \\ u(x) \leq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.2.6}$$

allora

$$u(z) \leq A|\operatorname{Im} z| \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{3.2.7}$$

(2) *Se* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ *soddisfa*

$$\begin{cases} |f(z)| \leq C\exp(A|z|) & \forall z \in \mathbb{C} \quad \textit{con } C, A \textit{ costanti positive}, \\ |f(x)| \leq M & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \textit{per una costante positiva } M, \end{cases} \tag{3.2.8}$$

allora

$$|f(z)| \leq M\exp(A|\mathrm{Im}\, z|) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{3.2.9}$$

Dimostrazione. (1) È sufficiente applicare il Teorema III.2.1 alla funzione $u(z) - A|y|$ ($z = x = iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$) nei quadranti $\{x > 0, y > 0\}$, $\{x > 0, y < 0\}$, $\{x < 0, y > 0\}$, $\{x < 0, y < 0\}$.

(2) Si applica (1) a $u(z) = \log|f(z)| - \log M$. □

Consideriamo poi il caso di una mezza striscia:

Teorema III.2.4 (Lindelöf). *Sia* Ω *la mezza striscia*

$$\Omega = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ a < x < b,\ y > c\} \tag{3.2.10}$$

ove $a < b$ *e* c *sono numeri reali. Sia* u *subarmonica su* Ω *e semicontinua superiormente sulla chiusura* $\bar{\Omega}$ *e supponiamo che, per due numeri reali* A, B, *con* $0 \leq A(b-a) < \pi$ *e* $B \geq 0$, *risulti*

$$\begin{cases} u(z) \leq 0, \quad \forall z \in \partial\Omega, \\ u(z) \leq B + \exp(A|z|),\ \forall z \in \Omega. \end{cases} \tag{3.2.11}$$

Allora

$$u(z) \leq 0 \quad \forall z \in \Omega. \tag{3.2.12}$$

Dimostrazione. Mediante una traslazione, possiamo per semplicità ricondurci al caso in cui $c = 0$ e $b = -a > 0$. Fissiamo un numero reale $A' > A$, per cui sia ancora $2A'b < \pi$. Per ogni $\epsilon > 0$, la funzione

$$v_\epsilon(z) = u(z) - \epsilon \mathrm{Re}(\exp(-iA'z))$$

è subarmonica su Ω e semicontinua superiormente su $\bar{\Omega}$. Su $\bar{\Omega}$ abbiamo

$$\mathrm{Re}(\exp(-iA'z)) = \exp(A'y)\cos(A'x) \geq \exp(A'y)\cos(A'b) \quad \text{su} \quad \bar{\Omega}.$$

Poiché $A' > A$, abbiamo perciò

$$B + \exp(A|z|) \leq B + \exp(Ab)\exp(Ay) < \epsilon \mathrm{Re}(\exp(A'z)) \qquad \text{se} \quad z = x + iy \in \bar{\Omega} \text{ e } y \gg 1.$$

Quindi v_ϵ è ≤ 0 sulla frontiera dei rettangoli $\{|x| < b,\ 0 < y < C\}$ per $C \gg 1$ e quindi, per il principio di massimo, è ≤ 0 sulla mezza striscia Ω. Facendo tendere ϵ a 0, otteniamo la tesi. □

Corollario III.2.5 (Lindelöf). *Sia f una funzione olomorfa sulla mezza striscia* (3.2.15) *e continua sulla sua chiusura. Supponiamo vi siano costanti positive A, B, M tali che $A(b-a) < \pi$ ed f soddisfi*

$$\begin{cases} |f(z)| \leq M & \forall z \in \partial\Omega, \\ |f(z)| \leq B \exp\left(e^{|z|^A}\right) & \forall z \in \Omega. \end{cases} \tag{3.2.13}$$

Allora f soddisfa anche

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \Omega. \tag{3.2.14}$$

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema III.2.4 alla funzione subarmonica $u(z) = \log|f(z)| - \log M$. $\square$

Valgono risultati analoghi per funzioni subarmoniche e per funzioni olomorfe definite su tutta la striscia. Abbiamo

Teorema III.2.6. (1) *Sia Ω la striscia*

$$\Omega = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ a < x < b\} \tag{3.2.15}$$

ove $a < b$ sono numeri reali. Sia u subarmonica su Ω e semicontinua superiormente sulla chiusura $\bar{\Omega}$ e supponiamo che, per due numeri reali A, B, con $0 \leq A(b-a) < \pi$ e $B \geq 0$, risulti

$$\begin{cases} u(z) \leq 0, \quad \forall z \in \partial\Omega, \\ u(z) \leq B + \exp(A|z|),\ \forall z \in \Omega. \end{cases} \tag{3.2.16}$$

Allora

$$u(z) \leq 0 \quad \forall z \in \Omega. \tag{3.2.17}$$

(2) *Sia f una funzione olomorfa sulla striscia* (3.2.15) *e continua sulla sua chiusura. Supponiamo vi siano costanti positive A, B, M tali che $A(b-a) < \pi$ ed f soddisfi*

$$\begin{cases} |f(z)| \leq M & \forall z \in \partial\Omega, \\ |f(z)| \leq B \exp\left(e^{|z|^A}\right) & \forall z \in \Omega. \end{cases} \tag{3.2.18}$$

Allora f soddisfa anche

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \Omega. \tag{3.2.19}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella fatta nel caso della mezza striscia. Basterà considerare, dopo essersi ricondotti al caso della striscia simmetrica rispetto all'origine e contenente l'asse immaginario, invece delle funzioni esponenziali $\exp(-iA'z)$, utilizzate nella dimostrazione del Teorema III.2.4, le funzioni $\cos(A'z)$. $\square$

3. Funzioni plurisubarmoniche su aperti di $\mathbb{C}^n$

Definizione III.3.1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$. Una funzione $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ si dice *pluriarmonica* in Ω se soddisfa:

$$\partial\bar{\partial}u = 0\,, \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = 0 \quad \forall 1 \leq h, k \leq n. \tag{3.3.1}$$

Osserviamo che, se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, allora:

$$\begin{cases} \bar{\partial}u = \dfrac{1}{2}du - \dfrac{i}{2}d^c u \\ \partial u = \dfrac{1}{2}du + \dfrac{i}{2}d^c u \\ \text{con} \quad d^c u = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} dy_j - \frac{\partial u}{\partial y_j} dx_j \right). \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Quindi $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ è pluriarmonica se e soltanto se:

$$dd^c u = 0\,. \tag{3.3.3}$$

Otteniamo quindi:

Proposizione III.3.2. *Sia Ω è un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{C}^n$. Allora $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ è pluriarmonica se e soltanto se $u = \operatorname{Re} f$ per una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se Ω è connesso, allora la f è determinata dalla u a meno di una costante additiva puramente immaginaria.*

Dimostrazione. Data $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ pluriarmonica, cerchiamo $v \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ tale che $u + iv = f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Deve risultare:

$$0 = \bar{\partial}(u + iv) = \frac{1}{2}\left(du + id^c u + idv - d^c v\right),$$

ed in particolare

$$dv = -d^c u \tag{3.3.4}$$

Poiché u è pluriarmonica, $d(d^c u) = 0$. Quindi $d^c u$ è una 1-forma chiusa, e, per l'ipotesi che Ω sia semplicemente connesso, essa è anche esatta. Riuslta cioè determinata una soluzione $v \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ di $dv = d^c u$, unica a meno di una costante additiva su ciascuna delle componenti connesse di Ω. D'altra parte, la (3.3.4) ci dà:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial v}{\partial y_j} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_j} = \dfrac{\partial v}{\partial x_j} \\ 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

La $f = u + iv$ soddisfa dunque le equazioni di Cauchy-Riemann, ed è perciò olomorfa in Ω. $\square$

Corollario III.3.3. *Le funzioni pluriarmoniche sono analitiche reali in tutti i punti del loro aperto di definizione.* □

Definizione III.3.4. Una funzione $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$, definita su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ si dice *plurisubarmonica* se:

(1) è semicontinua superiormente, cioè $\{z \in \Omega | u(z) < c\}$ è aperto per ogni $c \in \mathbb{R}$;
(2) Per ogni $z \in \Omega$ e $w \in \mathbb{C}^n$, la funzione $\tau \to u(z + \tau w)$ è subarmonica su $\{\tau \in \mathbb{C} | z + \tau w \in \Omega\}$.

Indicheremo con $\mathcal{P}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni plurisubarmoniche su Ω.

Esempio III.3.5. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, ed α un numero reale positivo. Allora $|f|^\alpha$, $\log |f|$, $\log(1 + |f|^\alpha)$ sono plurisubarmoniche su Ω.

Abbiamo, analogamente al caso delle funzioni subarmoniche di una variabile complessa:

Teorema III.3.6. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$.*

(a) *L'insieme $\mathcal{P}(\Omega)$ delle funzioni pluirsubarmoniche su Ω è un cono convesso, cioè:*

$$u \in \mathcal{P}(\Omega),\ c \in \mathbb{R},\ c > 0 \Longrightarrow c\,u \in \mathcal{P}(\Omega), \tag{3.3.5}$$

$$u_1, u_2 \in \mathcal{P}(\Omega) \Longrightarrow u_1 + u_2 \in \mathcal{P}(\Omega). \tag{3.3.6}$$

(b) *Sia $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di funzioni plurisubarmoniche su Ω. Se $u(z) = \sup_\alpha u_\alpha(z)$ è semicontinua superiormente e a valori in $[-\infty, +\infty)$, allora u è anch'essa plurisubarmonica su Ω.*
(c) *Se $\{u_n\}_{n \in \mathbb{R}}$ è una successione decrescente di funzioni di $\mathcal{P}(\Omega)$, allora $u(z) = \inf_n u_n(z) \in \mathcal{P}(\Omega)$.*

Definizione III.3.7. Se $\phi \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, chiamiamo *Hessiano complesso* di ϕ nel punto $z^0 \in \Omega$ la forma Hermitiana simmetrica

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi(z^0)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} w_i \bar{w}_j, \qquad w \in \mathbb{C}^n. \tag{3.3.7}$$

Teorema III.3.8. *Una funzione $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ è plurisubarmonica in Ω se e soltanto se il suo Hessiano complesso è semidefinito positivo in ogni punto di Ω.*

Dimostrazione. Il Teorema è conseguenza della Proposizione III.1.7, applicata alle funzioni $\tau \to u(z + \tau w)$, per $z \in \Omega$ e $w \in \mathbb{C}^n$. □

Teorema III.3.9. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{C}^n$ ed $u \in \mathcal{P}(\Omega)$ una funzione plurisubarmonica $\not\equiv -\infty$. Allora $u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

Sia $\phi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ tale che:

(1) *$\phi(z_1, \ldots, z_n) = \phi(e^{it_1} z_1, \ldots, e^{it_n} z_n)$ per ogni $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ed ogni $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$;*
(2) *$\mathrm{supp}(\phi) \subset \{|z| \leq 1\}$;*

(3) $\int \phi(z) d\lambda(z) = 1$ *(dove $d\lambda(z)$ è la misura di Lebesgue in $\mathbb{C}^n$).*

Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ ed $u \in \mathcal{P}(\Omega)$ una funzione plurisubarmonica non identicamente uguale a $-\infty$ su nessun sottoinsieme aperto di Ω. Allora, per ogni numero reale $\epsilon > 0$, la funzione:

$$u_\epsilon(z) = \int u(z - \epsilon\zeta)\phi(\zeta) d\lambda(\zeta) = \epsilon^{2n} \int u(\zeta)\phi\left(\tfrac{z-\zeta}{\epsilon}\right) d\lambda(\zeta) \tag{3.3.8}$$

è definita, di classe $\mathcal{C}^\infty$, e plurisubarmonica su $\{z \in \mathbb{C}^n | \operatorname{dist}(z, \complement\Omega) > \epsilon\}$. Inoltre,

$$u_\epsilon \searrow u \quad per \quad \epsilon \searrow 0. \tag{3.3.9}$$

Dimostrazione. La (3.3.9) è stata già dimostrata nel caso $n = 1$ (Proposizione III.1.7). Otteniamo allora il caso generale per iterazione. Il fatto che le u_ϵ siano plurisubarmoniche è ancora conseguenza del caso $n = 1$. □

Teorema III.3.10. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$, Ω' un aperto di $\mathbb{C}^{n'}$, $u \in \mathcal{P}(\Omega')$ ed $f \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega')$. Allora $f^*u = u \circ f \in \mathcal{P}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Possiamo ricondurci al caso in cui u sia di classe $\mathcal{C}^2$, utilizzando il Teorema III.3.9. Basta allora osservare che l'Hessiano complesso di f^*u è:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{h,k=1}^{n'} \frac{\partial^2 u(f(z))}{\partial z'_h \partial \bar{z}'_k} \frac{\partial f^h(z)}{\partial z_i} \overline{\frac{\partial f^h(z)}{\partial z_j}} w_i \bar{w}_j, \tag{3.3.10}$$

e quindi la tesi segue dal Teorema III.3.8. □

Teorema III.3.11. *Sia $\delta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua, con $\delta(z) > 0$ se $z \neq 0$ e $\delta(\lambda z) = |\lambda|\, \delta(z)$ se $z \in \mathbb{C}^n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$, con $\Omega \neq \mathbb{C}^n$, e $z \to \delta(z, \complement\Omega)$ la corrispondente δ-pseudodistanza dal bordo. Se Ω è un aperto di olomorfia, allora:*

$$\Omega \ni z \to -\log \delta(z, \complement\Omega) \in \mathbb{R} \tag{3.3.11}$$

è continua e plurisubarmonica.

Dimostrazione. La (3.3.11) è continua perché $z \to \delta(z, \complement\Omega)$ è continua e a valori positivi.

Per verificare che la (3.3.11) è plurisubarmonica, utilizziamo il criterio (2) del Teorema III.1.4. Siano $z_0 \in \Omega$, $w \in \mathbb{C}^n$ e sia $r > 0$ tale che

$$D = \{z_0 + \tau w \mid \tau \in \mathbb{C},\ |\tau| \leq r\} \subset \Omega.$$

Sia $f \in \mathbb{C}[\tau]$ un polinomio analitico tale che:

$$-\log \delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega) \leq \operatorname{Re} f(\tau), \quad \text{per } |\tau| = r.$$

Fissiamo un polinomio analitico $F \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ tale che $f(\tau) = F(z_0 + \tau w)$ per $\tau \in \mathbb{C}$. Allora:

$$\left| e^{-F(z)} \right| \leq \delta(z, \complement\Omega) \quad \forall z \in \partial D = \{z_0 + \tau w \mid |\tau| = r\}.$$

Per il principio di massimo, $\widehat{\partial D_\Omega} \supset D$. Quindi, per la (2.3.13), risulta:

$$\left| e^{-F(z)} \right| \leq \delta(z, \complement\Omega) \quad \forall z \in D = \{z_0 + \tau w \mid |\tau| \leq r\}.$$

Ciò dimostra che $\tau \to -\log \delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega)$ è subarmonica sul suo dominio di definizione. La dimostrazione è completa. $\square$

4. Pseudoconvessità in $\mathbb{C}^n$

Definizione III.4.1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$. Se K è un compatto contenuto in Ω, il suo Ω-*inviluppo pseudoconvesso* è l'insieme:

$$\hat{K}_{\mathcal{P}(\Omega)} = \left\{ z \in \Omega \;\middle|\; u(z) \leq \sup\nolimits_{\zeta \in K} u(\zeta) \ \forall u \in \mathcal{P}(\Omega) \right\} . \tag{3.4.1}$$

Poiché, per ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, la funzione $\log |f(z)|$ è plurisubarmonica in Ω, abbiamo

$$\hat{K}_{\mathcal{P}(\Omega)} \subset \hat{K}_\Omega \quad \text{per ogni compatto } K \Subset \Omega. \tag{3.4.2}$$

Teorema III.4.2. *Sia $\Omega \neq \mathbb{C}^n$ un aperto di $\mathbb{C}^n$ e sia $\delta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua che soddisfi* (2.3.8)*, cioè $\delta(z) > 0$ se $z \neq 0$ e $\delta(\lambda z) = |\lambda|\, \delta(z)$ se $z \in \mathbb{C}^n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Sono allora equivalenti:*

(1) *$\Omega \ni z \to -\log \delta(z, \complement\Omega) \in \mathbb{R}$ è plurisubarmonica in Ω;*

(2) *esiste una $u \in \mathcal{P}(\Omega)$ tale che:*

$$\{z \in \Omega \mid u(z) < c\} \Subset \Omega \quad \forall c \in \mathbb{R}; \tag{3.4.3}$$

(3) *$\hat{K}_{\mathcal{P}(\Omega)} \Subset \Omega$ per ogni compatto $K \Subset \Omega$.*

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). Se vale la (1), allora la $u(z) = |z|^2 - \log \delta(z, \complement\Omega)$ è plurisubarmonica in Ω e soddisfa la (3.4.3).

(2) $\Rightarrow$ (3) è ovvia. Resta da dimostrare che (3) $\Rightarrow$ (1). Fissiamo $z_0 \in \Omega$ e $w \in \mathbb{C}^n$, $r > 0$, in modo che $D = \{z_0 + \tau w | \tau \in \mathbb{C},\ |\tau| \leq r\} \subset \Omega$ e sia $f \in \mathbb{C}[\tau]$ un polinomio analitico tale che:

$$-\log \delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega) \leq \operatorname{Re} f(\tau) \quad \forall |\tau| = r, \text{ cioè} \tag{3.4.4}$$

$$\delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega) \geq \left| e^{-f(\tau)} \right|, \quad \forall |\tau| = r. \tag{3.4.5}$$

Sia $a \in \mathbb{C}^n$ un qualsiasi vettore con $\delta(a) < 1$ e consideriamo, per ogni numero reale t con $0 \leq t \leq 1$, l'applicazione:

$$\tau \to z_0 + \tau w + t\, a\, e^{-f(\tau)} \quad \text{per } |\tau| \leq r. \tag{3.4.6}$$

La sua immagine è il *disco analitico* D_t. Chiaramente $D_0 = D$. Indichiamo con Λ l'insieme dei $t \in [0, 1]$ per cui $D_t \subset \Omega$. Chiaramente Λ è aperto, e quindi per dimostrare che $\Lambda = [0, 1]$ basterà verificare che Λ è anche chiuso. Per la (3.4.5),

$$K = \left\{ z_0 + \tau w + t\, a\, e^{-f(\tau)} \;\middle|\; t \in [0, 1],\ |\tau| = r \right\} \subset \Omega. \tag{3.4.7}$$

Se $u \in \mathcal{P}(\Omega)$, e $t \in \Lambda$, allora la $\tau \to u\big(z_0 + \tau w + t\, a\, e^{-f(\tau)}\big)$ è subarmonica in un intorno del disco $|\tau| \leq r$, e quindi vale la $u(z_0 + \tau w + t\, a\, e^{-f(\tau)}) \leq$

$\sup_{z\in K} u(z)$. Questo dimostra che $D_t \subset \hat{K}_{\mathcal{P}(\Omega)}$ per ogni $t \in \Lambda$. Perciò $D_t \subset \hat{K}_{\mathcal{P}(\Omega)}$ se e soltanto se $t \in \Lambda$, e questo implica che Λ è chiuso, perché per la (3) $\hat{K}_{\mathcal{P}(\Omega)}$ è compatto. Dunque $D_1 \subset \Omega$ e perciò:

$$z_0 + \tau w + \, t\, a\, e^{-f(\tau)} \in \Omega \quad \forall |\tau| \leq r, \ \forall \delta(a) < 1. \tag{3.4.8}$$

Questo significa che $\delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega) \geq \left|e^{-f(\tau)}\right|$ se $|\tau| \leq r$, cioè:

$$-\log \delta(z_0 + \tau w, \complement\Omega) \leq \operatorname{Re} f(\tau) \quad \forall |\tau| \leq r.$$

Ciò completa la dimostrazione di (1). □

Definizione III.4.3. Un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$ che o sia uguale a $\mathbb{C}^n$, o soddisfi le condizioni equivalenti (1), (2), (3) del Teorema III.4.2, si dice *pseudoconvesso*.

Il Teorema III.3.11 si può quindi enunciare nel modo seguente

Teorema III.4.4. *Ogni aperto di olomorfia di $\mathbb{C}^n$ è pseudoconvesso.*

È vero anche il viceversa: la validità dell'implicazione inversa è il *problema di Levi*, che ha costituito una delle questioni fondamentali dell'analisi complessa nella prima metà del XX secolo[3].

Abbiamo:

Teorema III.4.5. *Se $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di aperti pseudoconvessi di $\mathbb{C}^n$, allora la parte interna Ω della loro intersezione $\bigcap_{i\in I} \Omega_i$ è pseudoconvessa.*

Dimostrazione. Possiamo supporre, nella dimostrazione, che $\Omega_i \neq \mathbb{C}^n$ per ogni $i \in I$. Sia δ una funzione che soddisfi (2.3.8). Allora, per ogni $i \in I$, la funzione $\Omega \ni z \to -\log \delta(z, \complement\Omega_i)$ è continua e plurisubarmonica per ogni i. Ne segue che anche la funzione continua $\Omega \ni z \to -\log \delta(z, \complement\Omega)$ è plurisubarmonica, in quanto:

$$-\log \delta(z, \complement\Omega) = \sup_{i\in I} \left(-\log \delta(z, \complement\Omega_i)\right) \quad \forall z \in \Omega.$$ □

La pseudoconvessità, per un aperto di $\mathbb{C}^n$, è una proprietà locale della sua frontiera. Vale infatti il

Teorema III.4.6. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$. Se per ogni punto $z_0 \in \partial\Omega$ esiste un intorno aperto ω di z_0 tale che l'aperto $\Omega \cap \omega$ sia pseudoconvesso, allora Ω è pseudoconvesso.*

Dimostrazione. Sia δ una funzione che soddisfi (2.3.8). Per ipotesi, ogni punto $z_0 \in \partial\Omega$ ammette un intorno ω per cui $z \to -\log \delta(z, \complement(\Omega \cap \omega))$ sia plurisubarmonica su $\Omega \cap \omega$. Poiché, per un intorno $\omega' \subset \omega$ di z_0, è $\delta(z, \complement(\Omega \cap \omega)) = \delta(z, \complement\Omega)$ in $\omega' \cap \Omega$, otteniamo che la funzione $z \to -\log \delta(z, \complement\Omega)$ è plurisubarmonica sull'intersezione $\Omega \cap \omega'$. Esiste perciò un

[3] La soluzione del problema di Levi per domini di $\mathbb{C}^n$ fu data nell'articolo: Kiyoshi Oka: *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX. Domaines finis sans point critique intrieur.* Jap. J. Math. **23** (1953), 97–155 (1954).

chiuso F di $\mathbb{C}^n$, contenuto in Ω, tale che $z \to -\log \delta(z, \complement\Omega)$ sia plurisubarmonica su $\Omega \cap \complement F$.

Sia $\phi \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ tale che $\phi(z) > -\log \delta(z, \complement\Omega)$ per $z \in F$, tale che $\phi(z) \to +\infty$ per $|z| \to +\infty$.

Allora $\max\{\phi, -\log \delta(z, \complement\Omega)\}$ soddisfa (3.4.3) e quindi Ω è pseudcoconvesso per il Teorema III.4.2. $\square$

Osservazione III.4.7. Se Ω è relativamente compatto, è sufficiente scegliere $\phi(z) = c \exp(|z|^2)$ con $c \gg 1$.

In generale, la costruzione della ϕ si può fare in questo modo. Fissiamo innanzi tutto un punto $z_0 \in F$. A meno di una traslazione, possiamo supporre sia $z_0 = 0$. Definiamo allora una funzione $h : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ponendo $h(t) = \max(1 + t^2, \max\{1 - \log \delta(z, \complement\Omega) \mid z \in F, \ |z| \leq t\})$. Basterà quindi trovare una funzione convessa crescente $\tilde{h} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ con $\tilde{h} \geq h$ e porre $\phi(z) = \tilde{h}(|z|)$.

Costruiamo la $\tilde{h}$. Siano $m_i = \sup_{0 \leq t \leq i+1} h(t)$. Allora:

$$\psi(t) = m_i + t(m_{i+1} - m_i) \quad \text{per} \quad i \leq t \leq i+1, \ i = 0, 1, \dots$$

è una funzione crescente e lineare a tratti con $\psi(t) \geq h(t)$ su $[0, +\infty)$. Poniamo ora $M_h = \sup_{0 \leq i < h}(m_{h+1} - m_h)$ e definiamo:

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} m_0 + tM_0 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ m_0 + \sum_{h=0}^{i-1} M_h + M_i(t - i) & \text{se } i \leq t \leq i+1\,, \ i \geq 1. \end{cases}$$

Chiaramente $\tilde{h}$ è convessa crescente e $\tilde{h} \geq \psi \geq h$ su $[0, +\infty)$.

Vale il seguente:

Teorema III.4.8. *Sia Ω un aperto pseudoconvesso di $\mathbb{C}^n$, K un compatto di Ω ed ω un intorno aperto di $\hat{K}_{\mathcal{P}(\Omega)}$, relativamente compatto in Ω. Possiamo allora trovare una funzione $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ con le proprietà:*

(1) *la u è strettamente plurisubarmomica in Ω, cioè l'Hessiano complesso di u è definito positivo in ogni punto di Ω;*
(2) *$u < 0$ su K e $u > 0$ su $\Omega \cap \complement\omega$;*
(3) *$\{z \in \Omega | u(z) \leq c\}$ è compatto per ogni $c \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Per la (1) del Teorema III.4.2, possiamo trovare una funzione plurisubarmonica $u_0 \in \mathcal{P}(\Omega)$, che sia continua in Ω e che soddisfi la (2) del Teorema III.4.2. Poiché la u_0 è limitata sul compatto K, a meno di sottrarre da essa un numero reale sufficientemente grande, possiamo fare in modo che $u_0 < 0$ su K. Poniamo

$$K' = \{z \in \Omega \mid u_0(z) \leq 2\} \quad \text{ed} \quad L = \{z \in \Omega \cap \complement\omega \mid u_0(z) \leq 0\}. \tag{3.4.9}$$

Questi due insiemi sono entrambi compatti ed $L \subset K'$. Poiché i punti di L appartengono al complementare in Ω di $\hat{K}_{\mathcal{P}(\Omega)}$, per ogni punto $z \in L$ esiste una funzione $w \in \mathcal{P}(\Omega)$ che sia minore di 0 su K, e strettamente positiva in z. Possiamo inoltre, regolarizzando la w per mezzo della convoluzione, ottenere una nuova funzione w', plurisubarmonica in un intorno di K', e che ancora soddisfi le condizioni di essere < 0 su K e > 0 in un intorno di z. Poiché L è compatto, definendo u_1 come l'estremo superiore di un numero finito di tali funzioni w', otteniamo una nuova funzione plurisubarmonica u_1, definita su un intorno aperto di K', con $u_1 < 0$ su K ed $u_1 > 0$ in un intorno di L. Sia C il massimo di u_1 su K' e definiamo:

$$v(z) = \begin{cases} \max\{u_1(z), Cu_0(z)\} & \text{se } z \in \Omega,\ u_0(z) < 2 \\ Cu_0(z) & \text{se } z \in \Omega,\ u_0(z) > 1\,. \end{cases} \tag{3.4.10}$$

Abbiamo ottenuto in questo modo una funzione plurisubarmonica su Ω, che soddisfa le (2) e (3). Definiamo a questo punto:

$$\Omega_t = \{z \in \Omega | v(z) < t\} \quad \text{per} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.4.11}$$

Sia ϕ come nel Teorema III.3.9 e poniamo:

$$v_j(z) = \epsilon_j|z|^2 + \int_{\Omega_{j+1}} \epsilon_j^{-2n}\, v(\zeta)\phi([z-\zeta]/\epsilon_j)d\lambda(\zeta). \tag{3.4.12}$$

Scegliendo $\epsilon_j > 0$ sufficientemente piccolo, otteniamo una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$, che è $> v$ e strettamente plurisubarmonica in un intorno di $\bar{\Omega}_j$. Possiamo inoltre, sempre scegliendo gli ϵ_j sufficientemente piccoli, ottenere che $v_0 < 0$ e $v_1 < 0$ su K e $v_j < v + 1$ su $\bar{\Omega}_j$ per $j = 1, 2, \dots$. Sia ora $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ una funzione reale convessa con $\chi(t) = 0$ se $t < 0$ e $\chi'(t) > 0$ per $t > 0$. Allora $\chi(v_j + 1 - j)$ è strettamente plurisubarmonica in un intorno di $\bar{\Omega}_j \setminus \Omega_{j-1}$. Possiamo allora scegliere numeri reali positivi $\{a_j\}_{j \geq 1}$ in modo che:

$$u_m(z) = v_0(z) + \sum_{j=1}^{m} a_j \chi(v_j + 1 - j) \tag{3.4.13}$$

sia $> v$ e strettamente plurisubarmonica in un intorno di $\bar{\Omega}_m$. Poiché $u_m = u_{m'}$ su Ω_j se $m, m' > j$, il limite $u(z) = \lim_{m\to\infty} u_m(z)$ esiste e definisce una funzione plurisubarmonica di classe $\mathcal{C}^\infty$ su Ω. Poiché $u = v_0 < 0$ su K e $u > v$ in Ω, la u così trovata soddisfa tutte le proprietà (1), (2), (3). $\square$

Corollario III.4.9. *Sia Ω un aperto pseudoconvesso di $\mathbb{C}^n$ e K un compatto di Ω. Abbiamo:*

$$\hat{K}_{\mathcal{P}(\Omega)} = \{z \in \Omega \,|\, u(z) \leq \sup\nolimits_{\zeta \in K} u(\zeta) \quad \forall u \in \mathcal{P}(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)\} \tag{3.4.14}$$

e quindi $\hat{K}_{\mathcal{P}(\Omega)}$ è compatto in Ω. $\square$

Teorema III.4.10. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$, con frontiera di classe $\mathcal{C}^2$. Supponiamo sia $\Omega = \{z \mid \rho(z) < 0\}$ per una funzione reale ρ, di classe $\mathcal{C}^2$, definita in un intorno di $\bar{\Omega}$ in $\mathbb{C}^n$, e con $d\rho(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial\Omega$. Allora Ω è pseudoconvesso se e soltanto se:*

$$\sum\nolimits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} w_i \bar{w}_j \geq 0 \quad \textit{se} \quad z \in \partial\Omega \quad \textit{e} \quad \sum\nolimits_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z_i} w_i = 0. \tag{3.4.15}$$

Dimostrazione. Osserviamo che, se ρ_1 è un'altra funzione reale di classe $\mathcal{C}^2$, definita in un intorno aperto U di $\partial\Omega$ in $\mathbb{C}^n$, con $d\rho_1(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial\Omega$ e $\rho_1 < 0$ su $U \cap \Omega$, $\rho_1 > 0$ su $U \cap \complement\bar{\Omega}$, allora $\rho_1 = h\rho$, per una funzione positiva e di classe $\mathcal{C}^2$ in un intorno di $\partial\Omega$. Un semplice calcolo mostra che la (3.4.15) vale per ρ se e soltanto se vale per ρ_1.

Possiamo quindi ridurci al caso in cui sia, per un intorno aperto U di $\partial\Omega$ in $\mathbb{C}^n$,

$$\rho(z) = \begin{cases} -\text{dist}(z, \partial\Omega) & \text{se } z \in \bar{\Omega} \cap U \\ \text{dist}(z, \partial\Omega) & \text{se } z \in U \cap \complement\Omega. \end{cases} \tag{3.4.16}$$

Se supponiamo che Ω sia pseudoconvesso, per il Teorema III.4.2 la

$$z \to -\log \text{dist}(z, \partial\Omega)$$

è plurisubarmonica su Ω. Quindi, poiché $-\log \text{dist}(z, \partial\Omega) = -\log(-\rho(z))$ per $z \in \Omega \cap U$, otteniamo

$$-[\rho(z)]^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} w_i \bar{w}_j + [\rho(z)]^{-2} \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z_i} w_i \right|^2 \geq 0, \qquad \forall w \in \mathbb{C}^n,\ \forall z \in \Omega \cap U. \tag{3.4.17}$$

Moltiplicando per $[-\rho(z)]$ e passando al limite per $\Omega \ni z \to \partial\Omega$, otteniamo la (3.4.15).

Per dimostrare la sufficienza, facciamo vedere innanzi tutto che, se vale la (3.4.15), allora la $u(z) = -\log(\text{dist}(z, \complement\Omega))$ è plurisubarmonica per $z \in \Omega \cap U$ per un intorno U di $\partial\Omega$ in $\mathbb{C}^n$.

Fissiamo un intorno aperto U di $\partial\Omega$ in $\mathbb{C}^n$ in modo che la $z \to \text{dist}(z, \complement\Omega)$ sia di classe $\mathcal{C}^2$ su $U \cap \Omega$. Supponiamo per assurdo che $u(z) = -\log(\text{dist}(z, \complement\Omega))$ non sia plurisubarmonica in $U \cap \Omega$. Ci sarà allora un punto $z \in U \cap \Omega$ e un $w \in \mathbb{C}^n$ tali che:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \bar{\tau}} \log(\text{dist}(z + \tau w, \complement\Omega)) \right]_{\tau=0} = c > 0.$$

Per la formula di Taylor, se $z \in U \cap \Omega$:

$$\log \text{dist}(z + \tau w, \complement\Omega) = \log \text{dist}(z, \complement\Omega) + \text{Re}\,(A\tau + B\tau^2) + c|\tau|^2 + o(|\tau|^2), \qquad \text{per} \quad \tau \to 0,$$

per opportune costanti $A, B \in \mathbb{C}$. Fissiamo ora $a \in \mathbb{C}^n$ con $|a| = \text{dist}(z, \complement\Omega)$ e $z + a \in \partial\Omega$. Consideriamo la funzione:

$$z(\tau) = z + \tau w + a \exp(A\tau + B\tau^2).$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(z(\tau), \complement\Omega) &\geq \operatorname{dist}(z+\tau w, \complement\Omega) - |a| \cdot \left|\exp(A\tau + B\tau^2)\right| \\ &\geq |a| \left(e^{\frac{c|\tau|^2}{2}} - 1\right) \left|e^{A\tau+B\tau^2}\right|, \\ &\qquad \text{per } |\tau| \ll 1. \end{aligned}$$

Poiché $\operatorname{dist}(z(0), \complement\Omega) = 0$, otteniamo che

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\tau}\operatorname{dist}(z(\tau), \complement\Omega)|_{\tau=0} = 0 \quad \text{e} \\ &\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\bar\tau}\operatorname{dist}(z(\tau), \complement\Omega)|_{\tau=0} > 0. \end{aligned}$$

Questo contraddice la (3.4.15), in quanto queste relazioni si possono scrivere, con $\rho(z) = -\operatorname{dist}(z, \complement\Omega)$:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial\rho(z(0))}{\partial z_j} z_j'(0) = 0, \quad \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2\rho(z(0))}{\partial z_j \partial\bar z_k} z_j'(0)\bar z_k'(0) < 0\,.$$

Da questo ottiene la condizione del Teorema III.4.6, cioè, per ogni $z_0 \in \partial\Omega$ possiamo trovare un intorno aperto U_{z_0} di z_0 in $\mathbb{C}^n$ per cui $\Omega \cap U_{z_0}$ sia pseudoconvesso, e quindi Ω è pseudoconvesso. □

Quando la condizione del Teorema III.4.10 non è verificata, otteniamo:

Teorema III.4.11 (E.E. Levi). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ e sia $z_0 \in \partial\Omega$ un punto della frontiera di Ω tale che:*

esistono un intorno U_{z_0} di z_0 in $\mathbb{C}^n$, una funzione reale $\rho : U \to \mathbb{R}$ ed un vettore $w \in \mathbb{C}^n$ tali che:

$$\Omega \cap U_{z_0} = \{z \in U_{z_0} | \rho(z) < 0\}, \tag{3.4.18}$$

$$\sum\nolimits_{j,k=1}^n \frac{\partial^2\rho(z_0)}{\partial z_j\partial\bar z_k} w_j\bar w_k < 0, \quad \sum\nolimits_{j=1}^n \frac{\partial\rho(z_0)}{\partial z_j} w_j = 0. \tag{3.4.19}$$

Allora esiste un intorno aperto ω di z_0 in $\mathbb{C}^n$ tale che ogni funzione $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ si estende in modo unico a una $\tilde f \in \mathcal{O}(\Omega \cup \omega)$.

Dimostrazione. Possiamo supporre che Ω sia un aperto limitato di $\mathbb{C}^n$, che la funzione ρ sia definita su tutto $\mathbb{C}^n$, e che $\rho > 0$ su $\complement\bar\Omega$.

Mediante un cambiamento di coordinate, possiamo ancora supporre che $z_0 = 0$, che $w = (1, 0, \ldots, 0)$, e che $d\rho(0) = d\operatorname{Im} z_n$. Possiamo quindi scrivere:

$$\rho(z) = \operatorname{Im} z_n + \operatorname{Re} \sum\nolimits_{j,k=1}^n \frac{\partial^2\rho(0)}{\partial z_j\partial z_k} z_j z_k + \sum\nolimits_{j,k=1}^n \frac{\partial^2\rho(0)}{\partial z_j\partial\bar z_k} z_j\bar z_k + o(|z|^2).$$

Mediante un altro cambiamento di coordinate, possiamo sostituire a z_n la $z_n + i\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2\rho(0)}{\partial z_j\partial z_k} z_j z_k$ e supporre che l'hessiano complesso in z_0 sia in forma diagonale e che l'autovalore corrispondente al al vettore e_1 della base canonica sia (-1). Avremo allora:

$$\rho(z) = \operatorname{Im} z_n - |z|_1^2 + \sum_{j=2}^{n} c_j |z_j|^2 + 0(|z|^3)$$

con $c_j \in \mathbb{R}$ per $j = 2, \dots, n$. Possiamo allora scegliere $\delta, \epsilon > 0$ in modo tale che

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} < 0 \quad \text{in} \quad \omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| < \delta, \quad |z_j| < \epsilon\,, \text{per } 2 \leq j \leq n\}\\ &\text{e} \quad \rho(z) < 0 \quad \text{su } \omega' = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \delta,\ |z_j| \leq \epsilon,\ \text{per } 2 \leq j \leq n\}.\end{aligned}$$

Fissato $z' = (z_2, \dots, z_n)$, con $|z_j'| < \epsilon$ per $j = 2, \dots, n$, l'insieme degli z_1 per cui $\rho(z_1, z') < 0$ è connesso, perché $t \to \rho(t, z')$ non può avere minimo locale come funzione di t.

Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, possiamo allora trovare un'estensione $\tilde{f}$ di f nell'intorno ω di 0 ponendo

$$\tilde{f}(z_1, z') = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\delta} \frac{f(t, z')}{t - z_1} dt \quad \text{per} \quad z = (z_1, z') \in \omega.$$

Poiché per

$$-\epsilon < \operatorname{Im} z_n < 0, \quad |z_n| < \epsilon \quad \text{e} \quad \sum_{j=2}^{n-1} |z_j|^2 \ll 1$$

il disco $\{(t, z') \mid |t| \leq \delta\}$ è contenuto in Ω, la $\tilde{f}$ coincide con la f su $\Omega \cap \omega$. $\square$

Abbiamo ancora[4] (vedi anche il Teorema I.5.2)

TEOREMA III.4.12 (Lewy). *Sia ρ una funzione reale, di classe $\mathcal{C}^4$, definita in un intorno Ω di un punto $z^0 \in \mathbb{C}^n$, con $\rho(z^0) = 0$ e $d\rho(z) \neq 0$ per $z \in \Omega$. Consideriamo l'ipersuperficie reale di classe $\mathcal{C}^4$ $M = \{z \in \Omega \mid \rho(z) = 0$. Supponiamo che*

$$\text{(3.4.20)} \qquad \begin{gathered}\exists w \in \mathbb{C}^n \quad \textit{tale che} \quad \sum\nolimits_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho(z^0)}{\partial z_i} w_i = 0,\\ \sum\nolimits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(z^0)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} w_i \bar{w}_j > 0.\end{gathered}$$

Allora esiste un intorno aperto U di z_0 in Ω tale che per ogni $f \in \mathcal{C}^4(\Omega)$, con

$$\text{(3.4.21)} \qquad \bar{\partial} f(z) \wedge \bar{\partial} \rho(z) = 0 \quad \forall z \in M,$$

esista una

$$\text{(3.4.22)} \qquad \begin{cases}\tilde{f} \in \mathcal{O}(U^-) \cap \mathcal{C}^0(\bar{U}^-), \quad \textit{ove} \quad U^- = U \cap \{\rho < 0\},\\ \textit{con} \quad \tilde{f}(z) = f(z) \quad \textit{su } M \cap U.\end{cases}$$

[4]H. Lewy: *On the local character of the solution of an atypical linear differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables*, Ann. Math. (2) **64** (1956), pp.514-522.

CAPITOLO 4

Varietà complesse lisce

1. Prime definizioni

Definizione IV.1.1. Sia M una varietà differenziabile di dimensione reale $2n$. Un atlante $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ su M si dice un *atlante complesso* se:

(1) le $\phi_\alpha : U_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$ sono applicazioni a valori in $\mathbb{C}^n$;
(2) le funzioni di transizione
$$\phi_{\alpha,\beta} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \ni z \to \phi_\alpha\big(\phi_\beta^{-1}(z)\big) \in \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$
sono olomorfe per ogni $\alpha, \beta \in A$.

Due atlanti complessi $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ sono *equivalenti* se $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ è ancora un atlante complesso. Una *struttura complessa* è una classe di equivalenza di atlanti complessi.

Si dice *varietà complessa liscia* una varietà differenziabile M su cui sia fissata una *struttura complessa*.

Se M è una varietà complessa, ogni elemento (U, ϕ) di un atlante della sua struttura complessa si dice una *carta locale olomorfa* di M.

Se $p \in U \subset M$ e $\phi(p) = 0$, diciamo che la carta (U, ϕ) è *centrata* in p.

Definizione IV.1.2. Sia M una varietà complessa liscia, con atlante complesso $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$. Una funzione $f : M \to \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* se $f \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{C}$ è olomorfa per ogni $\alpha \in A$.

Definizione IV.1.3. Siano M, N due varietà complesse, di dimensioni m, n, rispettivamente. Un'applicazione $f : M \to N$ si dice *olomorfa* se per ogni $p \in M$ ed ogni carta locale olomorfa $\psi : V \to \psi(V) \subset \mathbb{C}^n$ di N, con $f(p) \in V$, possiamo trovare una carta locale olomorfa (U, ϕ) di M, con $p \in U$, tale che
$$\mathbb{C}^m \supset \phi(U) \ni z \to \psi \circ f \circ \phi^{-1}(z) \in \psi(V) \subset \mathbb{C}^n$$
sia olomorfa.

Esempio IV.1.4. Le varietà complesse di dimensione 1 si chiamano *superfici di Riemann*.

Esempio IV.1.5. Lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^n$ è una varietà complessa liscia di dimensione n. Definendo $\mathbb{CP}^n$ come il quoziente di $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})\pi\mathbb{CP}^n$ rispetto alla relazione d'equivalenza che identifica le coppie di vettori linearmente dipendenti, un atlante che definisce una struttura complessa su $\mathbb{CP}^n$ è dato dalle carte coordinate

$$U_\alpha = \{\pi(z) \mid z_\alpha \neq 0\} \ni \pi(z) \to \phi_\alpha(\pi(z)) = \left(\frac{z_j}{z_\alpha}\right)_{j\neq\alpha} \in \mathbb{C}^n, \qquad \text{per} \quad \alpha = 0, 1, \dots, n.$$

Le funzioni di transizione sono in questo caso ($0 \leq \alpha \neq \beta \leq n$):

$$\phi_{\alpha,\beta} : \{z = (z_j)_{j\neq\beta} \mid z_\alpha \neq 0\} \ni z \to w \in \{z = (z_j)_{j\neq\alpha} \mid z_\beta \neq 0\}$$

$$\text{con} \quad w_j = \begin{cases} \dfrac{z_j}{z_\alpha} & \text{se} \quad j \neq \alpha, \beta \\ \dfrac{1}{z_\alpha} & \text{se} \quad j = \beta. \end{cases}$$

La proiezione $\pi : (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \to \mathbb{CP}^n$ è olomorfa.

Esempio IV.1.6. Sia $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^k \subset \mathbb{C}^n$ (con $1 \leq k \leq 2n$) un reticolo discreto. Vi è allora una ed una sola struttura complessa sul quoziente $M = \mathbb{C}^n/\Lambda$ che renda la proiezione naturale $\pi : \mathbb{C}^n \to M$ un bi-olomorfismo locale. La varietà M è compatta se e soltanto se $k = 2n$. In questo caso M si dice un *toro complesso*.

Esempio IV.1.7. Possiamo generalizzare la costruzione dell'esempio precedente nel modo seguente. Sia $\pi : M \to N$ un rivestimento di due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^\infty$, di dimensione pari $2n$. Se N ha una struttura complessa, allora possiamo definire su M un'unica struttura complessa che renda $\pi : M \to N$ un biolomorfismo locale. Viceversa, se M ha una struttura complessa, e gli automorfismi del rivestimento sono biolomorfismi di M, allora vi è su N un'unica struttura complessa che renda $\pi : M \to N$ un biolomorfismo locale.

Un caso particolare è la *varietà di Hopf* M, definita come il quoziente di $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ rispetto al gruppo degli automorfismi generato dalla trasformazione $z \to 2z$. Per $n \geq 2$, le varietà di Hopf di dimensione n sono i più semplici esempi di varietà complesse compatte che non si possano immergere in spazi complessi proiettivi di dimensione sufficientemente grande.

2. Spazio tangente di una varietà complessa liscia

Sia M una varietà complessa liscia di dimensione n.

Indichiamo con TM il fibrato tangente di M, considerato come varietà differenziabile reale: in particolare, per ogni $p \in M$, la fibra T_pM è uno spazio vettoriale reale di dimensione $2n$.

Indichiamo con $\mathbb{C}TM$ il *complessificato del fibrato tangente.* È un fibrato vettoriale complesso di rango $2n$, la cui fibra in ogni punto p di M è la complessificazione $\mathbb{C}T_pM := \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} T_pM$ dello spazio vettoriale reale T_pM.

Definizione IV.2.1. Si dice *fibrato tangente antiolomorfo* di M, e si indica con $T^{0,1}M$, il sottofibrato di $\mathbb{C}TM$ delle derivazioni complesse che si annullano sui germi di funzioni olomorfe su M.

Si dice *fibrato tangente olomorfo* di M, e si indica con $T^{1,0}M$, il sottofibrato di $\mathbb{C}TM$ delle derivazioni complesse che si annullano sui germi di funzioni antiolomorfe su M.

Se $(z_1, \dots, z_n)$ sono le componenti di una carta coordinata olomorfa in $p \in M$,

- la fibra $T^{1,0}_pM$ ha come base i vettori $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)_p, \dots \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)_p$,
- la fibra $T^{0,1}_pM$ ha come base i vettori $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\right)_p, \dots \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right)_p$.

Quindi $T^{1,0}M$ e $T^{0,1}M$ sono fibrati vettoriali complessi di rango n su M ed abbiamo

$$T^{0,1}M = \overline{T^{1,0}M}, \quad T^{1,0}M \cap T^{0,1}M = 0, \quad \mathbb{C}TM = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M.$$

Si verifica facilmente la

Proposizione IV.2.2. *Siano M, N due varietà complesse ed $f : M \to N$ un'applicazione differenziabile.*

Indichiamo ancora con df l'applicazione $\mathbb{C}TM \to \mathbb{C}TN$ ottenuta complessificando il differenziale della f.

La $f : M \to M$ è olomorfa se e soltanto se $df(T^{1,0}M) \subset T^{1,0}N$.

Osservazione IV.2.3. La decomposizione $\mathbb{C}TM = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$ definisce una proiezione naturale $\mathbb{C}TM \to T^{1,0}M$. In particolare, la composizione di questa proiezione con l'inclusione ci dà un isomorfismo di fibrati vettoriali reali

$$TM \hookrightarrow \mathbb{C}TM \to T^{1,0}M. \tag{4.2.1}$$

Questo permette a volte, quando si studia la geometria delle varietà complesse, di utilizzare lo spazio tangente olomorfo al posto dello spazio tangente reale. Ad esempio, nel caso di una curva descritta in coordinate locali da $t \to z(t) = x(t) + iy(t)$, questa corrispondenza ci permette di scrivere il suo vettore tangente come

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{z}_j \frac{\partial}{\partial z_j} \quad \text{invece di} \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\dot{x}_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \dot{y}_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

Proposizione IV.2.4. *Sia M una varietà complessa liscia. Risulta univocamente determinato un'equivalenza $J : TM \to TM$ del fibrato tangente tale che la corrispondenza* (4.2.1) *sia definita da*

$$TM \ni X \to \tfrac{1}{2}(X - iJX) \in T^{1,0}M. \tag{4.2.2}$$

La J è un'antiinvoluzione, cioè

$$J^2 = -I, \tag{4.2.3}$$

ove $I : TM \to TM$ è l'identità.

Osservazione IV.2.5. Le varietà complesse hanno un'orientazione naturale. Se $(z_j = x_j + iy_j)_{1\leq j\leq n}$ sono coordinate locali in un intorno di un punto p di una varietà complessa liscia M, la $2n$-forma

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n \big(dz_1\wedge d\bar{z}_1\big)\wedge\cdots\wedge\big(dz_n\wedge d\bar{z}_n\big) = \big(dx_1\wedge d\bar{y}_1\big)\wedge\cdots\wedge\big(dx_n\wedge d\bar{y}_n\big)$$

definisce l'orientazione di M.

Abbiamo

Proposizione IV.2.6. *Se M è una varietà complessa liscia, allora le distribuzioni vettoriali complesse $\Gamma(M,T^{1,0}M)$ e $\Gamma(M,T^{0,1}M)$ sono formalmente integrabili. Risulta cioè*

$$\begin{aligned}&[\Gamma(M,T^{1,0}M),\Gamma(M,T^{1,0}M)]\subset\Gamma(M,T^{1,0}M),\\ &[\Gamma(M,T^{0,1}M),\Gamma(M,T^{0,1}M)]\subset\Gamma(M,T^{0,1}M).\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

Definizione IV.2.7. Si definisce una *struttura quasi complessa* su una varietà differenziabile reale M, di dimensione pari $2n$, come il dato di un'antiinvoluzione $J : TM \to TM$ che preservi le fibre.

Se M è una varietà complessa liscia, la $J : TM \to TM$ definita nella Proposizione IV.2.4 si dice *associata alla struttura complessa* di M.

Se J definiusce una struttura quasi complessa su M, poniamo $T^{0,1}M = \{X - iJX \mid X\in TM\}\subset\mathbb{C}TM$ e $T^{1,0}M = \{X + iJX \mid X\in TM\}\subset\mathbb{C}TM$.

Diciamo che una struttura quasi complessa J su M è *formalmente integrabile* se valgono le condizioni equivalenti di (4.2.4).

Vale il[1]

Teorema IV.2.8 (Newlander-Nirenberg). *Sia M una varietà differenziabile di dimensione pari. Condizione necessaria e sufficiente affinché una struttura quasi complessa J su M sia associata ad una struttura complessa su M è che la J sia formalmente integrabile.*

3. Sottovarietà complesse lisce

Definizione IV.3.1. Sia S un sottoinsieme di una varietà complessa liscia M, di dimensione n, con la topologia che ha come basi degli aperti le componenti connesse delle intersezioni di S con gli aperti di M. Diciamo che S è una sottovarietà complessa liscia di dimensione m (con $0\leq m\leq n$) di M se per ogni punto $p\in S$ esiste un intorno aperto ω di p in S ed una carta coordinata $(U; z_1,\dots,z_n)$ di M centrata in p tale che

$$\omega = \{q\in U \mid z_j(p) = 0 \text{ per } m < j\leq n\}.\tag{4.3.1}$$

Osservazione IV.3.2. Per il teorema delle funzioni implicite, una sottovarietà complessa liscia S di dimensione m di M si può caratterizzare anche mediante le proprietà equivalenti:

[1]A.Newlander, L.Nirenberg: *Complex analytic coordinates in almost-complex manifolds*, Annals of Math. **65** (1957), pp.391-404.

CAPITOLO 5

Varietà di Kaehler

1. L'operatore di Hodge

Sia (M, g) una varietà Riemanniana di dimensione m. Supponiamo che M sia orientata e indichiamo con v_g il suo elemento di volume.

Indichiamo con $\Lambda^h M$ il fibrato vettoriale dei tensori alternati controvarianti[1] di grado h. Ricordiamo che la metrica g definisce un prodotto scalare sulle fibre di $\Lambda^h M$. In coordinate locali $x_1, \dots, x_m$, il prodotto di $\alpha = \sum' a_{i_1,\dots,i_m} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_h}$ e $\beta = \sum' b_{i_1,\dots,i_m} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_h}$ è dato da

$$g(\alpha, \beta) = \sum g^{i_1,j_1} \dots g^{i_h,j_h} a_{i_1,\dots,i_h} b_{j_1,\dots,j_h}.$$

Il simbolo $\sum'$ significa che le somme sono effettuate sulle h-uple crescenti di indici.

Definizione V.1.1. L'operatore *star* di Hodge

$$* : \Lambda^p M \to \Lambda^{m-p} M \tag{5.1.1}$$

è definito dalla:

$$\alpha \wedge * \beta = g(\alpha, \beta) \cdot v_g \qquad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^p M. \tag{5.1.2}$$

Proposizione V.1.2. *L'operatore $*$ di Hodge verifica le proprietà:*

(1) $*1 = v_g$ *e* $*v_g = 1$.
(2) $g(\alpha, *\beta) = (-1)^{p(m-p)} g(*\alpha, \beta) \quad \forall \alpha \in \Lambda^p M\,, \quad \forall \beta \in \Lambda^{m-p} M\,.$
(3) $* * \alpha = (-1)^{p(m-p)} \alpha \quad \forall \alpha \in \Lambda^p M\,.$

Dimostrazione. La (1) è ovvia. Per dimostrare la (3), scegliamo un coriferimento ortonormale orientato $\theta^1, \dots, \theta^m$, in modo che sia, in particolare, $v_g = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m$. Sia $\sigma \in \mathfrak{S}_m$. Allora:

$$*\,(\theta^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\sigma_p}) = \varepsilon(\sigma) \theta^{\sigma_{p+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{\sigma_m}\,.$$

La permutazione $(p+1, \dots, m, 1, \dots, p)$ ha segnatura $(-1)^{p(m-p)}$. Otteniamo quindi

$$*\,(\theta^{\sigma_{p+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{\sigma_m}) = (-1)^{p(m-p)} \varepsilon(\sigma) \theta^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\sigma_p}$$

da cui si ricava

$$* *\,(\theta^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\sigma_p}) = (-1)^{p(m-p)} \theta^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\sigma_p}\,.$$

Da questa segue la (3).

[1] Conveniamo che i vettori di TM siano *covarianti* e quelli di T^*M *controvarianti.*

Dimostriamo ora la (2), utilizzando (3). Abbiamo:

$$g(\alpha, *\beta)v_g = \alpha \wedge * * \beta = (-1)^{p(m-p)}\alpha \wedge \beta\,.$$

$$g(*\alpha, \beta)v_g = g(\beta, *\alpha)v_g = \beta \wedge * * \alpha = (-1)^{p(m-p)}\beta \wedge \alpha = \alpha \wedge \beta\,.$$

Da queste relazioni segue la (2). □

2. Metriche Hermitiane

Sia M una varietà complessa di dimensione n. Indichiamo con $J : TM \to TM$ la sua struttura complessa.

Definizione V.2.1. Una metrica Hermitiana g su M è una metrica Riemanniana che gode della proprietà:

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \qquad \forall X, Y \in T_xM, \quad \forall x \in M\,. \tag{5.2.1}$$

Sia M una varietà complessa di dimensione n e g sia una metrica Hermitiana su M. Indichiamo ancora con g l'estensione di g a una forma $\mathbb{C}$-bilineare simmetrica su $\mathbb{C}TM$.

Osserviamo che $T^{1,0}M$ e $T^{0,1}M$ sono sottospazi totalmente isotropi per g. Poiché g è non degenere, l'isomorfismo di Riesz definisce isomorfismi:

$$\sharp : \mathbb{C}T^*M \to \mathbb{C}TM \tag{5.2.2}$$

$$\flat : \mathbb{C}TM \to \mathbb{C}T^*M \tag{5.2.3}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \sharp T^{*1,0}M &= T^{0,1}, \\ \sharp T^{*0,1}M &= T^{1,0}M, \\ *\Lambda^{p,q}M &= \Lambda^{m-q,m-p}M. \end{aligned}$$

Infatti la forma di volume v_g si può scrivere localmente mediante $v_g = \left(\frac{i}{2}\right)^n \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n \wedge \bar{\theta}^1 \wedge \cdots \wedge \bar{\theta}^n$ con $\theta^i \in T^{*1,0}M$.

Lemma V.2.2. $J \circ * = * \circ J$.

Dimostrazione. Ricordiamo che $J\alpha = i^{q-p}\alpha$ se $\alpha \in \Lambda^{p,q}M$. Se $\alpha, \beta \in \Lambda^{p,q}M$ otteniamo:

$$\alpha \wedge *J\beta = g(\alpha, J\beta)v_g = i^{q-p}g(\alpha, \beta)v_g = i^{(m-p)-(m-q)}g(\alpha, \beta)v_g = \alpha \wedge J(*\beta)\,,$$

da cui segue la tesi. □

3. La forma di Kähler

Sia M una varietà complessa di dimensione n. Sia

$$\begin{aligned} &S^{1,1}M = \{b \in S^2(T^*M) \,|\, b(X, Y) = b(JX, JY)\ \forall X, Y \in TM\}, \\ &\Lambda^{1,1}_{\mathbb{R}}M = \Lambda^{1,1}_{\mathbb{C}}M \cap \Lambda^2_{\mathbb{R}}M\,. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

La $b \to \beta$ che associa a $b \in S^{1,1}M$ la forma alternata $\beta(X, Y) = b(JX, Y)$ è un isomorfismo di fibrati vettoriali reali. Diremo che le forme b e β sono *associate tra loro*.

Definizione V.3.1. Sia g una metrica Hermitiana su M. La forma associata $\omega(X,Y) = g(JX,Y)$ si dice la *forma di Kähler* di g.

Osserviamo che una metrica Hermitiana definisce un prodotto scalare Hermitiano sulle fibre di $\mathbb{C}TM$ mediante:

$$h(Z_1,Z_2) = g(Z_1,\bar{Z}_2) \qquad \forall Z_1,Z_2 \in \mathbb{C}T_xM,\ \forall x \in M\,. \tag{5.3.2}$$

Identificando TM a $T^{1,0}M$ mediante la $X \to \frac{1}{2}(X - iJX)$, la restrizione di h a $T^{1,0}M$ definisce un prodotto scalare Hermitiano H su TM, ove le fibre si pensino come spazi complessi:

$$H(X,Y) = \frac{1}{2}\left\{g(X,Y) - ig(JX,Y)\right\}. \tag{5.3.3}$$

Risulta allora:

$$\omega(X,Y) = 2\Im H(X,Y)\ \forall X,Y \in T_xM,\ \forall x \in M\,. \tag{5.3.4}$$

Definizione V.3.2. La metrica Hermitiana g su M si dice *Kähleriana* se $d\omega = 0$.

Teorema V.3.3. *Sia $\eta \in \Lambda^{1,1}_{\mathbb{R}}M$ con $d\eta = 0$. Allora per ogni $x \in M$ esiste un intorno aperto U di x in M e una funzione reale $F \in \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$ tale che* [2]

$$\eta = dd^cF = 2i\partial\bar\partial F \ \ in\, U. \tag{5.3.5}$$

In particolare, la metrica g è Kähleriana se e soltanto se la sua forma di Kähler ω si può scrivere localmente nella forma $\omega = dd^cF = 2i\partial\bar\partial F$ per una funzione reale F. Localmente la metrica Hermitiana h ha allora l'espressione:

$$h_x(Z,Z) = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta} Z^\alpha \bar Z^\beta \tag{5.3.6}$$

ove $z^1,...,z^n$ sono coordinate locali in x e $Z^1,...,Z^n$ sono le componenti di $Z \in T^{1,0}_xM$ rispetto alla base $\frac{\partial}{\partial Z^1},\dots,\frac{\partial}{\partial Z^n}$.

Lemma V.3.4. *Sia g una metrica Hermitiana su M. Condizione necessaria e sufficiente affinché g sia Kähleriana è che per ogni $x \in M$ si possano trovare coordinate locali $z^1,...,z^n$ in x per cui*

$$g\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial \bar z^j}\right) \ = \ \delta_{i,j} + O(2) \quad in\, x\,. \tag{5.3.7}$$

Dimostrazione. Osserviamo che la (5.3.7) è equivalente a:

$$\omega = \tfrac{i}{2}\sum_{j=1}^{n} dz^j \wedge d\bar z^j \ + \ O(2) \quad \text{in } x. \tag{5.3.8}$$

[2]Ricordiamo che $d^c = \frac{\partial - \bar\partial}{i}$.

Osserviamo infine che, se ∇ è la connessione di Levi-Civita associata alla metrica g, le condizioni (5.3.7) e (5.3.8) sono ancora equivalenti all'esistenza di coordinate olomorfe $z^1, \dots, z^n$ in x tali che:

$$g\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}\right) = \delta_{i,j} \qquad \text{e} \qquad \nabla\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right) = 0 \quad \text{in } x. \tag{5.3.9}$$

$\square$

4. Gli operatori codifferenziali

Sia g una metrica Hermitiana su M, υ_g il corrispondente elemento di volume e $* : \Lambda^*_{\mathbb{C}}M \to \Lambda^*_{\mathbb{C}}M$ il corrisponendte operatore di Hodge, definito da

$$g(\phi, \psi)\upsilon_g = \phi \wedge *\psi \qquad \forall \phi, \psi \in \Lambda^*_{\mathbb{C}}M. \tag{5.4.1}$$

Definiamo allora

$$\delta = - * d* , \quad \vartheta = - * \bar{\partial}* , \quad \bar{\vartheta} = - * \partial* , \quad \delta^c = - * d^c * . \tag{5.4.2}$$

[Ricordiamo che $d^c = i(\bar{\partial} - \partial) = J \circ d$. In particolare $\vartheta + \bar{\vartheta} = \delta$ e $\delta^c = i(\vartheta - \bar{\vartheta})$].

5. Gli operatori L e Λ

Sia g una metrica Hermitiana su M e sia ω la sua forma di Kähler. Definiamo:

$$L : \Lambda^*_{\mathbb{C}}M \ni \phi \to \omega \wedge \phi \in \Lambda^*_{\mathbb{C}}M \tag{5.5.1}$$

e sia

$$\Lambda : \Lambda^*_{\mathbb{C}}M \to \Lambda^*_{\mathbb{C}}M \tag{5.5.2}$$

la sua aggiunta formale:

$$g(L(\phi), \psi) = g(\phi, \Lambda(\psi)) \qquad \forall \phi, \psi \in \Lambda^*_{\mathbb{C}}M. \tag{5.5.3}$$

Abbiamo:

$$\Lambda(\phi) = (-1)^r \, * \circ L \circ *(\phi) \qquad \forall \phi \in \Lambda^r_{\mathbb{C}}M. \tag{5.5.4}$$

Una forma ϕ si dice *primitiva* se $\Lambda(\phi) = 0$.

Osserviamo che $\Lambda(\omega) = n = \dim_{\mathbb{C}} M$.

In generale, data una forma $\phi \in \Lambda^2_{\mathbb{C}}M$, lo scalare $\Lambda(\phi)$ si dice la *traccia* di ϕ. Se decomponiamo $\phi = \phi^{2,0} + \phi^{1,1} + \phi^{0,2}$, abbiamo traccia$(\phi) =$ traccia$(\phi^{1,1})$, mentre le componenti $\phi^{2,0}$ e $\phi^{0,2}$ sono primitive.

Teorema V.5.1. *Supponiamo che la metrica g sia Kähleriana su M. Valgono allora le formule di commutazione:*

$$[\Lambda, d] = -\delta^c , \quad [\Lambda, d^c] = \delta , \quad [\Lambda, \partial] = -i\vartheta , \quad [\Lambda, \bar{\partial}] = i\bar{\vartheta}. \tag{5.5.5}$$

Dimostrazione. Poiché una metrica Kähleriana è in ogni punto tangente al second'ordine alla metrica piatta, basta verificare queste identità nel caso della metrica standard di $\mathbb{C}^n$. In questo caso $\omega = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^n dz^j \wedge d\bar{z}^j$. Indichiamo con Z_j i campi di vettori $\partial/\partial z^j$ e con $\bar{Z}_j$ i campi di vettori $\partial/\partial \bar{z}^j$. Abbiamo (denotando con $\iota(\,\cdot\,)$ il prodotto interno):

$$\vartheta = \sum_{j=1}^n \iota(\bar{Z}_j)\nabla_{Z_j}\,, \quad \bar{\vartheta} = \sum_{j=1}^n \iota(Z_j)\nabla_{\bar{Z}_j},$$

ed inoltre $\iota(Z_j)$, $\iota(\bar{Z}_j)$ e ∇_{Z_j}, $\nabla_{\bar{Z}_j}$ commutano tra loro.

Osserviamo che:

$$\Lambda(\phi) = i\sum_{j=1}^n \iota(Z_j)\iota(\bar{Z}_j)\phi\,.$$

Per ogni $1 \leq j \leq n$ risulta:

$$\nabla_{Z_j} = \iota(Z_j)\circ d + d\circ\iota(Z_j)$$
$$\nabla_{\bar{Z}_j} = \iota(\bar{Z}_j)\circ d + d\circ\iota(\bar{Z}_j)$$

(ove ∇ è la derivata covariante sulle forme esterne). Da queste ricaviamo

$$-\iota(Z_j)\circ\iota(\bar{Z}_j)\circ d + \iota(\bar{Z}_j)\circ d\circ\iota(\bar{Z}_j) = \iota(\bar{Z}_j)\circ\nabla_{Z_j}$$
$$\iota(\bar{Z}_j)\circ d\circ\iota(Z_j) - d\circ\iota(Z_j)\circ\iota(\bar{Z}_j) = \nabla_{\bar{Z}_j}\circ\iota(Z_j)$$

Sottraendo la prima dalla seconda e sommando rispetto a j otteniamo

$$\left[\sum_{j=1}^n \iota(Z_j)\iota(\bar{Z}_j), d\right] = \bar{\vartheta} - \vartheta = i\delta^c$$

Questa di dà la prima delle formule di commutazione. Osserviamo ora che $[\Lambda, \partial]$ è la parte di tipo $(0,-1)$ e $[\Lambda, \bar{\partial}]$ la parte di tipo $(-1,0)$ dell'operatore $[\Lambda, d]$. Otteniamo quindi la terza e la quarta dividendo la prima uguaglianza nelle sue componenti omogenee e infine la seconda sottraendo la quarta e la terza. $\square$

Supponiamo che ϕ sia una forma chiusa in $\Lambda^{1,1}_{\mathbb{C}}M$. Allora la condizione $d\phi = 0$ ci dà $\partial\phi = 0$ e $\bar{\partial}\phi = 0$ e quindi $d^c\phi = 0$. Abbiamo allora:

Lemma V.5.2. *Sia g una metrica Kähleriana su una varietà complessa connessa M. Allora una forma $\phi \in \Lambda^{1,1}_{\mathbb{C}}M$ con $d\phi = 0$ è armonica se e soltanto se* traccia(ϕ) *è costante.*

Dimostrazione. Abbiamo infatti per le (5.5.5):

$$\delta\phi = [\Lambda, d^c]\phi = -d^c(\Lambda(\phi)) = -d^c(\text{traccia}(\phi))\,.$$

Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale (complesso) dotato di una connessione $\mathbb{C}$-lineare ∇. Allora le formule (5.5.5) rimangono valide per forme in $\Lambda^p(M, E)$. In particolare, per una $(1,1)$-forma chiusa Φ a valori in E abbiamo:

$$\delta^\nabla\Phi = -J\nabla(\text{traccia}(\Phi)). \tag{5.5.6}$$

□

6. La decomposizione di Lefschetz

Con le notazioni del paragrafo precedente, indichiamo con B il commutatore $B = [\Lambda, L]$.

Teorema V.6.1. *Abbiamo:*

$$[B, L] = -2L, \qquad [B, \Lambda] = 2\Lambda \tag{5.6.1}$$

e inoltre

$$B(\phi) = (n-r)\phi \qquad \forall \phi \in \Lambda^r_{\mathbb{C}} M. \tag{5.6.2}$$

Dimostrazione. Possiamo anche in questo caso supporre che $M = \mathbb{C}^n$ con la metrica standard. Abbiamo allora, per $\phi \in \Lambda^r_{\mathbb{C}} M$:

$$\begin{aligned} i[\Lambda, L]\phi &= \textstyle\sum_{j=1}^n \iota(Z_j)\iota(\bar{Z}_j)(\omega \wedge \phi) - \omega \wedge \sum_{j=1}^n \iota(Z_j)\iota(\bar{Z}_j)\phi \\ &= i\Lambda(\omega)\phi + \textstyle\sum_{j=1}^n \left\{\iota(Z_j)(\omega) \wedge \iota(\bar{Z}_j)(\phi) - \iota(\bar{Z}_j)(\omega) \wedge \iota(Z_j)\phi\right\} \\ &= i(n-r)\phi. \end{aligned}$$

Questo dimostra la (5.6.2) Abbiamo poi:

$$\begin{aligned} &[B, \Lambda](\phi) = [(n-(r-2)) - (n-r)]\Lambda(\phi) = 2\Lambda\phi \\ &[B, L](\phi) = [(n-(r+2)) - (n-r)]L(\phi) = -2L(\phi) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall \phi \in \Lambda^r_{\mathbb{C}} M. \end{aligned}$$

□

Questo teorema ci dice che B, L, Λ formano un'algebra di Lie isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Essa agisce sulle forme differenziali in ogni punto di M. Otteniamo perciò:

Teorema V.6.2 (Decomposizione di Lefshetz). *Sia M una varietà complessa su cui sia definita una metrica Hermitiana g. Allora:*

$$\phi = \sum_{p \geq (r-n)^+} L^p \phi_p \qquad \textit{con } \phi_p \in \Lambda^{r-p}_{\mathbb{C}} M \textit{ primitiva.} \tag{5.6.3}$$

Dimostrazione. Questo infatti è una conseguenza della teoria delle rappresentazioni finite dell'algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. □

7. Teoria di Hodge su una varietà complessa compatta

Completiamo il quadro delle formule di commutazione per gli operatori Λ, L.

TEOREMA V.7.1. *Sia (M,g) una varietà Kähleriana. Allora valgono le seguenti formule di commutazione:*

(5.7.1)

(5.7.2) $$[L,\partial]=0[L,\bar\partial]=0 \qquad [L,d]=0[L,d^c]=0$$

(5.7.3)

(5.7.4) $$[L,\vartheta]=i\partial[L,\bar\vartheta]=-i\bar\partial \qquad [L,\delta]=-d^c[L,\delta^c]=d$$

(5.7.5)

(5.7.6) $$[\Lambda,\partial]=-i\vartheta[\Lambda,\bar\partial]=i\bar\vartheta \qquad [\Lambda,d]=-\delta^c[\Lambda,d^c]=\delta$$

(5.7.7)

(5.7.8) $$[\Lambda,\vartheta]=0[\Lambda,\bar\vartheta]=0 \qquad [\Lambda,\delta]=0[\Lambda,\delta^c]=0$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo: $L(\partial\phi)-\partial(L(\phi))=\omega\wedge\partial\phi-\partial(\omega\wedge\phi)=0$ perché $\partial\omega=0$. Analogamente si ottiene $[L,\bar\partial]=0$ e quindi $[L,d]=[L,\partial+\bar\partial]=0$, $[L,d^c]=i[L,\partial-\bar\partial]=0$.

Abbiamo poi $[\Lambda,\theta]=\pm\{*L**\bar\partial*-*\bar\partial*L*\}=\pm*[L,\bar\partial]*=0$. Analogamente $[\Lambda,\bar\vartheta]=0$ e quindi anche $[\Lambda,\delta]=0$ e $[\Lambda,\delta^c]=0$.

Sia $\phi\in\Lambda^r_{\mathbb{C}}M$. Per calcolare $[L,\vartheta](\phi)$ utilizziamo il fatto che $\vartheta=i[\Lambda,\partial]$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}-i[L,\vartheta](\phi)&=[L,[\Lambda,\partial]](\phi)\\&=[[L,\Lambda],\partial](\phi)+[\Lambda,[L,\partial]](\phi)\\&=\partial(B(\phi))-B(\partial\phi)=[(n-r)-(n-r-1)]\partial\phi=\partial\phi\,.\end{aligned}$$

In modo del tutto analogo si ricava l'altra formula di commutazione $[L,\bar\vartheta]=-i\bar\partial$, e le rimanenti seguono dal fatto che $\delta=\vartheta+\bar\vartheta$, $\delta^c=i(\bar\vartheta-\vartheta)$. Su una varietà complessa abbiamo diversi complessi di operatori differenziali del prim'ordine, localmente esatti, definiti sulle forme differenziali esterne a coefficienti complessi:

(5.7.9) $$0\to\Lambda^0_{\mathbb{C}}M\xrightarrow{\ d\ }\Lambda^1_{\mathbb{C}}M\to\cdots\to\Lambda^{2n-1}_{\mathbb{C}}M\xrightarrow{\ d\ }\Lambda^{2n}_{\mathbb{C}}M\to0$$

(complesso di deRham)

(5.7.10) $$0\to\Lambda^0_{\mathbb{C}}M\xrightarrow{\ d^c\ }\Lambda^1_{\mathbb{C}}M\to\cdots\to\Lambda^{2n-1}_{\mathbb{C}}M\xrightarrow{\ d^c\ }\Lambda^{2n}_{\mathbb{C}}M\to0$$

(complesso del d^c)

(5.7.11) $$0\to\Lambda^{p,0}_{\mathbb{C}}M\xrightarrow{\ \bar\partial\ }\Lambda^{p,1}_{\mathbb{C}}M\to\cdots\to\Lambda^{p,n-1}_{\mathbb{C}}M\xrightarrow{\ \bar\partial\ }\Lambda^{p,n}_{\mathbb{C}}M\to0$$

(complesso di Dolbealult per le p-forme olomorfe)

(5.7.12) $$0\to\Lambda^{0,q}_{\mathbb{C}}M\xrightarrow{\ \partial\ }\Lambda^{1,q}_{\mathbb{C}}M\to\cdots\to\Lambda^{n-1,q}_{\mathbb{C}}M\xrightarrow{\ \partial\ }\Lambda^{n,q}_{\mathbb{C}}M\to0$$

(complesso di Dolbealult per le p-forme anti-olomorfe). Ciascuno di questi complessi è un *complesso di operatori differenziali del prim'ordine ellittico*. Se fissiamo una metrica Hermitiana g su M otteniamo i complessi aggiunti, che utilizzano gli operatori δ, δ^c, ϑ e $\bar\vartheta$ rispettivamente. □

LEMMA V.7.2. *Sia* $\Lambda^{p;(r)}_{\mathbb{C}}M = \oplus_{h=0}^{r}\Lambda^{p+h,r-h}_{\mathbb{C}}M$. *Allora la successione*
(5.7.13)
$$\Lambda^{p;(0)}_{\mathbb{C}}M \xrightarrow{\ d\ } \Lambda^{p;(1)}_{\mathbb{C}}M \to \cdots \to \Lambda^{p;(2n-p-1)}_{\mathbb{C}}M \xrightarrow{\ d\ } \Lambda^{p;(2n-p)}_{\mathbb{C}}M \to 0$$
è localmente esatta.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che M sia un polidisco in $\mathbb{C}^n$. Sia $\phi = \sum_{h=0}^{r}\phi^{p+h,r-h} \in \Lambda^{p;(r)}_{\mathbb{C}}M$, $r > 0$, con $d\phi = 0$. Dimostriamo per ricorrenza su $0 \leq k \leq p$ che esiste una $\beta_k \in \Lambda^{k;(r-1)}_{\mathbb{C}}M$ tale che $d\beta_k = \phi$. Il caso $k = 0$ è il Lemma di Poincaré-Volterra. Supponiamo quindi $p > k \geq 0$ e che esista $\beta_k \in \Lambda^{k;(r-1)}_{\mathbb{C}}M$ tale che $d\beta_k = \phi$. Abbiamo allora
$$\bar{\partial}\beta_k^{k,r-k-1} = 0.$$
Per il Lemma di Dolbeault possiamo trovare allora $\alpha^{k,r-k-2} \in \Lambda^{k,r-k-2}_{\mathbb{C}}M$ tale che $\bar{\partial}\alpha^{k,r-k-2} = \beta_k^{k,r-k-1}$. Quindi $\beta_{k+1} = \beta_k - d\alpha^{k,r-k-2} \in \Lambda^{k+1;(r-1)}_{\mathbb{C}}M$ e $d\beta_{k+1} = \phi$. Per ricorrenza otteniamo quindi $\beta_p \in \Lambda^{p;(r-1)}_{\mathbb{C}}M$ che risolve $d\beta_p = \phi$. Osserviamo che il complesso (5.7.13) è ellittico. Se quindi M è una varietà compatta i suoi gruppi di coomologia globale $H^{p;(j)}_d(M) = H^j(\Lambda^{p;(*)}_{\mathbb{C}}M, d)$ hanno dimensione finita $b_{p,j}$. Indichiamo con $\mathscr{Z}^p$ il fascio dei germi di forme $\alpha \in \Lambda^{p,0}$ che soddisfano l'equazione $d\alpha = 0$. Osserviamo che risulta allora $\bar{\partial}\alpha = 0$ e $\partial\alpha = 0$, quindi $\mathscr{Z}^p$ è un sottofascio del fascio Ω^p delle p-forme olomorfe, cioè delle $\alpha \in \Lambda^{p,0}_{\mathbb{C}}$ tali che $\bar{\partial}\alpha = 0$. Per il teorema astratto di deRham i gruppi di coomologia $H^j(\Lambda^{p;(*)}_{\mathbb{C}}M, d)$ sono isomorfi ai gruppi di coomologia di Čech $H^j(M, \mathscr{Z}^p)$. □

TEOREMA V.7.3. *Sia M una varietà complessa compatta. Allora la caratteristica di Eulero-Poincaré di M è data da:*

$$\chi(M) = \sum_{h=0}^{2n}(-1)^h b_h = \sum_{p,q=1}^{n}(-1)^{p+q}h_{p,q}. \tag{5.7.14}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che per $p = 0$ abbiamo $b_{0,h} = b_h$, in quanto $\mathscr{Z}^0$ è il fascio delle funzioni localmente costanti. Per ogni intero $p = 0, 1, ..., n$ abbiamo una successione esatta di fasci:
$$0 \to \mathscr{Z}^p \to \Omega^p \xrightarrow{\ d\ } \mathscr{Z}^{p+1} \to 0$$
Otteniamo quindi le successioni esatte lunghe di coomologia:
$$\cdots \to H^j(M, \mathscr{Z}^p) \to H^j(M, \Omega^p) \to H^j(M, \mathscr{Z}^{p+1}) \to H^{j+1}(M, \mathscr{Z}^p) \to \cdots$$
e quindi valgono le formule:
$$0 = \sum (-1)^h\,(b_{p,h} - h_{p,h} + b_{p+1,h}).$$
Moltiplicando per $(-1)^p$ e sommando otteniamo la tesi. □

TEOREMA V.7.4. *Sia M una varietà complessa compatta di dimensione n. Allora per ogni $0 \leq r \leq 2n$ abbiamo:*

$$b_r \leq \sum_{p+q=r} h_{p,q}. \tag{5.7.15}$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi segue dalla convergenza della successione spettrale associata al complesso doppio $(\Lambda^{p,q}_{\mathbb{C}}M, \bar{\partial}, \partial)$. Possiamo comunque dare una dimostrazione diretta nel modo seguente.
a) Per ogni $0 \leq p \leq n$ e $p \leq r \leq 2n$, l'applicazione

$$\phi^{p;r} = (\phi^{p,r-p} + \phi^{p+1,r-p-1} + \cdots + \phi^{r,0}) \to \phi^{p,r-p}$$

induce un'applicazione

$$\alpha_p : H^{p;r}_d(M) \to H^{p,r-p}_{\bar{\partial}}(M)\,.$$

b) Per ogni $0 \leq p < n$ l'applicazione naturale $\beta_{p+1} : H^{p+1;r}_d(M) \to H^{p;r}_d(M)$ indotta dall'inclusione $\Lambda^{p+1;(r)}_{\mathbb{C}}M \hookrightarrow \Lambda^{p;(r)}_{\mathbb{C}}M$ è surgettiva su $\ker(\alpha_p : H^{p;r}_d(M) \to H^{p,r-p}_{\bar{\partial}}(M))$. c) L'applicazione $\alpha_n : H^{n;r}_d(M) \to H^{n,r-n}_{\bar{\partial}}(M)$ è un isomorfismo. Da a) ricaviamo:

$$b_{p;r} \leq h_{p,r-p} + \dim\ker(\alpha_p : H^{p;r}_d(M) \to H^{p,r-p}_{\bar{\partial}}(M))$$

Utilizzando b) abbiamo allora:

$$b_{p,r} \leq h_{p,r-p} + b_{p+1,r}$$

per ogni $p = 0, 1, ..., n-1$. Da c) abbiamo

$$b_{n,r} = h_{n,r-n}\,.$$

Sommando membro a membro troviamo allora

$$\sum_{p=0}^{n-1} b_{p;r} \leq \sum_{p=0}^{n-1} h_{p,r-p} + \sum_{p=1}^{n} b_{p;r}$$

da cui, per c):

$$b_r = b_{0;r} \leq \sum_{p=0} h_{p,r-p}\,.$$

$\square$

8. Teoria di Hodge su una varietà Kähleriana

TEOREMA V.8.1. *Sia (M, g) una varietà Kähleriana. Allora*

$$\Delta = \Delta^c = 2\Delta_{\bar{\partial}} = 2\Delta_{\partial}. \tag{5.8.1}$$

In particolare l'operatore di Laplace-Beltrami Δ commuta con la struttura complessa J e preserva la bigradazione delle forme.

La dimostrazione di questo teorema è conseguenza dei seguenti lemmi.

LEMMA V.8.2. *Se (M,g) è Kähleriana, allora*

$$\partial\vartheta + \vartheta\partial = 0\,, \quad \bar\partial\bar\vartheta + \bar\vartheta\bar\partial = 0\,. \tag{5.8.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando la formula di commutazione $[\Lambda, \partial] = -i\vartheta$ otteniamo:

$$\begin{aligned} -i(\partial\vartheta + \vartheta\partial) &= \partial[\Lambda,\partial] + [\Lambda,\partial]\partial \\ &= \partial\Lambda\partial - \partial^2\Lambda + \Lambda\partial^2 - \partial\Lambda\partial = 0. \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene l'altra formula, utilizzando $[\Lambda, \bar\partial] = i\vartheta$. □

LEMMA V.8.3. *Se (M,g) è Kähleriana, allora*

$$\partial\bar\vartheta + \bar\vartheta\partial = \bar\partial\vartheta + \vartheta\bar\partial\,. \tag{5.8.3}$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti:

$$\begin{aligned} \partial\bar\vartheta + \bar\vartheta\partial &= -i\left(\partial[\Lambda,\bar\partial] + [\Lambda,\bar\partial]\partial\right) = -i\left(\partial\Lambda\bar\partial - \partial\bar\partial\Lambda + \Lambda\bar\partial\partial - \bar\partial\Lambda\partial\right) \\ \bar\partial\vartheta + \vartheta\bar\partial &= i\left(\bar\partial[\Lambda,\partial] + [\Lambda,\partial]\bar\partial\right) = i\left(\bar\partial\Lambda\partial - \bar\partial\partial\Lambda + \Lambda\partial\bar\partial - \partial\Lambda\bar\partial\right) \end{aligned}$$

e le due espressioni sono uguali perché $\bar\partial\partial = -\partial\bar\partial$. □

Possiamo ora dimostrare il teorema utilizzando i due lemmi precedenti:

$$\begin{aligned} \Delta = d\delta + \delta d &= (\partial + \bar\partial)(\vartheta + \bar\vartheta) + (\vartheta + \bar\vartheta)(\partial + \bar\partial) \\ &= (\partial\vartheta + \vartheta\partial) + (\bar\partial\bar\vartheta + \bar\vartheta\bar\partial) + (\partial\bar\vartheta + \bar\vartheta\partial) + (\bar\partial\vartheta + \vartheta\bar\partial) \\ &= \Delta_\partial + \Delta_{\bar\partial} = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar\partial}\,. \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} \Delta^c = d^c\delta^c + \delta^c d^c &= (\partial - \bar\partial)(\bar\vartheta - \vartheta) + (\bar\vartheta - \vartheta)(\partial - \bar\partial) \\ &= -(\partial\vartheta + \vartheta\partial) - (\bar\partial\bar\vartheta + \bar\vartheta\bar\partial) + (\partial\bar\vartheta + \bar\vartheta\partial) + (\bar\partial\vartheta + \vartheta\bar\partial) \\ &= \Delta_\partial + \Delta_{\bar\partial} = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar\partial}\,. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

TEOREMA V.8.4. *Sia (M,g) una varietà di Kähler. Allora:*

$$\begin{cases} b_r = \sum_{p+q=r} h_{p,q} \\ b_{2j} > 0 & \text{per } j = 0, \dots, n \\ h_{p,q} = h_{q,p}. \end{cases} \tag{5.8.4}$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti per la teoria di Hodge, $H^r_d(M)$ è isomorfo allo spazio $\mathcal{H}^r_\Delta(M)$ delle r-forme armoniche su M. Sia $\phi^r = \sum_{p+q=r} \phi^{p,q}$ la decomposizione di una forma armonica di grado r nelle sue componenti omogenee rispetto alla bigradazione. Poiché Δ preserva la bigradazione, ogni componente $\phi^{p,q}$ è anch'essa armonica. Abbiamo infatti:

$$\begin{cases} d\phi = 0 \\ \delta\phi = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \bar\partial\phi = 0 \\ \vartheta\phi = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \partial\phi = 0 \\ \bar\vartheta\phi = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d^c\phi = 0 \\ \delta^c\phi = 0 \end{cases} \tag{5.8.5}$$

Poiché $2\Delta_{\bar\partial} = \Delta$, la forma armonica $\phi^{p,q}$ rappresenta una classe di coomologia di $H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$. Questo perché la teoria di Hodge ci dà un isomorfismo tra $H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$ e lo spazio $\mathcal{H}^{p,q}_{\Delta_{\bar\partial}}(M)$ delle (p,q)-forme armoniche rispetto al Laplaciano $\Delta_{\bar\partial}$ del complesso di Dolbeault. Abbiamo ovviamente un isomorfismo (dato dal coniugio) tra $H^{q,p}_{\bar\partial}(M)$ e $H^{p,q}_{\partial}(M)$. Ma i rappresentanti armonici degli elementi di $H^{p,q}_{\partial}(M)$ sono gli stessi dei rappresentanti armonici degli elementi di $H^{p,q}_{\bar\delta}(M)$, onde $h_{p,q} = h_{q,p}$ per $0 \leq p, q \leq n$.

Infine osserviamo che ω^h non può essere esatta per $h = 1, ..., n$. Infatti, se lo fosse, avremmo $\omega^h = d\psi$ per qualche forma ψ e otterremmo una contraddizione da:

$$0 \neq \int_M \omega^n = \int_M d\psi \wedge \omega^{n-h} = \int_M d(\psi \wedge \omega^{n-h})$$

in quanto il secondo membro dovrebbe essere uguale a zero per la formula di Stokes. Osserviamo che in generale b_{2j+1} è un numero pari in quanto

$$b_{2j+1} = \sum_{p+q=2j+1} h_{p,q} = 2\sum_{p=1}^{j} h_{p,2j+1-p}\,.$$

□

Lemma V.8.5. *Sia (M, g) una varietà di Kähler. Allora $[\Delta, L] = 0$ e $[\Delta, \Lambda] = 0$.*

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{aligned} L\Delta &= Ld\delta + L\delta d \\ &= dL\delta + [L, \delta]d + \delta L d \\ &= d[L, \delta] + d\delta L + d^c d + \delta d L \\ &= dd^c + d^c d + \Delta L \\ &= \Delta L \end{aligned}$$

perché $dd^c + d^c d = 0$.

Analogamente si dimostra l'altra relazione di commutazione. □

Teorema V.8.6. *Sia (M, g) una varietà di Kähler e sia ϕ una forma armonica di grado p. Allora tutte le forme primitive ϕ_h della decomposizione di Lefshetz: $\phi = \sum_{h \geq (r-n)^+} L^h \phi_h$ sono armoniche.*

Lemma V.8.7. *Sia (M, g) una varietà Hermitiana. Se α è una p-forma, allora:*

$$[\Lambda, L^k]\alpha = k(n - p - k + 1)L^{k-1}\alpha\,.$$

Dimostrazione. Abbiamo infatti

$$\Lambda L^k - L^k \Lambda = [\Lambda, L]L^{k-1} + L[\Lambda, L^{k-1}]\,.$$

Poiché $B(\phi) = [\Lambda, L]\phi = (n-p)\phi$ se ϕ ha grado p, otteniamo la formula desiderata per induzione su k:

$$\begin{aligned}\phi^p &= [\Lambda, L]\, L^{k-1}\phi^p + L\,[\Lambda, L^{k-1}]\phi^p \\ &= \{(n-p-2k+2)+(k-1)(n-p-k+2)\}\, L^{k-1}\phi^p \\ &= \{k(n-p-k+2)-k\}\, L^{k-1}\phi^p \\ &= k\cdot(n-p-k+1)L^{k-1}\phi^p\,.\end{aligned}$$

□

TEOREMA V.8.8. *Sia (M,g) una varietà di Kähler. Allora:*

(1) *ΛL induce un automorfismo di $H^p_d(M)$ se $p \leq n-1$.*

(2) *Per ogni intero k l'applicazione*

$$L^k : H^{n-k}_d(M) \to H^{n+k}_d(M) \tag{5.8.6}$$

è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è una conseguenza del fatto che lo spazio delle forme armoniche si decompone in rappresentazioni irriducibili dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ generata da L, Λ, B. Tali rappresentazioni irriducibili si possono ovviamente ottenere in sottospazi graduati, dal momento che l'algebra di Lie considerata opera come un'algebra graduata sullo spazio delle forme armoniche. □

ESEMPIO 1 Lo spazio proiettivo $\mathbb{CP}^n$ è una varietà di Kähler con la forma di Kähler definita in coordinate omogenne da

$$\omega = \partial\bar\partial \log\left(\sum_{h=0}^{n}\left|\frac{z_h}{z_k}\right|^2\right) \text{ su } \{z_k \neq 0\}, \text{ per } k = 0, ..., n.$$

Poiché $\mathbb{CP}^n$ si ottiene come attaccamento di una singola cella di dimensione $2h$ per $h = 0, ..., n$ i suoi numeri di Betti sono $b_{2h} = 1$ per $h = 0, ..., n$ e $b_{2h+1} = 0$ per $h = 0, 1, ..., n-1$. In particolare abbiamo $H^{p,q}_{\bar\partial}(\mathbb{CP}^n) = 0$ se $0 \leq p \neq q \leq n$, mentre $H^{p,p}_{\bar\partial}(\mathbb{CP}^n)$ ha dimensione 1 ed è generato dalla classe di coomologia di ω^p per $p = 0, 1, ..., n$. ESEMPIO 2 Lo spazio di Grassmann $G_{p,q}(\mathbb{C})$ dei p-piani di $\mathbb{C}^{p+q}$. Possiamo considerarlo come una varietà complessa di dimensione pq. Per definire la struttura complessa introduciamo le proiezioni

$$\pi_{i_1,...,i_p} : \mathbb{C}^{p+q} \ni z \to (z_{i_1}, ..., z_{i_p}) \in \mathbb{C}^p \quad \text{per} \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq p+q\,.$$

Indichiamo con $U_{i_1,...,i_p}$ l'insieme di tutti i p-piani $W \subset \mathbb{C}^{p+q}$ tali che $\pi_{i_1,...,i_p} : W \to \mathbb{C}^p$ sia un isomorfismo. A W in $U_{i_1,...,i_p}$ associamo la matrice a $p+q$ righe e p colonne: $M_{i_1,...,i_m}(W) = ((\pi|_W)^{-1}(e_1), ..., (\pi_W)^{-1}(e_p))$. Consideriamo i pq elementi delle righe diverse dalle $i_1, ..., i_p$ come coordinate complesse locali in $U_{i_1,...,i_p}$ del p-piano W. In questo modo si verifica che abbiamo definito una struttura complessa su $G_{p,q}(\mathbb{C})$. Si verifica inoltre che

$$\omega = \partial\bar\partial\log\det(M^*_{i_1,...,i_p}(W)M_{i_1...i_p}(W)) \quad \text{in} \quad U_{i_1,...,i_p}$$

definisce la forma di Kähler di una metrica Kähleriana su $G_{p,q}(\mathbb{C})$. In questo caso i numeri di Betti b_{2h+1} sono nulli per $0 \leq h \leq pq-1$, mentre il numero di Betti b_{2h} è uguale al numero delle partizioni di h in una somma di p interi non negativi $h = a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ con $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_p \leq q$.

9. Varietà di Grassmann

Sia $\mathfrak{Gr}(N,k)$ l'insieme dei sottospazi $k+1$-dimensionali dello spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^{N+1}$. Osserviamo che $\mathfrak{Gr}(N,0)$ è lo spazio proiettivo $\mathbb{CP}^N$ e $\mathfrak{Gr}(N,N-1)$ il suo duale. Il gruppo $\mathbf{GL}(N+1,\mathbb{C})$ opera transitivamente su $\mathfrak{Gr}(N,k)$. Lo stabilizzatore del $(k+1)$-piano generato dai vettori $e_0, e_1, \ldots, e_k$ della base canonica è il sottogruppo

(5.9.1)
$$\mathbf{GL}(k+1,N-k;\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} A \in \mathbf{GL}(k+1,\mathbb{C}), \\ C \in \mathbf{GL}(N-k,\mathbb{C}), \\ B \in \mathcal{M}((k+1)\times(N-k),\mathbb{C}) \end{array} \right\}.$$

Quindi

$$\mathfrak{Gr}(N,k) \simeq \mathbf{GL}(N+1,\mathbb{C}) \big/_{\mathbf{GL}(k+1,N-k;\mathbb{C})} \tag{5.9.2}$$

è una varietà complessa di dimensione $(k+1)\cdot(N-k)$.

Osserviamo che anche il gruppo $\mathbf{U}(N+1)$ delle trasformazioni unitarie di $\mathbb{C}^{N+1}$ opera transitivamente su $\mathfrak{Gr}(N,k)$. Quindi

$$\mathfrak{Gr}(N,k) \simeq \mathbf{U}(N+1) \big/_{\mathbf{GL}(k+1,N-k;\mathbb{C})\cap\mathbf{U}(N+1)} \tag{5.9.3}$$

è una varietà compatta. Osserviamo che, utilizzando la proiezione canonica $\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{CP}^N$, possiamo identificare $\mathfrak{Gr}(N,k)$ all'insieme dei sottospazi proiettivi di dimensione k dello spazio proiettivo $\mathbb{CP}^N$. Osserviamo ancora che il $(k+1)$-tensore alternato di rango uno $v_0 \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ in $\mathbb{C}^{N+1}$ determina in modo unico il sottospazio $(k+1)$-dimensionale $\langle v_0, v_1 \ldots, v_k\rangle$ e due $(k+1)$-tensori alternati di rango 1 determinano lo stesso sottospazio $(k+1)$-dimensionale se e soltanto se sono proporzionali.

In questo modo otteniamo un'immersione naturale

$$\mathfrak{Gr}(N,k) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^{k+1}\mathbb{C}^{N+1}) \simeq \mathbb{CP}^{\binom{N+1}{k+1}-1} \tag{5.9.4}$$

di $\mathfrak{Gr}(N,k)$ come un sottospazio chiuso di uno spazio proiettivo di dimensione $\binom{N+1}{k+1}-1$. Varietà di SchubertConsideriamo una sequenza d'interi:

$$0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \leq N-k \tag{5.9.5}$$

e siano

$$L_{a_0} \subset L_{a_1+1} \subset \cdots \subset L_{a_k+k} \subset \mathbb{CP}^N \tag{5.9.6}$$

sottospazi proiettivi, con L_j di dimensione j.

Chiamiamo *varietà di Schubert* associata alla (5.9.6) il sottoinsieme

$$\mathfrak{S}(a_0, a_1, \ldots, a_k) \subset \mathfrak{Gr}(N,k)$$

formato da tutti i sottospazi proiettivi X di dimensione k tali che

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(X \cap L_{a_j+j}\right) \geq j \qquad \text{per} \quad j = 0, 1, \ldots, k\,. \tag{5.9.7}$$

Osserviamo che $\mathfrak{S}(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ è una varietà complessa compatta di dimensione $a_0 + a_1 + \cdots + a_k$.

Esempi

(1) $\mathfrak{S}(N-k, N-k, \ldots, N-k) = \mathfrak{Gr}(N,k)\,.$
(2) $\mathfrak{S}(0, 0, \ldots, 0) = L_k\,.$
(3) $\mathfrak{S}(\underbrace{k-r}0, \ldots, 0, \underbrace{r}1, \ldots, 1) = \{X \in \mathfrak{Gr}(N,k) \mid L_{k-r} \subset X \subset L_k\}\,.$

Fissiamo una sequenza di spazi lineari in $\mathbb{CP}^N$, ad esempio quella che corrisponde ai sottospazi vettoriali coordinati: $\langle e_0 \rangle$, $\langle e_0, e_1 \rangle$, ..., $\langle e_0, e_1, \ldots, e_k \rangle$, ..., $\mathbb{C}^{N+1}$:

$$L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_k \subset \cdots L_{N-1} \subset L_N = \mathbb{CP}^N\,. \tag{5.9.8}$$

Supponiamo che le varietà di Schubert siano costruite tutte a partire da sottospazi di questa sequenza. Poniamo:
(5.9.9)

$$\mathfrak{S}(a_0, \ldots, a_k)^* = \mathfrak{S}(a_0, \ldots, a_k) \setminus \sum_{a_{j-1} < a_j} \mathfrak{S}(a_0, \ldots, a_{j-1}, (a_j - 1), \ldots, a_k)$$

dove conveniamo sia $a_{-1} = 0$.

LEMMA V.9.1. *$\mathfrak{Gr}(N,k)$ è l'unione disgiunta dei sottoinsiemi $\mathfrak{S}(a_0, a_1, \ldots, a_k)^*$ al variare degli interi $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \leq N-k$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un qualsiasi k-piano $X \in \mathfrak{Gr}(N,k)$. Fissiamo la sequenza $a_0, \ldots, a_k$ definendo a_j come il più piccolo intero per cui $\dim(X \cap L_{a_j+j}) = j$. Chiaramente $X \in \mathfrak{S}(a_0, a_1, \ldots, a_k)^*$. $\square$

LEMMA V.9.2. *Per ogni sequenza di interi $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \leq N-k$, la $\mathfrak{S}(a_0, a_1, \ldots, a_k)^*$ è una cella (aperta) di dimensione reale $2(a_0 + a_1 + \cdots + a_k)$.*

DIMOSTRAZIONE. Ragioneremo per induzione su k. Per $k = 0$, lo spazio di Grassmann $\mathfrak{Gr}(N,0)$ è lo spazio proiettivo $\mathbb{CP}^N$ e $\mathfrak{S}(h)$ è per ogni h un sottospazio proiettivo di dimensione h di $\mathbb{CP}^N$. Quindi $\mathfrak{S}(h)^* = \mathfrak{S}(h) \setminus \mathfrak{S}(h-1)$ è lo spazio affine complesso di dimensione h, che è una cella aperta di dimensione $2h$.

Supponiamo ora $k = m > 0$ e l'enunciato vero nei casi $k < m$. Consideriamo l'insieme $\mathfrak{S}(a_0, a_1, \ldots, a_k)^*$. Se $a_0 = 0$, tenuto conto del fatto che gli elementi di $\mathfrak{Gr}(N,k)$ che contengono L_0 si possono identificare allo spazio $\mathfrak{Gr}(N-1, k-1)$, abbiamo $\mathfrak{S}(a_0, a_1, \ldots, a_k)^* \simeq \mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_k)^*$ e la tesi segue dall'ipotesi induttiva.

Consideriamo quindi il caso in cui $a_0 > 0$ e fissiamo un iperpiano Π in $\mathbb{CP}^N$ tale che

$$\begin{aligned} \Pi \cap L_{a_0} &= L_{a_0-1} \\ \Pi \cap L_q &= L'_{q-1} \qquad \text{con } \dim L'_{q-1} = q-1 \text{ se } q > a_0. \end{aligned} \tag{5.9.10}$$

Consideriamo l'insieme

$$\Sigma = \mathfrak{S}(a_0, a_1, \dots, a_k) \setminus \mathfrak{S}((a_0-1), a_1, \dots, a_k)\,.$$

Se $X \in \Sigma$, allora X interseca L_{a_0}, ma non L_{a_0-1}. Quindi interseca $L_{a_0} \setminus L_{a_0-1}$ esattamente in un punto, diciamo y. Inoltre l'intersezione $Y = X \cap \Pi$ ha dimensione $k-1$, perché soddisfa $Y \cap L_{a_0-1} = \emptyset$. Abbiamo perciò un'applicazione continua:

$$\phi : \Sigma \ni X \to (X \cap L_{a_0}, X \cap \Pi) \in (L_{a_0} \setminus L_{a_0-1}) \times A \tag{5.9.11}$$

ove $A \subset \mathfrak{Gr}(N-1, k-1)$ è formato dai sottospazi $(k-1)$-dimensionali di Π che non intersecano L_{a_0-1}.

Per descrivere l'immagine $\phi(\Sigma)$ consideriamo la sequenza di sottospazi proiettivi:

$$L_{a_0-1} \subset L'_{a_0} \subset \cdots \subset L'_{N-2} \subset \Pi\,. \tag{5.9.12}$$

Le varietà di Schubert di $\mathfrak{Gr}(N-1, k-1)$ che considereremo nel seguito saranno definite a partire da questa sequenza e saranno definite con gli stessi simboli accentati. Abbiamo per ogni $j \geq 1$:

$$\dim\left(Y \cap L'_{a_j+j-1}\right) = \dim\left(X \cap \Pi \cap L_{a_j+j}\right) \geq j-1 \tag{5.9.13}$$

e quindi $Y \in \mathfrak{S}'(a_1, \dots, a_k)$. Viceversa, se

$$(y, Y) \in (L_{a_0} \setminus L_{a_0-1}) \times \mathfrak{S}'(a_1, \dots, a_k),$$

il punto y e il sottospazio Y generano un sottospazio k-dimensionale X la cui intersezione con L_{a_j+1} contiene y e $Y \cap L'_{a_j+j-1}$ e quindi ha dimensione $\geq j$. Se inoltre $Y \in A$, allora $X \in \Sigma$. Quindi ϕ è un omeomorfismo tra Σ e il prodotto cartesiano $(L_{a_0} \setminus L_{a_0-1}) \times (\mathfrak{S}'(a_1, \dots, a_k) \cap A)$. Poniamo:

$$\mathfrak{S}'(a_1, \dots, a_k)^* = \mathfrak{S}'(a_1, \dots, a_k) \setminus \sum_{a_{j-1} < a_j} \mathfrak{S}'(a_1, \dots, a_{j-1}, (a_j-1), \dots, a_k). \tag{5.9.14}$$

Allora, se $Y \in \mathfrak{S}'(a_1, \dots, a_k)^*$, risulta $Y \cap L'_{a_1-1} = \emptyset$ e dunque $Y \in A$. Per l'ipotesi induttiva $\mathfrak{S}'(a_1, \dots, a_k)^*$ è una cella aperta di dimensione $2(a_1 + \cdots + a_k)$ e ϕ definisce un omeomorfismo di $\mathfrak{S}(a_0, a_1, \dots, a_k)^*$ su $(L_{a_0} \setminus L_{a_1}) \times \mathfrak{S}'(a_1, \dots, a_k)^*$. Ciò completa la dimostrazione. $\square$

Le varietà di Schubert definiscono quindi una decomposizione di $\mathfrak{Gr}(N, k)$, in celle tutte di dimensione pari. Abbiamo quindi:

TEOREMA V.9.3. $\mathfrak{Gr}(N, k)$ *è semplicemente connessa. Non ha coefficienti di torsione e i suoi gruppi di omologia di dimensione dispari sono* *tutti nulli. Una base dell'omologia di dimensione* $2r$ *è formata dalle varietà di Schubert di dimensione* $2r$*:*

$$\mathfrak{S}(a_0, a_1, \dots, a_k), \quad \textit{con} \quad \begin{matrix} 0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \leq N-k \\ a_0 + a_1 + \cdots + a_k = r \end{matrix} .$$

Esempio A

In $\mathfrak{Gr}(3,1)$ i cicli di Schubert sono:

(1) $(0,0)$ in dimensione 0;
(2) $(0,1)$ in dimensione 2;
(3) $(0,2)$ e $(1,1)$ in dimensione 4;
(4) $(1,2)$ in dimensione 6;
(5) $(2,2)$ in dimensione 8.

Quindi i numeri di Betti sono $b^0 = b^2 = b^6 = b^8 = 1$ e $b^4 = 2$. Otteniamo quindi per la coomologia di Dolbeault: $h_{0,0} = h_{1,1} = h_{3,3} = h_{4,4} = 1$ e $h_{2,2} = 2$. Esempio B

In $\mathfrak{Gr}(4,2)$ i cicli di Shubert sono:

(1) $(0,0,0)$ in dimensione 0;
(2) $(0,0,1)$ in dimensione 2;
(3) $(0,0,2)$, $(0,1,1)$ in dimensione 4;
(4) $(0,1,2)$, $(1,1,1)$ in dimensione 6;
(5) $(0,2,2)$, $(1,1,2)$ in dimensione 8;
(6) $(1,2,2)$ in dimensione 10;
(7) $(2,2,2)$ in dimensione 12.

Di conseguenza $b^0 = b^2 = b^{10} = b^{12} = h_{0,0} = h_{1,1} = h_{5,5} = h_{6,6} = 1$ e $b^4 = b^6 = b^8 = h_{2,2} = h_{3,3} = h_{4,4} = 2$.

CAPITOLO 6

Teoria locale

1. Germi di funzioni olomorfe

Definizione VI.1.1. Indicheremo con $\mathcal{O}_{n,\,z_0}$ lo spazio dei *germi di funzioni olomorfe* nel punto z^0 di $\mathbb{C}^n$. Esso è il quoziente dell'unione disgiunta

$$\bigsqcup_{\Omega^{\text{aperto}}\ni z^0}\mathcal{O}(\Omega)$$

rispetto alla relazione d'equivalenza

$$\mathcal{O}(\Omega_1)\ni f_1\sim f_2\in\mathcal{O}(\Omega_2)\Longleftrightarrow\begin{cases}\exists\text{ un aperto }\Omega_3,\\ \text{con }z^0\in\Omega_3\subset\Omega_1\cap\Omega_2,\\ \text{tale che }f_1=f_2\text{ su }\Omega_3.\end{cases}\tag{6.1.1}$$

Associando ad ogni germe di funzione olomorfa f in z^0 la sua serie di Taylor con centro in z^0

$$\tau_{z^0}(f)(z)=\sum\nolimits_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}f(z^0)}{\partial z^\alpha}\big(z-z^0\big)^\alpha\tag{6.1.2}$$

otteniamo una bigezione tra lo spazio dei germi di funzioni olomorfe in $z^0\in\mathbb{C}^n$ e lo spazio $\mathbb{C}\{z_1-z_1^0,\dots,z_n-z_n^0\}=\mathbb{C}\{z-z^0\}$ delle serie di potenze convergenti delle variabili $z_1-z_1^0,\dots,z_n-z_n^0$.

2. Il teorema di divisione di Weierstrass

In questo paragrafo è conveniente, per semplificare le notazioni, porsi in uno spazio complesso di dimensione $(n+1)$, con variabili complesse $z_0,z_1,\dots,z_n$. Porremo ancora $z=(z_0,z_1,\dots,z_n)$ e $z'=(z_1,\dots,z_n)$, dimodoché $z=(z_0,z')$.

2.1. Le algebre di Banach B_ρ.

Definizione VI.2.1. Indichiamo con $\mathbb{C}\{\{z_0,z_1,\dots,z_n\}\}=\mathbb{C}\{\{z\}\}$ lo spazio delle serie *formali* di potenze di $(n+1)$ variabili complesse:

$$f=f(z)=\sum_{\alpha_0,\alpha_1\dots,\alpha_n=0}^{\infty}f_{\alpha_0,\alpha_1\dots,\alpha_n}{z_0}^{\alpha_0}z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}}f_\alpha z^\alpha.\tag{6.2.1}$$

Per ogni $(n+1)$-upla di numeri reali positivi $\rho=(\rho_0,\rho_1,\dots,\rho_n)$ associamo ad ogni serie formale (6.2.1) la quantità positiva, finita o infinita,

$$\|f\|_\rho=\sum\nolimits_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}}\big|f_\alpha\big|\,\rho^\alpha,\tag{6.2.2}$$

ove $\rho^\alpha = \rho_0^{\alpha_0} \cdots \rho_n^{\alpha_n}$, e definiamo lo spazio:

$$\mathbf{B}_\rho = \{f \in \mathbb{C}\{\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}\} \mid \|f\|_\rho < +\infty\}. \tag{6.2.3}$$

Indichiamo con D_ρ il policilindro, con centro in $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$,

$$D_\rho = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_j| < \rho_j, \text{ per } 0 \leq j \leq n\}. \tag{6.2.4}$$

Si verifica facilmente il seguente:

Teorema VI.2.2. *Con la norma $\| \quad \|_\rho$ di* (6.2.2), *lo spazio $\mathbf{B}_\rho$ è un'algebra di Banach complessa. Vale infatti:*

$$f, g \in \mathbf{B}_\rho \Longrightarrow (fg) \in \mathbf{B}_\rho \quad e \quad \|fg\|_\rho = \|f\|_\rho \cdot \|g\|_\rho. \tag{6.2.5}$$

La $\mathbf{B}_\rho$ è una sottoalgebra dell'algebra $\mathcal{O}(D_\rho) \cap \mathcal{C}^0(\bar{D}_\rho)$ delle funzioni continue sulla chiusura $\bar{D}_\rho$ del polidisco D_ρ e olomorfe al suo interno. □

Sia $\rho' = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ ed indichiamo con $\mathbf{B}'_{\rho'}$ l'algebra di Banach:

$$\mathbf{B}'_{\rho'} = \{\phi \in \mathbb{C}\{\{z_1, \ldots, z_n\}\} \mid \|\phi\|_{\rho'} < +\infty\} \tag{6.2.6}$$

ove, per $\phi = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \phi_\alpha {z'}^\alpha$,

$$\|\phi\|_{\rho'} = \sum\nolimits_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0}^{\infty} |\phi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}| \, \rho_1^{\alpha_1} \cdots \rho_n^{\alpha_n}. \tag{6.2.7}$$

Lemma VI.2.3. *Se $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} f_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}\{\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}\}$, poniamo per ogni intero non negativo ν:*

$$f_\nu = \sum\nolimits_{\beta \in \mathbb{N}^n} f_{(\nu, \beta)} {z'}^\beta \in \mathbb{C}\{\{z_1, \ldots, z_n\}\}.$$

Sono equivalenti:

$$f_\nu \in \mathbf{B}'_{\rho'} \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \quad e \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \|f_\nu\|_{\rho'} \rho_0^\nu < +\infty, \tag{6.2.8}$$

$$f \in \mathbf{B}_\rho. \tag{6.2.9}$$

Dimostrazione. Basta infatti osservare che, per la proprietà associativa delle somme a termini di segno non negativo:

$$\|f\|_\rho = \sum_{\nu=0}^{\infty} \|f_\nu\|_{\rho'} \rho_0^\nu \quad \forall f \in \mathbb{C}\{\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}\}.$$

□

Si verifica poi facilmente che:

Lemma VI.2.4. *Per $f \in \mathbb{C}\{\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}\}$ poniamo:*

$$P_m(f) = f'_{(m)} = \sum_{\nu=0}^{m-1} f_\nu(z) z_0^\nu, \quad R_m(f) = f''_{(m)} = \sum_{\nu=m}^{\infty} f_\nu(z) z_0^{\nu-m}. \tag{6.2.10}$$

Le applicazioni $P_m : \mathbb{C}\{\{z\}\} \to \mathbb{C}\{\{z\}\}$ *ed* $R_m : \mathbb{C}\{\{z\}\} \to \mathbb{C}\{\{z\}\}$ *sono lineari ed inoltre:*

$$\begin{cases} f = f'_{(m)} + f''_{(m)} z_0^m \\ \|f'_{(m)}\|_\rho \leq \|f\|_\rho \\ \|f''_{(m)}\|_\rho \leq \rho_0^{-m} \|f\|_\rho. \quad \square \end{cases} \tag{6.2.11}$$

2.2. Il teorema di divisione di Weierstrass. Ricordiamo l'algoritmo Euclideo di divisione dei polinomi:

PROPOSIZIONE VI.2.5 (divisione di polinomi). *Sia* $\mathbb{A}$ *un anello commutativo unitario e* T *un'indeterminata su* $\mathbb{A}$*. Sia:*

$$g = g_0 + g_1 T + \cdots + g_m T^m \in \mathbb{A}[T]$$

un polinomio di grado m *a coefficienti in* $\mathbb{A}$*, tale che* g_m *sia un'unità di* $\mathbb{A}$*. Allora ogni polinomio* $f \in \mathbb{A}[T]$ *si scrive in modo unico nella forma:*

$$f = qg + r \quad \textit{con} \quad q, r \in \mathbb{A}[T] \quad \textit{e} \quad \deg_T(r) < m. \quad \square \tag{6.2.12}$$

DEFINIZIONE VI.2.6. Dato un elemento $f \in \mathbb{C}\{\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}\}$, definito dalla (6.2.1), poniamo:

$$f(0) = f_{0,0,\ldots,0}. \tag{6.2.13}$$

Osserviamo che un elemento e dell'anello $\mathbb{C}\{\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}\}$ è un'unità se e soltanto se $e(0) \neq 0$.

Diciamo che un elemento $f \in \mathbb{C}\{\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}\}$ ha *ordine* m *rispetto alla* z_0 se

$$f = z_0^m e \quad \text{con} \quad e \in \mathbb{C}\{\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}\} \quad \text{ed} \quad e(0) \neq 0\,, \tag{6.2.14}$$

cioè, con le notazioni precedentemente introdotte,

$$f_j(0) = 0 \quad \text{se } 0 \leq j < m\,, \quad f_m(0) \neq 0. \tag{6.2.15}$$

OSSERVAZIONE VI.2.7. Lo spazio $\mathcal{O}_{n+1,0}$ dei germi di funzioni olomorfe in $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ è isomorfo all'anello $\mathbb{C}\{z\}$ delle serie convergenti delle variabili complesse $z = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$. In particolare, lo possiamo considerare come un sottoanello dell'anello $\mathbb{C}\{\{z\}\}$ delle serie formali. Diremo quindi che un elemento $g \in \mathcal{O}_{n+1,0}$ ha *ordine* m rispetto a z_0 se la sua serie di Taylor nell'origine $\tau_0(g)(z) \in \mathbb{C}\{z\} \subset \mathbb{C}\{\{z\}\}$ ha ordine m rispetto a z_0.

Un elemento e dell'anello $\mathcal{O}_{n+1,0}$ è un'unità in $\mathcal{O}_{n+1,0}$ se e soltanto se è un'unità in $\mathbb{C}\{\{z\}\}$, se cioè $e(0) \neq 0$.

Indichiamo con $\mathcal{O}_{n,0} = \mathbb{C}\{z'\}$ lo spazio dei germi di funzioni olomorfe in $0 \in \mathbb{C}^n$, che possiamo considerare in modo naturale come un sottoanello dell'anello $\mathcal{O}_{n+1\,0}$.

Teorema VI.2.8 (Teorema di divisione di Weierstrass). *Supponiamo che $g \in \mathcal{O}_{n+1,0}$ abbia ordine m rispetto a z_0. Allora, per ogni $f \in \mathcal{O}_{n+1,0}$ sono univocamente determinate q, r tali che:*

$$\begin{cases} q \in \mathcal{O}_{n+1,0}\,,\ r \in \mathcal{O}_{n,0}[z_0] = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}[z_0]\,, \\ f = qg + r\,, \\ \deg_{z_0}(r) < m. \end{cases} \tag{6.2.16}$$

Dimostrazione. Decomponiamo g nella somma

$$g = g'_{(m)} + g''_{(m)} z_0^m, \quad \text{con}$$

$$g'_{(m)} = \sum\nolimits_{\nu=0}^{m-1} g_\nu(z) z_0^\nu, \qquad g''_{(m)} = \sum\nolimits_{\nu=m}^{\infty} g_\nu(z) z_0^{\nu-m}.$$

La condizione che g abbia ordine m rispetto a z_0 ci dice che $g''_{(m)}(0,0) \neq 0$, che cioè $g''_{(m)}$ è un'unità di $\mathcal{O}_{n+1,\,0}$.

Data $f \in \mathcal{O}_{n+1,\,0}$, riscriviamo l'equazione in (6.2.16) nella forma:

$$f = q\, g''_{(m)} z_0^m + q g'_{(m)} + r\,, \tag{6.2.17}$$

con $r \in \mathcal{O}_{n,\,0}[z_0]$ di grado $< m$ rispetto a z_0 e $q \in \mathcal{O}_{n+1,\,0}$. Applicando ad ambo i mebri della (6.2.17) la trasformazione R_m della (6.2.10), osserviamo che la (6.2.17) è equivalente alla

$$f''_{(m)} = q g''_{(m)} + R_m(q g'_{(m)}) \tag{6.2.18}$$

Poiché $g''_{(m)}$ è un'unità di $\mathcal{O}_{n+1,0}$, abbiamo $h = (g''_{(m)})^{-1} \in \mathcal{O}_{n+1,\,0}$, e la (6.2.18) diviene allora

$$q = h\, f''_{(m)} - h\, R_m(q g'_{(m)}).$$

La soluzione $q \in \mathcal{O}_{n+1,\,0}$ del problema di divisione è quindi un punto fisso dell'operatore

$$\mathcal{T} : \mathcal{O}_{n+1,\,0} \ni q \to \mathcal{T}(q) = h\, f''_{(m)} - h\, R_m(q g'_{(m)}) \in \mathcal{O}_{n+1,\,0}.$$

Fissiamo ora $\rho = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n)$ in modo che $f,\, g, h \in \mathbf{B}_\rho$. Dalla $g'_{(m)}(z_0, 0) = 0$ otteniamo che, con una costante $C > 0$, sia:

$$\begin{aligned} &\|g'_{(m)}\|_r \leq C(r_1 + \dots + r_n) \\ &\text{se } r = (r_0, r_1, \dots, r_n) \text{ con } 0 < r_j \leq \rho_j \text{ per } 0 \leq j \leq n. \end{aligned} \tag{6.2.19}$$

Poiché $q \to h\, R_m(q g'_{(m)})$ è un'applicazione lineare, per dimostrare che $\mathcal{T}$ è una contrazione su $\mathbf{B}_r$ basterà dimostrare che $\mathbf{B}_r \ni q \to h\, R_m(q g'_{(m)}) \in \mathbf{B}_r$ è un operatore con norma minore di 1. Abbiamo

$$\begin{aligned} \|h\, R_m(q g'_{(m)})\|_r &= \|h\,\|_r \cdot \|R_m(q g'_{(m)})\|_r \\ &\leq r_0^{-1} \|h\,\|_r \|q g'_{(m)}\|_r \\ &\leq \left(r_0^{-1} \|g'_{(m)}\|_r \|h\,\|_r \right) \|q\|_r \\ &\leq \left(C r_0^{-1} (r_1 + \dots + r_n) \|h\,\|_r \right) \|q\|_r. \end{aligned}$$

Quindi, pur di scegliere $(r_0, r_1, \ldots, r_n)$ con $r_1, \ldots, r_n > 0$ sufficientemente piccoli rispetto ad $r_0 > 0$, la $\mathcal{T}$ è una contrazione su $\mathbf{B}_r$. La $\mathcal{T}$ ha quindi uno ed un solo punto fisso q, che ci dà l'esistenza e unicità della soluzione di (6.2.16). $\square$

Osservazione VI.2.9. L'uso delle norme $\| \quad \|_\rho$ invece dell'usuale norma della convergenza uniforme sui compatti ci permette di ridurre la dimostrazione del teorema di divisione al teorema delle contrazioni.

Osservazione VI.2.10. Se $g \in \mathcal{O}_{n+1,0}$ ha ordine m rispetto a z_0, l'applicazione:

$$\mathcal{O}_{n+1,0} \ni f \to (r_0, r_1, \ldots, r_{b-1}) \in \mathcal{O}_{n,0}^m \tag{6.2.20}$$

che fa corrispondere ad f i coefficienti del resto $r \in \mathcal{O}_{n,0}[z_0]$ della sua divisione (6.2.16) è un omomorfismo di $\mathcal{O}_{n,0}$-moduli, il cui nucleo è l'ideale $(g\,\mathcal{O}_{n+1,0})$ di $\mathcal{O}_{n+1,0}$.

3. Il teorema di preparazione di Weierstrass

Definizione VI.3.1. Un polinomio monico:

$$\varpi = z_0^m + a_1(z) z_0^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(z) z_0 + a_m(z) \in \mathcal{O}_{n,0}[z_0] \tag{6.3.1}$$

si dice un *polinomio di Weierstrass* in z_0, con coefficienti in $\mathcal{O}_{n,0}$, se:

$$a_0(0) = 0,\ a_1(0) = 0,\ a_{m-1}(0) = 0\,; \tag{6.3.2}$$

in altre parole, se il suo grado, come polinomio monico di $\mathcal{O}_{n,0}[z_0]$, è uguale al suo ordine come elemento di $\mathcal{O}_{n+1,0}$.

Vale il:

Lemma VI.3.2. *Se $\varpi \in \mathcal{O}_{n,0}[z_0]$ è un polinomio di Weierstrass, ed $f \in \mathcal{O}_{n+1,0}$, allora $f\varpi \in \mathcal{O}_{n,0}[z_0]$ se, e soltanto se, $f \in \mathcal{O}_{n,0}[z_0]$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\varpi \in \mathcal{O}_{n,0}[z_0]$ sia un polinomio di Weierstrass di grado m rispetto a z_0. Poiché ϖ è monico in $\mathcal{O}_{n,0}[z_0]$, possiamo effettuare la divisione con resto di $(f\varpi)$ per ϖ in $\mathcal{O}_{n,0}[z_0]$ (Proposizione VI.2.5). Abbiamo: $f\varpi = q\varpi + r$ con $q, r \in \mathcal{O}_{n,0}[z_0]$ ed r di grado $< m$ rispetto a z_0. Per l'unicità nel teorema di divisione di Weierstrass, deve però risultare $r = 0$ e $q = f$, e da questo segue la tesi. $\square$

Teorema VI.3.3 (Teorema di preparazione di Weierstrass).
Se $g \in \mathcal{O}_{n+1,0} = \mathbb{C}\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ ha ordine m rispetto a z_0, allora risultano univocamente determinati:

- *un polinomio di Weierstrass ϖ, di grado m rispetto a z_0,*
- *un'unità e di $\mathcal{O}_{n+1,0}$, tali che:*

$$g = e\varpi. \tag{6.3.3}$$

Dimostrazione. Per il teorema di divisione, possiamo scrivere, in modo unico,

$$z_0^m = qg + r \quad \text{con} \quad q \in \mathcal{O}_{n+1,\,0} \quad \text{ed} \quad r \in \mathcal{O}_{n,\,0}[z_0] \quad \text{con } \deg_{z_0}(r) < m.$$

Per ipotesi, $g(z_0, 0) = z_0^m h(z_0)$ per un germe $h \in \mathcal{O}_{1,\,0} = \mathbb{C}\{z_0\}$, con $h(0) \neq 0$. Dall'uguaglianza:

$$z_0^m = q(z_0, 0)h(z_0)z_0^m + r(z_0, 0)$$

si deduce che $q(z_0, 0)h(z_0) = 1$ ed $r(z_0, 0) = 0$, onde

$$\varpi = z_0^m - r(z_0, z) \in \mathcal{O}_{n,\,0}[z_0]$$

è un polinomio di Weierstrass di grado d. Inoltre, q è un'unità in $\mathcal{O}_{n+1,\,0}$ e vale la (6.3.3) con $e = q^{-1}$.

L'unicità è conseguenza dell'unicità del quoziente e del resto nel teorema di divisione di Weierstrass: infatti $q = e^{-1}$ ed $r = z_0^m - \varpi$ sono quoziente e resto della divisione di z_0^m per g. □

Proposizione VI.3.4. *Sia $g \in \mathcal{O}_{n+1,\,0}$ di ordine m rispetto a z_0 e sia $\varpi \in \mathcal{O}_{n,\,0}[z_0]$ il suo polinomio di Weierstrass. Allora l'inclusione*

$$\mathcal{O}_{n,\,0}[z_0] \hookrightarrow \mathcal{O}_{n+1,\,0}$$

definisce, per passaggio ai quozienti, un isomorfismo nell'ultima riga del diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{n,\,0}[z_0] & \longrightarrow & \mathcal{O}_{n+1,\,0} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \dfrac{\mathcal{O}_{n,\,0}[z_0]}{\varpi \cdot \mathcal{O}_{n,\,0}[z_0]} & \longrightarrow & \dfrac{\mathcal{O}_{n+1,\,0}}{g \cdot \mathcal{O}_{n+1,\,0}}. \end{array} \tag{6.3.4}$$

□

Proposizione VI.3.5. *Un polinomio di Weierstrass $\varpi \in \mathcal{O}_{n,\,0}[z_0]$ è primo*[1] *in $\mathcal{O}_{n,\,0}[z_0]$ se e soltanto se è un elemento primo in $\mathcal{O}_{n+1,\,0}$.*

Un polinomio di Weierstrass $\varpi \in \mathcal{O}_{n,\,0}[z_0]$ è irriducibile[2] *in $\mathcal{O}_{n,\,0}[z_0]$ se e soltanto se è irriducibile in $\mathcal{O}_{n+1,\,0}$.*

Dimostrazione. [3] Supponiamo che ϖ sia un polinomio di Weierstrass di grado m in z_0, primo come elemento di $\mathcal{O}_{n,\,0}[z_0]$, e siano $f, g \in \mathcal{O}_{n+1,\,0}$ due germi di funzioni olomorfe in $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ tali che

$$fg = q\varpi \quad \text{per qualche} \quad q \in \mathcal{O}_{n+1,\,0}.$$

[1]Un elemento p di un dominio d'integrità $\mathbb{A}$ si dice *primo* se non è un'unità e, quando divide un prodotto ab di elementi a, b di $\mathbb{A}$, esso ne divide almeno uno dei due fattori.

[2]Un elemento p di un dominio d'integrità $\mathbb{A}$ si dice *irriducibile* se non è un'unità se non ammette una decomposizione $p = ab$ di p nel prodotto di due elementi a, b di $\mathbb{A}$, nessuno dei quali sia un'unità.

[3]Dimostreremo nel seguito che $\mathcal{O}_{n+1,\,0}$ è un anello fattoriale: quindi le nozioni di elemento primo ed elemento irriducibile in $\mathcal{O}_{n+1,\,0}$ coincidono.

Siano $r_1, r_2 \in \mathcal{O}_{n,0}[z_0]$ polinomi di grado $< m$ in z_0, e $q_1, q_2 \in \mathcal{O}_{n+1,0}$ tali che

$$\begin{cases} f = q_1\varpi + r_1, \\ g = q_2\varpi + r_2. \end{cases}$$

Abbiamo allora

$$fg = q\varpi = (q_1q_2\varpi + q_1r_2 + r_1q_2)\varpi + r_1r_2.$$

Per il Lemma VI.3.2, abbiamo $(q - q_1q_2\varpi - q_1r_2 - r_2q_1) \in \mathcal{O}_{n,0}[z_0]$ e quindi ϖ divide il prodotto r_1r_2 in $\mathcal{O}_{n,0}[z_0]$. Poiché avevamo supposto che ϖ fosse primo in $\mathcal{O}_{n,0}[z_0]$, ne segue che uno dei due polinomi r_1, r_2 deve essere divisibile per ϖ e quindi uguale a zero. Ciò mostra che ϖ divide uno dei due germi f, g.

Supponiamo ora che ϖ sia un elemento primo di $\mathcal{O}_{n+1,0}$. Siano $f, g \in \mathcal{O}_{n,0}[z_0]$ e supponiamo vi sia un polinomio $q \in \mathcal{O}_{n,0}[z_0]$ tale che

$$fg = q\varpi.$$

Per l'ipotesi che ϖ sia primo in $\mathcal{O}_{n+1,0}$, uno dei due fattori sarà divisibile per ϖ in $\mathcal{O}_{n+1,0}$. Supponiamo per esempio sia $f = q'\varpi$ con $q' \in \mathcal{O}_{n+1,0}$. Per il Lemma VI.3.2, abbiamo $q' \in \mathcal{O}_{n,0}[z_0]$, e quindi f è divisibile per ϖ anche in $\mathcal{O}_{n,0}[z_0]$.

Dimostriamo ora la seconda affermazione della proposizione. Sia $\varpi \in \mathcal{O}_{n,0}[z_0]$ un polinomio di Weierstrass di grado m. Chiaramente, se ϖ è riducibile in $\mathcal{O}_{n,0}[z_0]$, lo è a maggior ragione in $\mathcal{O}_{n+1,0}$. Supponiamo ora che ϖ sia riducibile in $\mathcal{O}_{n+1,0}$, e sia $\varpi = f_1f_2$ con $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_{n+1,0}$ ed $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$. Poiché $z_0^m = f_1(z_0, 0)f_2(z_0, 0)$, f_1 ed f_2 hanno entrambi ordini finiti $m_1, m_2 > 0$ rispetto a z_0, con $m_1 + m_2 = m$. Siano allora ϖ_1, ϖ_2 polinomi di Weierstrass tali che $f_i = e_i\varpi_i$, con e_i unità in $\mathcal{O}_{n+1,0}$, per $i = 1, 2$. Dalla $\varpi = e_1e_2\varpi_1\varpi_2$ segue, per l'unicità della divisione, che $e_1e_2 = 1$ e quindi $\varpi = \varpi_1\varpi_2$ è decomponibile anche in $\mathcal{O}_{n,0}[z_0]$. □

4. Struttura algebrica di $\mathcal{O}_{n,0}$

4.1. Noetherianità e fattorialità. Ricordiamo che un anello commutativo $\mathbb{A}$ si dice *Noetheriano* se ogni suo ideale è finitamente generato[4]. Un $\mathbb{A}$-modulo $\mathbf{M}$ si dice *Noetheriano* se ogni suo sotto-$\mathbb{A}$-modulo è finitamente generato. Se $\mathbb{A}$ è Noetheriano, sono Noetheriani tutti gli $\mathbb{A}$-moduli di tipo finito ed in particolare i moduli liberi di tipo finito $\mathbb{A}^k$ (per $k = 1, 2, \ldots$).

[4] Sono condizioni equivalenti:

(1) $\mathbb{A}$ soddisfa la condizione della catena ascendente per gli ideali, cioè per ogni catena di ideali di $\mathbb{A}$ della forma

$$\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{I}_m \subset \cdots$$

risulta $\bigcup_m \mathcal{I}_m = \mathcal{I}_\nu$ per qualche intero $\nu \geq 0$.

(2) Ogni famiglia non vuota $\mathcal{F}$ di ideali di $\mathbb{A}$ ammette elementi massimali rispetto all'inclusione.

(3) Ogni ideale primo di $\mathbb{A}$ è finitamente generato.

Teorema VI.4.1 (Teorema della base di Rückert[5]).
L'anello $\mathcal{O}_{n,0} \simeq \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ *dei germi di funzioni olomorfe in un intorno di* 0 *in* $\mathbb{C}^n$ *è Noetheriano.*

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione sulla dimensione n. Il caso $n = 0$ è banale. Supporremo quindi la tesi vera per $\mathcal{O}_{m,0}$, con $m \geq 0$ fissato, e dimostreremo che essa vale per $n = m+1$. Sia $\mathcal{I}$ un ideale di $\mathcal{O}_{m+1,0}$. Se $\mathcal{I} = 0$, allora $\mathcal{I}$ è banalmente di tipo finito e non c'è quindi nulla da dimostrare. Altrimenti, se $\mathcal{I} \neq 0$, sia $g \in \mathcal{I}$ un qualsiasi elemento diverso da 0. A meno di un cambiamento lineare di coordinate, possiamo supporre che g abbia ordine finito d rispetto a z_n. Se $d = 0$, l'elemento g è un'unità di $\mathcal{O}_{m+1,0}$ e quindi $\mathcal{I} = \mathcal{O}_{m+1,0}$ è generato da g. Se $d > 0$, fissiamo un polinomio di Weierstrass ϖ di grado d tale che $g = e\varpi$ per un'unità e di $\mathcal{O}_{m+1,0}$. Per la Proposizione VI.3.5, il resto della divisione di Weierstrass definisce un isomorfismo di $\mathcal{O}_{m,0}$-moduli: $\phi : \mathcal{O}_{m+1,0}/(g\mathcal{O}_{m+1,0}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^d_{m,0}$. L'immagine $\phi(\mathcal{I}) \subset \mathcal{O}^d_{m,0}$ dell'ideale $\mathcal{I}$ mediante tale isomorfismo è un sottomodulo di $\mathcal{O}^d_{m,0}$ e quindi, per l'ipotesi induttiva, è un $\mathcal{O}_{m,0}$-modulo finitamente generato. Se $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{I}$ sono tali che $\phi(f_1), \ldots, \phi(f_k)$ generino $\phi(\mathcal{I})$ come $\mathcal{O}_{m,0}$-modulo, allora chiaramente $g, f_1, \ldots, f_k$ formano un insieme finito di generatori di $\mathcal{I}$ in $\mathcal{O}_{m+1,0}$. $\square$

Ricordiamo che un anello $\mathbb{A}$ è *fattoriale*, ovvero è un *dominio a fattorizzazione unica* se è commutativo ed ogni suo elemento che non sia un'unità si decompone in un prodotto di fattori irriducibili. Tale decomposizione è *essenzialmente* unica: i suoi fattori sono cioè determinati a meno dell'ordine e a meno di unità.

Teorema VI.4.2. *L'anello* $\mathcal{O}_{n,0} \simeq \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ *è fattoriale.*

Dimostrazione. Ragioniamo per ricorrenza sulla dimensione n. Il teorema è banalmente vero per $n = 0$. Per l'ipotesi induttiva e per il lemma di Gauss l'anello $\mathcal{O}_{n,0}[z_n] \simeq \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}[z_n]$ è fattoriale. Data $f \in \mathcal{O}_{n,0}$, con $f \neq 0$, mediante un cambiamento lineare di coordinate possiamo ricondurci al caso in cui f abbia ordine finito d rispetto a z_n. Possiamo allora scrivere $f = e\varpi$, con e unità in $\mathcal{O}_0$ e ϖ un polinomio di Weierstrass di grado d in z_n. Per l'ipotesi induttiva, ϖ si decompone in $\mathcal{O}_{n-1,0}[z_n]$ in prodotto di fattori primi: $\varpi = \varpi_1 \cdots \varpi_m$, e possiamo inoltre supporre che i ϖ_j siano tutti polinomi monici in z_n. Poiché lo è il loro prodotto, ciascuno dei ϖ_j è un polinomio di Weierstrass. Per la Proposizione VI.3.5, i ϖ_j sono anche primi in $\mathcal{O}_{n,0}$ e dunque la $f = e \cdot \varpi_1 \cdots \varpi_m$ è una decomposizione di f nel prodotto di un'unità e di elementi primi.

Per verificare che la decomposizione è essenzialmente unica, consideriamo un'altra decomposizione $f = e' \cdot f_1 \cdots f_k$ di f nel prodotto di un'unità e' e di elementi irriducibili $f_1, \ldots, f_k$ di $\mathcal{O}_{n,0}$. Poiché f ha ordine finito rispetto

[5] Walther Rckert: *Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale.* Math. Ann. **107** (1933), no. 1, 259-281.

a z_n, ciascuno degli f_j ha ordine finito rispetto a z_n e perciò si scrive in modo unico nella forma $f_j = e'_j \varpi'_j$ con e'_j un'unità di $\mathcal{O}_{n,0}$ e $\varpi'_j \in \mathcal{O}_{n-1,0}[z_n]$ un polinomio di Weierstrass in z_n. Dalla:

$$f = e \cdot \varpi_1 \cdots \varpi_m = e' \cdot e'_1 \cdots e'_k \cdot \varpi'_1 \cdots \varpi'_k$$

ne segue che:

$$\varpi_1 \cdots \varpi_m = \varpi'_1 \cdots \varpi'_k$$

e quindi, per l'unicità della decomposizione in fattori irriducibili in $\mathcal{O}_{n-1,0}[z_n]$, otteniamo che $k = m$ e $\varpi'_j = \varpi_{j'}$ per una permutazione $j \to j'$. $\square$

5. Regolarità di $\mathcal{O}_{n,0}$

Ricordiamo che la *dimensione di Krull* di un anello $\mathbb{A}$ è l'estremo superiore delle lunghezze delle catene di ideali primi non nulli e distinti di $\mathbb{A}$.

Definizione VI.5.1. Un anello locale si dice *regolare* se il minimo numero di generatori del suo ideale massimale coincide con la sua dimensione di Krull.

Teorema VI.5.2. *$\mathcal{O}_{n,0}$ è un anello locale regolare di dimensione n.*

Dimostrazione. Infatti l'ideale massimale $\mathfrak{m}_0$ è generato dalle coordinate $z_1, \ldots, z_n$ e

$$0 \neq (z_1) \subsetneqq (z_1, z_2) \subsetneqq \cdots \subsetneqq (z_1, z_2, \ldots, z_n) = \mathfrak{m}_0 \neq \mathcal{O}_{n,0}$$

è una catena ascendente di ideali propri non nulli distinti di lunghezza n. $\square$

6. Il Lemma di Hensel

Vale il:

Teorema VI.6.1 (Lemma di Hensel[6]). *Sia $\mathcal{O}_{n,0} \simeq \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ l'anello locale dei germi di funzioni olomorfe in $0 \in \mathbb{C}^n$. Siano w un'indeterminata su $\mathcal{O}_{n,0}$ e $\varpi \in \mathcal{O}_{n,0}[w]$ un polinomio monico di grado $d > 0$ in w, a coefficienti in $\mathcal{O}_{n,0}$. Sia*

$$\varpi = w^d + a_1(z)w^{d-1} + \cdots + a_{d-1}(z)w + a_d(z), \quad e \tag{6.6.1}$$

$$\varpi(w, 0) = (w - c_1)^{d_1} \cdots (w - c_m)^{d_m}, \tag{6.6.2}$$

ove $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ sono numeri complessi distinti e $d_1, \ldots, d_m$ interi positivi. Possiamo trovare allora polinomi $\varpi_1, \ldots, \varpi_m \in \mathcal{O}_{n,0}[w]$ con:

$$\varpi_j \quad \text{monico di grado } d_j \text{ in } w, \text{ per } j = 1, \ldots, m, \tag{6.6.3}$$

$$\varpi_j(w, 0) = (w - c_j)^{d_j}, \quad \text{per } j = 1, \ldots, m, \tag{6.6.4}$$

$$\varpi(w, z) = \varpi_1(w, z) \cdots \varpi_m(w, z) \quad \text{in} \quad \mathcal{O}_{n,0}[w]. \tag{6.6.5}$$

[6] Kurt Hensel: *Über eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variablen.* Acta Math. **23** (1900), no. 1, 339–416.

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su m. Nel caso $m = 1$, basta scegliere $\varpi_1 = \varpi$. Supponiamo ora $m > 1$ e la tesi verificata per polinomi monici ϖ' di $\mathcal{O}_{n,0}[w]$ per cui l'equazione $\varpi'(w,0) = 0$ abbia meno di m radici distinte. Consideriamo ϖ come un polinomio di $\mathcal{O}_{n,0}[w - c_m]$. Risulta allora univocamente determinato un polinomio di Weierstrass $\varpi_m \in \mathcal{O}_{n,0}[w - c_m]$ ed un'unità $e \in \mathbb{C}\{w, z_1, \ldots, z_n\}$ tali che

$$\varpi = e \cdot \varpi_m \quad \text{in} \quad \mathbb{C}\{w - c_m, z_1, \ldots, z_n\}.$$

Ma questa uguaglianza implica che $e \in \mathcal{O}_{n,0}[w]$ è un polinomio monico di grado $(d - d_m)$ in w, con

$$e(w,0) = (w - c_1)^{d_1} \cdots (w - c_{m-1})^{d_{m-1}}.$$

Per l'ipotesi induttiva esistono allora $\varpi_1, \ldots, \varpi_{m-1}$, polinomi monici in $\mathcal{O}_{n,0}[w]$, di gradi $d_1, \ldots, d_{m-1}$, con

$$\varpi_j(w,0) = (w - c_j)^{d_j} \quad \text{ed} \quad e(w,z) = \varpi_1(w,z) \cdots, \varpi_{m-1}(w,z).$$

Inoltre, poiché ϖ_m è un polinomio di Weierstrass di grado d_m rispetto a $(w - c_m)$, è anche $\varpi_m(w,0) = (w - c_m)^{d_m}$. Abbiamo così ottenuto la tesi. □

Osservazione VI.6.2. Osserviamo che la decomposizione (6.6.5) è unica (a meno dell'ordine dei fattori) perché $\mathcal{O}_{n,0}[w]$ è un anello fattoriale.

7. Chiusura dei sottomoduli di $\mathcal{O}_{n,0}$

7.1. Alcuni risultati sugli anelli locali. Sia[7] $\mathbb{A}$ un anello commutativo unitario Noetheriano ed $\mathfrak{m}$ un ideale di $\mathbb{A}$. L'anello graduato

$$\mathbb{A}^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}^k. \tag{6.7.1}$$

è anch'esso Noetheriano. Infatti, se $\xi_1, \ldots, \xi_m$ sono generatori di $\mathfrak{m}$, possiamo identificare $\mathbb{A}^*$ ad un quoziente dell'anello $\mathbb{A}[T_1, \ldots, T_m]$ dei polinomi di m indeterminate a coefficienti in $\mathbb{A}$, mediante la successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{A}[T_1, \ldots, T_m] \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^* \longrightarrow 0, \tag{6.7.2}$$

ove π è l'applicazione che associa ad un polinomio $P_k \in \mathbb{A}[T_1, \ldots, T_m]$, omogeneo di grado k in $T_1, \ldots, T_m$, l'elemento $P_k(\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathfrak{m}^k$.

Vale il:

Lemma VI.7.1 (Lemma di Artin-Rees). *Sia $\mathbb{A}$ un anello commutativo unitario Noetheriano ed $\mathfrak{m}$ un ideale di $\mathbb{A}$. Se $\mathbf{M}$ è un $\mathbb{A}$-modulo finitamente generato ed $\mathbf{N}$ un sotto-$\mathbb{A}$-modulo di $\mathbf{M}$, allora esiste un intero $p \geq 0$ tale che:*

$$\mathbf{N} \cap (\mathfrak{m}^q \mathbf{M}) = \mathfrak{m}^{q-p} (\mathbf{N} \cap (\mathfrak{m}^p \mathbf{M})) \quad \forall q \geq p. \tag{6.7.3}$$

[7] cf. il Capitolo 12 per una trattazione più completa.

Dimostrazione. Consideriamo $\mathbf{M}^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}^k \mathbf{M}$. Esso è un $\mathbb{A}^*$-modulo finitamente generato e quindi è Noetheriano. Sia $\mathbf{N}^*_\nu$ il suo sotto-$\mathbb{A}^*$-modulo generato da $\mathbf{N} \oplus (\mathbf{N} \cap \mathfrak{m}\mathbf{M}) \oplus \cdots \oplus (\mathbf{N} \cap \mathfrak{m}^\nu \mathbf{M})$. Abbiamo allora una catena ascendente

$$\mathbf{N}^*_0 \subset \mathbf{N}^*_1 \subset \cdots \subset \mathbf{N}^*_\nu \subset \mathbf{N}^*_{\nu+1} \subset \cdots$$

di sotto-$\mathbb{A}^*$-moduli di $\mathbf{M}^*$. Poiché $\mathbf{M}^*$ è Noetheriano, esiste un intero positivo p tale che $\mathbf{N}^*_q = \mathbf{N}^*_p$ per ogni intero $q \geq p$. Questa condizione dà la (6.7.3). □

Definizione VI.7.2. Un anello commutativo e unitario si dice *locale* se contiene un unico ideale massimale. In modo equivalente, diciamo che un anello commutativo unitario $\mathbb{A}$ è locale se, per ogni elemento $a \in \mathbb{A}$, almeno uno dei due elementi, a od $1 - a$, è un'unità.

Lemma VI.7.3 (Nakayama). *Sia $\mathbb{A}$ un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e siano $\mathbf{M}$ ed $\mathbf{M}'$ due $\mathbb{A}$-moduli di tipo finito. Allora*

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mathfrak{m}\mathbf{M} \Longleftrightarrow \mathbf{M} = \mathbf{M}'. \tag{6.7.4}$$

Dimostrazione. Sostituendo ad $\mathbf{M}$ il modulo di tipo finito $\mathbf{N} = \mathbf{M}/\mathbf{M}'$ possiamo riformulare la tesi nella forma:

$$\mathbf{N} = \mathfrak{m}\mathbf{N} \Longleftrightarrow \mathbf{N} = 0. \tag{6.7.5}$$

Siano $n_1, \ldots, n_\ell$ generatori di $\mathbf{N}$. Dall'uguaglianza $\mathbf{N} = \mathfrak{m}\mathbf{N}$ segue che:

$$n_i = \sum_{j=1}^{\ell} n_j a_{j,i} \quad \text{con} \quad a_{j,i} \in \mathfrak{m}.$$

Consideriamo la matrice $T = (\delta_{j,i} - a_{j,i})_{1 \leq j,i \leq \ell}$. Il suo determinante è $1 + a$ con $a \in \mathfrak{m}$. Quindi la matrice T è invertibile. Da $(n_1, \ldots, n_\ell)T = 0$ segue allora che $n_1 = 0, \ldots, n_\ell = 0$, e ciò dimostra che $\mathbf{N} = 0$. □

Dai Lemmi di Artin-Rees e di Nakayama otteniamo:

Teorema VI.7.4 (Lemma di Krull). *Sia $\mathbb{A}$ un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$. Se $\mathbf{M}$ è un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito ed $\mathbf{N}$ un suo sotto-$\mathbb{A}$-modulo, allora:*

$$\mathbf{N} = \bigcap\nolimits_{q \in \mathbf{N}} (\mathbf{N} + \mathfrak{m}^q \mathbf{M}). \tag{6.7.6}$$

Dimostrazione. Poniamo $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}/\mathbf{N}$. La tesi è allora equivalente a:

$$\mathbf{N}_1 = \bigcap\nolimits_{q \in \mathbf{N}} \mathfrak{m}^q \mathbf{M}_1 = 0. \tag{6.7.7}$$

Per il Lemma di Artin-Rees abbiamo, per un intero positivo p sufficientemente grande, $\mathfrak{m}\mathbf{N}_1 = \mathfrak{m}(\mathbf{N}_1 \cap \mathfrak{m}^p \mathbf{M}_1) = \mathbf{N}_1 \cap \mathfrak{m}^{p+1}\mathbf{M}_1 = \mathbf{N}_1$. Ne segue, per il Lemma di Nakayama, che $\mathbf{N}_1 = 0$. □

7.2. Applicazioni ai sottomoduli di $\mathcal{O}_{n,0}$.
L'anello $\mathcal{O}_{n,0} = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ dei germi di funzioni olomorfe in $0 \in \mathbb{C}^n$ è un anello locale unitario Noetheriano, con ideale massimale $\mathfrak{m}_0 = (z_1, \dots, z_n)$. Data una funzione f, olomorfa in un intorno aperto U di 0 in $\mathbb{C}^n$, indichiamo con $f_{(0)}$ il germe in $\mathcal{O}_{n,0}$ da essa definito.

Lemma VI.7.5. *Sia q un intero positivo, ed $\mathcal{N}$ un sotto-$\mathcal{O}_{n,0}$-modulo di $\mathcal{O}^q_{n,0}$. Sia $\{f_\nu\} \subset \mathcal{O}^q(U)$ una successione di q-vettori olomorfi, definiti in un intorno aperto U di 0 in $\mathbb{C}^n$. Supponiamo che:*

(6.7.8) $\quad f_\nu \to f \in \mathcal{O}^q(U)$ *uniformemente sui compatti di U*

(6.7.9) $\quad f_{\nu\,(0)} \in \mathcal{N} \quad \forall \nu.$

Allora:

(6.7.10) $\quad f_{(0)} \in \mathcal{N}.$

Dimostrazione. Per ogni intero positivo p, il quoziente

$$\mathcal{N}/(\mathcal{N} \cap \mathfrak{m}_0^p \mathcal{O}^q_{n,0})$$

è un sottospazio $\mathbb{C}$-lineare dello spazio vettoriale $\mathcal{O}^q_{n,0}/(\mathfrak{m}_0^p \mathcal{O}^q_{n,0})$, che ha dimensione finita $\binom{n+p-1}{p-1}q$ su $\mathbb{C}$. La convergenza uniforme della successione $\{f_\nu\}$ in un intorno di 0 implica allora che $f_{(0)} \in \mathcal{N} + \mathfrak{m}_0^p \mathcal{O}^q_{n,0}$ per ogni p positivo e questo ci dà $f_{(0)} \in \mathcal{N}$ per il Lemma di Krull. $\square$

8. Applicazioni finite

Definizione VI.8.1. Un'applicazione $f : X \to Y$, tra due spazi topologici X, Y si dice *chiusa* se trasforma chiusi in chiusi.

Lemma VI.8.2. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione chiusa ed $y \in Y$. Allora, per ogni intorno aperto U della fibra $f^{-1}(y)$ possiamo trovare un intorno V di y in Y tale che $f^{-1}(V) \subset U$.*

Dimostrazione. Infatti il complementare $\complement U$ di U è chiuso e non interseca $f^{-1}(y)$. Quindi $f(\complement U)$ è un chiuso che non contiene y. Allora $V = \complement\big(f(\complement U)\big)$ è un aperto che contiene y, e dunque un intorno di y in Y, e $f^{-1}(V) \subset U$. $\square$

Introduciamo la seguente notazione: se $f : X \to Y$, $U \subset X$ ed $Y \supset V \supset f(U)$, indichiamo con $f|_U^V$ l'applicazione $f|_U^V : U \ni x \to f(x) \in V$, ottenuta per restrizione del dominio e del codominio.

Proposizione VI.8.3. *Se $f : X \to Y$ è un'applicazione chiusa, e V un sottospazio di Y, allora anche $f|^V_{f^{-1}(V)}$ è chiusa.*

Dimostrazione. Infatti, se $A \subset X$, abbiamo:

$$f|^V_{f^{-1}(V)}(A \cap f^{-1}(V)) = f(A) \cap V.$$

$\square$

8.1. Applicazioni finite: descrizione locale.

Definizione VI.8.4. Un'applicazione $f : X \to Y$ tra spazi topologici si dice *finita* se è continua, chiusa e per ogni $y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ è finita.

Osserviamo che la composizione di due applicazioni finite è finita. Per la Proposizione VI.8.3, se $f : X \to Y$ è finita, allora per ogni $V \subset Y$, la $f|^{V}_{f^{-1}(V)}$ è ancora finita.

Otteniamo facilmente dalle considerazioni svolte nel paragrafo precedente:

Teorema VI.8.5. *Sia X uno spazio di Hausdorff ed $f : X \to Y$ un'applicazione finita. Fissiamo $y \in Y$ e siano $x_1, \ldots, x_d$ i punti distinti della fibra $f^{-1}(y)$. Siano U'_j, per $1 \leq j \leq d$, intorni di x_j in X, scelti in modo che $U'_j \cap U'_k = \emptyset$ se $j \neq k$. Allora per ogni intorno aperto V' di y in Y possiamo trovare un intorno aperto V di y in V' tale che, posto $U_j = U'_j \cap f^{-1}(V)$, risulti:*

(1) $f^{-1}(V) = \bigcup_{j=1}^{d} U_j$,
(2) *Ciascuna delle applicazioni $f|^{V}_{U_j}$ è finita.* □

Definizione VI.8.6. Un'applicazione $f : X \to Y$ tra spazi topologici si dice *finita* in $x \in X$ se esistono un intorno U di x in X e un intorno V di $f(U)$ in Y tali che $f|^{V}_{U}$ sia finita.

Ogni applicazione localmente chiusa è chiusa. Quindi, ogni applicazione che sia localmente chiusa, continua e bigettiva è un omeomorfismo.

8.2. Applicazioni di Weierstrass.

Lemma VI.8.7 (continuità delle radici). *Siano:*

$$\varpi_\nu = w^d + a_{1,\nu} w^{d-1} + \cdots + a_{d-1,\nu} w + a_{d,\nu} \in \mathbb{C}[w] \tag{6.8.1}$$

una successione di polinomi complessi, monici, di grado d. Supponiamo che $a_{j,\nu}$ converga, per ogni $1 \leq j \leq d$, a un numero complesso a_j e sia:

$$\varpi = w^d + a_1 w^{d-1} + \cdots + a_{d-1} w + a_d \in \mathbb{C}[w] \tag{6.8.2}$$

Data una successione $\{w_\nu\} \subset \mathbb{C}$ in cui ogni w_ν sia una radice del polinomio ϖ_ν, esiste una sottosuccessione $\{w_{k_\nu}\}$ di $\{w_\nu\}$ che converge ad una radice w_0 di ϖ.

Dimostrazione. Basta osservare che la successione $\{w_\nu\}$ è limitata in $\mathbb{C}$. □

Teorema VI.8.8. *Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}^n$ e siano:*

$$\begin{aligned} \varpi_k(w, z_k) = w_k^{d_k} + a_{1,k}(z) w_k^{d_k-1} + \cdots \\ \cdots + a_{d_k-1,k} w_k + a_{d_k,k} \in \mathcal{C}(\Omega)[w_k], \\ k = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{6.8.3}$$

polinomi monici di grado positivo in w_k, con coefficienti funzioni continue su Ω. Sia:

$$(6.8.4)\qquad \begin{aligned} A &= N(\Omega \times \mathbb{C}^m; \varpi_1, \dots, \varpi_m) \\ &= \{(z,w) \in \Omega \times \mathbb{C}^m \mid \varpi_1(x, w_1) = 0,\ \dots,\ \varpi_m(x, w_m) = 0\}. \end{aligned}$$

La proiezione sulle ultime n coordinate $\pi : A \to \Omega$ è un'applicazione finita.

Dimostrazione. Occorre soltanto verificare che π sia chiusa, ma questo è conseguenza del lemma precedente. □

Definizione VI.8.9. Se Ω è un aperto di $\mathbb{C}^n$ ed ϖ_j, per $j = 1, \dots, m$ sono polinomi monici in $\mathcal{O}(\Omega)[w_k]$, e definiamo A mediante la (6.8.4), allora la proiezione naturale $\pi : A \to \Omega$ si dice *applicazione di Weierstrass*. L'insieme A è allora *una sottovarietà analitica* (chiusa) di $\Omega \times \mathbb{C}^m$.

Teorema VI.8.10. *Ogni applicazione di Weierstrass è finita e aperta.*

Dimostrazione. Resta soltanto da dimostrare che $\pi : A \to \Omega$ è aperta. Fissiamo un punto $(z^0, w^0) \in A$. Sia U un intorno aperto di (z^0, w^0) in A. Possiamo supporre che U sia l'intersezione di A con un aperto della forma $\omega \times W$, per un intorno ω di z^0 in Ω ed un intorno aperto W di w^0 in $\mathbb{C}^m$. Possiamo supporre per semplicità che $w^0 = 0$ e $z^0 = 0$.

Per il Lemma di Hensel, pur di scegliere un intorno ω sufficientemente piccolo, avremo:

$$\begin{aligned} &\varpi_h = \varpi'_h \varpi''_h \quad \text{con} \quad \varpi'_h, \varpi''_h \in \mathcal{O}(\omega)[w_h] \quad \text{monici}, \\ &\varpi'(w_h, 0) = w_h^{d'_h}, \quad \text{con } 1 \le d'_h \le d_h \quad \text{e} \quad \varpi''_h(0,0) \neq 0. \end{aligned}$$

Scegliamo allora l'intorno W di 0 in $\mathbb{C}^m$ in modo che, sostituendo ad ω un intorno più piccolo di 0 in Ω se necessario, sia $\varpi''_h(z, w_h) \neq 0$ per ogni $(z,w) \in \omega \times W$. Allora:

$$A \cap (\omega \times W) = \{(z,w) \in \omega \times W \mid \varpi'_h(z, w_h) = 0 \text{ per } 1 \le h \le m\}.$$

Otteniamo $\pi(A \cap (\omega \times W)) = \omega$ e dunque la π è aperta. □

Utilizzando questo risultato, possiamo riformulare il teorema di dipendenza continua delle radici nella forma:

Teorema VI.8.11. *Sia $\varpi \in \mathcal{O}(\Omega)[w]$ un polinomio monico di grado positivo in w, con coefficienti olomorfi sull'aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Fissiamo $z^{(0)} \in \Omega$ e sia w^0 una radice del polinomio di una variabile $p(w) = \varpi(z^{(0)}, w) \in \mathbb{C}[w]$. Allora, per ogni successione $\{z^{(\nu)}\}$ che converga a $z^{(0)}$ in Ω possiamo trovare una successione $\{w_\nu\}$ di numeri complessi tali che:*

$$\varpi(w_\nu, z^{(\nu)}) = 0 \quad e \quad w_\nu \to w_0. \qquad \square$$

9. L'isomorfismo di Weierstrass

9.1. Una generalizzazione del teorema di divisione. Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{C}^n$ e sia:

$$\varpi = \varpi(w, z) = w^d + a_1(z)w^{d-1} + \cdots + a_{d_1}(z)w + a_d(z) \in \mathcal{O}(\Omega)[w] \tag{6.9.1}$$

un polinomio monico di grado positivo in w, con coefficienti olomorfi in $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Fissiamo un punto $z^0 \in \Omega$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$, ove h è un intero con $1 \leq h \leq d$, le radici complesse distinte di:

$$\varpi(\lambda, z^0) = 0. \tag{6.9.2}$$

Sia:

$$\varpi(w, z^0) = (w - \lambda_1)^{d_1} \cdots (w - \lambda_h)^{d_h} \quad (d_i \geq 1) \tag{6.9.3}$$

la decomposizione di $\varpi(w, z^0)$ in prodotto di potenze di fattori primi distinti. Poniamo:

$$\zeta_j = (\lambda_j, z^0) \in \mathbb{C}^{n+1} \tag{6.9.4}$$

e consideriamo gli omomorfismi naturali di $\mathbb{C}$-algebre:

$$\mathcal{O}_{n,\, z^0}[w] \ni \alpha \to \alpha_{(\zeta_j)} \in \mathcal{O}_{n+1,\, \zeta_j} \quad \text{per } j = 1, \ldots, h. \tag{6.9.5}$$

Abbiamo:

Teorema VI.9.1. *Utilizziamo le notazioni e le ipotesi introdotte nelle* (6.9.1), (6.9.2), (6.9.3), (6.9.4), (6.9.5). *Per ogni scelta dei germi* $f_j \in \mathcal{O}_{n+1,\, \zeta_j}$, *per* $j = 1, \ldots, h$, *possiamo trovare germi* $q_j \in \mathcal{O}_{n+1,\, \zeta_j}$ *ed un polinomio* $r \in \mathcal{O}_{n,\, z^0}[w]$, *di grado minore di* d, *tali che:*

$$f_j = q_j \varpi_{(\zeta_j)} + r_{(\zeta_j)} \quad per \quad j = 1, \ldots, h. \tag{6.9.6}$$

I germi $q_j \in \mathcal{O}_{n+1,\, \zeta_j}$ *ed* $r \in \mathcal{O}_{n,\, z^0}$ *sono univocamente determinati dalle* $f_1, \ldots, f_h$ *e da* ϖ.

Dimostrazione. Per il Lemma di Hensel, possiamo scrivere:

$$\varpi = \varpi_1 \cdots \varpi_h \quad \text{con} \quad \varpi_j \in \mathcal{O}_{n,\, z^0}[w] \quad \text{e} \quad \varpi_j(w, 0) = (w - \lambda_j)^{d_j}. \tag{6.9.7}$$

Per ogni $j = 1, \ldots, h$, il prodotto $e_j = \prod_{i \neq j} \varpi_i$ è un'unità in $\mathcal{O}_{n+1,\, \zeta_j}$, mentre ϖ_j è un polinomio di Weierstrass di grado d_j rispetto a $(w - \lambda_j)$. Per il teorema di divisione di Weierstrass abbiamo allora:

$$\begin{aligned} &f_j e_{j\,(\zeta_j)} = q'_j \varpi_{j\,(\zeta_j)} + r_{j\,(\zeta_j)} \\ &\text{con} \quad r_{j\,(\zeta_j)} \in \mathcal{O}_{n,\, z^0}[w - \lambda_j] \quad \text{e} \quad \deg_{[w-\lambda_j]} r_{j\,(\zeta_j)} < d_j. \end{aligned} \tag{6.9.8}$$

Poniamo $r = \sum_{j=1}^h e_j r_j$. Allora $r \in \mathcal{O}_{n,\, z^0}[w]$ e $\deg_w r < d$. Allora:

$$f_j = q'_j \varpi_{(\zeta_j)} + r_{(\zeta_j)} - \sum_{i \neq j} r_{i\,(\zeta_j)} e_{i\,(\zeta_j)}.$$

Ma e_i è divisibile per ϖ_j se $i \neq j$ e dunque $f_j - r_{(\zeta_j)} = q_j \varpi_{(\zeta_j)}$, in quanto la divisione dà resto nullo. Abbiamo quindi ottenuto la (6.9.6)

Per dimostrare l'unicità, supponiamo siano $f_j = 0$ per $j = 1, \dots, h$. Allora:

$$q_j \varpi_{(\zeta_j)} + r_{(\zeta_j)} = 0 \quad \text{per} \quad j = 1, \dots, h.$$

Poiché ϖ_1 è un polinomio di Weierstrass in $(w - \lambda_1)$, ed r è un polinomio in w, ne segue che $r = p_1 \varpi_1$ per un polinomio $p_1 \in \mathcal{O}_{n,\,z^0}[w]$. Analogamente, $r = p_2' \varpi_2$ per un polinomio $p_2' \in \mathcal{O}_{n,\,z^0}[w]$ e, da $p_1 \varpi_1 = p_2' \varpi_2$, dal momento che ϖ_1 e ϖ_2 sono primi tra loro, ricaviamo che $p_1 = p_2 \varpi_2$ con $p_2 \in \mathcal{O}_{n,\,z^0}[w]$. Ragionando per ricorrenza, deduciamo che r è divisibile per $\varpi_1 \cdots \varpi_h$. Avendo grado $< d$, deve allora essere nullo. Poiché $\mathcal{O}_{n+1,\,\zeta_j}$ è per ogni j un campo d'integrità, ne ricaviamo che anche $q_j = 0$ per $j = 1, \dots, h$. La dimostrazione è completa. $\square$

CAPITOLO 7

Proprietà locali delle varietà analitiche

1. Germi di sottovarietà analitiche di $\mathbb{C}^n$

Abbiamo introdotto le sottovarietà analitiche degli aperti di $\mathbb{C}^n$ nel §6 del Capitolo 2.

Definizione VII.1.1. Siano U, U' due aperti di $\mathbb{C}^n$ ed $X \subset U$, $X' \subset U'$ due varietà analitiche e z un punto di $U \cap U'$. Diciamo che X ed X' definiscono lo stesso *germe di sottovarietà analitica* in z se esiste un intorno aperto V di z, contenuto in $U \cap U'$, tale che

$$X \cap V = X' \cap V. \tag{7.1.1}$$

La (7.1.1) è una relazione di equivalenza nell'insieme delle sottovarietà analitiche definite in un intorno aperto del punto z. Le corrispondenti classi di equivalenza si dicono *germi di varietà analitica in* z.

Indichiamo con $X_{(z)}$, o con (X, z), il germe di varietà analitica in z definita da una sottovarietà analitica X di un intorno U di z.

È conveniente, per semplicità, considerare nel seguito *germi di varietà analitiche* in $z = 0$.

Definizione VII.1.2. Siano $(X, 0)$ un germe di varietà analitica in $0 \in \mathbb{C}^n$ ed $f_{(0)} \in \mathcal{O}_{n,0}$ un germe di funzione analitica in $0 \in \mathbb{C}^n$. Diciamo che f *si annulla su* $(X, 0)$ se esiste un intorno aperto U di 0 e rappresentanti $f \in \mathcal{O}(U)$ di $f_{(0)}$ ed $X \subset U$ di $(X, 0)$ tali che

$$f(\zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in X. \tag{7.1.2}$$

Si verifica facilmente che vale la

Proposizione VII.1.3. *Sia $\mathcal{I}$ un ideale di $\mathcal{O}_{n,0}$, ed $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(U)$ funzioni olomorfe, definite in un intorno aperto U di 0 in $\mathbb{C}^n$, i cui germi $f_{1\,(0)}, \dots, f_{m\,(0)}$ in z generino l'ideale $\mathcal{I}$. Il germe $X_{(0)}$ in 0 associato alla sottovarietà analitica $N(U; f_1, \dots, f_m)$ di U dipende solo dall'ideale $\mathcal{I}$ e non dalla scelta dei suoi generatori $f_{1\,(0)}, \dots, f_{m\,(0)}$.* $\square$

Possiamo introdurre quindi la

Definizione VII.1.4. Se $\mathcal{I}$ è un ideale di $\mathcal{O}_{n,0}$, ed $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(U)$ funzioni olomorfe, definite in un intorno aperto U di 0 in $\mathbb{C}^n$, i cui germi $f_{1\,(0)}, \dots, f_{m\,(0)}$ in 0 generino $\mathcal{I}$, chiamiamo *associato ad* $\mathcal{I}$ il germe di varietà analitica in 0 definito da $N(U; f_1, \dots, f_m)$:

$$X_{(0)}(\mathcal{I}) = (X(\mathcal{I}), 0) = (N(U; f_1, \dots, f_m), 0) \tag{7.1.3}$$

Viceversa, se $X_{(0)} = (X, 0)$ è un germe di varietà analitica in $0 \in \mathbb{C}^n$, l'insieme $\mathcal{I}_{(0)}(X)$ dei germi $f_{(0)} \in \mathcal{O}_{n,0}$ che si annullano su $X_{(0)}$ è un ideale di $\mathcal{O}_{n,0}$, che si dice *associato* al germe di varietà analitica $X_{(0)}$.

Si verifica facilmente

PROPOSIZIONE VII.1.5. *Sia* $0 \in \mathbb{C}^n$, $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ *ideali di* $\mathcal{O}_{n,0}$, $X_{(0)}, X'_{(0)}$ *germi di varietà analitiche in* 0. *Valgono allora:*

$$\mathcal{I} \subset \mathcal{I}' \Longrightarrow (X(\mathcal{I}), 0) \supset (X(\mathcal{I}'), 0), \tag{7.1.4}$$

$$X_{(0)} \subset X'_{(0)} \Longrightarrow \mathcal{I}_{(0)}(X) \supset \mathcal{I}_{(0)}(X'), \tag{7.1.5}$$

$$X_{(0)}(\mathcal{I}_{(0)}(X)) = X_{(0)}, \tag{7.1.6}$$

$$\mathcal{I}_{(0)}(X_{(0)}(\mathcal{I})) \supset \mathcal{I}_{(0)}. \tag{7.1.7}$$

PROPOSIZIONE VII.1.6. *Siano* $(X, 0)$ *ed* $(Y, 0)$ *due germi di varietà analitiche in* $0 \in \mathbb{C}^n$. *Se* $(X, 0) \neq (Y, 0)$, *allora* $\mathcal{I}_{(0)}(X) \neq \mathcal{I}_{(0)}(Y)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia U un intorno aperto di 0 ed $f_1, \ldots, f_h, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{O}(U)$ funzioni olomorfe tali che $X = N(U; f_1, \ldots, f_h)$ definisca il germe $(X, 0)$, ed $Y = N(g_1, \ldots, g_k)$ il germe $(Y, 0)$. Sia $\{U_\nu\}$ un sistema fondamentale di intorni di 0 in U. Per ipotesi, $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ interseca ciascuno degli U_ν. A meno di passare ad una sottosuccessione degli U_ν, e di scambiare tra loro X e Y, possiamo supporre che per ogni intero positivo ν vi sia un punto $z_\nu \in (X \cap U_\nu) \setminus Y$. Possiamo allora trovare per ogni intero ν un indice j_ν, con $1 \leq j_\nu \leq k$, tale che $g_{j_\nu}(z_\nu) \neq 0$. Esisterà quindi un indice j, con $1 \leq j \leq k$, tale che $g_j(z_{\nu'}) \neq 0$ per tutti i punti di una sottosuccessione $\{z_{\nu'}\}$ di $\{z_\nu\}$. POiché $g_j(z_\nu)$ non si annulla su $U_\nu \cap X$, il germe di g_j in 0 non si annulla su $(X, 0)$ e quindi non appartiene all'ideale $\mathcal{I}_{(0)}(X)$. □

PROPOSIZIONE VII.1.7. *Se* $(X_1, 0)$ *e* $(X_2, 0)$ *sono varietà anlitiche in* $0 \in \mathbb{C}^n$, *allora anche* $(X_1 \cup X_2, 0)$ *e* $(X_1 \cap X_2, 0)$ *sono varietà analitiche in* $0 \in \mathbb{C}^n$. □

DEFINIZIONE VII.1.8. Un germe di varietà analitica $(X, 0)$ in $0 \in \mathbb{C}^n$ si dice *riducibile* se esistono due varietà analitiche distinte[1] $(X_1, 0)$, $(X_2, 0)$, tali che $(X, 0) = (X_1 \cup X_2, 0)$. In caso contrario, si dice *irriducibile*.

PROPOSIZIONE VII.1.9. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* $(X, 0)$ *sia irriducibile è che* $\mathcal{I}_{(0)}(X)$ *sia primo.*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione VII.1.6, se $(X, 0)$ è riducibile, allora $\mathcal{I}_{(0)}(X)$ non è primo.

Supponiamo viceversa che $\mathcal{I}_{(0)}(X)$ non sia un ideale primo. Ci sono allora $f, g \in \mathcal{O}_{n,0} \setminus \mathcal{I}_{(0)}(X)$ tali che $fg \in \mathcal{I}_{(0)}(X)$. Allora $(X_1, 0) = (X \cap N(f), 0)$ e $(X_2, 0) = (X \cap N(g), 0)$ sono due germi di varietà analitiche distinte con $(X, 0) = (X_1, 0) \cup (X_2, 0)$. □

Ogni germe di varietà analitica è unione di componenti irriducibili:

[1] Deve essere cioè $(X_1, 0) \subsetneqq (X_2, 0)$ e $(X_2, 0) \subsetneqq (X_1, 0)$.

TEOREMA VII.1.10. *Ogni germe di varietà analitica $(X,0)$ in $0 \in \mathbb{C}^n$ ammette un'unica decomoposizione*

$$\begin{gathered}(X,0) = (X_1 \cup \cdots \cup X_h, 0),\\ \text{con } (X_j,0) \text{ irriducibile e } (X_j,0) \not\subset (X_r,0) \text{ se } 1 \leq j < r \leq h.\end{gathered} \tag{7.1.8}$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza del fatto che $\mathcal{O}_{n,0}$ è Noetheriano e dall'unicità della decomposizione in fattori primi.

Infatti, se $(X,0)$ non è irriducibile, possiamo decomporlo nell'unione di due germi distinti $(X,0) = (X_1,0) \cup (X_2,0)$. A partire da questa decomposizione, possiamo costruire per ricorrenza un albero

$$\mathcal{A} = \{(X_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m}),0) \mid (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m) \in \Lambda\}, \quad \text{con } \Lambda \subset \bigcup\nolimits_{h=1}^{\infty} \{1,2\}^h,$$

in cui:

(1) Ogni $(X_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m}),0)$ è un germe di varietà analitica;
(2) se Λ contiene $(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{m-1},\epsilon_m)$, allora contiene anche $(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{m-1}, 3-\epsilon_m)$ ed $(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{m-1})$.
Inoltre $(X_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{m-1}},0)$ è riducibile e
$$(X_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{m-1}},0) = (X_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{m-1},1}),0) \cup (X_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{m-1},2}),0)$$
è una decomposizione di $(X_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{m-1}},0)$ nell'unione di due sottovarietà analitiche distinte.

Se Λ è finito, gli elementi massimali di $\mathcal{A}$ danno una decomposizione di $(X,0)$ in unione finita di componenti irriducibili. Altrimenti, potremmo trovare in Λ una catena infinita

$$(\epsilon_1) \prec (\epsilon_1,\epsilon_2) \prec \cdots \prec (\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_m) \prec \cdots.$$

cui corrisponderebbe una successione decrescente di germi di varietà analitiche

$$(X,0) \subsetneqq (X_{\epsilon_1},0) \supsetneqq (X_{\epsilon_1,\epsilon_2},0) \supsetneqq \cdots (X_{\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_p},0) \supsetneqq \cdots \quad \text{con } \epsilon_i \in \{1,2\},$$

e quindi una catena crescente di ideali

$$\mathcal{I}_{(0)}(X) \subsetneqq \mathcal{I}_{(0)}(X_{\epsilon_1}) \subset \mathcal{I}_{(0)}(X_{\epsilon_1,\epsilon_2}) \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathcal{I}_{(0)}(X_{\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_p}) \subsetneqq \cdots$$

Questo contraddirebbe la Noetherianità di $\mathcal{O}_{n,0}$. Quindi Λ è finito ed esiste una decomposizione (7.1.8).

Per quanto riguarda l'unicità, osserviamo che, se

$$(X,0) = (X'_1 \cup \cdots \cup X'_\ell, 0)$$

è un'altra decomposizione finita, con $(X'_j,0)$ irriducibile e $(X'_j,0) \not\subset (X'_r,0)$ se $j \neq r$, allora la decomposizione

$$(X_i,0) = \bigcup\nolimits_{1 \leq j \leq \ell} (X_i \cap X'_j, 0)$$

implica che $(X_i \cap X'_j,0) = (X_i,0)$, e quindi $X_i \subset X'_j$ per qualche $1 \leq j \leq \ell$. Poiché devono valere anche le inclusioni opposte, cioè $X'_j \subset X_{i'}$ per qualche $1 \leq i' \leq h$ ed $X_i \subset X_{i'}$ dà $i = i'$, questo implica allora che $\ell = h$ e che le $(X'_1,\ldots,X'_\ell)$ siano una permutazione delle $(X_1,\ldots,X_h)$. $\square$

Esempio VII.1.11. Diciamo che $(X,0)$ è un'ipersuperficie se
$$X = N(U;f),$$
con U intorno aperto connesso di 0 in $\mathbb{C}^n$, $f \in \mathcal{O}(U) \setminus 0$ ed $f(0) = 0$. Se
$$f = f_1^{d_1} \cdots f_h^{d_h}$$
è una decomposizione di f nel prodotto di primi distinti, allora $\sqrt{(f)} = (f_1 \cdots f_h)$ ed
$$(X,0) = (X(U;f_1),0) \cup \cdots \cup (N(U;f_h),0)$$
è la decomposizione di $(X,0)$ nelle sue componenti irriducibili.

2. Algebre analitiche

Definizione VII.2.1. Un'*algebra analitica* su $\mathbb{C}$ è un'algebra $\mathbb{A}$ su $\mathbb{C}$, isomorfa ad un quoziente
$$\mathbb{A} \simeq \mathcal{O}_{n,0}/\mathcal{I} \tag{7.2.1}$$
dell'anello dei germi di funzioni olomorfe in $0 \in \mathbb{C}^n$, per qualche intero $n \geq 1$, rispetto ad un suo ideale $\mathcal{I}$.

Proposizione VII.2.2. *Ogni algebra analitica è Noetheriana e locale*[2].

Definizione VII.2.3. Data un'algebra analitica $\mathbb{A}$, indicheremo nel seguito con $\mathfrak{m}_{\mathbb{A}}$ il suo ideale massimale.

Definizione VII.2.4. Un elemento f di un'algebra analitica $\mathbb{A}$ è *nilpotente* se $f^\nu = 0$ per $\nu \gg 1$. L'insieme $\mathfrak{n}_{\mathbb{A}}$ degli elementi nilpotenti forma un ideale di $\mathbb{A}$, che si dice il suo *nilradicale*. Chiarmente, $\mathfrak{n}_{\mathbb{A}} \subset \mathfrak{m}_{\mathbb{A}}$.

Diciamo che $\mathbb{A}$ è *ridotta* se $\mathfrak{n}_{\mathbb{A}} = 0$. Osserviamo che $\mathbb{A} = \mathcal{O}_{n,0}/\mathcal{I}$ è ridotta[3] se e soltanto se $\mathcal{I}$ è un *ideale radicale*, cioè se $\sqrt{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$.

Osservazione VII.2.5. Se $(X,0)$ è un germe di varietà analitica in $0 \in \mathbb{C}^n$, allora $\mathcal{O}_{n,0}/\mathcal{I}_{(0)}(X)$ è un'algebra analitica ridotta.

Definizione VII.2.6. Se $(X,0)$ è un germe di varietà analitica in $0 \in \mathbb{C}^n$, indicheremo con $\mathcal{O}_{X,0}$ la corrispondente algebra analitica
$$\mathcal{O}_{X,0} = \mathcal{O}_{n,0}/\mathcal{I}_{(0)}(X). \tag{7.2.2}$$

Teorema VII.2.7 (di normalizzazione di Noether). *Per ogni algebra analitica $\mathbb{A}$ esiste un intero non negativo m ed un omomorfismo finito*[4] *iniettivo di algebre analitiche*
$$\mathcal{O}_{m,0} \to \mathbb{A}. \tag{7.2.3}$$

[2] Ricordiamo che una $\mathbb{C}$-algebra $\mathbb{A}$ è *locale* se è un anello locale e, detto $\mathfrak{m}_{\mathbb{A}}$ il suo ideale massimale, $\mathbb{A}/\mathfrak{m}_{\mathbb{A}} \simeq \mathbb{C}$.

[3] Ricordiamo che il *radicale (di Jacobson)* di un ideale $\mathbb{I}$ di un anello $\mathbb{A}$ è l'ideale $\sqrt{\mathbb{I}} = \{a \in \mathbb{A} \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ tale che } a^m \in \mathbb{I}\}$.

[4] Se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono due anelli, un omomorfismo $\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ definisce su $\mathbb{B}$ una struttura di $\mathbb{A}$-modulo, per l'operazione $a \cdot b = \phi(a)b$ se $a \in \mathbb{A}$ e $b \in \mathbb{B}$. Diciamo che ϕ è *finito* se $\mathbb{B}$, con questa struttura, è un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito.

Dimostrazione. Per definizione, $\mathbb{A}$ è isomorfa ad un quoziente $\mathcal{O}_{n,0}/\mathcal{I}$, ove $\mathcal{I}$ è un ideale di $\mathcal{O}_{n,0}$. L'omomorfismo $\pi : \mathcal{O}_{n,0} \to \mathbb{A}$ definito dalla proiezione canonica di $\mathcal{O}_{n,0}$ sul quoziente $\mathcal{O}_{n,0}/\mathcal{I}$ è finito.

Sia m il minimo intero non negativo per cui esista un omomorfismo finito $\phi : \mathcal{O}_{m,0} \to \mathbb{A}$. Se ϕ non fosse iniettivo, potremmo trovare un elemento non nullo $f_{(0)} \in \mathcal{O}_{m,0}$ per cui $\phi(f_{(0)}) = 0$. La ϕ per passaggio al quoziente definisce un omomorfismo finito $\hat{\phi} : \mathcal{O}_{m,0} \to \mathbb{A}$. A meno di un cambiamento lineare di coordinate in $\mathbb{C}^m$, potremmo supporre che f abbia ordine finito rispetto a z_m. Per il teorema di divisione di Weierstrass, l'omomorfismo canonico $\iota : \mathcal{O}_{m-1,0} \to \mathcal{O}_{m,0}/(f)$ sarebbe allora finito ed avremmo allora, per composizione, un omomorfismo finito di $\mathcal{O}_{m-1,0}$ in $\mathbb{A}$:

$$\mathcal{O}_{m-1,0} \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}/(f) \xrightarrow{\hat{\phi}} \mathbb{A},$$

che contraddice la scelta di m. La dimostrazione è completa. □

Definizione VII.2.8. Il minimo intero non negativo m per cui esista un omomorfismo finito (7.2.3) si dice la *dimensione di Weierstrass* di $\mathbb{A}$.

3. Algebre analitiche intere

Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di $\mathcal{O}_{n,0}$. Sia $0 < m < n$ e consideriamo la restrizione della proiezione nel quoziente

$$\mathcal{O}_{m,0} = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m] \to \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{p}. \tag{7.3.1}$$

Se quest'applicazione non è iniettiva, allora $\mathfrak{p}$ contiene un germe non nullo f di funzione olomorfa delle variabili $z_1, \dots, z_m$ e, a meno di un cambiamento lineare di coordinate, possiamo supporre che f abbia ordine finito d rispetto alla variabile distinta z_m. Per il teorema di preparazione, $\mathfrak{p}$ contiene allora un polinomio di Weierstrass $P \in \mathcal{O}_{m-1,0}[z_m]$.

Poiché $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathcal{O}_{n,0}$, l'applicazione surgettiva $\mathcal{O}_{n,0} \to \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{p}$ non è iniettiva. Quindi, a meno di un cambiamento lineare di variabili, $\mathfrak{p}$ contiene un polinomio di Weierstrass in $\mathcal{O}_{n-1,0}[z_n]$. Iterando questo ragionamento, otteniamo

Proposizione VII.3.1. *Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di $\mathcal{O}_{n,0}$. Esiste un intero k positivo tale che,*

(1) *a meno di un cambiamento lineare di coordinate olomorfe in $\mathbb{C}^n$, per ogni $j = 1, \dots, k$, l'ideale $\mathfrak{p}$ contenga un polinomio di Weierstrass $P_j \in \mathcal{O}_{n-j,0}[z_{n-j+1}]$ nella variabile distinta z_{n-j+1};*
(2) *la restrizione della proiezione nel quoziente $\mathcal{O}_{n-k,0} \to \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{p}$ sia iniettiva;*
(3) *il quoziente $\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{p}$ è un $\mathcal{O}_{n-k,0}$-modulo di tipo finito;*
(4) $k = \mathrm{ht}_{\mathcal{O}_{n,0}}(\mathfrak{p})$*;*
(5) *k è la codimensione in 0 della varietà analitica $X(\mathfrak{p})$.*

Dimostrazione. I punti (1), (2) e (3) sono conseguenze della discussione precedente e del teorema di divisione di Weierstrass. Osserviamo poi che, posto $m=n-k$, gli elementi $x_1,\dots,x_m,P_1,\dots,P_k$ definiscono un sistema di parametri in $\mathcal{O}_{n,0}$, e che $k\le \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. Inoltre, $\dim(\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{p})=\dim(\mathcal{O}_{m,0})=m$, da cui $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})\le n-m=k$ e quindi la (4). Infine, otteniamo la (5) considerando l'intersezione di $X(\mathfrak{p})$ con il sottospazio $\{z_{m+1}=0,\dots,z_n=0\}$. $\square$

Gli anelli $\mathcal{O}_{m,0}$ ($m\in\mathbb{N}$) sono fattoriali (Teorema VI.4.2) e quindi anche normali. Possiamo quindi applicare il Teorema XII.3.8 per ottenere la descrizione di un germe di varietà analitica irriducibile

Teorema VII.3.2. *Sia $\mathfrak{p}$ ideale primo di $\mathcal{O}_{n,0}$ e sia $(X,0)$ il germe di varietà analitica in $0\in\mathbb{C}^n$ da esso definita. Esiste allora un intero positivo k tale che, posto $m=n-k$, per opportune coordinate lineari olomorfe $z_1,\dots,z_n$, siano verificate le seguenti condizioni:*

(1) *$\mathfrak{p}$ contiene un polinomio di Weierstrass $P\in\mathcal{O}_{m,0}[z_{m+1}]$ irriducibile di grado d;*
(2) *esistono polinomi $Q_j\in\mathcal{O}_m[z_{m+1}]$, di grado minore di d, per $j=m+2,\dots,n$, tali che*

$$\Delta(z_1,\dots,z_m)z_j-Q_j(z_1,\dots,z_m,z_{m+1})\in\mathfrak{p},\quad \textit{per } j=m+2,\dots,n, \tag{7.3.2}$$

ove $\Delta\in\mathcal{O}_{m,0}$ è il discriminante di P rispetto alla variabile distinta z_{m+1}.

Viceversa, abbiamo

Proposizione VII.3.3. *Supponiamo che l'algebra analitica $\mathbb{B}$ sia un dominio d'integrità, e che vi sia un morfismo iniettivo di anelli unitari $\mathcal{O}_{m,0}\to\mathbb{B}$ che renda $\mathbb{B}$ un $\mathcal{O}_{m,0}$-modulo di tipo finito. Allora $\mathbb{B}$ è isomorfo ad un quoziente $\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{p}$, per un ideale primo $\mathfrak{p}$ di $\mathcal{O}_{n,0}$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che $\mathcal{O}_{m,0}\subset\mathbb{B}$. Sia $\mathfrak{m}_{m,0}$ l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{m,0}$ ed $\mathfrak{n}$ un qualsiasi ideale massimale di $\mathbb{B}$ che contenga $\mathfrak{m}_{m,0}$. Allora, poiché $\mathfrak{n}\cap\mathcal{O}_{m,0}$ è un ideale di $\mathcal{O}_{m,0}$, avremo $\mathfrak{m}_{m,0}=\mathfrak{n}\cap\mathcal{O}_{m,0}$.

Se $b\in\mathbb{B}$, esiste un polinomio monico $P\in\mathcal{O}_{m,0}[w]$ tale che $P(b)=0$. Per il teorema di preparazione di Weierstrass, e per l'unicità del quoziente nel teorema di divisione di Weierstrass, $P=P'P''$, con P' polinomio di Weierstrass in $\mathcal{O}_{m,0}[w]$ e $P''\in\mathcal{O}_{m,0}[w]$ un altro polinomio, anch'esso monico, con $P''(0)\neq 0$. Siano

$$\begin{aligned} P'(w)\ &= w^d+a_1(z)w^{d-1}+\dots+a_{d-1}(z)w+a_d(z),\\ &\qquad\qquad \text{con}\quad a_1,\dots,a_{d-1},a_d\in\mathfrak{m}_{m,0},\\[1ex] P''(w)\ &= w^h+c_1(z)w^{h-1}+\dots+c_{h-1}(z)w+c_h(z),\\ &\qquad\qquad \text{con}\quad c_1,\dots,c_{h-1},c_h\in\mathcal{O}_{m,0},\ c_h(0)\neq 0.\end{aligned}$$

Poiché abbiamo supposto che $\mathbb{B}$ fosse un dominio d'intgegrità, deve risultare o $P'(b)=0$, oppure $P''(b)=0$. Consideriamo i due casi.

(1) Se $P'(b)=0$, allora

$$b^d=-(a_1(z)b^{d-1}+\dots+a_{d-1}(z)b+a_d(z))\in\mathfrak{m}_{m,0}\cdot\mathbb{B}\subset\mathfrak{n},$$

e quindi, per la massimalità, $b \in \mathfrak{n}$.

(2) Se $P''(b) = 0$, allora, poiché c_h è un'unità in $\mathcal{O}_{m,0}$ e quindi anche in $\mathbb{B}$, l'elemento

$$-c_h^{-1}(z)(b^{h-1} + c_1(z)b^{h-2} + \cdots + c_{h-1}(z)) \in \mathbb{B}$$

è inverso di b in $\mathbb{B}$ e pertanto $b \notin \mathfrak{n}$.

In particolare, gli elementi b di $\mathbb{B} \setminus \mathfrak{n}$ soddisfano $P''(b) = 0$ e pertanto sono invertibili. Quindi $\mathbb{B}$ è un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{n}$.

Siano ora $b_1, \dots, b_k$ generatori di $\mathfrak{n}$ su $\mathcal{O}_{m,0}$ e siano $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{O}_{m,0}[w]$ polinomi monici di grado minimo degli elementi $b_1, \dots, b_k$. Osserviamo che ciascun P_j, per le (1) e (2), è un polinomio di Weierstrass in $\mathcal{O}_{m,0}[w]$, nella variabile distinta w, irriducibile in $\mathcal{O}_{m,0}[w]$ ed in $\mathcal{O}_{m+1,0}$.

Sia $n = m + k$, ed associamo ad ogni indice j il polinomio $p_j(z) = P_j(z_1, \dots, z_m, z_{m+j}) \in \mathcal{O}_{m,0}[z_{m+1}, \dots, z_n] \subset \mathcal{O}_{n,0}$. Dico che allora allora $\mathbb{B} \simeq \mathcal{O}_{n,0}/(p_1, \dots, p_k)$.

L'applicazione canonica

$$\mathcal{O}_{m,0}[z_{m+1}, \dots, z_n]/(p_1, \dots, p_k) \to \mathcal{O}_{n,0}/(p_1, \dots, p_k),$$

è un isomorfismo. Infatti, ogni $f \in \mathcal{O}_{n,0}$ ha, modulo l'ideale $(p_1, \dots, p_k)$, un unico rappresentante della forma

$$\sum\nolimits_{\substack{m<j\leq n \\ 0\leq r_j<d_j}} f_{r_{m+1},\dots,r_n} z_{m+1}^{r_{m+1}} \cdots z_n^{r_n}, \quad \text{con} \quad f_{r_{m+1},\dots,r_n} \in \mathcal{O}_{m,0}.$$

Quindi $\mathbb{B}$ è isomorfo ad un quoziente $\mathcal{O}_{m,0}[z_{m+1}, \dots, z_n]/\mathfrak{q}$, ove l'ideale $\mathfrak{q}$ di $\mathcal{O}_{m,0}[z_{m+1}, \dots, z_n]$ è il nucleo dell'omomorfismo

$$\mathcal{O}_{m,0}[z_{m+1}, \dots, z_n] \xrightarrow{\ \phi\ } \mathbb{B}$$
$$\text{definito da} \quad \phi(z_{m+j}) = b_j.$$

Quindi $\mathbb{B} \simeq \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{p}$, ove $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cdot \mathcal{O}_{n,0}$, e $\mathfrak{p}$ è primo perché $\mathbb{B}$ è un dominio d'integrità. $\square$

Utilizzando il Teorema XII.3.8, otteniamo

PROPOSIZIONE VII.3.4 (Normalizzazione). *Sia $\mathbb{B}$ un'algebra analitica che sia anche un dominio d'integrità. Supponiamo vi sia un morfismo iniettivo di anelli unitari $\mathcal{O}_{m,0} \to \mathbb{B}$, che renda $\mathbb{B}$ un $\mathcal{O}_{m,0}$-modulo di tipo finito. Sia $\tilde{\mathbb{B}}$ la chiusura integrale di $\mathbb{B}$ nel suo campo delle frazioni $\mathbb{B}_{(0)}$. Allora $\tilde{\mathbb{B}}$ è ancora un $\mathcal{O}_{m,0}$-modulo di tipo finito ed un anello normale. L'applicazione canonica $\mathbb{B} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{B}}$ è un omomorfismo di anelli locali.* $\square$

DEFINIZIONE VII.3.5. L'anello $\tilde{\mathbb{B}}$ si dice il *normalizzato* di $\mathbb{B}$.

Per la Proposizione VII.3.3, è $\mathbb{B} \simeq \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{p}$ per un opportuno $n \geq m$ ed un ideale primo $\mathfrak{p}$ di $\mathcal{O}_{n,0}$. Ancora, abbiamo $\tilde{\mathbb{B}} = \mathcal{O}_{n',0}/\mathfrak{p}'$ per un $n' \geq n$ ed un ideale primo $\mathfrak{p}'$ in $\mathcal{O}_{n',0}$ e l'inclusione $\mathbb{B} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{B}}$ definisce un'applicazione olomorfa finita $(X(\mathfrak{p}'), 0) \to (X(\mathfrak{p}, 0)$ (vedi §6).

Il germe di varietà analitica $(X(\mathfrak{p}'),0)$ in $0\in\mathbb{C}^{n'}$ si dice il *normalizzato* di $(X(\mathfrak{p}),0)$.

4. Il Nullstellensatz

Teorema VII.4.1 (Nullstellensatz di Rückert). *Se $\mathcal{I}$ è un ideale di $\mathcal{O}_{n,0}$, allora*

$$\mathcal{I}_{(0)}(X(\mathcal{I}))=\sqrt{\mathcal{I}}. \tag{7.4.1}$$

Dimostrazione. Poiché se una potenza di $f_{(0)}$ si annulla su un germe $X_{(0)}$ di varietà analitica in 0, anche $f_{(0)}$ si annulla su $X_{(0)}$, otteniamo subito l'inclusione $\sqrt{\mathcal{I}}\subset\mathcal{I}_{(0)}(X(\mathcal{I}))$. Rimane quindi da dimostrare l'inclusione opposta.

Dimostriamo prima il teorema nel caso in cui $\mathcal{I}$ sia un ideale principale, generato dal germe in 0 di una funzione olomorfa f, definita in un intorno aperto U di 0.

Dico che possiamo ricondurci al caso in cui il germe $f_{(0)}$ sia irriducibile. Supponiamo infatti di sapere che il teorema vale per ideali principali con generatore irriducibile e sia $f=f_1\cdots f_m$ la decomposizione di f in un prodotto in cui il germe di ciascun fattore sia irriducibile. Un germe $g_{(0)}$ che si annulla su $X(f_{(0)})$, si annulla su ciascuno dei germi $X(f_{j,(0)})$. Poiché abbiamo supposto il teorema valido per gli ideali principali con generatore irriducibile, avremmo allora, per qualche intero positivo k_j, $f_{j,(0)}|g_{(0)}^{k_j}$, per $j=1,\dots,m$ e quindi $f_{(0)}=[f_{1,0}\cdots f_{m,0}]|g_{(0)}^{k_1+\dots+k_m}$.

Supponiamo ora che $f_{(0)}$ sia irriducibile e sia $g_{(0)}$ un germe in $\mathcal{O}_{n,0}$ che si annulla su $X(f_{(0)})$. Se $g_{(0)}=0$, non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi che $g_{(0)}\neq 0$. Poiché sono entrambi diversi da zero, possiamo supporre che sia $f_{(0)}$ che $g_{(0)}$ abbiano ordine finito rispetto a z_n. Possiamo quindi scrivere

$$f=e_1\varpi,\quad g=e_2\eta,$$

con $\varpi,\eta\in\mathcal{O}_{n-1,0}[z_n]$ polinomi di Weierstrass ed e_1,e_2 unità in $\mathcal{O}_{n,0}$. È chiaro che possiamo ridurci al caso in cui sia f che g coincidano con il loro polinomio di Weierstrass rispetto a z_n. Utilizzando il teorema di divisione, possiamo scrivere $g=qf+r$, con $r\in\mathcal{O}_{n-1,0}[z_n]$ di grado in z_n minore del grado d di f rispetto a z_n. Dico che $r=0$. Infatti, per $z'=(z_1,\dots,z_{n-1})$ in un sottoinsieme denso di un piccolo intorno di 0 in $\mathbb{C}^{n-1}$, il polinomio di una variabile $r_{z'}(z_n)=r(z',z_n)$ ha d radici distinte ed è perciò è il polinomio nullo di z_n. Questo implica che i coefficienti in $\mathcal{O}_{n-1,0}$ di r sono nulli su un sottoinsieme denso e quindi identicamente nulli.

Consideriamo ora il caso generale.

Decomponiamo $(X,0)$ nell'unione delle sue componenti irriducibili $(X,0)=(X_1,0)\cup\dots\cup(X_h,0)$. È $X_i=X_{(0)}(\mathfrak{p}_i)$, con $\mathfrak{p}_i$ ideali primi di $\mathcal{O}_{n-1,0}$ tali che $\sqrt{\mathcal{I}_{(0)}}$ sia l'intersezione $\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_h$. Poiché $(X(\mathcal{I}_{(0)}),0)=\bigcup_{h=1}^{\ell}(X(\mathfrak{p}_h),0))$, possiamo ricondurci al caso in cui $\mathcal{I}_{(0)}=\mathfrak{p}$ sia un ideale primo di $\mathcal{O}_{n,0}$.

Utilizziamo il Teorema VII.3.2. Sia $g \in \mathcal{O}_{n,0}$ un germe di funzione olomorfa che si annulla in $(X(\mathfrak{p}), 0)$. Per la Proposizione VII.3.1 e il Teorema di divisione di Weierstrass possiamo supporre che $g \in \mathcal{O}_{m,0}[z_{m+1}, \ldots, z_n]$. Sia $P \in \mathcal{O}_{m,0}[z_{m+1}]$ il polinomio del punto (1) del Teorema VII.3.2 e $\Delta \in \mathcal{O}_{m,0}$ il suo discriminante rispetto a z_{m+1}. Per un intero positivo ν abbiamo allora $\Delta^\nu g - \phi(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}) \in \mathfrak{p}$, per un polinomio $\phi \in \mathcal{O}_{m,0}[z_{m+1}]$. Chiaramente ϕ si annulla sul germe di varietà analitica in $0 \in \mathbb{C}^{m+1}$ definita da P, che si ottiene come immagine di $(X(\mathfrak{p}), 0)$ mediante la proiezione canonica $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{m+1}$ nelle prime $(m+1)$ coordinate. Per la prima parte della dimostrazione, ne ricaviamo che $\Delta^\nu g \in \mathfrak{p}$ e quindi $g \in \mathfrak{p}$ perché $\mathfrak{p}$ è primo e non contiene il discriminante Δ di P rispetto a z_{m+1}. $\square$

5. Punti singolari

DEFINIZIONE VII.5.1. Sia X una sottovarietà analitica di un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$. Un punto $z \in X$ si dice *regolare* se esiste un intorno aperto U di z in Ω ed $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(U)$ tali che

$$\begin{cases} X \cap U = N(U; f_1, \ldots, f_k), \\ \operatorname{rank}_{\mathbb{C}} \dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_k)}{\partial z_1, \ldots, z_k} = k. \end{cases} \tag{7.5.1}$$

Per il teorema delle funzioni implicite, in un opportuno sistema di coordinate olomorfe $w_1, \ldots, w_k$, in un punto regolare z di X, una X di codimensione k in z si può descrivere mediante $\{w_1 = 0, \ \ldots, \ w_k = 0\}$. Una varietà analitica coincide cioè con una varietà liscia in un intorno di un suo punto regolare.

PROPOSIZIONE VII.5.2. *Sia X una sottovarietà analitica in un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$. Sia, per ogni $z \in X$, $\mathcal{I}_{(z)}(X)$ l'ideale dei germi di funzioni olomorfe in $z \in \mathbb{C}^n$ che si annullano su X. Se $f_1, \ldots, f_m$ sono funzioni olomorfe in un intorno di $z \in X$ i cui germi in z generano l'ideale $\mathcal{I}_{(z)}(X)$, definiamo*

$$r_X(z) = \operatorname{rank}_{\mathbb{C}} \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}. \tag{7.5.2}$$

Il numero $r_X(z)$ non dipende dal sistema di generatori scelti. Il punto z è un punto regolare di X se e soltanto se $r_X(z)$ è uguale alla codimensione di X in z. I punti regolari di X formano un aperto denso di X. I punti singolari di X formano una sottovarietà analitica $S(X)$ di X. $\square$

6. Mappe olomorfe e morfismi di algebre analitiche

DEFINIZIONE VII.6.1. Siano X una sottovarietà analitica di un aperto U di $\mathbb{C}^n$ ed Y una sottovarietà analitica di un aperto W di $\mathbb{C}^m$. Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice *olomorfa* in $z^0 \in X$ se esiste un intorno aperto U di z^0 in Ω ed un'applicazione olomorfa $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}^m$ tale che

$$\tilde{f}(z) = f(z) \quad \forall z \in X \cap U. \tag{7.6.1}$$

Diciamo che due applicazioni olomorfe $f, g : X \to Y$ definiscono lo stesso *germe d'applicazione olomorfa* in $z^0 \in X$ se esiste un intorno aperto U di z^0 in Ω tale che $f(z) = g(z)$ per ogni $z \in X \cap U$.

PROPOSIZIONE VII.6.2. *Se $f : (X, 0) \to (Y, 0)$ è un'applicazione olomorfa, allora la $f^*(g) = g \circ f$ definisce un omomorfismo*

$$f^* : \mathcal{O}_{Y,0} \to \mathcal{O}_{X,0}. \tag{7.6.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ un'applicazione olomorfa che definisce la f. Abbiamo chiaramente $f^*(\mathcal{I}_{(0)}(Y)) \subset \mathcal{I}_{(0)}(X)$ e quindi la (7.6.2) è ben definita. □

Viceversa, abbiamo

PROPOSIZIONE VII.6.3. *Ogni algebra analitica intera $\mathbb{A}$ è della forma $\mathbb{A} = \mathcal{O}_{X,0}$ per un germe $(X, 0)$ di varietà analitica.*

Siano $(X, 0)$ ed $(Y, 0)$ due germi di varietà analitica in $\mathbb{C}^n$ ed in $\mathbb{C}^m$, rispettivamente. Ad ogni omomorfismo unitario $\phi : \mathcal{O}_{Y,0} \to \mathcal{O}_{X,0}$ corrisponde un'applicazione olomorfa $f : (X, 0) \to (Y, 0)$ tale che $\phi = f^*$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo in primo luogo che $\phi(\mathfrak{m}_{Y,0}) \subset \mathfrak{m}_{X,0}$. Infatti, $\phi(1) = 1$ ed $1 - \phi(b) = \phi(1 - b)$ è invertibile per ogni $b \in \mathfrak{m}_{Y,0}$.

Siano $w_1, \ldots, w_m$ le coordinate olomorfe di $\mathbb{C}^m$. Per ogni $1 \le j \le m$ sia b_j la restrizione di w_j ad $\mathcal{O}_{Y,0}$. Allora $a_j = \phi(b_j) \in \mathfrak{m}_{X,0}$. Possiamo allora trovare un intorno aperto U di 0 in $\mathbb{C}^n$ e funzioni olomorfe $f_j \in \mathcal{O}(U)$, per $j = 1, \ldots, m$, tali che $f_{j,(0)} \in \mathfrak{m}_{n,0}$ e che a_j sia la restrizione ad $(X, 0)$ di $f_{j,0}$. La $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}^m$ definita da $\tilde{f}(z) = (f_1(z), \ldots, f_m(z))$ definisce allora un germe di applicazione olomorfa $f : (X, 0) \to (Y, 0)$ tale che $\phi = f^*$. Si verifica poi che la f così trovata è univocamente determinata dalla ϕ. □

DEFINIZIONE VII.6.4. Un'applicazione olomorfa $f : (X, 0) \to (Y, 0)$ si dice un *isomorfismo* se esiste un'applicazione olomorfa $g : (Y, 0) \to (X, 0)$ tale che $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ e $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

7. Il teorema di Oka

In questo paragrafo dimostriamo un importante teorema[5] relativo ai *moduli di relazioni*.

TEOREMA VII.7.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ ed*

$$F(z) = (f_{i,j}(z))_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q}}$$

una matrice $p \times q$ con coefficienti $F_{i,j} \in \mathcal{O}(\Omega)$ olomorfi in Ω. Per ogni $z \in \Omega$ poniamo

$$\mathcal{R}_{(z)}(F) = \left\{ (g_{1,(z)}, \ldots, g_{q,(z)}) \in \mathcal{O}_{n,z} \;\middle|\; \begin{array}{r} \sum_{j=1}^{q} f_{i,j,(z)} g_{j,(z)} = 0, \\ per \quad i = 1, \ldots, p \end{array} \right\}. \tag{7.7.1}$$

[5]Kiyoshi Oka: *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII. Sur quelques notions arithmtiques.* Bull. Soc. Math. France **78**, (1950). 1-27.

Per ogni punto $z^0 \in \Omega$ esiste un intorno aperto U di z^0 in Ω e, per un intero $r > 0$, una matrice

$$G(z) = (g_{j,h}(z))_{\substack{1\le j\le q\\ 1\le h\le r}}$$

con coefficienti $g_{j,h} \in \mathcal{O}(U)$ olomorfi in U tale che, per ogni $z \in U$, l'$\mathcal{O}_{n,z}$-modulo $\mathcal{R}_{(z)}(F)$ sia generato dai germi in z definiti dalle colonne della matrice $G(z)$.

Dimostrazione. Possiamo supporre che il punto z^0 sia l'origine $0 \in \mathbb{C}^n$.

Ragioniamo per induzione sull'intero p, supponendo dapprima $p > 1$ ed il teorema dimostrato per matrici F con meno di p righe. Sia F^1 la prima riga della matrice F. Chiaramente $\mathcal{R}_{(z)}(F) \subset \mathcal{R}(F^1)$. Per l'ipotesi induttiva, esiste una matrice

$$H(z) = (h_{j,k}(z))_{\substack{1\le j\le q\\ 1\le k\le s}}, \quad \text{con} \quad h_{j,k} \in \mathcal{O}(U'),\ U' \text{ intorno di } 0 \text{ in } \Omega,$$

tale che $\mathcal{R}_{(z)}(F^1)$ sia generato dai germi in z definiti dalle colonne di $H(z)$ per ogni $z \in U'$.

Per $z \in U'$, gli elementi di $\mathcal{R}_{(z)}(F)$ sono della forma

$$(*) \qquad g_{j,(z)} = \sum\nolimits_{k=1}^{s} h_{j,k,(z)}\phi_{k,(z)}, \quad \text{con} \quad \phi_{k,(z)} \in \mathcal{O}_{n,z}.$$

Tenuto conto che le colonne di $H(z)$ definiscono germi di $\mathcal{R}_{(z)}(F^1)$, la condizione che l'elemento $(*)$ appartenga a $\mathcal{R}_{(z)}(F)$ è equivalente a

$$\sum\nolimits_{j=1}^{q}\sum\nolimits_{k=1}^{s} f_{i,j,(z)}h_{j,k,(z)}\phi_{k,(z)} = 0, \qquad i = 2,\dots,p.$$

Poiché la matrice

$$\Psi(z) = \left(\sum\nolimits_{j=1}^{q}\sum\nolimits_{k=1}^{s} f_{i,j,(z)}h_{j,k,(z)}\right)_{\substack{2\le i\le p\\ 1\le k\le s}}$$

ha $(p-1)$ righe, per l'ipotesi induttiva esiste un intorno aperto U di 0 in U', un intero $r \geq 1$, ed una matrice

$$\Phi(z) = (\phi_{k,\nu}(z)))_{\substack{1\le k\le s\\ 1\le \nu\le r}}, \quad \text{con} \quad \phi_{k,\nu} \in \mathcal{O}(U),$$

tale che i germi in z delle sue colonne generino $\mathcal{R}_{(z)}(\Psi)$ per ogni $z \in U$. Allora $G(z) = H(z)\Phi(z)$ in U soddisfa la tesi.

Rimane da dimostrare che il teorema è vero nel caso $p = 1$. Ragioniamo per induzione sulla dimensione n dello spazio. Se $n = 0$ la F è un covettore a coefficienti complessi e la G una matrice le cui colonne formano un sistema finito di generatori dell'iperpiano di $\mathbb{C}^q$ dei vettori annullati da F.

Supponiamo quindi $n > 0$ ed il teorema vero nel caso $(n-1)$-dimensionale. Sia $F = (f_1, \dots, f_q)$. Possiamo allora supporre, mediante un cambiamento lineare di variabili, che $f_1, \dots, f_q$ abbiamo ordine finito rispetto alla variabile distinta z_n. Possiamo allora ricondurci al caso in cui $f_j \in \mathcal{O}_{n-1}(\omega)[z_n]$, ove abbiamo indicato con $\mathcal{O}_{n-1}(\omega)$ l'anello delle funzioni olomorse su un intorno aperto ω di 0 in $\mathbb{C}^{n-1}$, e il suo germe in 0 sia un polinomio di Weierstrass di ordine d_j rispetto a z_n. Possiamo supporre, a meno di riordinare le f_j, che $d_1 \leq d_2 \leq d_q = d$.

La nuova $F = (f_1, \dots, f_q)$ è definita su $\omega \times \mathbb{C}$. Possiamo quindi supporre che $\Omega = \omega \times \mathbb{C}$. Dimostriamo allora il

Lemma VII.7.2. *Per ogni fissato $z^0 = (z^{0'}, z_n^0) \in \Omega$, l'$\mathcal{O}_{n,\,z^0}$-modulo $\mathcal{R}_{(z^0)}(f_1, \dots, f_q)$ è generato dai suoi elementi che appartengono ad $\mathcal{O}_{n-1,\,z^{0'}}[z_n]$ ed hanno, come polinomi in z_n, grado minore o uguale a d.*

Per il teorema di preparazione di Weierstrass, $f_j = f_j' f_j''$, con f_j' un polinomio di Weierstrass in $\mathcal{O}_{n-1,\,z^{0'}}[z_n - z_n^0]$. Per l'unicità nel teorema di divisione di Weierstrass, anche f_j'' è un polinomio in z_n. In particolare, il polinomio di Weierstrass f_j' ha grado d_j' in z_n minore o uguale a d_j. Sia $(g_1, \dots, g_q) \in \mathcal{R}_{(z)}(F)$. Utilizzando il teorema di divisione di Weierstrass, abbiamo

$$\begin{aligned} g_j = \phi_j f_q + r_j \quad &\text{con} \quad r_j \in \mathcal{O}_{n-1,\,z^{0'}}[z_n] \\ &\text{e} \quad \deg_{z_n}(r_j) < d_q' \leq d, \text{ per } 1 \leq j < q. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione $\sum g_j f_j = 0$, troviamo che

$$(g_1, \dots, g_q) = (r_1, \dots, r_q) + \sum_{j=1}^{q-1} \phi_j (f_q e_j - f_j e_q),$$

ove $e_1, \dots, e_q$ è la base canonica di $\mathbb{C}^q$, e gli r_j, per $1 \leq j \leq q$, sono polinomi in $\mathcal{O}_{n-1,\,z^0{}'}[z_n]$, di grado minore di d. Quindi, $\mathcal{R}_{(z)}(F)$ è generato dai germi di $(f_q e_j - f_j e_q)$ per $j = 1, \dots, q-1$ e dagli elementi $(r_1, \dots, r_q)$ che sono, rispetto a z_n, polinomi di grado minore di d. Questo dimostra il Lemma.

Per concludere la dimostrazione del Teorema di Oka, basta osservare che i coefficienti in $\mathcal{O}_{m-1,\,z'}$ degli elementi di $\mathcal{R}_{(z)}(F)$ che appartengono ad $\left[\mathcal{O}_{n-1,\,z'}[z_n]\right]^q$ ed hanno tutte le componenti di gradi minori o uguali a d sono gli elementi di un $\mathcal{R}_{z'}(F')$ per una matrice F' di funzioni olomorfe in $\omega \subset \mathbb{C}^{n-1}$, ed applicare l'induzione rispetto alla dimensione n. $\square$

8. Dimensione di un germe di varietà analitica

Ricordiamo che la *dimensione di Weierstrass* di un'algebra analitica $\mathbb{A}$ è il più piccolo intero $m \geq 0$ per cui vi sia un omomorfismo finito di algebre analitiche $\phi : \mathcal{O}_{m,\,0} \to \mathbb{A}$.

Se $\mathbb{A} \simeq \mathcal{O}_{n,0}/\mathcal{I}$ e $\dim(\mathbb{A}) = m$, allora un omomorfismo finito di algebre analitiche $\phi : \mathcal{O}_{m,\,0} \to \mathbb{A}$ definisce un'applicazione olomorfa surgettiva ϕ^* di un intorno aperto di 0 in $V(\mathcal{I})$ su un intorno aperto U di 0 in $\mathbb{C}^m$, e viceversa (vedi §6).

Definizione VII.8.1. La *dimensione di Chevalley*, o *dimensione algebrica*, di $\mathbb{A}$ è il più piccolo intero $m \geq 0$ per cui vi siano elementi $a_1, \dots, a_m$ non invertibili in $\mathbb{A}$ tali che $\mathbb{A}/(a_1, \dots, a_m)$ sia uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{C}$.

Una sequenza $(a_1, \ldots, a_m)$ di lunghezza minimale di elementi dell'ideale massimale di $\mathbb{A}$ tali che $\mathbb{A}/(a_1, \ldots, a_m)$ sia uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{C}$ si dice *un sistema di parametri* di $\mathbb{A}$.

PROPOSIZIONE VII.8.2. *La dimensione di Weierstrass e la dimensione di Chevalley di un'algebra analitica coincidono.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\phi : \mathcal{O}_{m,0} \to \mathbb{A}$ è un omomorfismo finito, allora $\mathbb{A}/(\phi(z_1), \ldots, \phi(z_m))$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{C}$. Quindi la dimensione di Chevalley è minore o uguale alla dimensione di Weierstrass.

Viceversa, se $\mathbb{A}/(a_1, \ldots, a_d)$, per $a_1, \ldots, a_d \in \mathfrak{m}_{\mathbb{A}}$, ha dimensione finita su $\mathbb{C}$, l'applicazione $\phi : \mathcal{O}_{d,0} \to \mathbb{A}$ definita da $\phi(z_j) = a_j$, per $j = 1, \ldots, d$, è finita e quindi la dimensione di Weierstrass è minore o uguale di quella di Chevalley, e dunque le due dimensioni coincidono. $\square$

DEFINIZIONE VII.8.3. Indichiamo con $\dim(\mathbb{A})$ la dimensione dell'algebra analitica $\mathbb{A}$.

Se $(X, 0)$ è un germe di varietà analitica, definiamo la sua dimensione, che indicheremo con $\dim(X, 0)$, mediante:

$$\dim(X, 0) = \dim(\mathcal{O}_{X,0}). \tag{7.8.1}$$

Dalla definizione segue immediatamente che la dimensione di una sottovarietà analitica è una funzione semicontinua superiormente:

COROLLARIO VII.8.4. *Sia X una sottovarietà analitica di un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Allora, per ogni punto $x^0 \in X$ esiste un intorno aperto W di x^0 in X tale che* $\dim(X, x) \leq \dim(X, x^0)$ *per ogni $x \in W$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\dim(X, x^0) = m$, dalla definizone di dimensione di Weierstrass segue che possiamo trovare un'applicazione olomorfa finita f di un intorno W di x^0 in X su un aperto U di $\mathbb{C}^m$. In particolare, la f definisce un'applicazione finita nell'intorno di ogni punto x di W, e quindi $\dim(X, x) \leq m$ per ogni punto $x \in W$. $\square$

LEMMA VII.8.5. *Sia $\mathbb{A}$ un'algebra analitica. Per ogni $a \in \mathfrak{m}_{\mathbb{A}}$,*

$$\dim(\mathbb{A}/(a)) \geq \dim(\mathbb{A}) - 1. \tag{7.8.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{B} = \mathbb{A}/(a)$ la proiezione canonica. Se $b_1, \ldots, b_d \in \mathfrak{m}_{\mathbb{B}}$ sono tali che $\mathbb{B}/(b_1, \ldots, b_d)$ sia uno spazio vettoriale di dimensione finita, allora, scelto per ogni $j = 1, \ldots, d$ un elemento $a_j \in \mathfrak{m}_{\mathbb{A}}$ con $\pi(b_j) = a_j$,

$$\mathbb{A}/(a, a_1, \ldots, a_d) \simeq \mathbb{B}/(b_1, \ldots, b_d)$$

è uno spazio vettoriale di dimensione finita. $\square$

LEMMA VII.8.6. *Se $f \in \mathfrak{m}_{n,0}$ ed $f \neq 0$, allora* $\dim(\mathcal{O}_{n,0}/(f)) \leq (n-1)$.

Dimostrazione. A meno di un cambiamento lineare di variabili in $\mathbb{C}^n$, possiamo supporre che f abbia ordine finito $d > 0$ rispetto a z_n. Allora $\mathcal{O}_{n,0}/(z_1, \dots, z_{n-1}, f)$ è, per il teorema di divisione di Weierstrass, uno spazio vettoriale di dimensione $(n+d-1)$ su $\mathbb{C}$. $\square$

Definizione VII.8.7. Sia $\mathbb{A}$ un'algebra analitica, con ideale massimale $\mathfrak{m}_{\mathbb{A}}$ e nilradicale $\mathfrak{n}_{\mathbb{A}}$. Un elemento $a \in \mathfrak{m}_{\mathbb{A}}$ si dice *attivo* se

$$\big(b \in \mathbb{A},\ ab \in \mathfrak{n}_{\mathbb{A}}\big) \Longrightarrow b \in \mathfrak{n}_{\mathbb{A}}. \tag{7.8.3}$$

Osservazione VII.8.8. Gli elementi $a \in \mathfrak{m}_{\mathbb{A}}$ che non sono divisori di zero sono attivi.

Proposizione VII.8.9. *Se a è un elemento attivo di $\mathbb{A}$, allora*

$$\dim(\mathbb{A}/(a)) = \dim(\mathbb{A}) - 1. \tag{7.8.4}$$

Dimostrazione. Per il Lemma VII.8.6 è sufficiente dimostrare che

$$\dim(\mathbb{A}/(a)) \leq \dim(\mathbb{A}) - 1.$$

Sia m la dimensione di $\mathbb{A}$ e sia $\phi : \mathcal{O}_{m,0} \to \mathbb{A}$ un omomorfismo finito ed iniettivo. È sufficiente verificare che c'è un elemento non nullo $b = \phi(f)$, con $f \in \mathfrak{m}_{m,0}$, in $a\mathbb{A} \cap \phi(\mathcal{O}_{m,0})$. Avremo infatti in questo caso un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{m,0} & \xrightarrow{\ \phi\ } & \mathbb{A} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{O}_{m,0}/(f) & \xrightarrow[\ \psi\ ]{} & \mathbb{A}/(a). \end{array}$$

Poiché ϕ e le proiezioni rappresentate dalle frecce verticali sono applicazioni finite, anche la ψ definita dal diagramma commutativo è finita. Quindi

$$\dim(\mathbb{A}/(a)) \leq \dim(\mathcal{O}_{m,0}/(f)) \leq m - 1.$$

Sarà dunque sufficiente trovare $f \in \mathfrak{m}_{m,0}$ con $\phi(f) \in (a)$. Poiché $\phi : \mathcal{O}_{m,0} \to \mathbb{A}$ è finita, l'elemento a è intero su $\phi(\mathcal{O}_{m,0})$. Possiamo quindi determinare un polinomio monico $P \in \mathcal{O}_{m,0}[T]$, diciamo

$$p(T) = T^d + f_1 T^{d-1} + \cdots + f_{d-1} T + f_d,$$

con $f_1, \dots, f_d \in \mathcal{O}_{m,0}$, tale che

$$a^d + \phi(f_1) a^{d-1} + \cdots + \phi(f_{d-1}) a + \phi(f_d) = 0.$$

Se $f_d \neq 0$, poiché $\phi(f_d) \in (a)$, possiamo porre $f = f_d$. Altrimenti, vi sarà un $s < d$ massimale con $f_s \neq 0$. Dall'equazione

$$a^s (a^{d-s} + \phi(f_1) a^{d-s-1} + \cdots + \phi(f_s)) = 0,$$

poiché a è un elemento attivo, segue che $(a^{d-s} + \phi(f_1) a^{d-s-1} + \cdots + \phi(f_s))$ appartiene al nilradicale $\mathfrak{n}_{\mathbb{A}}$, cioè, per un intero $h > 0$,

$$(a^{d-s} + \phi(f_1) a^{d-s-1} + \cdots + \phi(f_s))^h = 0.$$

Quindi $\phi(f_s^h) = (\phi(f_s))^h \in (a)$, e possiamo quindi porre $f = f_s^h$. $\square$

Osservazione VII.8.10. La (7.8.4) è una condizione necessaria, ma non sufficiente affinché a sia attivo.

Consideriamo, ad esempio, $\mathbb{A} = \mathbb{O}_{3,0}/(z_1z_2, z_1z_3)$. È $\dim(\mathbb{A}) = 2$. La classe residua a di z_2 in $\mathbb{A}$ è un divisore di zero in $\mathbb{A}$, ma $\dim(\mathbb{A}/(a)) = \mathcal{O}_{3,0}/(z_1z_3, z_2) = 1$.

Corollario VII.8.11. *La dimensione di $\mathcal{O}_{n,\,0}$ è n.*

Dimostrazione. Ragioniamo per ricorrenza su n.

Per $n = 0$, $\mathcal{O}_{0,\,0} = \mathbb{C}$ e quindi $\dim(\mathcal{O}_{0,\,0}) = 0$.

Supponiamo ora che $n > 1$ e $\dim(\mathcal{O}_{n-1,\,0}) = n-1$. La tesi segue allora dal fatto che z_n definisce un elemento attivo di $\mathcal{O}_{n,\,0}$, ed $\mathcal{O}_{n,\,0}/(z_n) \simeq \mathcal{O}_{n-1,\,0}$. $\square$

Corollario VII.8.12. *Se $(X, 0)$ è un germe di varietà liscia olomorfa di dimensione m in $\mathbb{C}^n$, allora* $\dim(X,\,0) = m$. $\square$

Proposizione VII.8.13. *Sia $(X, 0)$ un germe di varietà analitica irriducibile in $0 \in \mathbb{C}^n$. Allora $(X, 0)$ è un'ipersuperficie se e soltanto se* $\dim(X,\,0) = n - 1$.

Dimostrazione. Se $(X, 0)$ è un'ipersuperficie, allora $\mathcal{I}_{(0)}(X)$ è un ideale principale. È quindi $\mathcal{I}_{(0)}(X) = (f)$ per una $f \in \mathfrak{m}_{n,\,0}$, irriducibile perché $\mathcal{I}_{(0)}(X)$ è primo. Poiché $\mathcal{O}_{X,\,0}$ è un dominio d'integrità il germe di f è attivo e quindi

$$\dim{(X, 0)} = \dim(\mathcal{O}_{n,\,0}/(f)) = \dim(\mathcal{O}_{n,\,0}) - 1 = n - 1.$$

Viceversa, se $(X, 0)$ è irriducibile e di dimensione 1, $\mathcal{I}_{(0)}(X)$ contiene un elemento f irriducibile. Supponiamo per assurdo che $\mathcal{I}_{(0)}(X)$ contenga un elemento g non divisibile per f. Poiché $\mathcal{O}_{n,\,0}/(f)$ è un dominio d'integrità, l'immagine di g in $\mathcal{O}_{n,\,0}/(f)$, essendo diversa da zero, sarebbe un elemento attivo di $\mathcal{O}_{n,\,0}/(f)$, e quindi

$$\dim{(X, 0)} \leq \dim(\mathcal{O}_{n,\,0})/(f, g) = \dim\big((\mathcal{O}_{n,\,0}/(f))/(g)\big) = n - 2.$$

Questo dimostra che $\mathcal{I}_{(0)}(X) = (f)$. $\square$

Nel caso delle ipersuperficie irriducibili si verifica quindi l'idea intuitiva che la codimensione corrisponda al numero minimo di equazioni indipendenti necessarie per definire una sottovarietà. In generale la codimensione dà solo una stima dal basso del numero di equazioni olomorfe indipendenti necessarie per definire localmente una varietà analitica.

Si consideri per esempio il germe di sottovarietà di $\mathbb{C}^4$ in 0, definito da

$$X = \left\{ (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^6 \,\middle|\, \operatorname{rank} \begin{pmatrix} z_1 & z_2^2 & z_2z_4 & z_3 \\ z_2 & z_1z_3 & z_3^2 & z_4 \end{pmatrix} < 2 \right\}.$$

X è il cono di una quartica liscia, ed è una sottovarietà di dimensione due in $\mathbb{C}^4$. Sono comunque necessari almeno quattro determinanti di minori 2×2 per generare l'ideale $\mathcal{I}_{(0)}(X)$.

Definizione VII.8.14. Un germe di varietà analitica $(X,0)$ si dice *un'intersezione completa* in $(\mathbb{C}^n,0)$ se

$$\begin{gathered}\dim(X,0)=m \quad \text{ed} \quad \exists f_1,\dots,f_{n-m}\in\mathfrak{m}_{n,0} \quad \text{tali che}\\ \mathcal{O}_{X,0}=\mathcal{O}_{n,0}/(f_1,\dots,f_{n-m}).\end{gathered} \tag{7.8.5}$$

Definizione VII.8.15. Una k-upla $(a_1,\dots,a_k)$ di elementi di un'algebra analitica $\mathbb{A}$ si dice un'*A-sequenza* se:

(1) $a_1,\dots,a_k\in\mathfrak{m}_{\mathbb{A}}$;
(2) a_1 non è un divisore di 0 in $\mathbb{A}$ e, per ogni ogni $j=2,\dots,m$, la classe residua di a_j in $\mathbb{A}/(a_1,\dots,a_{j-1})$ non è un divisore di 0.

Proposizione VII.8.16. *Se $(a_1,\dots,a_k)$ è un'A-sequenza in $\mathbb{A}$, allora, per ogni $1\le j\le k$,*

$$\dim(\mathbb{A}/(a_1,\dots,a_j))=\dim(\mathbb{A})-j. \tag{7.8.6}$$

Dimostrazione. Si dimostra la (7.8.6) per ricorrenza, utilizzando la Proposizione VII.8.9 ed il fatto che ogni a_j definisce un germe attivo in $\mathbb{A}/(a_1,\dots,a_{j-1})$. $\square$

Quindi la lunghezza di un'A-sequenza di $\mathbb{A}$ *non può superare la sua dimensione*.

Proposizione VII.8.17. *Se $(a_1,\dots,a_k)$ è un'A-sequenza in $\mathbb{A}$, allora $(a_{\sigma_1},\dots,a_{\sigma_k})$, per ogni permutazione $\sigma\in\mathfrak{S}_k$, è ancora un'A-sequenza.*

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso $k=2$.

Dimostriamo che a_2 non è un divisore di 0 in $\mathbb{A}$. In caso contrario, potremmo trovare un $b\in\mathfrak{m}_{\mathbb{A}}$, diverso da 0, per cui $a_2b=0$ in $\mathbb{A}$. Se $\pi:\mathbb{A}\to\mathbb{A}/(a_1)$ è la proiezione nel quoziente, da $\pi(a_2)\pi(b)=0$ segue, che $\pi(b)=0$, perché per ipotesi $\pi(a_2)$ non è un divisore di zero in $\mathbb{A}/(a_1)$. Sarà quindi $b=b_0=b_1a_1$ per qualche $b_1\in\mathbb{A}$. Abbiamo allora $a_1a_2b_1=0$. Per ipotesi, a_1 non è un divisore di 0 in $\mathbb{A}$. Quindi $a_2b_1=0$ e, per il ragionamento precedente, $b_1=a_1b_2$ per qualche $b_2\in\mathbb{A}$. Per ricorrenza potremmo allora costruire una successione $\{b_h\}$ di elementi di $\mathfrak{m}_{\mathbb{A}}$ tali che

$$\begin{cases} b_h=a_1b_{h+1} & \text{per } h\ge 0,\\ b_ha_2=0 & \text{per } h\ge 0.\end{cases}$$

Quindi $b=b_0=a_1b_1=a_1^2b_2=\cdots=a_1^hb_h\in\mathfrak{m}_{\mathbb{A}}^{h+1}$ per ogni h. Per il Lemma di Nakayama, questo implica che $b=0$, dando così una contraddizione che dimostra il nostro asserto.

Dobbiamo ora verificare che la classe di a_1 in $\mathbb{A}/(a_2)$ non è un divisore di 0. Se per assurdo lo fosse, esisterebbero $b_1,b_2\in\mathfrak{m}_{\mathbb{A}}$ con $b_1a_1=b_2a_2$ e $b_1\notin(a_2)$. Per l'ipotesi che $\pi(a_2)$ non sia divisore di 0 in $\mathbb{A}/(a_1)$, da $b_1a_1=b_2a_2$ segue che $b_2\in(a_1)$, cioè $b_2=ca_1$ per qualche c. Sarà quindi $a_1b_1=ca_1a_2$, e dunque $b_1=ca_2$ perché a_1 non è divisore di 0 in $\mathbb{A}$. Abbiamo così ottenuto una contraddizione, che ci mostra che l'immagine di a_1 in

$\mathbb{A}/(a_2)$ non è un divisore di 0. Questo completa la dimostrazione del caso $k = 2$.

Dal caso $k = 2$ segue facilmente il risultato generale. □

PROPOSIZIONE VII.8.18. *Se* $(a_1, \ldots, a_k)$ *è un'*A*-sequenza nell'algebra analitica* $\mathbb{A}$*, allora, per ogni ideale primo* $\mathfrak{p}$ *associato*[6] *ad* $\mathbb{A}$*, risulta*

$$\dim(\mathbb{A}/\mathfrak{p}) \geq k.$$

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo, per brevità, $\mathbb{B}_h = \mathbb{A}/(a_1, \ldots, a_h)$ per $0 \leq h \leq k$ e sia $\pi_h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}_h$ la proiezione nel quoziente. Fissato un ideale primo $\mathfrak{p}$ di $\mathbb{A}$, costruiamo per ricorrenza una catena d'ideali primi

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_k \subsetneqq \mathbb{A},$$

tale che $\mathfrak{p}_h$ sia, per ogni $0 \leq h \leq k$, un indeale primo associato a $\mathbb{B}_h$. Per ipotesi, $\mathfrak{p}_0$ è associato a $\mathbb{B}_0 = \mathbb{A}$. Supponiamo sia $0 \leq h < k$ e siano $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_h$ ideali primi associati a $\mathbb{B}_0$, $\mathbb{B}_1$, ..., $\mathbb{B}_h$, rispettivamente. Dimostriamo in primo luogo che $\mathfrak{p}_h \in \mathrm{Supp}_{\mathbb{A}}(\mathbb{B}_{h+1})$. Se così non fosse, $\mathfrak{p}_h$ conterrebbe un elemento b che non è divisore di zero in $\mathbb{B}_{h+1}$. Allora $(a_1, \ldots, a_h, a_{h+1}, b)$ sarebbe un'A-sequenza. Per la Proposizione VII.8.17, anche $(a_1, \ldots, a_h, b, a_{h+1})$ sarebbe allora un'A-sequenza. In particolare, b non sarebbe un divisore di zero in $\mathbb{B}_h$, e ciò contraddice il fatto che $b \in \mathfrak{p}_h \in \mathrm{Ass}_{\mathbb{A}}(\mathbb{B}_h)$. Osserviamo ora che, poiché $\pi_h(a_{h+1})$ non è un divisore di zero in $\mathbb{B}_h$, l'elemento a_{h+1} non appartiene a $\mathfrak{p}_h$. Quindi l'ideale $(\mathfrak{p}_h, a_{h+1})$ contiene propriamente $\mathfrak{p}_h$ ed annulla qualche elemento di $\mathbb{B}_{h+1}$. Per la Noetherianità, esso è contenuto in qualche elemento di $\mathrm{Supp}_{\mathbb{A}}(\mathbb{B}_{h+1})$. Dunque $\mathfrak{p}_h$ non è massimale in $\mathrm{Supp}_{\mathbb{A}}(\mathbb{B}_{h+1})$ e basterà scegliere $\mathfrak{p}_{h+1}$ come un elemento massimale di $\mathrm{Supp}_{\mathbb{A}}(\mathbb{B}_{h+1})$ che contenga $\mathfrak{p}_h$.

Per completare la dimostrazione, è sufficiente allora osservare che, se $\mathfrak{p}'$ e $\mathfrak{p}''$ sono ideali primi di $\mathbb{A}$ e $\mathfrak{p}' \subsetneqq \mathfrak{p}''$, allora

$$\dim(\mathbb{A}/\mathfrak{p}'') < \dim(\mathbb{A}/\mathfrak{p}').$$

Questo segue dal fatto che un elemento $a \in \mathfrak{p}'' \setminus \mathfrak{p}'$ non è un unità e non è un divisore di zero in $\mathbb{A}/\mathfrak{p}'$, e definisce quindi un germe attivo in $\mathbb{A}/\mathfrak{p}'$. □

DEFINIZIONE VII.8.19. Un'algebra analitica $\mathbb{A}$ si dice *di Cohen-Macaulay* se contiene un'A-sequenza di lunghezza uguale alla sua dimensione.

[6]Ricordiamo che, dato un $\mathbb{A}$-modulo $\mathbf{M}$, un ideale primo $\mathfrak{p}$ è *associato* ad $\mathbf{M}$ se è l'annullatore di un suo elemento, se cioè esiste un $a \in \mathbf{M}$, con $m \neq 0$ e $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m) = \{a \in \mathbb{A} \mid a \cdot m = 0\}$. Ancora, si dice *supporto* di $\mathbf{M}$ l'insieme di tutti gli ideali primi $\mathfrak{p}$ di $\mathbb{A}$ che annullano qualche elemento di $\mathbf{M}$. Esso si indica con $\mathrm{Supp}(\mathbf{M})$. Quando sia necessario specificarlo, si indica l'anello $\mathbb{A}$ a pedice. Poniamo quindi

$$\mathrm{Ass}_{\mathbb{A}}(\mathbf{M}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathbb{A}) \mid \exists m \in \mathbf{M} \setminus \{0\} \text{ tale che } \mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_{\mathbb{A}}(m)\},$$
$$\mathrm{Supp}_{\mathbb{A}}(\mathbf{M}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathbb{A}) \mid \exists m \in \mathbf{M} \setminus \{0\} \text{ tale che } \mathfrak{p} \cdot m = 0\},$$

ove $\mathrm{Spec}(\mathbb{A})$ è l'iniseme di tutti gli ideali primi di $\mathbb{A}$. Chiaramente $\mathrm{Ass}_{\mathbb{A}}(\mathbf{M}) \subset \mathrm{Supp}_{\mathbb{A}}(\mathbf{M})$ e gli elementi massimali di $\mathrm{Supp}_{\mathbb{A}}(\mathbf{M})$ appartentgono ad $\mathrm{Ass}_{\mathbb{A}}(\mathbf{M})$.

Esempio VII.8.20. L'algebra $\mathcal{O}_{n,0}$ è di Cohen-Macaulay, in quanto ha dimensione n e $(z_1, \ldots, z_n)$ è un'A-sequenza in $\mathcal{O}_{n,0}$.

Corollario VII.8.21. *Se l'algebra analitica $\mathbb{A}$ è di Cohen-Macaulay, allora $\dim(\mathbb{A}) = \dim(\mathbb{A}/\mathfrak{p})$ per ogni primo $\mathfrak{p}$ associato ad $\mathbb{A}$.*

Dimostrazione. L'enunciato del corollario è in effetti una conseguenza immediata della Proposizione VII.8.18. $\square$

Proposizione VII.8.22. *Se l'algebra analitica $\mathbb{A}$ è un anello di Cohen-Macaulay ed $a_1, \ldots, a_m$ elementi di $\mathfrak{m}_{\mathbb{A}}$ tali che*

$$\dim(\mathbb{A}/(a_1, \ldots, a_m)) = \dim(\mathbb{A}) - m,$$

allora $(a_1, \ldots, a_m)$ è un'A-sequenza e l'anello quoziente $\mathbb{A}/(a_1, \ldots, a_m)$ è ancora di Cohen-Macaulay.

Dimostrazione. L'enunciato generale segue per ricorrenza dal caso in cui $m = 1$. Supponiamo quindi che sia $m = 1$. Dobbiamo dimostrare che a_1 non è un divisore di zero in $\mathbb{A}$. Se a_1 fosse un divisore di zero in $\mathbb{A}$, esso sarebbe contenuto in un ideale primo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A})$. Per il Corollario VII.8.21 avremmo

$$\dim(\mathbb{A}) > \dim(\mathbb{A}/(a_1)) \geq \dim(\mathbb{A}/\mathfrak{p}) = \dim(\mathbb{A}),$$

che di dà una contraddizione. $\square$

Corollario VII.8.23. *Ogni sistema di parametri $(f_1, \ldots, f_n)$ di $\mathcal{O}_{n,0}$ è anche un'A-sequenza.*

Corollario VII.8.24. *La dimensione di un'algebra analitica di Cohen-Macaulay $\mathbb{A}$ coincide con la sua dimensione di Krull, cioè con la lunghezza massimale di una catena di ideali primi di $\mathbb{A}$.*

Dimostrazione. Se

$$\mathfrak{p}_0 \underset{\neq}{\subsetneq} \mathfrak{p}_1 \underset{\neq}{\subsetneq} \cdots \underset{\neq}{\subsetneq} \mathfrak{p}_m \underset{\neq}{\subsetneq} \mathbb{A}$$

è una catena massimale di ideali primi di $\mathbb{A}$, abbiamo

$$\dim(\mathbb{A}/\mathfrak{p}_h) < \dim(\mathbb{A}/\mathfrak{p}_{h-1}) \quad \text{se} \quad 1 \leq h \leq m.$$

Quindi $\dim(\mathbb{A}) \geq \dim(\mathbb{A}/\mathfrak{p}_0) \geq m$. Viceversa, poiché $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Ass}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A})$, segue dalla costruzione della successione di ideali primi nella dimostrazione Proposizione VII.8.18 che è anche $\dim(\mathbb{A}) \leq m$, e vale quindi l'uguaglianza. $\square$

CAPITOLO 8

Elementi di teoria dei fasci

1. Definizioni principali

1.1. Fasci di insiemi e morfismi di fasci.

Definizione VIII.1.1. Un *fascio d'insiemi* è il dato di due spazi topologici, X ed $\mathcal{S}$, e di un omeomorfismo locale $\pi : \mathcal{S} \to X$. Lo spazio X si dice la *base* del fascio, $\mathcal{S}$ il suo *spazio étalé*, $\pi : \mathcal{S} \to X$ la *proiezione sulla base.*

Osserviamo che π è, in particolare, un'applicazione aperta.

La fibra $\mathcal{S}_x = \pi^{-1}(x)$ sul punto $x \in X$ si dice la *spiga* con punto base x, ovvero *l'insieme dei germi di sezioni di* $\mathcal{S}$ *in* x.

La fibra $\mathcal{S}_x$ è un sottospazio discreto di $\mathcal{S}$ ed è chiusa se, e soltanto se, X è uno spazio T_1, cioè uno spazio topologico in cui i sottoinsiemi finiti siano chiusi.

Quando ciò non comporti confusione, indicheremo a volte, per semplicità, il fascio $(\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X)$ con la sola lettera $\mathcal{S}$ che denota il suo spazio étalé.

Esempio VIII.1.2. Se X è uno spazio topologico ed M uno spazio topologico con la topologia discreta, allora la coppia formata da X, dal prodotto topologico $\mathcal{S} = X \times M$, e dalla proiezione sul primo fattore $\pi : X \times M \to X$ è il *fascio costante d'insieme* M.

Esempio VIII.1.3. Sia $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ un rivestimento di uno spazio topologico X e sia $\mathcal{S}$ un sottospazio aperto di $\tilde{X}$. Allora $\mathcal{S} \ni \xi \to \pi(\xi) \in X$ è un fascio d'insiemi.

Definizione VIII.1.4. Siano $(\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X)$ ed $(\mathcal{S}' \xrightarrow{\pi'} X')$ due fasci. Un *morfismo di fasci* è un'applicazione continua $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$, che commuti con le proiezioni sulla base. Esso definisce un'applicazione continua $\phi : X \to X'$, che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{S}' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ X & \xrightarrow[\phi]{} & X'. \end{array} \tag{8.1.1}$$

Per ogni $x \in X$, la Φ definisce un'applicazione $\Phi_x : \mathcal{S}_x \to \mathcal{S}'_{\phi(x)}$ tra le spiga di $\mathcal{S}$ in x e la spiga $\mathcal{S}'_{\phi(x)}$ di $\mathcal{S}'$ nel punto corrispondente $\phi(x)$ di X'.

1.2. Restrizioni, sottofasci, somme dirette di fasci.

DEFINIZIONE VIII.1.5. Sia $(\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X)$ un fascio, ed Y un sottospazio topologico della sua base X. Allora

$$\left(\pi^{-1}(Y) \xrightarrow{\pi|_{\pi^{-1}(Y)}} Y\right)$$

è un fascio di base Y, che si dice *restrizione ad* Y *del fascio* $\mathcal{S}$. Indicheremo $\pi^{-1}(Y)$ con $\mathcal{S}_Y$, oppure $\mathcal{S}|Y$.

Un sottospazio $\mathcal{T}$ di $\mathcal{S}$ è un *sottofascio* di $\mathcal{S}$ se $\mathcal{T} \ni \xi \to \pi(\xi) \in X$ è ancora un omeomorfismo locale. Condizione necessaria e sufficiente affinché ciò avvenga è che $\mathcal{T}$ sia un sottospazio aperto di $\mathcal{S}$. L'inclusione $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{S}$ è in questo caso un morfismo di fasci.

OSSERVAZIONE VIII.1.6. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathcal{S}|Y$ sia ancora un fascio su X è che il sottospazio Y sia aperto in X.

DEFINIZIONE VIII.1.7. Dati due fasci $(\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X)$ e $(\mathcal{S}' \xrightarrow{\pi'} X)$ sulla stessa base X, il loro *prodotto fibrato*, o la loro *somma di Whitney* è il fascio il cui spazio étalé è dato da:

$$\mathcal{S} \oplus_X \mathcal{S}' = \{(\xi, \xi') \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}' \mid \pi(\xi) = \pi'(\xi')\}, \tag{8.1.2}$$

con proiezione sulla base:

$$\mathcal{S} \oplus_X \mathcal{S}' \ni (\xi, \xi') \to \pi(\xi) = \pi'(\xi') \in X. \tag{8.1.3}$$

La definizione si estende al prodotto di un qualsiasi numero finito di fasci su X. In particolare, la somma di Whithney di p copie del fascio $\mathcal{S}$ si indicherà con $\mathcal{S}^p$.

1.3. Sezioni. Fasci di Hausdorff.

DEFINIZIONE VIII.1.8. Una sezione continua su $Y \subset X$ del fascio $(\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X)$ è una qualsiasi applicazione continua $s : Y \to \mathcal{S}$ per cui sia $\pi \circ s = \mathrm{id}_Y$.

Indichiamo con s_y il valore della sezione s nel punto $y \in Y$. Esso si dice il *germe* di s in y.

L'insieme di tutte le sezioni continue di $\mathcal{S}$ su $Y \subset X$ si indica con $\mathcal{S}(Y)$, oppure con $\Gamma(Y, \mathcal{S})$.

OSSERVAZIONE VIII.1.9. Una sezione continua s su un aperto U di X è un omeomorfismo locale e gli insiemi $s(U)$, al variare di U in una base degli aperti di X e di s in $\mathcal{S}(U)$, formano una base della topologia di $\mathcal{S}$.

Ogni $\xi \in \mathcal{S}$ è il germe in $x = \pi(\xi)$ di una sezione continua definita su un intorno aperto U di x.

OSSERVAZIONE VIII.1.10. Se $s, s' \in \mathcal{S}(Y)$, l'insieme dei punti $y \in Y$ per cui $s_y = s'_y$ è un aperto di Y.

DEFINIZIONE VIII.1.11. Diciamo che $(\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X)$ ùn *fascio di Hausdorff* se il suo spazio étalé $\mathcal{S}$ è di Hausdorff.

Proposizione VIII.1.12 (Principio della continuazione analitica).
Se ($\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$) *è un fascio di Hausdorff,* $s, s' \in \mathcal{S}(Y)$ *ed* $s_{y_0} = s'_{y_0}$ *in un punto* $y_0 \in Y$*, allora* $s_y = s'_y$ *in tutti i punti della componente connessa di* y_0 *in* Y*.*

Dimostrazione. Infatti, il luogo dei punti y in cui $s_y = s'_y$ è in questo caso contemporaneamente aperto e chiuso in Y. □

1.4. Prefasci.

Definizione VIII.1.13. Sia X uno spazio topologico. Un *prefascio d'insiemi* è un funtore controvariante $\mathbb{S}$ tra la categoria $\mathbf{Ap}(X)$ degli aperti di X (con i morfismi d'inclusione) e la categoria degli insiemi (con applicazioni tra insiemi come morfismi).

Questo significa che è assegnata una corrispondenza:

$$\mathbb{S} : \mathbf{Ap}(X) \ni U \to \mathbb{S}(U) \text{ insieme} \tag{8.1.4}$$

tale che:

$$\mathbb{S}(\emptyset) = \{0\} \quad \text{consiste d'un solo punto,} \tag{8.1.5}$$

e, per ogni coppia di aperti $U \subset V \subset X$, è assegnata un'applicazione $\rho^U_V : \mathbb{S}(U) \to \mathbb{S}(V)$ (restrizione) che verifica le seguenti eguaglianze:

$$\rho^U_U = \{\mathrm{id} : \mathbb{S}(U) \to \mathbb{S}(U)\}, \tag{8.1.6}$$

$$\rho^U_W \circ \rho^W_V = \rho^U_V \quad \text{se} \quad U^{\text{aperto}} \subset W^{\text{aperto}} \subset V^{\text{aperto}} \subset X. \tag{8.1.7}$$

Indicheremo il prefascio con $(X, \mathbb{S}, \rho)$, o semplicemente con $\mathbb{S}$, sottintendendo lo spazio di base e le funzioni di restrizione, quando questo non provochi confusione.

Definizione VIII.1.14. Un morfismo di prefasci $\Phi : (X, \mathbb{S}, \rho) \to (X, \mathbb{S}', \rho')$ sulla stessa base X è il dato, per ogni aperto U di X, di una corrispondenza $\phi_U : \mathbb{S}(U) \to \mathbb{S}'(U)$, tale che, per ogni scelta di $U^{\text{aperto}} \subset V^{\text{aperto}} \subset X$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}(U) & \xrightarrow{\Phi_U} & \mathbb{S}'(U) \\ {\scriptstyle \rho^U_V}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho'^U_V} \\ \mathbb{S}(V) & \xrightarrow{\Phi_U} & \mathbb{S}'(V) \end{array} \tag{8.1.8}$$

sia commutativo.

Esempio VIII.1.15. Dato un fascio d'imsiemi $\mathcal{S}$ su X, definiamo un prefascio $\Gamma(\mathcal{S})$ su X, associando ad ogni aperto U di X lo spazio $\mathcal{S}(U)$ delle sezioni di $\mathcal{S}$ su U. Diciamo che $\Gamma(\mathcal{S})$ è il *prefascio corrispondente, o associato, al fascio* $\mathcal{S}$.

Esempio VIII.1.16. Siano X, Y spazi topologici. Associamo ad ogni aperto U di X l'insieme $\mathcal{C}(U;Y)$ delle applicazioni continue $f : U \to Y$. Con le aplicazioni naturali di restrizione, otteniamo un prefascio, che si dice il *prefascio delle funzioni continue a valori in Y su X*.

Esempio VIII.1.17. Se X e Y sono varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^m$ (con $1 \leq m \leq \omega$), otteniamo in modo analogo il *prefascio delle funzioni di classe $\mathcal{C}^m$ a valori in Y su X* associando ad ogni aperto U di X l'insieme $\mathcal{C}^m(U,Y)$ delle applicazioni di classe $\mathcal{C}^m$ di U in Y.

Esempio VIII.1.18. Se X e Y sono varietà complesse, otteniamo il *prefascio delle applicazioni olomorfe di X in Y* associando ad ogni aperto U di X l'insieme $\mathcal{O}(U,Y)$.

1.5. Fascio associato ad un prefascio.

Definizione VIII.1.19. Dato un prefascio $(X,\mathbb{S},\rho)$ su X, per ogni punto $x \in X$ consideriamo il limite diretto:

$$\mathcal{S}_x = \varinjlim_{U^{\text{aperto}} \ni x} \mathbb{S}(U), \tag{8.1.9}$$

rispetto alle funzioni di restrizione ρ^U_V. Ricordiamo che questo significa che $\mathcal{S}_x$ è il quoziente dell'unione disgiunta $\bigsqcup_{U^{\text{aperto}} \ni x} \mathbb{S}(U)$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica $\eta_1 \in \mathbb{S}(U_1)$ ed $\eta_2 \in \mathbb{S}(U_2)$ se esiste un aperto $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ tale che $r^{U_1}_{U_3}(\eta_1) = r^{U_2}_{U_3}(\eta_2)$.

Se $s \in \mathbb{S}(U)$ per un intorno aperto U di un punto $x \in X$, indicheremo con s_x il corrispondente elemento di $\mathcal{S}_x$ e lo chiameremo il *germe di s in x*. Scriveremo anche $s_x = \rho^U_x(s)$ per indicare che s_x è il germe in x della sezione $s \in \mathbb{S}(U)$.

Ogni elemento di $\mathcal{S}_x$ è un germe. Inoltre, se $\eta_1 \in \mathbb{S}(U_1)$ ed $\eta_2 \in \mathbb{S}(U_2)$ e, per un punto $x_0 \in U_1 \cap U_2$ risulta $\eta_{1x_0} = \eta_{2x_0}$, allora $\eta_{1x} = \eta_{2x}$ per tutti gli x di un intorno di x_0 in $U_1 \cap U_2$.

Definizione VIII.1.20. Dato un prefascio $(X,\mathbb{S},\rho)$, poniamo:

$$\mathcal{S} = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{S}_x \quad \text{(unione disgiunta)}. \tag{8.1.10}$$

Consideriamo poi su $\mathcal{S}$ la topologia che ha come base degli aperti gli insiemi della forma:

$$\mathcal{U}(s,U) = \{s_x \mid x \in U\}, \quad \forall U^{\text{aperto}} \subset X, \quad \forall s \in \mathbb{S}(U) \tag{8.1.11}$$

e sia $\pi : \mathcal{S} \to X$ l'applicazione:

$$\mathcal{S} \ni \xi \to x \in X \quad \text{se e solo se} \quad \xi \in \mathcal{S}_x. \tag{8.1.12}$$

Si verifica facilmente:

Proposizione VIII.1.21. *$(\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X)$ è un fascio d'insiemi.*

Definizione VIII.1.22. Il fascio d'insiemi[1] ($\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X$) definito dalle (8.1.10), (8.1.11), (8.1.12) si dice *il fascio associato al prefascio* $(X, \mathbb{S}, \phi)$.

Esempio VIII.1.23. Sia $\mathcal{S}$ il fascio associato al prefascio $\mathbb{S}$. Abbiamo in generale un'applicazione naturale $\mathbb{S}(U) \to \mathcal{S}(U)$, che definisce un morfismo di prefasci.

Essa non è necessariamente surgettiva. Ad esempio, se M è un insieme ed $\mathbb{S}$ il prefascio delle funizioni costanti a valori in M, allora $\mathbb{S}(U)$ sono le funzioni costanti da U in M, mentre $\mathcal{S}(U)$ consiste delle funzioni *localmente* costanti a valori in M, cioè delle funzioni su U che sono costanti sulle componenti connesse di U. Quindi l'applicazione non è surgettiva se X contiene aperti non connessi.

Essa non è neppure necessariamente iniettiva. Consideriamo infatti uno spazio topologico X, che contenga almeno due punti e soddisfi l'assioma di separazione T_1, e due insiemi non vuoti $M \subsetneq N$. Fissiamo un elemento $m_0 \in M$ e definiamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(X) = N,\ \mathbb{S}(U) = M \quad &\text{se} \quad \emptyset \subsetneq U^{\text{aperto}} \subsetneq X \\ \rho^X_U(n) = m_0 \text{ (sezione costante)} \quad \forall n \in N \quad &\text{se} \quad \emptyset \subsetneq U^{\text{aperto}} \subsetneq X \\ \rho^U_V(m) = m \quad \forall m \in M \quad &\text{se} \quad \emptyset \subsetneq V^{\text{aperto}} \subsetneq U^{\text{aperto}} \subsetneq X. \end{aligned}$$

Questo è un prefascio il cui fascio associato è ancora il fascio costante $X \times M$, ma l'applicazione $\mathbb{S}(X) = N \to \mathcal{S}(X)$ non è iniettiva in quanto associa ad ogni $n \in N$ la sezione costantemente uguale ad m_0.

2. Prefasci canonici

Definizione VIII.2.1. Un prefascio $(X, \mathbb{S}, \rho)$ si dice *canonico* se l'applicazione $\mathbb{S} \to \Gamma(\mathbb{S})$ è un isomorfismo di prefasci, ovvero se per ogni aperto U di X l'applicazione $\mathbb{S}(U) \to \Gamma(U, \underline{\mathbb{S}})$ è bigettiva.

Proposizione VIII.2.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un prefascio $(X, \mathbb{S}, \rho)$ sia canonico è che siano soddisfatte le due condizioni:*

(S1) *Se, date due sezioni $s, t \in \mathbb{S}(U)$ (ove U è un qualsiasi aperto di X), esiste un ricoprimento aperto $\{U_i \mid i \in I\}$ di U tale che $\rho^U_{U_i}(s) = \rho^U_{U_i}(t)$ per ogni $i \in I$, allora $s = t$.*

(S2) *Data una famiglia di aperti $\{U_i \mid i \in I\}$ e sezioni $s_i \in \mathbb{S}(U_i)$ tali che $\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)$ per ogni $i, j \in I$, esiste un $s \in \mathbb{S}\big(\bigcup_{i \in I} U_i\big)$ tale che $\rho^{\bigcup_{j \in I} U_j}_{U_i}(s) = s_i$ per ogni $i \in I$.*

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathcal{S}$ il fascio associato al prefascio $\mathbb{S}$.

Le condizioni $(S1)$ *ed* $(S2)$ *sono necessarie.* Supponiamo che $\mathbb{S} = \Gamma(\mathcal{S})$. Allora, se s, t soddisfano le ipotesi in $(S1)$, abbiamo $s_x = t_x$ per ogni $x \in U$ e quindi $s = t$. Se poi valgono le ipotesi in $(S2)$, possiamo definire la sezione s in $\mathcal{S}(U)$ ponendo $s_x = (s_i)_x$ se $x \in U_i$.

[1]A volte esso si indica con $\underline{\mathbb{S}}$.

Le condizioni $(S1)$ *ed* $(S2)$ *sono sufficienti.* La $(S1)$ ci dice che la $\mathbb{S}(U) \to \mathcal{S}(U)$ è iniettiva per ogni aperto U di X. Infatti, siano $s, t \in \mathbb{S}(U)$ due sezioni del prefascio $\mathbb{S}$ sull'aperto U di X, che hanno la stessa immagine in $\mathcal{S}(U)$. Abbiamo cioè $s_x = t_x$ per ogni $x \in U$, e tale uguaglianza significa che possiamo trovare un intorno aperto U_x di x in U tale che $\rho^U_{U_x}(s) = \rho^U_{U_x}(t)$. Se vale la $(S1)$, è perciò $s = t$. Dalle $(S1)$ ed $(S2)$ segue ancora che $\mathbb{S}(U) \to \mathcal{S}(U)$ è surgettiva. Sia infatti $s \in \mathcal{S}(U)$. Per ogni $x \in U$, la s_x è il germe in x di una sezione $s^{(x)} \in \mathbb{S}(U_x)$ del prefascio $\mathbb{S}$ su un intorno aperto U_x di x. Ricordiamo che vale:

$$\rho^{U_x}_y(s^{(x)}) = s_y \quad \forall y \in U_x.$$

Abbiamo, per ogni coppia di punti $x, y \in U$ ed ogni $z \in U_x \cap U_y$:

$$\rho^{U_x}_z(s^{(x)}) = s_z = \rho^{U_y}_z(s^{(y)}).$$

Per la $(S1)$, abbiamo allora:

$$\rho^{U_x}_{U_x \cap U_y}(s^{(x)}) = \rho^{U_y}_{U_x \cap U_y}(s^{(y)}) \quad \forall x, y \in U,$$

e questa per la $(S2)$ ci dice che esiste un elemento $s \in \mathbb{S}(U)$ per cui $s^{(x)} = \rho^U_{U_x}(s)$ per ogni $x \in U$ e quindi $s_x = \rho^U_x(s)$ per ogni $x \in U$. $\square$

Osservazione VIII.2.3. Ad ogni morfismo $\Phi : \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ di prefasci su X corrisponde in modo naturale un morfismo $\underline{\Phi} : \underline{\mathbb{S}} \to \underline{\mathbb{S}'}$ dei fasci corrispondenti, definito da:

$$\underline{\Phi}(s_x) = {\rho'}^U_x(\Phi_U(s)) \quad \text{se} \quad s \in \mathbb{S}(U). \tag{8.2.1}$$

Se i prefasci $\mathbb{S}, \mathbb{S}'$ non sono entrambi canonici, a diversi omomorfismi di prefasci può corrispondere lo stesso omomorfismo dei fasci associati.

3. Fasci immagine diretta

Data un'applicazione continua $X \to Y$ tra due spazi topologici X, Y ed un prefascio $\mathbb{S}$ su X, possiamo definire un prefascio su Y ponendo:

$$(f_*\mathbb{S})(V) = \mathcal{S}(f^{-1}(V)) \quad \text{per ogni aperto } V \text{ di } Y, \tag{8.3.1}$$

e definendo le operazioni di restrizione nel modo ovvio:

$$[f_*\rho]^V_W(s) = \rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(W)}(s) \tag{8.3.2}$$

se $W \subset V$ sono aperti di Y ed $s \in \mathbb{S}(f^{-1}(V)) = (f_*\mathbb{S})(V)$. Abbiamo:

Proposizione VIII.3.1. *Se $\mathbb{S}$ è un fascio canonico, anche $f_*\mathbb{S}$ è un fascio canonico.* $\square$

Definizione VIII.3.2. Dato un fascio $\mathcal{S}$ sullo spazio topologico X ed un'applicazione continua $f : X \to Y$, il fascio $f_*\mathcal{S}$ associato al prefascio canonico $f_*\Gamma(\mathcal{S})$ si dice *il fascio immagine diretta di $\mathcal{S}$ mediante f.*

Dato un germe $\tau_y \in f_*\mathcal{S}_y$, sia $s \in \mathcal{S}(f^{-1}(V))$, per un intorno aperto V di y, una sezione che definisce τ_y. Per ogni punto x della fibra $f^{-1}(y)$ otteniamo allora un germe $s_x \in \mathcal{S}_x$. Questa corrispondenza definisce un'applicazione naturale di germi:

$$\hat{f}_x : (f_*\mathcal{S})_{f(x)} \to \mathcal{S}_x. \tag{8.3.3}$$

Osserviamo che ad una collezione $\{\sigma_x \in \mathcal{S}_x\}_{x \in f^{-1}(y)}$ di germi di $\mathcal{S}$ corrisponde un germe τ_y di $(f_*\mathcal{S})_y$ se e soltanto se vi è una sezione $s \in \mathcal{S}(f^{-1}(V))$, per un intorno aperto V di y in Y, per cui sia $s_x = \sigma_x$ per ogni $x \in f^{-1}(y)$.

Proposizione VIII.3.3. (1) *Siano $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ due fasci sullo spazio topologico X e sia $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ un morfismo di fasci. Se $f : X \to Y$ è un'applicazione continua, risulta definito un morfismo di fasci: $f_*(\Phi) : (f_*\mathcal{S}) \to (f_*\mathcal{S}')$, in modo tale che per ogni aperto V di Y:*

$$f_*(\Phi)(f_*\mathcal{S})(V) = \Phi(\mathcal{S}(f^{-1}(V)) \subset \mathcal{S}'(f^{-1}(V)) = (f_*\mathcal{S}')(V). \tag{8.3.4}$$

(2) *Sia $\mathcal{S}$ un fascio sullo spazio topologico X; siano Y, Z altri due spazi topologici e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ applicazioni continue. Allora:*

$$(g \circ f)_*\mathcal{S} = g_*(f_*\mathcal{S}). \tag{8.3.5}$$

Se $\mathcal{S}'$ è un altro fascio su X, e $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ un morfismo di fasci, allora:

$$(g \circ f)_*(\Phi) = g_*(f_*(\Phi)). \tag{8.3.6}$$

4. Fasci e prefasci dotati di struttura algebrica

Definizione VIII.4.1. Un *fascio di gruppi abeliani* è un fascio d'insiemi $(\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X)$, su ogni spiga $\mathcal{S}_x$ del quale sia assegnata una struttura di gruppo abeliano, in modo tale che la:

$$\mathcal{S} \oplus_X \mathcal{S} \ni (\xi_1, \xi_2) \to \xi_1 - \xi_2 \in \mathcal{S} \tag{8.4.1}$$

sia un morfismo di fasci (basta cioè che sia un'applicazione continua tra gli spazi étalé). Indichiamo con 0_x l'elemento neutro di $\mathcal{S}_x$ e con $0 : X \to \mathcal{S}$ la *sezione nulla*, che associa ad ogni $x \in X$ l'elemento neutro 0_x di $\mathcal{S}_x$. Chiaramente $0 \in \mathcal{S}(X)$ è una sezione continua.

Osserviamo che, nel caso di un fascio di gruppi abeliani, le spighe $\mathcal{S}_x$ contengono per ogni x l'elemento neutro e quindi sono non vuote.

Definizione VIII.4.2. Chiamiamo *supporto* del fascio di gruppi abeliani $\mathcal{S}$ l'insieme:

$$\operatorname{supp} \mathcal{S} = \{x \in X \mid \mathcal{S}_x \neq \{0_x\}\}. \tag{8.4.2}$$

Per ogni aperto U di X, l'insieme $\mathcal{S}(U)$ delle sezioni continue di $\mathcal{S}$ su U è in modo naturale un gruppo abeliano, con l'operazione:

$$\begin{gathered}\mathcal{S}(U) \times \mathcal{S}(U) \ni (s_1, s_2) \to s_1 - s_2 \in \mathcal{S}(U) \\ \text{ove} \quad (s_1 - s_2)_x = s_{1\,,x} - s_{2\,,x} \quad \forall x \in U.\end{gathered} \tag{8.4.3}$$

Definizione VIII.4.3. Un fascio $\mathcal{S}$ di gruppi abeliani su X si dice *un fascio di anelli* se è assegnato un morfismo di fasci:

$$\mathcal{S} \oplus_X \mathcal{S} \ni (\sigma_1, \sigma_2) \to \sigma_1 \sigma_2 \in \mathcal{S} \tag{8.4.4}$$

che definisca, su ogni spiga $\mathcal{S}_x$, insieme alla struttura di gruppo abeliano già assegnata, una struttura di anello.

Supporremo sempre nel seguito che tale anello sia commutativo e unitario e che l'applicazione $1 : X \to \mathcal{S}$, che associa ad ogni $x \in X$ l'unità 1_x dell'anello $\mathcal{S}_x$, sia continua.

Proposizione VIII.4.4. *Sia $\mathcal{S}$ un fascio di anelli su X. Allora:*

$$\operatorname{supp} \mathcal{S} = \{x \in X \mid 1_x \neq 0_x\}. \tag{8.4.5}$$

In particolare, il supporto di un fascio di anelli su X è chiuso.

Definizione VIII.4.5. Sia $\mathcal{A}$ un fascio di anelli su X. Un *fascio di $\mathcal{A}$-moduli* su X è un fascio di gruppi abeliani per cui sia definito un morfismo di fasci:

$$\mathcal{A} \oplus_X \mathcal{S} \to \mathcal{S} \tag{8.4.6}$$

che definisca, su ciascuna spiga $\mathcal{S}_x$, una struttura di $\mathcal{A}_x$-modulo.

In modo del tutto analogo al caso della categoria dei gruppi abeliani, per ogni aperto U di X le sezioni di $\mathcal{A}(U)$ formano un anello e quelle di $\mathcal{S}(U)$ un $\mathcal{A}(U)$-modulo.

Se $\mathcal{S}_1$, …, $\mathcal{S}_m$ sono fasci di $\mathcal{A}$-moduli, anche $\mathcal{S}_1 \oplus_X \cdots \oplus_X \mathcal{S}_m$ è un fascio di $\mathcal{A}$-moduli, e in modo naturale, si può definire anche il fascio di $\mathcal{A}$-moduli $\mathcal{S}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{S}_m$.

Se $\mathcal{S}_i = \mathcal{A}$ per $i = 1, \dots, m$, scriveremo $\mathcal{S}_1 \oplus_X \cdots \oplus_X \mathcal{S}_m = \mathcal{A}^m$.

5. Morfismi di $\mathcal{A}$-moduli e fasci quozienti

Sia $\mathcal{A}$ un fascio di anelli su X, che considereremo fissato una volta per tutte.

Definizione VIII.5.1. Dati due fasci di $\mathcal{A}$-moduli $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$, un morfismo di fasci:

$$\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}' \tag{8.5.1}$$

si dice un *morfismo di $\mathcal{A}$-moduli* se, per ogni $x \in X$, l'applicazione tra le spighe:

$$\Phi_x : \mathcal{S}_x \to \mathcal{S}'_x \tag{8.5.2}$$

è un morfismo di $\mathcal{A}_x$-moduli.

Gli $\mathcal{A}$-moduli, con i morfismi di $\mathcal{A}$-moduli, formano una *categoria*.

DEFINIZIONE VIII.5.2. Un sottofascio $\mathcal{I}$ di $\mathcal{A}$ si dice un *fascio di ideali* se, per ogni $x \in X$, l'insieme dei germi $\mathcal{I}_x$ è un ideale di $\mathcal{A}_x$. Un sottofascio $\mathcal{T}$ di un fascio di $\mathcal{A}$-moduli $\mathcal{S}$ è un fascio di sotto-$\mathcal{A}$-moduli di $\mathcal{S}$ se, per ogni $x \in X$, $\mathcal{T}_x$ è un sotto-$\mathcal{A}_x$-modulo di $\mathcal{S}_x$.

PROPOSIZIONE VIII.5.3. (1) *Se $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}''$ sono due fasci di sotto-$\mathcal{A}$-moduli del fascio di $\mathcal{A}$-moduli $\mathcal{S}$, allora anche:*

$$\mathcal{S}' + \mathcal{S}'' = \bigsqcup_{x \in X} (\mathcal{S}'_x + \mathcal{S}''_x) \quad \textit{ed} \quad \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}'' = \bigsqcup_{x \in X} (\mathcal{S}'_x \cap \mathcal{S}''_x) \tag{8.5.3}$$

sono fasci di sotto-$\mathcal{A}$-moduli di $\mathcal{S}$.

(2) *Se* (8.5.1) *è un morfismo di fasci di $\mathcal{A}$-moduli, allora:*

$$\ker \Phi = \bigsqcup_{x \in X} \ker \Phi_x \quad \textit{è un sotto-}\mathcal{A}\textit{-modulo di } \mathcal{S}, \tag{8.5.4}$$

$$\mathrm{Imm}\Phi = \bigsqcup_{x \in X} \mathrm{Imm}\Phi_x \quad \textit{è un sotto-}\mathcal{A}\textit{-modulo di } \mathcal{S}'. \quad \square \tag{8.5.5}$$

Le usuali nozioni di monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo si estendono in modo ovvio ai fasci di $\mathcal{A}$-moduli.

DEFINIZIONE VIII.5.4. Una sequenza di $\mathcal{A}$-moduli e di $\mathcal{A}$-morfismi:

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{S}_{h-1} \xrightarrow{\phi_{h-1}} \mathcal{S}_h \xrightarrow{\phi_h} \mathcal{S}_{h+1} \longrightarrow \cdots \qquad (-\infty \leq a < h < b \leq +\infty), \tag{8.5.6}$$

si dice una $\mathcal{A}$-*successione*. Diciamo che (8.5.6) è un *complesso* se:

$$\mathrm{Imm}\Phi_{h-1} \subset \ker \Phi_h \quad \forall a < h-1 < h < b \tag{8.5.7}$$

Diciamo che (8.5.6) è *esatta* in $\mathcal{S}_h$ se:

$$\mathrm{Imm}\Phi_{h-1} = \ker \Phi_h. \tag{8.5.8}$$

Diciamo che (8.5.6) è *esatta*, o *aciclica* se è esatta per ogni h con $a < h-1 < h < b$.

Una $\mathcal{A}$-*successione esatta corta* è una $\mathcal{A}$ successione esatta della forma:

$$\underline{0} \longrightarrow \mathcal{S}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S} \xrightarrow{\beta} \mathcal{S}'' \longrightarrow \underline{0}, \tag{8.5.9}$$

dove abbiamo indicato con $\underline{0}$ il fascio di $\mathcal{A}$-moduli in cui per ogni $x \in X$ la spiga in x è l'$\mathcal{A}_x$-modulo nullo.

OSSERVAZIONE VIII.5.5. Se (8.5.1) è un morfismo di $\mathcal{A}$-moduli, allora:

$$\underline{0} \longrightarrow \ker \Phi \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathrm{Imm}\Phi \longrightarrow \underline{0} \tag{8.5.10}$$

è una $\mathcal{A}$-successione esatta corta.

Definizione VIII.5.6. Se $\mathcal{S}'$ è un sotto-$\mathcal{A}$-modulo di $\mathcal{S}$, definiamo l'$\mathcal{A}$-modulo quoziente $\mathcal{S}/\mathcal{S}'$ ponendo:

$$\mathcal{S}/\mathcal{S}' = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{S}_x/\mathcal{S}'_x, \tag{8.5.11}$$

ove su ogni spiga $\mathcal{S}_x/\mathcal{S}'_x$ si considera la struttura di $\mathcal{A}_x$-modulo quoziente.

In particolare, se $\mathcal{I}$ è un fascio di ideali di $\mathcal{A}$, il fascio quoziente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ è un fascio di anelli su X.

La proiezione naturale definisce un morfismo di $\mathcal{A}$-moduli:

$$\pi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}/\mathcal{S}' \tag{8.5.12}$$

ed otteniamo una $\mathcal{A}$-successione esatta corta:

$$\underline{0} \longrightarrow \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathcal{S}/\mathcal{S}' \longrightarrow \underline{0}. \tag{8.5.13}$$

Proposizione VIII.5.7. *Il funtore* $\Gamma(U, \cdot\,)$ *è esatto a sinistra: cioè, per ogni aperto* U *di* X *ed ogni successione esatta corta* (8.5.10) *otteniamo una successione esatta:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}'(U) \longrightarrow \mathcal{S}(U) \longrightarrow \mathcal{S}''(U). \tag{8.5.14}$$

Osservazione VIII.5.8. Il funtore $\Gamma(U, \cdot\,)$ non è, in generale, esatto a destra: questo significa che l'ultima applicazione in (8.5.14) non è necessariamente surgettiva.

Definizione VIII.5.9. Dato un morfismo (8.5.1), il fascio quoziente $\mathcal{S}'/\mathrm{Imm}\Phi$ si indica anche con $\operatorname{coker}\Phi$. Abbiamo naturalmente una $\mathcal{A}$-successione esatta corta:

$$\underline{0} \longrightarrow \mathrm{Imm}\Phi \longrightarrow \mathcal{S}' \longrightarrow \operatorname{coker}\Phi \longrightarrow \underline{0}. \tag{8.5.15}$$

Scriveremo nel seguito, per semplicità, 0 invece di $\underline{0}$ per indicare il fascio nullo di $\mathcal{A}$-moduli.

CAPITOLO 9

Fasci coerenti

La *coerenza* si può considerare, in qualche modo, come un *principio locale di continuazione analitica*, nel senso che, se $\mathcal{S}$ è un fascio coerente di $\mathcal{A}$-moduli su X ed $x_0 \in X$, il modulo $\mathcal{S}_{x_0}$ *determina* i moduli $\mathcal{S}_x$ per tutti gli x in un intorno di x_0.

Definizione 1. Uno spazio topologico X su cui sia fissato un fascio di anelli $\mathcal{A}$ si dice un *spazio anellato*. Il fascio $\mathcal{A}$ si dice *fascio di struttura* (od anche *fascio strutturale*) dello spazio anellato X.

Supporremo nel seguito di questo capitolo che X sia uno spazio anellato, con fascio strutturale $\mathcal{A}$.

1. Fasci di tipo finito

Sia $\mathcal{S}$ un fascio di $\mathcal{A}$-moduli su X. Sia U un aperto di X ed $s_1, \ldots, s_m$ sezioni di $\mathcal{S}$ su U. Possiamo allora definire un $\mathcal{A}_U$-morfismo:

$$\sigma : \mathcal{A}_U^m \to \mathcal{S}_U \tag{9.1.1}$$

definito su ciascuna fibra mediante:

$$\sigma_x(a_{1,x}, \ldots, a_{m,x}) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,x} s_{i,x} \in \mathcal{S}_x. \tag{9.1.2}$$

Definizione IX.1.1. Un $\mathcal{A}$-modulo si dice *di tipo finito* o *finitamente generato* in $x \in X$ se esiste un intorno aperto U di x in X ed un numero finito di sezioni $\sigma = (s_1, \ldots, s_m)$ tali che la (9.1.1) sia surgettiva o, in modo equivalente:

$$\mathcal{A}_y^m \xrightarrow{\sigma_y} \mathcal{S}_y \longrightarrow 0 \tag{9.1.3}$$

sia esatta per ogni $y \in U$. Diciamo che è *di tipo finito* o *finitamente generato* su X se è tale in ogni punto $x \in X$.

Esempio IX.1.2. $\mathcal{A}^m$ è di tipo finito per ogni intero positivo m.

Esempio IX.1.3. Siano $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ due fasci $\mathcal{A}$-moduli. Se $\mathcal{S}$ è di tipo finito e vi è una $\mathcal{A}$-successione esatta:

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}' \longrightarrow 0, \tag{9.1.4}$$

allora anche $\mathcal{S}'$ è di tipo finito.

Esempio IX.1.4. Sia X un aperto di $\mathbb{C}$ ed $\mathcal{O}_X$ il fascio dei germi delle funzioni olomorfe in X. Sia E un sottoinsieme discreto di punti di X ed $m : E \to \mathbb{Z}_+$ un'applicazione che associa ad ogni punto τ di E un intero positivo m_τ. Sia $\mathcal{S}$ il fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli corrispondente al prefascio canonico:

$$\mathbb{S}(U) = \left\{ f \in \mathcal{O}(U) \;\middle|\; \frac{d^{m_\tau} f}{dz^h}(\tau) = 0,\ \forall \tau \in E \cap U \right\}.$$

Allora $\mathcal{S}$ è di tipo finito. Inoltre, per il teorema di Weierstrass, possiamo trovare una $s \in \mathcal{O}(X)$ tale che $s(z) \neq 0$ se $z \notin E$ ed $s_\tau(z) = (z-\tau)^{-m_\tau} s(z) \in \mathcal{O}(X)$ ed $s_\tau(\tau) \neq 0$ per ogni $\tau \in E$. Otteniamo allora una successione esatta di $\mathcal{O}_X$-moduli:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\ s\ } \mathcal{S} \longrightarrow 0.$$

Esempio IX.1.5. Sia $\{z_n\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una successione con $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ ed $\mathcal{S}$ il fascio corrispondente al prefascio

$$U \to \mathbb{S}(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f(z_n) = 0,\ \forall z_n \in U\}.$$

Allora $\mathcal{S}$ è un fascio di $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$-moduli che non è finitamente generato in $0 \in \mathbb{C}$.

Esempio IX.1.6. Sia X un aperto di $\mathbb{C}$ ed $\mathcal{M}$ il fascio dei germi di funzioni meromorfe su X. Il fascio $\mathcal{M}$, come fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli, non è finitamente generato in nessun punto di X.

Esempio IX.1.7. Sia X un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $\{z_n\}$ una successione divergente in X. Data una successione $\{m_n\}$ di interi positivi, consideriamo il fascio $\mathcal{S}$ associato al prefascio:

$$U \to \mathbb{S}(U) = \{f \in \mathcal{M}(U) \mid (z - z_n)^{m_n} f_{z_n} \in \mathcal{O}_{z_n},\ \forall z_n \in U\}.$$

Per il teorema di Weierstrass, esiste una sezione globale $s \in \mathcal{S}(X)$ tale che:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\ s\ } \mathcal{S} \longrightarrow 0$$

sia esatta. In particolare, $\mathcal{S}$ è finitamente generato.

Lemma IX.1.8. *Supponiamo che $\mathcal{S}$ sia un $\mathcal{A}$-modulo di tipo finito in $x \in X$. Se $s_1, \dots, s_m \in \mathcal{S}(U)$ sono sezioni, definite su un intorno aperto U di x in X, tali che $s_{1,x}, \dots, s_{m,x}$ generino l'$\mathcal{A}_x$-modulo $\mathcal{S}_x$, allora $s_1, \dots, s_m$ generano $\mathcal{S}|V$ per qualche intorno aperto V di x in U.*

Dimostrazione. Per ipotesi esite un intorno aperto W di x in U e sezioni $t_1, \dots, t_p \in \mathcal{S}(W)$ tali che la $\mathcal{A}^p|W \xrightarrow{(t_1,\dots,t_p)} \mathcal{S}|W$ sia surgettiva. Ma abbiamo allora:

$$t_{j,x} = \sum_{i=1}^m a_{ij,x} s_{i,x} \quad \text{con} \quad a_{ij,x} \in \mathcal{A}_x, \quad \text{per} \quad 1 \le j \le p.$$

Allora, in un intorno V di x in $U \cap W$ abbiamo, per opportuni $a_{ij} \in \mathcal{A}(V)$ che definiscono i germi $a_{ij,x}$ in x:

$$t_{j,y} = \sum_{i=1}^m a_{ij,y} s_{i,y} \quad \text{per} \quad 1 \le j \le p.$$

Da questo segue la tesi. $\square$

COROLLARIO IX.1.9. *Siano $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ due $\mathcal{A}$-moduli di tipo finito in $x \in X$, e $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ un $\mathcal{A}$-omomorfismo di fasci. Se la successione*

$$\mathcal{S}_x \xrightarrow{\Phi_x} \mathcal{S}'_x \longrightarrow 0 \tag{9.1.5}$$

è esatta, allora esiste un intorno aperto U di x in X tale che

$$\mathcal{S}|U \xrightarrow{\Phi_U} \mathcal{S}'|U \longrightarrow 0 \tag{9.1.6}$$

sia esatta.

COROLLARIO IX.1.10. *Se $\mathcal{S}$ è un $\mathcal{A}$-modulo di tipo finito, allora* $\operatorname{supp}\mathcal{S} = \{x \in X \mid \mathcal{S}_x \neq \{0_x\}\}$ *è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Se infatti $x \notin \operatorname{supp}\mathcal{S}$, abbiamo una successione esatta

$$\mathcal{A}_x \xrightarrow{0_x} \mathcal{S}_x \longrightarrow 0_x$$

e quindi esiste, per il Corollario IX.1.9, un intorno aperto U di x in X in cui la successione

$$\mathcal{A}|U \xrightarrow{0_x} \mathcal{S}|U \longrightarrow 0|U$$

sia ancora esatta. $\square$

PROPOSIZIONE IX.1.11. *Siano $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ due $\mathcal{A}$-moduli di tipo finito e siano $\Phi, \Psi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ due morfismi di $\mathcal{A}$-moduli. Se, per un $x \in X$, risulta $\Phi_x = \Psi_x$, allora esiste un intorno aperto U di x in X in cui $\Phi|U = \Psi|U$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'omomorfismo $\Xi = \Phi - \Psi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ ed indichiamo con $\mathcal{S}''$ il fascio immagine $\Xi(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}'$. Abbiamo la successione esatta di fasci

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\Xi} \mathcal{S}'' \longrightarrow 0.$$

Per ipotesi abbiamo una successione esatta

$$\mathcal{S}_x \xrightarrow{0_x} \mathcal{S}''_x \longrightarrow 0_x.$$

Per il Corollario IX.1.9, otteniamo, per un intorno aperto U di x, una successione esatta

$$\mathcal{S}|U \xrightarrow{0_U} \mathcal{S}''|U \longrightarrow 0|U.$$

Questo ci dice che $\Xi_U = 0$, ovvero che $\Phi_U = \Psi_U$. $\square$

PROPOSIZIONE IX.1.12.
(1) *Siano $\mathcal{S}', \mathcal{S}''$ due sotto-$\mathcal{A}$-moduli dell'$\mathcal{A}$-modulo $\mathcal{S}$. Se $\mathcal{S}'$ è di tipo finito in x ed $\mathcal{S}'_x \subset \mathcal{S}''_x$, allora esiste un intorno aperto U di x in X tale che $\mathcal{S}'_U \subset \mathcal{S}''_U$.*
(2) *Sia $\mathcal{S}' \xrightarrow{\Phi} \mathcal{S} \to 0$ una successione esatta di $\mathcal{A}$-moduli. Supponiamo che $\underline{\ker}\,\Phi$ sia di tipo finito in $x \in X$. Allora condizione necessaria e sufficiente affinché un sotto-$\mathcal{A}$-modulo $\mathcal{T}$ di $\mathcal{S}$ sia di tipo finito in x è che $\Phi^{-1}(\mathcal{T})$ sia un sotto-$\mathcal{A}$-modulo di tipo finito di $\mathcal{S}'$ in x.*

Dimostrazione. (1). Consideriamo il fascio quoziente $\mathcal{Q} = \mathcal{S}/\mathcal{S}''$ e la restizione ad $\mathcal{S}'$ del morfismo di proiezione $\Phi : \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q}$. Per ipotesi $\Phi_x = 0_x$, e dunque $\Phi_U = 0_U$ in un intorno aperto U di x, per il Corollario IX.1.9. Questo significa che $\mathcal{S}'_U \subset \mathcal{S}''_U$.

(2). La sufficienza è ovvia. Supponiamo ora che $\mathcal{T}$ sia di tipo finito in $x \in X$. Siano $s'_1, \ldots, s'_m \in \mathcal{S}'(V)$ tali che $s_1 = \Phi(s'_1), \ldots, s_m = \Phi(s'_m)$ generino $\mathcal{T}_V$, per un intorno aperto V di x. Pur di scegliere V sufficientemente piccolo, possiamo supporre che esistano sezioni $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \underline{\ker}\,\Phi(V)$ che generino $\underline{\ker}\,\Phi|V$. Ne segue che:

$$\mathcal{A}^{m+k}|V \xrightarrow{(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,s_1,\ldots,s_k)} \phi^{-1}(\mathcal{T})|V \longrightarrow 0|V$$

è esatta, e dunque $\phi^{-1}(\mathcal{T})$ è di tipo finito in x. □

2. Fasci di tipo finito per le relazioni

Definizione IX.2.1. Sia U un aperto di X, $s_1, \ldots, s_m \in \mathcal{S}(U)$ sezioni di un fascio di $\mathcal{A}$-moduli $\mathcal{S}$ su X, e

$$\sigma = (s_1, \ldots, s_m) : \mathcal{A}^m|U \to \mathcal{S}|U \tag{9.2.1}$$

il morfismo di $\mathcal{A}|U$-moduli da esse determinato. Chiamiamo *fascio delle relazioni* di $(s_1, \ldots, s_m)$ il sotto-$\mathcal{A}_U$-modulo di $\mathcal{A}^m_U$ definito da:

$$\underline{\mathrm{Rel}}(s_1, \ldots, s_m) = \underline{\ker}\,\sigma, \tag{9.2.2}$$

le cui spighe sono date da:

$$\underline{\mathrm{Rel}}(s_1, \ldots, s_m)_x = \left\{(a_{1,x}, \ldots, a_{m,x}) \,\middle|\, \sum\nolimits_{j=1}^{m} a_{j,x}s_{j,x} = 0_x\right\}. \tag{9.2.3}$$

Diciamo che $\mathcal{S}$ è *di tipo finito per le relazioni* in $x \in X$ se, per ogni intorno aperto U di x in X e per ogni scelta di un numero finito di sezioni $s_1, \ldots, s_m \in \mathcal{S}(U)$ di $\mathcal{S}$ in U, il fascio delle relazioni $\underline{\mathrm{Rel}}(s_1, \ldots, s_m)$ è di tipo finito in x.

Diciamo che $\mathcal{S}$ è *di tipo finito per le relazioni* in X se è tale in ogni punto $x \in X$.

Esempio IX.2.2. Se X è un aperto di $\mathbb{C}$, il fascio $\mathcal{O}_X$ è di tipo finito per le relazioni. Siano infatti U un aperto di X ed $f_1, \ldots, f_m$ funzioni olomorfe in U. Fissato un punto $z_0 \in U$, possiamo scrivere ciascuna delle funzioni olomorfe assegnate nella forma $f_j(z) = (z - z_0)^{d_j} g_j(z)$, con $g_j \in \mathcal{O}(U)$ e $g_j(z_0) \neq 0$. Supponiamo sia $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$. Allora, se V è un intorno di z_0 in cui $g_1(z) \neq 0$, i quozienti f_j/f_1, per $j = 2, \ldots, m$, sono funzioni olomorfe in V, ed i vettori:

$$(f_1^{-1}f_j)e_1 - e_j, \quad \text{per } j = 2, \ldots, m,$$

ove $e_1, \ldots, e_m$ è la base canonica di $\mathbb{C}^m$, generano $\underline{\mathrm{Rel}}(f_1, \ldots, f_m)$ in V.

Osservazione IX.2.3. Siano $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ due $\mathcal{A}$-moduli. Se vi è una successione esatta di $\mathcal{A}$-moduli:

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S} \tag{9.2.4}$$

ed $\mathcal{S}$ è di tipo finito per le relazioni in $x \in X$, allora anche $\mathcal{S}'$ è di tipo finito per le relazioni in x.

Esempio IX.2.4. Il fascio $\mathcal{M}$ delle funzioni meromorfe su un aperto U di $\mathbb{C}$, considerato come un fascio di $\mathcal{O}_U$-moduli, è di tipo finito per le relazioni.

Esempio IX.2.5. Sia $\{z_n\}$ una successione di numeri complessi non nulli con $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ ed $\mathcal{S}$ il fascio dei germi di funzioni olomorfe che si annullano in tutti i punti della successione $\{z_n\}$. Poiché $\mathcal{S}$ è un sotto-$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$-modulo di $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, è di tipo finito per le relazioni, mentre, come abbiamo visto, non è di tipo finito in 0. Il fascio quoziente $\mathcal{Q} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}}/\mathcal{S}$ non è di tipo finito per le relazioni, in quanto $\underline{\mathrm{Rel}}(1_{\mathcal{Q}}) = \mathcal{S}$ non è di tipo finito in $0 \in \mathbb{C}$.

3. Fasci coerenti

Definizione IX.3.1. Un fascio di $\mathcal{A}$-moduli $\mathcal{S}$ si dice $\mathcal{A}$-*coerente* (o semplicemente *coerente* quando il fascio di anelli $\mathcal{A}$ si pensi come assegnato una volta per tutte) se è al tempo stesso di tipo finito e di tipo finito per le relazioni.

Proposizione IX.3.2. *Siano $\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{S}''$ tre fasci di $\mathcal{A}$-moduli e supponiamo che $\mathcal{S}$ sia $\mathcal{A}$-coerente. Valgono le affermazioni:*

(1) *Se vi è una successione esatta:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}, \tag{9.3.1}$$

allora $\mathcal{S}'$ è $\mathcal{A}$-coerente se e soltanto se è di tipo finito;

(2) *Se vi è una successione esatta:*

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'' \longrightarrow 0, \tag{9.3.2}$$

allora $\mathcal{S}''$ è $\mathcal{A}$-coerente se e soltanto se è di tipo finito per le relazioni. □

Proposizione IX.3.3. *Se $\mathcal{S}$ è coerente, allora è di presentazione finita. Ciò significa che per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U di x in X e una successione esatta di $\mathcal{A}$-moduli di tipo finito della forma:*

$$\mathcal{A}_U^{p_1} \longrightarrow \mathcal{A}_U^{p_0} \longrightarrow \mathcal{S}_U \longrightarrow 0_U. \tag{9.3.3}$$

Osservazione IX.3.4. La proprietà di essere di presentazione finita caratterizza i fasci coerenti quando l'anello di base $\mathcal{A}$ sia esso stesso coerente (come $\mathcal{A}$-modulo su se stesso).

Esempio IX.3.5. Per ogni aperto X di $\mathbb{C}$, il fascio $\mathcal{O}_X$ è coerente.

Esempio IX.3.6. Se $\mathcal{A}$ è coerente ed $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}'$ sono fasci coerenti di ideali di $\mathcal{A}$, allora anche il fascio prodotto $\mathcal{I}\mathcal{I}'$ è coerente.

Infatti, abbiamo una successione esatta $\{0 \to \mathcal{I}\mathcal{I}' \to \mathcal{I}\}$ e quindi $\mathcal{I}\mathcal{I}'$ è coerente perché è finitamente generato.

4. La coerenza del fascio $\mathcal{O}$

4.1. L'isomorfismo di Weierstrass. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ e consideriamo un polinomio monico di grado $d > 0$ in $\mathcal{O}(\Omega)[w]$:

$$\varpi(w,z) = z^d + a_1(z)w^{d-1} + \cdots + a_{d-1}(z)w + a_d(z). \tag{9.4.1}$$

Sia:

$$V = \{(w,z) \in \mathbb{C}\times\Omega \mid \varpi(w,z) = 0\}. \tag{9.4.2}$$

Indichiamo con $\mathcal{I}$ il fascio di ideali $\varpi\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{C}\times\Omega}$ in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}\times\Omega}$ ed indichiamo con $\mathcal{O}_V$ il fascio quoziente:

$$\mathcal{O}_V = \left.\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}\times\Omega}}{\varpi\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{C}\times\Omega}}\right|_V = (\mathcal{O}_{\mathbb{C}\times\Omega}/\mathcal{I})|V. \tag{9.4.3}$$

Sia:

$$\pi : V \to \Omega \tag{9.4.4}$$

l'applicazione di Weierstrass (restrizione a V della proiezione $\mathbb{C}^{n+1} \ni (w,z) \to z \in \mathbb{C}^n$). Sappiamo che (9.4.4) è finita e aperta. Definiamo ora un morfismo di $\mathcal{O}_\Omega$-moduli:

$$\tilde{\pi} : \mathcal{O}^d_\Omega \to \pi_*(\mathcal{O}_V) \tag{9.4.5}$$

nel modo seguente: ad $(s_{1\,z},\ldots,s_{d\,z}) \in \mathcal{O}^d_z$ facciamo corrispondere il polinomio $\tilde{s} = s_{1,\,z}w^{d-1} + \cdots + s_{(d-1),\,z}w + s_{d,\,z} \in \mathcal{O}_z[w]$. Esso determina una sezione in $\mathcal{O}(\mathbb{C}\times\omega)$, per un intorno aperto ω di z in Ω, e dunque una sezione in $\mathbb{C}\times\omega$ del fascio quoziente $\mathcal{O}_{\mathbb{C}\times\Omega}/\mathcal{I}$. Porremo quindi $\tilde{\pi}(s) = \pi_*([\tilde{s}])$.

Definizione IX.4.1. L'applicazione (9.4.5) così definita si dice *l'omomorfismo di Weierstrass* associato all'applicazione (9.4.4).

Teorema IX.4.2. *L'omomorfismo di Weierstrass* (9.4.5) *è un isomorfismo di $\mathcal{O}_\Omega$-moduli.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che, per ogni $z_0 \in \Omega$, l'applicazione $\tilde{\pi}_{z_0} : \mathcal{O}^d_{z_0} \to \pi_*(\mathcal{O}_V)_{z_0}$ è bigettiva. Se $\varpi(w,z_0) = \prod_{i=1}^m (w-\lambda_i^0)^{d_i}$, allora:

$$(\pi_*(\mathcal{O}_V))_{z_0} \simeq \prod_{i=1}^m \mathcal{O}_{V\,\zeta_i} = \prod_{i=1}^m (\mathcal{O}/\mathcal{I})_{\zeta_i} \simeq \prod_{i=1}^m (\mathcal{O}_{\zeta_i}/\mathcal{I}_{\zeta_i}),$$

ove $\zeta_j = (\lambda_j^0, z_0) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Per il teorema di Weierstrass generalizzato (Teorema VI.9.1 del Capitolo 6), dati $g_1,\ldots,g_m$ con $g_j \in \mathcal{O}_{\zeta_j}$, è univocamente determinato un $r \in \mathcal{O}_{z_0}[w]$, di grado $< d$ in w, tale che $g_j - r_{\zeta_j} \in \mathcal{I}_{\zeta_j}$, tali cioè che $\tilde{\pi}(r_0,\ldots,r_{d-1}) = \pi_*(g_1,\ldots,g_m)$. $\square$

Da questo teorema deduciamo:

Lemma IX.4.3 (Lemma di Coerenza). *Se $\mathcal{O}_\Omega$ è coerente, anche $\mathcal{O}_V$ è coerente.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $\mathcal{O}_V$ è di tipo finito per le relazioni, che cioè, fissato un aperto U di V e sezioni $s_1, \ldots, s_p \in \mathcal{O}_V(U)$, il nucleo dell'omomorfismo $\sigma : \mathcal{O}_V^p|U \xrightarrow{(s_1,\ldots,s_p)} \mathcal{O}_V$ è finitamente generato in ogni punto di U.

Consideriamo innanzi tutto il caso in cui $s_1, \ldots, s_p \in \mathcal{O}_V(V)$ siano sezioni globali. Per l'isomorfismo di Weierstrass, i fasci $\pi_*(\mathcal{O}_V^p) \simeq [\pi_*(\mathcal{O}_V)]^p$ sono $\mathcal{O}_\Omega$-coerenti. Poiché $\underline{\ker}\,\pi_*(\sigma) = \pi_*(\underline{\ker}\,\sigma)$, il fascio $\pi_*(\underline{\ker}\,\sigma)$ è $\mathcal{O}_\Omega$-coerente. Perciò, per ogni $z \in \Omega$, possiamo trovare sezioni $t_1, \ldots, t_m \in \pi_*(\underline{\ker}\,\sigma)(\omega)$, per un intorno ω di z in Ω, che generano $\pi_*(\underline{\ker}\,\sigma)|\omega$. Le corrispondenti sezioni in $\underline{\ker}\,\sigma(\pi^{-1}(\omega)$ generano $\underline{\ker}\,\sigma_{\pi^{-1}(\omega)}$ come $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(\omega)}$-modulo.

Si conclude la dimostrazione nel caso generale riducendosi al caso precedente per mezzo del Lemma di Hensel (Teorema VI.6.1). □

4.2. Il teorema di coerenza di Oka. La coerenza del fascio $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ è conseguenza del Teorema di Oka (Teorema VII.7.1). Diamo in questo paragrafo un'altra dimostrazione del teorema di coerenza, che è essenzialmente la riscrittura della dimostrazione precedente utilizzando in modo sistematico il linguaggio della teoria dei fasci.

Lemma IX.4.4 (Lemma di coerenza formale). *Sia $\mathcal{A}$ un fascio di anelli su uno spazio topologico X. Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia un fascio di Hausdorff e che, per ogni $x \in X$, la fibra $\mathcal{A}_x$ sia un dominio d'integrità. Allora $\mathcal{A}$ è coerente se è verificata la seguente condizione:*

(∗) *Per ogni aperto $U \subset X$ ed ogni $s \in \mathcal{S}(U)$, il fascio di anelli $\mathcal{A}_U/(s \cdot \mathcal{A}_U)$ è coerente nell'intorno di ogni punto in cui $s_x \neq 0_x$.*

Dimostrazione. Sia U un aperto di X e siano $s_1, \ldots, s_m \in \mathcal{A}(U)$. Consideriamo l'omomorfismo $\sigma : \mathcal{A}_U^m \xrightarrow{(s_1,\ldots,s_m)} \mathcal{A}_U$. Dobbiamo verificare che $\underline{\ker}\,\sigma$ è finitamente generato in ogni punto $x \in U$. Fissiamo $x \in U$. Se fosse $s_{1,x} = 0, \ldots, s_{m,x} = 0$, non c'è nulla da dimostrare. Possiamo quindi supporre che $s_{1,x} \neq 0_x$. A meno di considerare un intorno U più piccolo, possiamo supporre che $s_{1,y} \neq 0_y$ per ogni $y \in U$. Consideriamo ora il fascio d'anelli $\mathcal{B} = \mathcal{A}_U/(s_1 \cdot \mathcal{A}_U)$. Abbiamo un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_U^m & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{A}_U \\ {\scriptstyle \pi^m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathcal{B}^m & \xrightarrow[\tau]{} & \mathcal{B} \end{array}$$

dove $\tau : \mathcal{B}^m \xrightarrow{(0,\pi(s_2),\ldots,\pi(s_m))} \mathcal{B}$. Chiaramente $\underline{\ker}\,\sigma$ è di tipo finito in x se:

(1) $\underline{\ker}\,(\pi \circ \sigma)$ è di tipo finito in x;
(2) per un intorno aperto W di x in U abbiamo un epimorfismo

$$\underline{\ker}\,(\pi \circ \sigma_W) \to \underline{\ker}\,\sigma_W.$$

(1) Poiché per ipotesi il fascio $\mathcal{B}$ è coerente, $\underline{\ker}\,\tau$ è di tipo finito in x. Poiché π^m è surgettiva, possiamo allora trovare un intorno aperto W di x in U e un

sotto-$\mathcal{A}_W$-modulo finitamente generato $\mathcal{S}$ di $\mathcal{A}_W^m$ tale che $\pi^m(\mathcal{S}) = \underline{\ker}\, \tau_W$. Allora

$$\underline{\ker}\, \pi \circ \sigma_W = \underline{\ker}\, (\tau \circ \pi_W^m) = (\pi_W^m)^{-1}(\underline{\ker}\, \tau_W) = \mathcal{S} + \underline{\ker}\, \pi_W^m = \mathcal{S} + s_1 \cdot \mathcal{A}_W^m$$

è finitamente generato vicino ad x.

(2) Poiché $s_{1,y} \neq 0_y$ per ogni $y \in U$, ed abbiamo supposto che $\mathcal{A}_y$ sia per ogni y un campo d'integrità, ogni elemento $a \in \underline{\ker}\, (\pi \circ \sigma)_y$ determina univocamente una $b \in \mathcal{A}_y$ tale che $\phi(a) = bs_{1,y}$.

Quindi la $\chi : \underline{\ker}\, (\pi \circ \sigma_W) \to \mathcal{A}_W^m$, è ben definita dalla $\chi(a) = a - (b, 0, \dots, 0)$ ed è un $\mathcal{A}_W$-morfismo. È $\sigma_W \circ \chi = 0$. Essendo $\underline{\ker}\, \sigma_W \subset \underline{\ker}\, (\pi \circ \sigma_W)$ e $\chi | \underline{\ker}\, \sigma_W$ l'identità, otteniamo che $\chi : \underline{\ker}\, \pi \circ \sigma_W \to \underline{\ker}\, \sigma_W$ è un epimorfismo. □

Teorema IX.4.5 (Oka). *Il fascio $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ è coerente.*

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n. Il caso $n = 0$ è banale, ed abbiamo già dimostrato che il risultato è vero per $n = 1$. Supponiamo quindi che $n > 0$ e che $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^h}$ sia coerente se $0 \leq h < n$. Per il criterio di coerenza formale, basterà dimostrare che $\mathcal{O}_U/(g \cdot \mathcal{O}_U)$ è coerente quando $g \in \mathcal{O}(U)$ per un aperto U di $\mathbb{C}^n$, e $g_z \neq 0$ se $z \in U$.

Sia $z \in U$. Possiamo prendere per semplicità $z = 0$ e supporre che le coordinate siano state scelte in modo che $g_{z_1}(z_1, 0, \dots, 0) \neq 0$ in $\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$. Per il teorema di preparazione di Weierstrass possiamo allora trovare un polinomio di Weierstrass $\varpi_{(0)}$ in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1},0}[z_1]$ tale che $g_{(0)}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} = \varpi_{(0)}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. Fissiamo un intorno aperto ω di 0 in $\mathbb{C}^{n-1}_{z_2,\dots,z_n}$ in modo tale che $\pi_{(0)}$ sia il germe di un polinomio $\pi \in \mathcal{O}(\omega)[z_1]$. Possiamo allora considerare l'applicazione di Weierstrass $\pi : (V, \mathcal{O}_V) \to (\omega, \mathcal{O}_\omega^d)$, ove $V = \{z \in \mathbb{C} \times \omega \mid \pi(z) = 0\}$ e d è il grado di ϖ in z_1. Poiché per l'ipotesi induttiva $\mathcal{O}_\omega$ è coerente, anche $\mathcal{O}_V$ è coerente. Ne segue che anche $\mathcal{O}_{\mathbb{C}\times\omega}/(\varpi \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{C}\times\omega})$ è coerente, essendo l'immagine diretta di $\mathcal{O}_V$ mediante l'inclusione. Poiché tale fascio coincide con il fascio $\mathcal{O}_U/(g\,\mathcal{O}_U)$ in un intorno di 0, ne segue che anche questo fascio è coerente in 0. Ciò completa la dimostrazione. □

5. Il lemma dei tre

In questo paragrafo consideriamo fissato un fascio $\mathcal{A}$ di anelli su uno spazio topologico X.

Teorema IX.5.1 (Lemma dei tre). *Sia:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S} \xrightarrow{\beta} \mathcal{S}'' \longrightarrow 0 \tag{9.5.1}$$

una successione esatta di fasci di $\mathcal{A}$-moduli. Se due dei fasci $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}''$ sono coerenti, anche il terzo lo è.

Dimostrazione. **a.** Supponiamo che $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}''$ siano coerenti. Per la Proposizione IX.3.2 è sufficiente dimostrare che $\mathcal{S}'$ è di tipo finito. Poiché $\mathcal{S}$

è di tipo finito, per ogni $x \in X$ possiamo trovare un intorno aperto U di x in X per cui vi sia una successione esatta di fasci della forma:

$$\mathcal{A}_U^q \xrightarrow{\chi} \mathcal{S}_U \longrightarrow 0. \tag{9.5.2}$$

Otteniamo allora, per composizione, una successione esatta di fasci:

$$\mathcal{A}_U^q \xrightarrow{\beta\circ\chi} \mathcal{S}''_U \longrightarrow 0. \tag{9.5.3}$$

Poiché $\mathcal{S}''$ è coerente, $\mathcal{I} = \underline{\ker}\,(\beta\circ\chi)$ è di tipo finito. Quindi $\chi(\mathcal{I})$ è di tipo finito e perciò coerente per la Proposizione IX.3.2, essendo un sotto-$\mathcal{A}_U$-modulo coerente del modulo coerente $\mathcal{S}_U$. Poiché:

$$\chi(\mathcal{I}) = \underline{\ker}\,\beta_U = \alpha(\mathcal{S}'_U) \simeq \mathcal{S}'_U,$$

otteniamo che $\mathcal{S}'_U$ è finitamente generato e quindi la tesi.

b. Supponiamo ora che $\mathcal{S}'$ ed $\mathcal{S}$ siano coerenti. Per la Proposizione IX.3.2, sarà sufficiente dimostrare che $\mathcal{S}''$ è di tipo finito per le relazioni, che cioè, dato un morfismo di $\mathcal{A}$-moduli:

$$\mathcal{A}^p \xrightarrow{\rho} \mathcal{S}'', \tag{9.5.4}$$

il fascio di $\mathcal{A}$-moduli $\underline{\ker}\,\rho$ è di tipo finito. Sia $x \in X$. Esiste allora un intorno aperto U di x in X e morfismi di $\mathcal{A}$-moduli:

$$\begin{array}{lll} \sigma : \mathcal{A}_U^p \to \mathcal{S}_U & \text{e} & \tau : \mathcal{A}_U^q \to \mathcal{S}_U \quad \text{tali che:} \\ \beta_U \circ \sigma = \rho_U & \text{e} & \tau(\mathcal{A}_U^q) = \alpha(\mathcal{S}'_U). \end{array}$$

Abbiamo quindi:

$$\underline{\ker}\,\rho_U = \sigma^{-1}(\underline{\ker}\,\beta_U) = \sigma^{-1}(\alpha(\mathcal{S}'_U)) = \sigma^{-1}(\tau(\mathcal{A}_U^q)).$$

Consideriamo il morfismo di $\mathcal{A}_U$-moduli:

$$\Xi : \mathcal{A}_U^p \oplus_X \mathcal{A}_U^q \ni (\xi, \eta) \to \sigma(\xi) - \tau(\eta) \in \mathcal{S}.$$

Il fascio $\underline{\ker}\,\Xi$ è di tipo finito perché $\mathcal{S}$ è coerente. Quindi lo è anche il fascio $\pi_1(\underline{\ker}\,\Xi)$, ove $\pi_1 : \mathcal{A}_U^P \oplus_X \mathcal{A}_U^q \ni (\xi, \eta) \to \xi \in \mathcal{A}_U^P$ è la proiezione naturale. Dico che $\pi_1(\underline{\ker}\,\Xi) = \underline{\ker}\,\rho_U$. Infatti, se $\sigma(\xi) = \tau(\eta)$, abbiamo $\sigma(\xi) = \alpha(\mu)$ per qualche $\mu \in \mathcal{S}'_U$, e quindi $\rho(\xi) = \beta\circ\sigma(\xi) = \beta\circ\alpha(\mu) = 0$. Viceversa, se $\rho(\xi) = 0$, è $\beta\circ\sigma(\xi) = 0$ e quindi, per l'esattezza della successione (9.5.1), $\sigma(\xi) = \alpha(\mu) = \tau(\eta)$ per opportuni $\mu \in \mathcal{S}'$ ed $\eta \in \mathcal{A}_U^q$. Ciò dimostra che $\mathcal{S}''$ è coerente.

c. Supponiamo infine che $\mathcal{S}'$ ed $\mathcal{S}''$ siano coerenti. Fissato $x \in X$, possiamo trovare un intorno aperto U di x in X, e sezioni $s'_1, \dots, s'_p \in \mathcal{S}'(U)$, $s_1, \dots, s_q \in \mathcal{S}(U)$, tali che:

$$\begin{array}{ll} s'_1, \dots, s'_p & \text{generano} \quad \mathcal{S}'_U \\ \beta(s_1), \dots, \beta(s_q) & \text{generano} \quad \mathcal{S}''_U. \end{array}$$

Dico che allora $\alpha(s'_1), \dots, \alpha(s'_p), s_1, \dots, s_q \in \mathcal{S}(U)$ generano $\mathcal{S}_U$. Se infatti $\xi \in \mathcal{S}_y$, con $y \in U$, allora esistono $f_{1,y}, \dots, f_{q,y} \in \mathcal{A}_y$ tali che:

$$\beta(\xi_y) = f_{1,y}\beta(s_{1,y}) + \cdots + f_{q,y}\beta(s_{q,y}).$$

Allora $\xi'_y = \xi_y - (f_{1,y}s_{1,y} + \cdots + f_{q,y}s_{q,y}) \in \underline{\ker}\,\beta_y$ e, per l'esattezza di (9.5.1), $\xi'_y = \alpha(\mu_y)$ con $\mu_y \in \mathcal{S}'_y$. Avremo allora, per opportuni $g_{1,y}, \ldots, g_{p,y} \in \mathcal{A}_y$, $\mu_y = g_{1,y}s'_{1,y} + \cdots + g_{p,y}s'_{p,y}$ e quindi:

$$\xi_y = f_{1,y}s_{1,y} + \cdots + f_{q,y}s_{q,y} + g_{1,y}\alpha(s'_{1,y}) + \cdots + g_{p,y}\alpha(s'_{p,y}).$$

Dimostriamo ora che $\mathcal{S}$ è di tipo finito per le relazioni. Fissiamo sezioni $t_1, \ldots, t_q \in \mathcal{S}(U)$, per un aperto U di X. Poiché $\mathcal{S}''$ è coerente, per ogni punto x di U possiamo trovare un intorno U' di x in U e una matrice $A = (a^i_j)_{\substack{1\le i\le q\\ 1\le j\le m}}$ con coefficienti $a^i_j \in \mathcal{A}(U')$ le cui colonne generano $\underline{\ker}\,(\beta(t_1), \ldots, \beta(t_q))$, cioè tale che la successione:

$$\mathcal{A}^m_{U'} \xrightarrow{\ A\ } \mathcal{A}^q_{U'} \xrightarrow{(\beta(t_1),\ldots,\beta(t_q))} \mathcal{S}''$$

sia esatta.

Per ogni indice $j = 1, \ldots, m$, abbiamo:

$$\beta\Big(\sum\nolimits_{i=1}^q a^i_j t_i\Big) = 0 \quad \text{su} \quad U'.$$

Poiché la successione (9.5.1) è esatta, possiamo allora trovare un intorno U'' di x in U' e sezioni $s'_1, \ldots, s'_m \in \mathcal{S}'(U'')$ tali che:

$$\sum_{i=1}^q a^i_j t_i = \alpha(s'_j) \quad \text{su} \quad U'' \quad \text{per } j = 1, \ldots, m.$$

Poiché abbiamo supposto $\mathcal{S}'$ coerente, potremo trovare un intorno U''' di x in U'' ed una matrice $B = (b^j_k)_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le k\le \ell}}$ con $b^j_k \in \mathcal{A}(U''')$ che renda esatta la successione:

$$\mathcal{A}^\ell_{U'''} \xrightarrow{\ B\ } \mathcal{A}^m_{U'''} \xrightarrow{(s'_1,\ldots,s'_m)} \mathcal{S}'_{U'''}.$$

Dico che allora la successione:

$$\mathcal{A}^\ell_{U'''} \xrightarrow{\ AB\ } \mathcal{A}^q_{U'''} \xrightarrow{(t_1,\ldots,t_q)} \mathcal{S} \tag{9.5.5}$$

è esatta. Infatti, se $f_y = {}^t(f_{1,y}, \ldots, f_{q,y}) \in \mathcal{A}^q_y$, con $y \in U'''$, è soluzione di:

$$\sum\nolimits_{i=1}^q f_{i,y}t_{i,y} = 0_y,$$

allora anche:

$$\sum\nolimits_{i=1}^q f_{i,y}\beta(t_{i,y}) = 0_y,$$

e quindi:

$${}^t(f_{1,y}, \ldots, f_{i,y}) = A_y\,{}^t(g_{1,y}, \ldots, g_{m,y}) \quad \text{per un} \quad {}^t(g_{1,y}, \ldots, g_{m,y}) \in \mathcal{A}^m_y.$$

Abbiamo perciò:

$$0 = \sum\nolimits_{i=1}^q \sum\nolimits_{k=1}^m g_{k,y}a^i_{k,y}t_{i,y} = \sum\nolimits_{k=1}^m g_{k,y}\alpha(s'_{k,y}) = \alpha\left(\sum\nolimits_{k=1}^m g_{k,y}s'_{k,y}\right)$$

Questa relazione ci dà, per l'esattezza di (9.5.1), $\sum_{k=1}^m g_{k,y}s'_{k,y} = 0$. Quindi:

$${}^t(g_{1,y}, \ldots, g_{m,y}) = B\,{}^t(h_{1,y}, \ldots, h_{\ell,y})$$

e, finalmente,

$$^t(f_{1,y},\dots,f_{i,y}) = AB^t(h_{1,y},\dots,h_{\ell,y}).$$

Poiché $BA(\mathcal{A}^{\ell}_{U'''}) \subset \underline{\ker}\,(t_1,\dots,t_q)_{U'''}$, otteniamo l'esattezza della (9.5.5). $\square$

Proposizione IX.5.2. *La somma di Whitney di un numero finito di fasci coerenti è un fascio coerente.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{S}''$ sono fasci coerenti e definiamo $\mathcal{S} = \mathcal{S}' \oplus_X \mathcal{S}''$, otteniamo una successione esatta di fasci (9.5.1) definendo $\alpha(s'_x) = s'_x \oplus 0_x$ e $\beta(s'_x, s''_x) = s''_x$. La coerenza di $\mathcal{S}$ è allora conseguenza del Teorema IX.5.1. $\square$

Proposizione IX.5.3. *Se $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ sono morfismi di $\mathcal{A}$-moduli coerenti, anche $\underline{\ker}\,\Phi$, $\underline{\mathrm{Imm}}\,\Phi$ e $\underline{\mathrm{koker}}\,\Phi$ sono fasci coerenti.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\underline{\mathrm{Imm}}\,\Phi$ è finitamente generato perché immagine di un $\mathcal{A}$-modulo finitamente generato e di tipo finito per le relazioni perché sotto-$\mathcal{A}$-modulo di un modulo di tipo finito per le relazioni. Dalla successione esatta:

$$0 \longrightarrow \underline{\ker}\,\Phi \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Imm}}\,\Phi \longrightarrow 0 \tag{9.5.6}$$

segue, per il Lemma dei tre, che anche $\underline{\ker}\,\Phi$ è coerente. Allora dalla successione esatta:

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Imm}}\,\Phi \longrightarrow \mathcal{S}' \longrightarrow \underline{\mathrm{koker}}\,\Phi \longrightarrow 0 \tag{9.5.7}$$

e dal Lemma dei tre segue che anche $\underline{\mathrm{koker}}\,\Phi$ è coerente. $\square$

Abbiamo ancora:

Proposizione IX.5.4. *Data una successione esatta di $\mathcal{A}$-moduli:*

$$\mathcal{S}' \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathcal{S} \xrightarrow{\ \beta\ } \mathcal{S}'' \longrightarrow \mathbf{0}, \tag{9.5.8}$$

se $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{S}$ sono coerenti, anche $\mathcal{S}''$ è coerente.

Dimostrazione. Basta infatti osservare che, poiché $\underline{\ker}\,\alpha$ è coerente, anche $\mathcal{Q} = \mathcal{S}'/\underline{\ker}\,\alpha$ è coerente, per il Lemma dei tre. Abbiamo infatti una successione esatta:

$$0 \longrightarrow \underline{\ker}\,\alpha \longrightarrow \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0, \tag{9.5.9}$$

in cui i primi due fasci di $\mathcal{A}$-moduli sono coerenti. Ricaviamo la tesi applicando il lemma dei tre alla successione esatta di $\mathcal{A}$-moduli:

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q} \xrightarrow{\ \hat\alpha\ } \mathcal{S} \xrightarrow{\ \beta\ } \mathcal{S}'' \longrightarrow 0 \tag{9.5.10}$$

dove $\hat\alpha : \mathcal{Q} \to \mathcal{S}$ è ottenuta dalla α per passaggio al quoziente iniettivo. $\square$

Teorema IX.5.5. *Sia:*

$$\mathcal{S}' \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathcal{S} \xrightarrow{\ \beta\ } \mathcal{S}'' \tag{9.5.11}$$

una successione di fasci coerenti. Se in un punto $x \in X$ la successione:

$$\mathcal{S}'_x \xrightarrow{\ \alpha_x\ } \mathcal{S}_x \xrightarrow{\ \beta_x\ } \mathcal{S}''_x \tag{9.5.12}$$

è esatta, allora esiste un intorno aperto U di x in X tale che la successione:

$$\mathcal{S}'_U \xrightarrow{\ \alpha_U\ } \mathcal{S}_U \xrightarrow{\ \beta_U\ } \mathcal{S}''_U \tag{9.5.13}$$

sia esatta.

Dimostrazione. I fasci $\mathcal{S}'/\underline{\ker}\,(\beta\circ\alpha)$ e $\underline{\ker}\,\beta/\underline{\mathrm{Imm}}\,\alpha$ sono coerenti. Per ipotesi la loro spiga è nulla in x. Poiché sono di tipo finito, essi sono nulli in un intorno aperto U di x, cioè la (9.5.13) è esatta. □

Proposizione IX.5.6. *Se $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{S}''$ sono due sotto-$\mathcal{A}$-moduli coerenti di un $\mathcal{A}$-modulo coerente $\mathcal{S}$, allora anche $\mathcal{S}'+\mathcal{S}''$ ed $\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''$ sono coerenti.*

Dimostrazione. Infatti $\mathcal{S}'+\mathcal{S}''$ è l'immagine di $\mathcal{S}'\oplus\mathcal{S}'' \ni (s'_x, s''_x) \to s'_x + s''_x \in \mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''$ il nucleo della restrizione della proiezione naturale $\mathcal{S}' \to (\mathcal{S}/\mathcal{S}'')$. □

Proposizione IX.5.7. *Se $\mathcal{A}$ è coerente, un $\mathcal{A}$-modulo $\mathcal{S}$ è coerente se e soltanto se è localmente di presentazione finita.*

Dimostrazione. La tesi è una semplice conseguenza della Proposizione IX.5.4. □

Proposizione IX.5.8. *Sia $\mathcal{A}$ coerente e sia $\mathcal{I}$ un ideale coerente di $\mathcal{A}$. Un $(\mathcal{A}/\mathcal{I})$-modulo è $(\mathcal{A}/\mathcal{I})$-coerente se e soltanto se è $\mathcal{A}$-coerente.*

Dimostrazione. Osserviamo che ogni $(\mathcal{A}/\mathcal{I})$-modulo si può considerare in modo naturale come un $\mathcal{A}$-modulo. Se $\mathcal{S}$ è $(\mathcal{A}/\mathcal{I})$-coerente, allora ammette localmente una presentazione finita come $(\mathcal{A}/\mathcal{I})$-modulo:

$$(\mathcal{A}/\mathcal{I})^p_U \longrightarrow (\mathcal{A}/\mathcal{I})^q_U \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0.$$

Questa è anche una successione esatta di $\mathcal{A}$-moduli in cui i primi due sono coerenti e quindi $\mathcal{S}$ è $\mathcal{A}$-coerente per la Proposizione IX.5.4. Il viceversa è ovvio. □

Proposizione IX.5.9 (coerenza delle estensioni banali). *Sia $\mathcal{B}$ un fascio d'anelli su un sottospazio chiuso Y di uno spazio topologico X. Indichiamo con $\imath_*(\mathcal{B})$ il fascio definito da:*

$$\imath_*(\mathcal{B})_x = \begin{cases} \mathcal{B}_x & \text{se } x \in Y \\ 0 & \text{se } x \in \complement Y. \end{cases} \tag{9.5.14}$$

Allora

(1) *$\imath_*(\mathcal{B})$ è un fascio d'anelli su X;*

(2) *se $\mathcal{T}$ è un $\mathcal{B}$-modulo, allora $\imath_*(\mathcal{T})$, definito da:*

$$\imath_*(\mathcal{T})_x = \begin{cases} \mathcal{T}_x & \text{se } x \in Y \\ 0 & \text{se } x \in \complement Y. \end{cases} \tag{9.5.15}$$

è un $\imath_*(\mathcal{B})$-modulo su X;

(3) *siano $\mathcal{T}$ e $\imath_*(\mathcal{T})$ come al punto (2). Allora $\mathcal{T}$ è $\mathcal{B}$-coerente se e soltanto se $\imath_*(\mathcal{T})$ è $\imath_*(\mathcal{B})$-coerente.* □

6. Altri risultati di coerenza

Siano $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ due fasci di $\mathcal{A}$-moduli su X.

LEMMA IX.6.1. *Se $\mathcal{S}'$ è coerente, allora l'applicazione naturale:*

$$\rho_x : \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}', \mathcal{S})_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_x}(\mathcal{S}'_x, \mathcal{S}_x) \tag{9.6.1}$$

è bigettiva.

DIMOSTRAZIONE. Se $\phi_U : \mathcal{S}'_U \to \mathcal{S}_U$ è un $\mathcal{A}_U$-morfismo che si annulla in un intorno aperto U di x, allora ϕ_x è nullo. Quindi la ρ_x è iniettiva.

Sia ora $\sigma_x : \mathcal{S}'_x \to \mathcal{S}_x$ un $\mathcal{A}_x$-omomorfismo. Fissiamo una presentazione finita

$$\mathcal{A}^q_U \xrightarrow{(F^j_i)^{1\le j\le p}_{1\le i\le q}} \mathcal{A}^p_U \xrightarrow{(s'_1,\dots,s'_p)} \mathcal{S}' \longrightarrow 0$$

di $\mathcal{S}'$ in un intorno aperto U di x, con $s'_1, \dots, s'_p \in \mathcal{S}'(U)$. Siano poi $t_1, \dots, t_p$ sezioni di $\mathcal{S}$, che possiamo supporre definite sullo stesso intorno aperto U di x, tali che $t_{j,x} = \sigma_x(s'_{j,x})$ per $j = 1, \dots, p$. Abbiamo:

$$\sum\nolimits_{j=1}^{p} F^j_{i,x} t_{j,x} = \sum\nolimits_{j=1}^{p} \sigma_x(F^j_{i,x} s'_{j,x}) = 0_x$$

e dunque la matrice $(F^j_i)^{1\le j\le p}_{1\le i\le q}$ è una matrice di relazioni per le $(t_1, \dots, t_p)$ in un intorno U' di x in U. Questo ci permette di definire $\sigma_{U'} : \mathcal{S}'_{U'} \to \mathcal{S}_{U'}$ ponendo $\sigma(s_{j,y}) = t_{j,y}$ per ogni $y \in U'$ ed ogni $j = 1, \dots, p$. □

PROPOSIZIONE IX.6.2. *Se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ sono coerenti, anche il fascio degli omomorfismi $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ è coerente.*

DIMOSTRAZIONE. Da una presentazione finita:

$$\mathcal{A}^q_U \longrightarrow \mathcal{A}^p_U \longrightarrow \mathcal{S}'_U \longrightarrow 0,$$

per il Lemma IX.6.1, otteniamo una successione esatta:

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A}^q_U, \mathcal{S}_U) \longleftarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A}^p_U, \mathcal{S}_U) \longleftarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{S}'_U, \mathcal{S}_U) \leftarrow 0,$$

cioè:

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{S}'_U, \mathcal{S}_U) \longrightarrow \mathcal{S}^p_U \longrightarrow \mathcal{S}^q_U.$$

Poiché $\mathcal{S}^p_U$ e $\mathcal{S}^q_U$ sono $\mathcal{A}_U$-coerenti, ne segue che anche $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{S}'_U, \mathcal{S}_U)$, come nucleo di un omomorfismo di fasci coerenti, è coerente. Poiché ciò vale per tutti gli aperti di un ricoprimento aperto di X, ne segue che $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, è coerente. □

Osservazione IX.6.3. L'ipotesi su $\mathcal{S}'$ si può indebolire richiedendo soltanto che esso sia localmente di presentazione finita.

Definizione IX.6.4. Dato un fascio $\mathcal{S}$ di $\mathcal{A}$-moduli, definiamo il suo *fascio duale* $\mathcal{S}^* = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S},\mathcal{A})$ e il suo *fascio biduale* $\mathcal{S}^{**} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}^*,\mathcal{A})$. Per i risultati precedenti, se $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{S}$ sono coerenti, anche $\mathcal{S}^*$, $\mathcal{S}^{**}$ ed il nucleo dell'inclusione naturale $\underline{\ker}\,(\mathcal{S}\to\mathcal{S}^{**})$ sono coerenti.

Proposizione IX.6.5. *Se $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ sono coerenti, anche $\mathcal{S}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{S}'$ è coerente.*

Dimostrazione. Da una presentazione finita

$$\mathcal{A}^q_U \longrightarrow \mathcal{A}^p_U \longrightarrow \mathcal{S}'_U \longrightarrow 0,$$

di $\mathcal{S}'$ su un aperto U di X, tensorizzando per $\mathcal{S}_U$, otteniamo[1] una successione esatta:

$$\mathcal{S}^q_U \longrightarrow \mathcal{S}^p_U \longrightarrow \mathcal{S}_U\otimes\mathcal{S}'_U \longrightarrow 0.$$

Ne segue che $\mathcal{S}_U\otimes\mathcal{S}'_U$ è coerente perché cokernel di un omomorfismo di fasci coerenti. □

Osservazione IX.6.6. Anche qui basta richiedere che uno dei due fasci sia coerente e l'altro localmente di presentazione finita.

Definizione IX.6.7. Dato un fascio $\mathcal{S}$ di $\mathcal{A}$-moduli, chiamiamo *fascio degli annullatori* di $\mathcal{S}$, il fascio definito mediante:

$$(\underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S})_x = \{f_x\in\mathcal{A}_x \mid f_x\cdot\mathcal{S}_x = 0_x\}. \tag{9.6.2}$$

Proposizione IX.6.8. *Se $\mathcal{S}$ è di tipo finito, allora $\underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S}$ è un fascio d'ideali di $\mathcal{A}$.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che $\underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S}$ è aperto in $\mathcal{A}$. Ciò è conseguenza del fatto che, se $f\in\mathcal{A}(U)$, e se l'omomorfismo $\mathcal{S}_U\xrightarrow{f\cdot}\mathcal{S}_U$ è nullo in $x\in U$, allora è nullo in tutto un intorno aperto di x in U. □

Proposizione IX.6.9. *Se $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{S}$ sono coerenti, allora $\underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S}$ è un fascio coerente.*

Dimostrazione. Definiamo un omomorfismo di $\mathcal{A}$-moduli $\alpha:\mathcal{A}\to\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S},\mathcal{S})$ associando ad $f_x\in\mathcal{A}_x$ l'omomorfismo $\alpha_x(f_x):\mathcal{S}_x\ni s_x\to f_xs_x\in\mathcal{S}_x$. Il fascio $\underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S}=\underline{\ker}\,\alpha$ è coerente perché nucleo di un morfismo di fasci coerenti. □

[1]Ricordiamo che il prodotto tensoriale è un funtore esatto a destra, cioè per ogni successione esatta di moduli $A\to B\to C\to 0$, ed ogni modulo D, anche $A\otimes D\to B\otimes D\to C\otimes D\to 0$ è esatta.

CAPITOLO 10

Spazi complessi

1. Spazi complessi modello

Definizione X.1.1. Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}^n$ ed $\mathcal{I}$ un fascio d'ideali di $\mathcal{O}_\Omega$, di tipo finito. Il fascio quoziente $\mathcal{A} = \mathcal{O}_\Omega/\mathcal{I}$ è un fascio d'anelli. Il suo supporto

$$Y = \operatorname{supp} \mathcal{A} = \{z \in \Omega \mid \mathcal{I}_z \neq \mathcal{O}_z\} \tag{10.1.1}$$

è un sottoinsieme chiuso di Ω. Indichiamo con $\mathcal{O}_Y$ la restrizione a Y di $\mathcal{A}$. Lo spazio anellato $(Y, \mathcal{O}_Y)$ si dice lo *spazio complesso modello* definito in Ω dal fascio di ideali $\mathcal{I}$.

Esempio X.1.2 (La parabola di Neil). In $\mathbb{C}^2_{z,w}$ consideriamo l'ideale $\mathcal{I}$ generato dal polinomio $p(z,w) = w^2 - z^3$. Lo spazio complesso corrispondente, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, con

$$Y = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z^3\},$$

ha una *singolarità* (una cuspide) in $(0,0)$.

Descriviamo il fascio $\mathcal{O}_Y$ nei diversi punti (z_0, w_0) di Y. Se $(z_0, w_0) \neq (0,0)$, allora, per il teorema delle funzioni implicite, risulta determinata una funzione olomorfa $w = g(z)$, definita per z in un intorno aperto ω_{z_0} di z_0 in $\mathbb{C}$, tale che, per un intorno U di (z_0, w_0) in $\mathbb{C}^2$, risulti:

$$Y \cap U = \{(z, g(z)) \mid z \in \omega_{z_0}\}.$$

Se $f(z,w)$ è una funzione olomorfa in un intorno di (z_0, w_0), allora la $f(z, g(z))$ è anch'essa olomorfa in un intorno di (z_0, w_0), e la $f(z, g(z)) - f(z,w)$ definisce una sezione dell'ideale $\mathcal{I}$ in un intorno di (z_0, w_0). Ne segue che $\mathcal{O}_{Y,(z_0,w_0)}$ è isomorfo allo spazio $\mathcal{O}_{\mathbb{C},z_0}$ dei germi di funzioni olomorfe di una variabile complessa nel punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Consideriamo ora il punto $(0,0) \in Y$. Ogni $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}$ è equivalente, modulo una sezione di $\mathcal{I}$, ad una somma $g_0(z) + w g_1(z)$, con g_0 e g_1 funzioni olomorfe di una variabile complessa, definite in un intorno di 0 in $\mathbb{C}$. Il prodotto è definito da:

$$(g_0 + w g_1)(h_0 + w h_1) = (g_0 h_0 + z^3 g_1 h_1) + w(g_0 h_1 + g_1 h_0).$$

Esempio X.1.3. Consideriamo in $\mathbb{C}^2_{z,w}$ l'ideale generato da $p(z,w) = zw$. Allora $Y = \{z = 0\} \cup \{w = 0\}$ ed $\mathcal{O}_{Y,(z,w)}$ è isomorfo all'anello dei germi di funzioni olomorfe di una variabile se $(z,w) \in Y \setminus \{(0,0)\}$, mentre ogni germe di $\mathcal{O}_{Y,(0,0)}$ si rappresenta in modo unico nella forma $k + g(z) + h(w)$, ove $k \in \mathbb{C}$ e g, h sono germi di funzioni olomorfe di una variabile complessa che si annullano in 0. Il prodotto in $\mathcal{O}_{Y,(0,0)}$ è dato da:

$$\begin{aligned}(k_1 + g_1(z) + h_1(w))&(k_2 + g_2(z) + h_2(w))\\ &= k_1k_2 + (k_2f_1(z) + k_1f_2(z) + f_1(z)f_2(z))\\ &\qquad + (k_2h_1(w) + k_1h_2(w) + h_1(w)h_2(w)).\end{aligned}$$

Esempio X.1.4 (Punti multipli). Fissiamo un intero positivo n e consideriamo in $\mathbb{C}$ l'ideale generato da $p(z) = z^n$. Allora $Y = \{0\}$ ed $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{Y,0}$ è isomorfo, in modo naturale, a $\mathbb{C}^n$. Infatti ogni germe di funzione olomorfa in 0 è equivalente, modulo $\mathcal{I}$, al suo polinomio di Taylor di grado $(n-1)$, e due germi che abbiamo lo stesso polinomio di Taylor di grado $(n-1)$ sono equivalenti modulo $\mathcal{I}$. Quindi $f \simeq a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}$ e:

$$(a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1})\cdot(b_0+b_1z+\cdots+b_{n-1}z^{n-1}) = \sum_{h=0}^{n-1}\left(\sum_{i+j=h} a_ib_j\right)z^h.$$

Esempio X.1.5 (Cono in $\mathbb{C}^3$). Consideriamo in $\mathbb{C}^3$ il fascio d'ideali $\mathcal{I}$ generato dal polinomio $p(z_1,z_2,z_3) = z_1^2 - z_2z_3$. Allora $Y = \{z_1^2 - z_2z_3 = 0\}$ ed $\mathcal{O}_{Y,(z_1,z_2,z_3)}$ è isomorfo all'anello dei germi di funzioni olomorfe in due variabili se $(z_1,z_2,z_3) \in Y \setminus \{(0,0,0)\}$. Ogni elemento di $\mathcal{O}_{Y,(0,0,0)}$ ha uno ed un solo rappresentante della forma:

$$f(z_1,z_2,z_3) = f_0(z_2,z_3) + z_1f_1(z_2,z_3),$$

che è il suo resto della divisione di Weierstrass rispetto a $p(z_1,z_2,z_3)$, considerato come polinomio in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,(0,0)}[z_1]$, che ha ordine due rispetto rispetto alla variabile distinta z_1. Il prodotto in $\mathcal{O}_{Y,(0,0,0)}$ è dato da:

$$\begin{aligned}&[f_0(z_2,z_3) + z_1f_1(z_2,z_3)]\cdot[g_0(z_2,z_3) + z_1g_1(z_2,z_3)]\\ &\quad= (f_0(z_2,z_3)g_0(z_2,z_3) + z_2z_3f_1(z_2,z_3)g_1(z_2,z_3)\\ &\quad+ z_1(f_1(z_2,z_3)g_0(z_2,z_3) + f_0(z_2,z_3)g_1(z_2,z_3)).\end{aligned}$$

Proposizione X.1.6. *Sia $(Y, \mathcal{O}_Y)$ uno spazio complesso modello, definito da un fascio di ideali $\mathcal{I}$ di $\mathcal{O}_\Omega$, con Ω aperto di $\mathbb{C}^n$. Se $y \in Y$ non è un punto interno di Y in Ω, allora per y passa una retta complessa $L \subset \mathbb{C}^n$ tale che y sia punto isolato di $Y \cap L$.*

Dimostrazione. La condizione che $y \in Y \cap \complement[int(Y)]$ ci dice che $\mathcal{O}_y \neq \mathcal{I}_y \neq 0_y$. Esisterà quindi una sezione $f \in \mathcal{I}(U)$, definita in un intorno aperto U di y in Ω, che non sia identicamente nulla in nessun intorno di y in Ω. Abbiamo allora $Y \cap U \subset N(f) = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$. Supponiamo, com'è possibile, che U sia un aperto convesso. Scegliamo un punto $z \in U$ in cui $f(z) \neq 0$. Allora la retta:

$$L = \{y + \lambda(z-y) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

è una retta per y. La $\phi(\lambda) = f(y + \lambda(z-y))$ è una funzione olomorfa della variabile complessa λ, definita in un intorno di $0 \in \mathbb{C}$ e che, essendo non identicamente nulla in un intorno di 0, ha in 0 uno zero isolato. Questo ci dice quindi che y, corrispondente al valore $\lambda = 0$, è un punto isolato di $L \cap Y$. □

2. Fasci di $\mathbb{C}$-algebre. Spazi $\mathbb{C}$-anellati

Definizione X.2.1. Dato uno spazio topologico X, indicheremo con $\underline{\mathbb{C}}$ il fascio costante $X \times \mathbb{C} \ni (x, \lambda) \xrightarrow{\pi} x \in X$. Un *fascio di* $\mathbb{C}$*-algebre* su X è un fascio d'anelli $\mathcal{A}$ su X che è anche un fascio di $\underline{\mathbb{C}}$-moduli, tale che $\operatorname{supp} \mathcal{A} = X$ e risulti inoltre:

$$\lambda_x(f_x g_x) = (\lambda\, f_x) g_x \quad \text{se} \quad \lambda_x \in \underline{\mathbb{C}}_x \text{ e } f_x, g_x \in \mathcal{A}_x. \tag{10.2.1}$$

L'applicazione $\underline{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}$ che associa a (x, λ) l'elemento $\lambda \cdot 1_x \in \mathcal{A}_x$ ci permette di identificare $\underline{\mathbb{C}}$ a un sottofascio di $\mathcal{A}$.

Un fascio di $\mathbb{C}$-algebre $\mathcal{A}$ è un *fascio di* $\mathbb{C}$*-algebre locali* se:

(1) per ogni $x \in X$, l'anello $\mathcal{A}_x$ è un anello locale. Indicheremo con $\mathfrak{m}(\mathcal{A}_x)$ l'ideale massimale di $\mathcal{A}_x$.
(2) La composizione $\mathbb{C} \simeq \underline{\mathbb{C}}_x \to \mathcal{A}_x \to (\mathcal{A}_x/\mathfrak{m}(\mathcal{A}_x))$ definisce un isomorfismo di fasci.

Identificando quindi $\underline{\mathbb{C}}_x = \mathbb{C}$ con $\mathcal{A}_x/\mathfrak{m}(\mathcal{A}_x)$, otteniamo una decomposizione:

$$\mathcal{A}_x = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{m}(\mathcal{A}_x) \tag{10.2.2}$$

come $\mathbb{C}$-spazi vettoriali.

Se $\mathcal{A}$ è un fascio di $\mathbb{C}$-algebre locali su X, chiameremo la coppia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio $\mathbb{C}$-anellato.

Proposizione X.2.2. *Ogni spazio complesso modello è uno spazio* $\mathbb{C}$*-anellato.*

Dimostrazione. Se Ω è un aperto di $\mathbb{C}^n$, la coppia $(\Omega, \mathcal{O}_\Omega)$ è in modo ovvio uno spazio $\mathbb{C}$-anellato. Sia $\mathcal{I}_\Omega$ un fascio di tipo finito d'ideali di $\mathcal{O}_\Omega$ ed $(X, \mathcal{O}_X)$, con $X = N(\mathcal{I}_\Omega)$ ed $\mathcal{O}_X = (\mathcal{O}_\Omega/\mathcal{I}_\Omega)|X$, il relativo spazio complesso modello. Se $x \in X$, allora $\mathcal{I}_{\Omega,x} \subset \mathfrak{m}(\mathcal{O}_{\Omega,x})$. Quindi, per il teorema di omomorfismo, $(\mathcal{O}_{\Omega,x}/\mathcal{I}_{\Omega,x})/(\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{\Omega,x})/\mathcal{I}_{\Omega,x})) \simeq \mathcal{O}_{\Omega,x}/\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{\Omega,x}) \simeq \mathbb{C}$, quindi $(X, \mathcal{O}_X)$ è $\mathbb{C}$-anellato, ed in ogni punto x di X l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{X,x}$ è $\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{\Omega,x})/\mathcal{I}_{\Omega,x}$ □

Osservazione X.2.3. Se $\mathcal{I}_\Omega \neq 0$, il quoziente $\mathcal{O}_\Omega/\mathcal{I}_\Omega$ non definisce su Ω una struttura di spazio $\mathbb{C}$-anellato, in quanto $\operatorname{supp}(\mathcal{O}_\Omega/\mathcal{I})$ è diverso da Ω.

Definizione X.2.4. Un omomorfismo di fasci $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ è un omomorfismo di $\mathbb{C}$-algebre se, per ogni $x \in X$ l'applicazione corrispondente $\alpha_x : \mathcal{A}_x \to \mathcal{A}'_x$ è un omomorfismo di $\mathbb{C}$-algebre.

Se $\mathcal{A}_x, \mathcal{A}'_x$ sono $\mathbb{C}$-algebre locali, allora la α sarà anche un omomorfismo di $\mathbb{C}$-algebre locali: trasformerà cioè l'ideale massimale di $\mathcal{A}_x$ in un sotto-$\mathcal{A}'_x$-modulo dell'ideale massimale di $\mathcal{A}'_x$.

3. Morfismi di spazi $\mathbb{C}$-anellati

Sia $(X, \mathcal{A}_X)$ uno spazio $\mathbb{C}$-anellato. Se $f : X \to Y$ è un'applicazione continua, non è detto che il fascio immagine diretta $f_*(\mathcal{A}_X)$ sia un fascio di $\mathbb{C}$-algebre su Y, secondo le definizioni del Paragrafo 2, perché il suo supporto può non essere uguale a Y. Esso è comunque un fascio di anelli e di $\underline{\mathbb{C}}$-moduli. Esso è un fascio di $\mathbb{C}$-algebre quando f è surgettiva, ma anche in questo caso il fatto che $\mathcal{A}_X$ sia un fascio di $\mathbb{C}$-algebre locali su X non implica che $f_*(\mathcal{A}_X)$, sia un fascio di $\mathbb{C}$-algebre locali su Y.

Definizione X.3.1. Un *morfismo di spazi anellati*:

$$(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{A}_X) \to (Y, \mathcal{A}_Y) \tag{10.3.1}$$

è il dato di:

(1) un'applicazione continua $f : X \to Y$;
(2) un morfismo $\tilde{f} : \mathcal{A}_Y \to f_*(\mathcal{A}_X)$ di fasci di anelli e di $\underline{\mathbb{C}}$-moduli tale che l'omomorfismo indotto sulle fibre:

$$\tilde{f}_x : \mathcal{A}_{Y,\, f(x)} \to \mathcal{A}_{X,\, x} \tag{10.3.2}$$

sia un omomorfismo di $\underline{\mathbb{C}}$-algebre locali.

Esempio X.3.2. Siano X, Y spazi topologici, $f : X \to Y$ un'applicazione continua e siano $\mathcal{C}_X$, $\mathcal{C}_Y$ i fasci dei germi di funzioni continue su X ed Y, rispettivamente. Possiamo allora definire una $\tilde{f} : \mathcal{C}_Y \to f_*(\mathcal{C}_X)$ mediante:

$$\mathcal{C}(U, \mathbb{C}) \ni g \to g \circ f \in \mathcal{C}(f^{-1}(U), \mathbb{C}) \qquad (U \text{ aperto di } Y).$$

Allora $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{C}_X) \to (Y, \mathcal{C}_Y)$ è un morfismo di spazi anellati.

Esempio X.3.3. Se X e Y sono aperti di $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$, rispettivamente, ed $f : X \to Y$ è olomorfa, si ottiene in modo analogo all'esempio precedente un morfismo di spazi $\mathbb{C}$-anellati $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$.

Esempio X.3.4. Consideriamo, come caso particolare dell'esempio precedente, quello in cui Ω sia un aperto di $\mathbb{C}^n$, $\imath : \Omega \to \mathbb{C}^n$ l'inclusione e $(\imath, \tilde{\imath}) : (\Omega, \mathcal{O}_\Omega) \to (\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. Abbiamo $(f_*(\mathcal{O}_\Omega))_z = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,\, z})$ se $z \in \Omega$, $(f_*(\mathcal{O}_\Omega))_z = \mathbf{0}_z$ se $z \notin \bar{\Omega}$, mentre $(f_*(\mathcal{O}_\Omega))_z$ è un'estensione dell'anello $\mathcal{O}_z = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,\, z})$ quando $z \in \partial\Omega$. Questo può non essere un anello locale.

Sia ad esempio Ω un aperto di $\mathbb{C}$, con $\emptyset \neq \Omega \neq \mathbb{C}$ e $\{z_n\}$ una successione di punti distinti di Ω convergente ad un punto $z_0 \in \partial\Omega$. Per il teorema di Weierstrass, possiamo trovare una $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $g(z_{2n}) = 0$ e $g(z_{2n+1}) = 1$ per tutti gli interi positivi n. Se g_z è il germe in $(f_*(\mathcal{O}_\Omega))_{z_0}$ definito da g, né g_{z_0} né $(1-g)_{z_0}$ sono invertibili in $(f_*(\mathcal{O}_\Omega))_{z_0}$.

Gli spazi $\mathbb{C}$-anellati, con i morfismi sopra descritti, formano una categoria. In particolare, possiamo comporli e dare la nozione d'isomorfismo.

Proposizione X.3.5. *Se* $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{A}_X) \to (Y, \mathcal{A}_Y)$ *è un morfismo di spazi* $\mathbb{C}$*-anellati, allora* $\operatorname{supp}(\mathcal{A}_Y / \underline{\ker}\, \tilde{f}) = \overline{f(X)} = \operatorname{supp} f_*(\mathcal{A}_X)$.

4. Spazi complessi

Definizione X.4.1. Uno spazio $\mathbb{C}$-anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ si dice uno *spazio complesso* se:

(1) Il fascio $\mathcal{O}_X$ è di Hausdorff;
(2) Ogni punto $x \in X$ ha un intorno aperto U tale che $(U, \mathcal{O}_X|U)$ sia isomorfo, come $\mathbb{C}$-spazio anellato, ad uno spazio complesso modello.

Proposizione X.4.2. *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio complesso. Allora, per ogni $x \in X$, la fibra $\mathcal{O}_{X,x}$ è un'algebra analitica, e quindi in particolare un anello locale Noetheriano.*

Dimostrazione. Infatti $\mathcal{O}_{X,x}$ è isomorfo a $\mathcal{O}_{n,0}/\mathcal{I}$ per un ideale $\mathcal{I}$ di $\mathcal{O}_{n,0}$. □

Definizione X.4.3. Sia $\mathbb{A}$ una $\mathbb{C}$-algebra locale, con ideale massimale $\mathfrak{m}_{\mathbb{A}}$. Essa si dice *Henseliana* se soddisfa la seguente proprietà:

Se $\varpi = T^d + a_1 T^{d-1} + \cdots + a_{d-1}T + a_d \in \mathbb{A}[T]$ è un polinomio monico e se ci sono numeri complessi distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ed interi positivi $d_1, \ldots, d_k$ tali che:

$$\varpi - (T - \lambda_1)^{d_1} \cdots (T - \lambda_k)^{d_k} \in \mathfrak{m}_{\mathbb{A}}[T], \tag{10.4.1}$$

allora esistono polinomi $\varpi_1, \ldots, \varpi_k \in \mathbb{A}[T]$ tali che:

$$\varpi = \varpi_1 \cdots \varpi_k \quad \text{e} \quad \varpi_j - (T - \lambda_j)^{d_j} \in \mathfrak{m}_{\mathbb{A}}[T] \quad \text{per } j = 1, \ldots, k. \tag{10.4.2}$$

Abbiamo:

Proposizione X.4.4. *Se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio complesso, allora, per ogni $x \in X$, la $\mathbb{C}$-algebra locale $\mathcal{O}_{X,x}$ è Henseliana.*

Definizione X.4.5. Un morfismo $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ di $\mathbb{C}$-spazi anellati definito tra due spazi complessi si dice *un'applicazione olomorfa*; se è un isomorfismo di $\mathbb{C}$-spazi anellati, diremo che è *biolomorfa*.

Se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio complesso, un $\mathcal{O}_X$-modulo si dirà anche *fascio analitico* su X.

Definizione X.4.6. Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio complesso. Un punto $x \in X$ si dice *semplice* o *regolare* se esiste un intorno aperto U di x in X tale che $(U, \mathcal{O}_X|U)$ sia isomorfo ad $(\Omega, \mathcal{O}_\Omega)$ per un aperto Ω di uno spazio complesso Euclideo $\mathbb{C}^n$.

Se tutti i punti di X sono regolari, diciamo che $(X, \mathcal{O}_X)$ è una *varietà complessa liscia*.

I punti di X che non sono regolari si dicono *singolari*.

Esempio X.4.7. Il punto $(0, 0)$ è l'unico punto singolare della parabola di Neil $\{w^2 = z^3\} \subset \mathbb{C}^2$ e $(0, 0, 0)$ il solo punto singolare del cono $\{z_1^2 = z_2 z_3\} \subset \mathbb{C}^3$.

Definizione X.4.8. Diciamo che X è *irriducibile* in $x \in X$ se $\mathcal{O}_{X,x}$ è un dominio d'integrità.

Osservazione X.4.9. Chiaramente i punti semplici sono anche irriducibili, ma non è vero il viceversa. Infatti $(0,0)$ è punto irriducibile della parabola di Neil e $(0,0,0)$ del cono $\{z_1^2 = z_2 z_3\} \subset \mathbb{C}^3$.

Esempio X.4.10. Sia $X = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid zw = 0\}$ e sia

$$\mathcal{O}_X = [\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}/(zw \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})]\,|X.$$

Allora $(0,0)$ è l'unico punto singolare di X, in cui X è riducibile (cioè non è irriducibile).

Definizione X.4.11. Diciamo che $(X, \mathcal{O}_X)$ è *localmente irriducibile* se è irriducibile in ogni suo punto.

Le varietà complesse lisce sono localmente irriducibili. La parabola di Neil è un altro esempio di varietà irriducibile.

Definizione X.4.12. Diciamo che $(X, \mathcal{O}_X)$ è *ridotto* in $x \in X$ se $\mathcal{O}_{X,\,x}$ non contiene elementi nilpotenti.

Diciamo che $(X, \mathcal{O}_X)$ è *ridotto* se è tale in ogni suo punto.

Osservazione X.4.13. Se X è irriducibile in x, è anche ridotto in x, ma non vale il viceversa. Ad esempio, $(0,0)$ è un punto in cui $X = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 z_2 = 0\}$ è ridotto, ma non irriducibile.

Definizione X.4.14. Un punto ridotto di X è un punto *normale* di X se $\mathcal{O}_{X,\,x}$ è integralemente chiuso nel suo corpo dei quozienti.

Osservazione X.4.15. I punti regolari sono normali. Uno spazio complesso X è irriducibile in ogni suo punto normale.

Esempio X.4.16. L'origine del cono $X = \{z_1^2 = z_2 z_3\} \subset \mathbb{C}^3$ è un punto normale.

L'origine $(0,0)$ *non* è un punto normale della parabola di Neil $X = \{z_2^2 = z_1^3\} \subset \mathbb{C}^2$. Abbiamo infatti la parametrizzazion $X = \{(t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{C}\}$ e dunque $\mathcal{O}_{X,\,(0,0)}$ è isomorfo alle serie convergenti in $\mathbb{C}\{t\}$ della forma $a_0 + \sum_{h \geq 2} a_h t^h$. L'equazione $Z^2 = t^2$ ha la soluzione t^3/t^2 nel campo quoziente di $\mathcal{O}_{X,\,(0,0)}$, ma non ha soluzione in $\mathcal{O}_{X,\,(0,0)}$.

Teorema X.4.17. *Il fascio strutturale $\mathcal{O}_X$ di uno spazio complesso $(X, \mathcal{O}_X)$ è coerente.*

Dimostrazione. Basta considerare il caso di uno spazio complesso modello $(X, \mathcal{O}_X) = (V(\mathcal{I}_\Omega), (\mathcal{O}_\Omega/\mathcal{I}_\Omega)|V(\mathcal{I}_\Omega))$, con Ω aperto di $\mathbb{C}^n$ ed $\mathcal{I}_\Omega$ fascio d'ideali di tipo finito di Ω.

Sappiamo, per il Lemma di Oka, che il fascio $\mathcal{O}_\Omega$ è coerente. Un suo qualsiasi fascio d'ideali di tipo finito $\mathcal{I}_\Omega$ è coerente e dunque, per il lemma dei tre, anche il quoziente $\mathcal{O}_\Omega/\mathcal{I}_\Omega$ è coerente. Quindi il fascio strutturale $\mathcal{O}_X$, come restrizione al supporto del fascio coerente $\mathcal{O}_\Omega/\mathcal{I}_\Omega$ è anch'esso coerente. $\square$

5. Sezioni e funzioni

Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ ed U un aperto di Ω. Una $f \in \mathcal{C}_\Omega(U)$ (e quindi, in particolare, una $f \in \mathcal{O}_\Omega(U)$) si può identificare alla corrispondente funzione $f : U \to \mathbb{C}$.

Se $\mathcal{A}$ è un arbitrario fascio di $\mathbb{C}$-algebre locali su uno spazio topologico X, ed U un aperto di X, possiamo del pari associare ad ogni sezione $f \in \mathcal{A}(U)$ una funzione $[f] : U \to \mathbb{C}$, facendo corrispondere ad ogni punto $x \in U$ la classe residua $f(x)$ di f_x in $\mathcal{A}_x/\mathfrak{m}(\mathcal{A}_x) \simeq \mathbb{C}$. Quindi $f(x) = c$ significa che, se c_x indica il germe di funzione costante che vale c in un intorno di x in X, e lo identifichiamo con un germe di $\mathcal{A}_x$ mediante l'inclusione $\underline{\mathbb{C}}_x \hookrightarrow \mathcal{A}_x$, allora $(f_x - c_x) \in \mathfrak{m}(\mathcal{A}_x)$.

Proposizione X.5.1. *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio complesso ed U un aperto di X. Allora, per ogni $f \in \mathcal{O}_X(U)$, la $[f] : U \to \mathbb{C}$ è una funzione continua.*

Dimostrazione. L'affermazione è locale e possiamo quindi ridurci al caso in cui $(X, \mathcal{O}_X)$ sia uno spazio complesso modello. In tal caso la $[f]$ è localmente in U la restrizione ad X di funzioni olomorfe definite su aperti di uno spazio complesso Euclideo e quindi, in particolare, continua. $\square$

Per la Proposizione X.5.1, la corrispondenza $f \to [f]$ permette di definire un morfismo di fasci di $\mathbb{C}$-algebre $\mathcal{O}_X \to \mathcal{C}_X$. Poiché non tutte le funzioni continue sono olomorfe, tale omomorfismo non è, in generale, surgettivo. Esso non è neppure necessariamente iniettivo. Ad esempio, ogni elemento nilpotente di $\mathcal{O}_{X,x}$ ha come immagine l'elemento nullo di $\mathcal{C}_{X,x}$. L'applicazione non è quindi iniettiva quando $\mathcal{O}_{X,x}$ contenga elementi nilpotenti.

Osservazione X.5.2. Se $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un morfismo di spazi complessi, e V un aperto di Y, per ogni sezione $s \in \mathcal{O}_Y(V)$ abbiamo $[\tilde{f}(s)](x) = [s](f(x))$, per ogni $x \in f^{-1}(V)$.

Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio complesso ed $\mathcal{S}$ un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli su X, cioè un *fascio analitico*, di tipo finito. Per ogni punto $x \in X$, il quoziente $Q_x = \mathcal{S}_x/(\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{X,x})\mathcal{S}_x)$ è un $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{X,x})$-modulo di tipo finito, cioè uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{C}$. Fissiamo elementi $s_{1,x}, \ldots, s_{p,x} \in \mathcal{S}_x$ le cui classi residue generino Q_x come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Indichiamo con $\mathcal{M}_x$ il sottomodulo di $\mathcal{S}_x$ generato da $s_{1,x}, \ldots, s_{p,x}$. Poiché

$$\mathcal{S}_x = \mathcal{M}_x + \mathfrak{m}(\mathcal{O}_{X,x}) \cdot \mathcal{S}_x,$$

per il Lemma di Nakayama $\mathcal{M}_x = \mathcal{S}_x$, cioè $s_{1,x}, \ldots, s_{p,x}$ sono generatori di $\mathcal{S}_x$. Se $s_1, \ldots, s_p \in \mathcal{S}(U)$ sono sezioni di $\mathcal{S}$ in un intorno aperto U di x in X, che definiscono i germi $s_{1,x}, \ldots, s_{p,x}$, allora i germi $s_{1,y}, \ldots, s_{p,y}$ generano $\mathcal{S}_y$ per tutti gli y in un intorno aperto $U' \subset U$ di x. In particolare:

Proposizione X.5.3. *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio complesso ed $\mathcal{S}$ un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli di tipo finito su X. Allora*

$$x \longrightarrow \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_x/(\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{X,x})\mathcal{S}_x) \in \mathbb{N}$$

è una funzione finita e semicontinua superiormente su X.

6. Costruzione di spazi complessi mediante rincollamenti

Con costruzioni analoghe a quelle uguali per varietà topologiche, differenziabili e complesse lisce, possiamo costruire spazi complessi mediante rincollamenti.

Definizione X.6.1. Sia X uno spazio topologico. Chiamiamo *atlante complesso* su X il dato di

(1) una famiglia di spazi complessi modello $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})_{i\in I}$, con X_i aperto in X ed $X = \bigcup_{i\in I} X_i$;
(2) per ogni coppia di indici $i, j \in I$ con $X_i \cap X_j = X_{i,j} \neq \emptyset$, di un isomorfismo di spazi complessi $(\mathrm{id}_{X_{i,j}}, \theta_{i,j}) : (X_{i,j}, \mathcal{O}_{X_i}|X_{i,j}) \to (X_{i,j}, \mathcal{O}_{X_j}|X_{i,j})$, in modo che sia

$$\begin{cases} \theta_{i,i} = \mathrm{id}, \\ \theta_{i,j} \circ \theta_{j,k} = \theta_{i,k} \quad \text{su } X_{i,j,k}, \text{ se } X_{i,j,k} = X_i \cap X_j \cap X_k \neq \emptyset. \end{cases} \tag{10.6.1}$$

Vale il

Teorema X.6.2. *Dato un atlante complesso $((X_i, \mathcal{O}_{X_i}), \theta_{i,j})$ sullo spazio topologico X, è possibile definire una struttura di spazio complesso $(X, \mathcal{O}_X)$, unica a meno di isomorfismi, tale che, per ogni indice i, vi sia un isomorfismo di fasci di $\mathbb{C}$-algebre $\tilde{\phi}_i : \mathcal{O}_X|X_i \to \mathcal{O}_{X_i}$ tale che $\theta_{i,j} = \tilde{\phi}_j \circ \tilde{\phi}_i^{-1}$ se $X_{i,j} = X_i \cap X_j \neq \emptyset$.* □

7. Sottospazi complessi

Definizione X.7.1. Sia $(X, \mathcal{A}_X)$ uno spazio $\mathbb{C}$-anellato ed $\mathcal{I}_X$ un fascio di ideali di $\mathcal{A}_X$. L'*insieme degli zeri di* $\mathcal{I}_X$ è il supporto del fascio quoziente $\mathcal{A}_X/\mathcal{I}_X$. Esso si può caratterizzare in modo equivalente mediante:

$$\begin{aligned} N(\mathcal{I}_X) = \operatorname{supp}(\mathcal{A}_X/\mathcal{I}_X) &= \{x \in X \mid \mathcal{A}_{X,x}/\mathcal{I}_{X,x} \neq 0\} \\ &= \{x \in X \mid \mathcal{I}_{X,x} \subset \mathfrak{m}(\mathcal{A}_{X,x})\} \\ &= \{x \in X \mid [f](x) = 0,\ \forall f \in \mathcal{I}_{X,x}\}. \end{aligned} \tag{10.7.1}$$

Osserviamo che $N(\mathcal{I}_X)$ è chiuso, in quanto complementare dell'aperto $\{x \in X \mid 1_x \in \mathcal{I}_{X,x}\}$.

Lemma X.7.2. *Sia $(X, \mathcal{A}_X)$ uno spazio $\mathbb{C}$-anellato ed $\mathcal{I}_X$, $\mathcal{I}'_X$ due fasci di ideali di $\mathcal{A}_X$. Allora*

$$N(\mathcal{I}_X + \mathcal{I}'_X) = N(\mathcal{I}_X) \cap N(\mathcal{I}'_X), \tag{10.7.2}$$

$$N((\mathcal{I}_X \cdot \mathcal{I}'_X) = N(\mathcal{I}_X \cap \mathcal{I}'_X) = N(\mathcal{I}_X) \cup N(\mathcal{I}'_X) \tag{10.7.3}$$

$$\mathcal{I}_X \subset \mathcal{I}'_X \Longrightarrow N(\mathcal{I}_X) \supset N(\mathcal{I}'_X). \quad \square \tag{10.7.4}$$

Dato un fascio d'ideali $\mathcal{I}_X$ di $\mathcal{A}_X$, possiamo considerare lo spazio $\mathbb{C}$-anellato $(N(\mathcal{I}_X), (\mathcal{A}_X/\mathcal{I}_X)|N(\mathcal{I}_X))$. Abbiamo un morfismo naturale di spazi $\mathbb{C}$-anellati

$$(\iota, \tilde{\iota}) : (N(\mathcal{I}_X), (\mathcal{A}_X/\mathcal{I}_X)|N(\mathcal{I}_X)) \to (X, \mathcal{A}_X), \tag{10.7.5}$$

in cui $\iota : N(\mathcal{I}_X) \hookrightarrow X$ è l'inclusione e $\tilde{\iota}_x : \mathcal{A}_{X,x} \to (\mathcal{A}_{X,x}/\mathcal{I}_{X,x})$, per $x \in N(\mathcal{I})$, la proiezione nel quoziente.

Proposizione X.7.3. *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio complesso, $\mathcal{I}_X$ un fascio di tipo finito d'ideali di $\mathcal{O}_X$. Siano $Y = N(\mathcal{I}_X)$ ed $\mathcal{O}_Y = (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_X)|Y$. Allora $(Y, \mathcal{O}_Y)$ è uno spazio complesso.*

Dimostrazione. Poiché l'enunciato ha natura locale, possiamo supporre che $(X, \mathcal{O}_X)$ sia uno spazio complesso modello. Siano quindi Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$ e $\mathcal{J}_\Omega$ un fascio d'ideali di tipo finito di $\mathcal{O}_\Omega$. A meno di sostituire ad Ω un intorno più piccolo del punto $x \in X$ che stiamo considerando, possiamo supporre che $\mathcal{J}_\Omega$ sia il fascio d'ideali in $\mathcal{O}_\Omega$ generato da un insieme finito di funzioni olomorfe globali $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}(\Omega)$, che $X = N(\Omega; f_1, \dots, f_p)$ ed $\mathcal{O}_X = (\mathcal{O}_\Omega/\mathcal{J}_\Omega)|X$. Pur di sostituire ad Ω un intorno di $x \in X$ ancora più piccolo, possiamo supporre che $\mathcal{I}_X$ sia il fascio di ideali di $\mathcal{O}_X$ generato da una famiglia finita di sezioni globali $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_q$ di $\mathcal{O}_X(X)$. Pur di restringere ancora Ω, se necessario, possiamo supporre che le sezioni $\tilde{s}_i$, per $i = 1, \dots, q$, siano le classi residue di funzioni olomorfe $s_1, \dots, s_q \in \mathcal{O}(\Omega)$. Allora, detto $\mathcal{H}_\Omega$ il fascio di ideali in $\mathcal{O}_\Omega$ generato da $f_1, \dots, f_p, s_1, \dots, s_q$, abbiamo $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_X \simeq \mathcal{O}_\Omega/\mathcal{H}_\Omega$ e quindi $(Y, \mathcal{O}_Y) \simeq (N(\Omega; f_1, \dots, f_p, s_1, \dots, s_q), (\mathcal{O}_\Omega/\mathcal{H}_\Omega)|N(\Omega; f_1, \dots, f_p, s_1, \dots, s_q))$. Quest'ultimo è uno spazio complesso modello. La dimostrazione è completa. $\square$

Definizione X.7.4. Lo spazio complesso $(Y, \mathcal{O}_Y)$ definito nella Proposizione X.7.3 si dice *il sottospazio complesso chiuso* di $(X, \mathcal{O}_X)$ definito dall'ideale di tipo finito $\mathcal{I}$ di $\mathcal{O}_X$.

Definizione X.7.5. Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio complesso, siano $\mathcal{I}_X$ ed $\mathcal{I}'_X$ due fasci di tipo finito di ideali di $\mathcal{O}_X$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Y', \mathcal{O}_{Y'})$ i sottospazi complessi chiusi ad essi associati.

Lo spazio complesso $\big(Y \cap Y', (\mathcal{O}_X/(\mathcal{I}_X + \mathcal{I}'_X))|(Y \cap Y')\big)$ si dice *l'intersezione* di $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ed $(Y', \mathcal{O}_{Y'})$.

Sull'unione $Y \cup Y'$ ci sono due strutture naturali di spazio complesso:

$$\big(Y \cup Y', (\mathcal{O}_X/(\mathcal{I}_X \cap \mathcal{I}'_X))|(Y \cup Y')\big), \tag{10.7.6}$$

$$\big(Y \cup Y', (\mathcal{O}_X/(\mathcal{I}_X \cdot \mathcal{I}'_X))|(Y \cup Y')\big). \tag{10.7.7}$$

Poiché $\mathcal{I}_X \cdot \mathcal{I}'_X \subset \mathcal{I}_X \cap \mathcal{I}'_X$, il primo è un sottospazio complesso chiuso del secondo.

Esempio X.7.6. Siano $\mathcal{I}_X = \mathcal{I}'_X$ entrambi uguali al fascio d'ideali di $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ generato dalla coordinata z. Allora $\mathcal{I}_X \cap \mathcal{I}'_X = \mathcal{I}_X = \underline{(z)}$, mentre $\mathcal{I}_X \cdot \mathcal{I}'_X = \underline{(z^2)}$. Quindi il sottospazio corrispondente ad $\mathcal{I}_X \cap \mathcal{I}'_X$ è $(\{0\}, \mathbb{C})$, quello corrispondente ad $\mathcal{I}_X \cdot \mathcal{I}'_X$ è $(\{0\}, \mathbb{C}^2)$. L'applicazione $(f, \tilde{f}) : (\{0\}, \mathbb{C}) \to (\{0\}, \mathbb{C}^2)$ è data da

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ \tilde{f}(a + bz) = a \quad \forall a, b \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

8. Fasci analitici immagine diretta

Definizione X.8.1. Sia $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un'applicazione olomorfa tra due spazi complessi. Dato un fascio analitico $\mathcal{S}$ su X, la sua immagine diretta $f_*(\mathcal{S})$ è un fascio di $f_*(\mathcal{O}_X)$-moduli. L'applicazione $\tilde{f} : \mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X)$ ci permette di considerarlo come un fascio di $\mathcal{O}_Y$-moduli.

Il fascio $f_*(\mathcal{S})$, considerato come fascio di $\mathcal{O}_Y$-moduli, si dice *fascio analitico immagine diretta* di $\mathcal{S}$ mediante la $(f, \tilde{f})$.

Ricordiamo che, dato il fascio $(\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} X)$ ed $f : X \to Y$, l'immagine diretta $f_*(\mathcal{S})$ è il fascio su Y associato al prefascio $V \to \mathcal{S}(\pi^{-1}(V))$, al variare di V tra gli aperti di Y. Un germe η di $f_*(\mathcal{S})$ in $y \in Y$ è una classe di equivalenza di una sezione $s \in \mathcal{S}(\pi^{-1}(V))$ per un intorno aperto V di y in Y e quindi, se $\alpha_y \in \mathcal{O}_{Y,\,y}$, con α_y il germe definito da $\alpha \in \mathcal{O}_Y(V')$ per un intorno aperto V' di y in Y, possiamo definire $\alpha_y \cdot \eta$ come la classe di $\tilde{f}(\alpha) \cdot s \in \mathcal{S}(\pi^{-1}(V \cap V'))$.

Osservazione X.8.2. La f_* è un funtore covariante dalla categoria dei fasci analitici su $(X, \mathcal{O}_X)$ alla categoria dei fasci analitici su $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Proposizione X.8.3. *Il funtore f_* è esatto a sinistra.*

Dimostrazione. Dobbiamo verificare che, se

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{S}' \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathcal{S} \xrightarrow{\ \beta\ } \mathcal{S}''$$

è una successione esatta di fasci analitici su $(X, \mathcal{O}_X)$, allora

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow f_*(\mathcal{S}') \xrightarrow{f_*(\alpha)} f_*(\mathcal{S}) \xrightarrow{f_*(\beta)} f_*(\mathcal{S}'')$$

è ancora esatta. Ma questa è una facile conseguenza dell'esattezza a sinistra del funtore $\Gamma(U, \cdot\,)$. □

In particolare, abbiamo il

Corollario X.8.4. *Se $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ è un morfismo di fasci analitici su $(X, \mathcal{O}_X)$ ed $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un'applicazione olomorfa di spazi complessi, allora*

$$f_*(\underline{\ker}\,\phi) \simeq \underline{\ker}\, f_*(\phi). \quad \square \tag{10.8.1}$$

In generale f_* non è esatto a destra.
Abbiamo però in generale

Teorema X.8.5. *Se $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un'applicazione olomorfa tra spazi complessi ed $f : X \to Y$ è finita, allora f_* è un funtore esatto.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che, se

$$(\dagger)\qquad \mathcal{S}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S} \xrightarrow{\beta} \mathcal{S}'' \longrightarrow 0$$

è una successione esatta di fasci analitici su $(X, \mathcal{O}_X)$, allora anche la

$$(\ddagger)\qquad f_*(\mathcal{S}') \xrightarrow{f_*(\alpha)} f_*(\mathcal{S}) \xrightarrow{f_*(\beta)} f_*(\mathcal{S}'') \longrightarrow 0$$

è esatta. Dimostriamo innanzi tutto l'esattezza in $f_*(\mathcal{S}'')$. Fissiamo un germe $\sigma''_{y_0} \in f_*(\mathcal{S}'')$, e sia $y_0 \in Y$ il suo punto base. Esiste allora un intorno aperto V di y_0 ed una sezione $s'' \in \mathcal{S}''(f^{-1}(V))$, tale che $\sigma''_{y_0} = f_*(s'')_{y_0}$. Sia $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_d\}$, con $x_1, \dots, x_d$ distinti. Possiamo scegliere V in modo tale che $f^{-1}(V)$ sia un'unione disgiunta $f^{-1}(V) = \bigcup_{j=1}^d U_j$, ove U_j è un intorno aperto di x_j in X. Per l'esattezza di ($\dagger$), per ogni j possiamo trovare un intorno aperto U'_j di x_j in U_j ed una sezione $s_j \in \mathcal{S}(U'_j)$ con $\beta(s_j)|U'_j = s''|U'_j$. Osserviamo che $F = X \setminus \bigcup_{j=1}^d U'_j$ è un chiuso di X e quindi $f(F)$ è un chiuso di Y che non contiene y_0. Quindi $V' = Y \setminus f(F)$ è un intorno di y_0 in Y con $f^{-1}(V') \subset U'{}_j$ per $j = 1, \dots, d$. Allora la collezione $(s_1|f^{-1}(V'), \dots, s_d|f^{-1}(V'))$ definisce un elemento σ di $f_*(\mathcal{S})(V')$, con $f_*(\beta)(\sigma)_{y_0} = \sigma''_{y_0}$.

L'esattezza in $f_*(\mathcal{S})$ si dimostra in modo analogo. □

Come conseguenza abbiamo:

Teorema X.8.6 (coerenza dell'immagine diretta).
Se $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un'applicazione olomorfa finita tra spazi complessi, allora l'immagine diretta $f_*(\mathcal{S})$ di un fascio analitico coerente su X è un fascio analitico coerente su Y.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{S}$ un fascio analitico coerente su X. Fissiamo $y_0 \in Y$ e sia $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_m\}$, con $x_1, \dots, x_m$ distinti. Fissiamo un intorno aperto V di y_0 in Y tale che $f^{-1}(V)$ sia l'unione disgiunta di intorni aperti U_i di x_i, per $i = 1, \dots, m$. Per ogni x_i, il fascio $\mathcal{S}$ è di presentazione finita in un intorno di x_i. A meno quindi di sostituire a V un intorno più piccolo di y_0, possiamo supporre che vi siano successioni esatte

$$[\mathcal{O}_X|U_i]^{q_i} \xrightarrow{\beta_i} [\mathcal{O}_X|U_i]^{p_i} \xrightarrow{\alpha_i} \mathcal{S}|U_i \longrightarrow 0.$$

Possiamo estendere β_i ed α_i su $f^{-1}(V)$, definendole come le applicazioni nulle sugli U_j con $j \neq i$. Otteniamo così una presentazione finita:

$$[\mathcal{O}_X|f^{-1}(V)]^q \xrightarrow{\beta} [\mathcal{O}_X|f^{-1}(V)]^p \xrightarrow{\alpha} \mathcal{S}|f^{-1}(V) \longrightarrow 0,$$

cioè

$$[f_*(\mathcal{O}_X)|V]^q \xrightarrow{f_*(\beta)} [f_*(\mathcal{O}_X)|V]^p \xrightarrow{f_*(\alpha)} f_*(\mathcal{S})|V \longrightarrow 0.$$

La tesi segue allora dal fatto che $f_*(\mathcal{O}_X)$ è un $\mathcal{O}_Y$-modulo coerente. Questa affermazione è il contenuto del lemma successivo, la cui dimostrazione completerà quella del Teorema. □

Lemma X.8.7. *Se* $(f,\tilde f):(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ *è un'applicazione olomorfa finita, allora* $f_*(\mathcal{O}_X)$ *è un* $\mathcal{O}_Y$*-modulo coerente.*

Dimostrazione. Dimostriamo che $f_*(\mathcal{O}_X)$ è finitamente generato. Poiché $f(X)$ è un chiuso, ciò è banalmente vero nei punti di $Y\setminus f(X)$, in cui $f_*(\mathcal{O}_X)_y=\{0\}$. Se $y_0\in f(X)$, abbiamo $f_*(\mathcal{O}_X)_{y_0}\simeq\prod_{i=1}^m\mathcal{O}_{X,\,x_i}$. Sia d la dimensione di $(Y,\mathcal{O}_Y)$ nel punto y_0. Pur di scegliere un intorno aperto di V sufficientemente piccolo, possiamo definire un'applicazione finita e surgettiva $\pi:V\to\Omega\subset\mathbb{C}^d$ di V su un intorno aperto Ω di 0 in $\mathbb{C}^d$. Per composizione otteniamo un'applicazione olomorfa finita di $\pi^{-1}(V)$ su $\Omega\subset\mathbb{C}^d$. Questo implica che $\mathcal{O}_X|f^{-1}(V)$ ha una struttura naturale di $\mathcal{O}_\Omega$-modulo di tipo finito, e quindi, a maggior ragione, di $\mathcal{O}_Y$-modulo di tipo finito. Da ciò si ricava facilmente che $f_*(\mathcal{O}_X)$ è un $\mathcal{O}_Y$-modulo di tipo finito. In modo analogo si può dimostrare che è anche di tipo finito per le relazioni. $\square$

9. Fasci analitici immagine inversa

Definizione X.9.1. Sia $f:X\to Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici e $\mathcal{T}\xrightarrow{\varpi}Y$ un fascio d'insiemi su Y. Si dice *fascio immagine inversa* di $\mathcal{T}$ su X mediante f, il fascio associato al prefascio

$$f^*(\mathcal{T})(U)=\varinjlim_{V^{\text{aperto}}\supset f(U)}\mathcal{T}(V). \tag{10.9.1}$$

Se $f:X\to Y$ è un'applicazione aperta, il fascio immagine inversa coincide con il prodotto fibrato

$$X\times_f\mathcal{T}=\{(x,t)\in X\times\mathcal{T}\mid f(x)=\varpi(t)\}. \tag{10.9.2}$$

Se $\mathcal{T}$ è un fascio di gruppi abeliani, o di anelli, anche $f^*(\mathcal{T})$ è, in modo naturale, un fascio di gruppi abeliani o di anelli e, se $\mathcal{B}$ è un fascio di anelli e $\mathcal{T}$ un fascio di $\mathcal{B}$-moduli su Y, allora $f^*(\mathcal{T})$ è un fascio di $f^*(\mathcal{B})$-moduli su X.

Sia $(f,\tilde f):(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ un'applicazione olomorfa surgettiva tra spazi complessi. Poiché in questo caso f è aperta, se $\mathcal{T}\xrightarrow{\varpi}Y$ è un fascio analtico su Y, il prodotto fibrato (10.9.2) definisce un fascio di $X\times_f\mathcal{O}_Y$-moduli su X. La $\tilde f$ definisce, per ogni $x\in X$, un morfismo di $\mathbb{C}$-algebre locali $\tilde f_x:\mathcal{O}_{Y,\,f(x)}\to\mathcal{O}_{X,\,x}$, che ci permette di considerare le fibre di $\mathcal{O}_X$ come degli $X\times_f\mathcal{O}_Y$-moduli.

Definizione X.9.2. Il *fascio analitico immagine inversa* del fascio analitico $\mathcal{T}$ mediante l'applicazione olomorfa surgettiva $(f,\tilde f):(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ è il fascio analitico

$$f^*_X(\mathcal{T})=(X\times_f\mathcal{T})\otimes_{X\times_f\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_X. \tag{10.9.3}$$

Se $\Phi:\mathcal{T}\to\mathcal{T}'$ è un morfismo di fasci analitici su Y, abbiamo un morfismo canonico di fasci $\tilde\Phi:X\times_f\mathcal{T}\to X\times_f\mathcal{T}'$. Tensorizzando per l'identità su $\mathcal{O}_X$, otteniamo allora un $\mathcal{O}_X$-morfismo

$$f^*(\Phi)=\tilde\Phi\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{O}_X}:f^*_X(\mathcal{T})\to f^*_X(\mathcal{T}'). \tag{10.9.4}$$

Proposizione X.9.3. *Sia* $(f,\tilde{f}) : (X,)_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ *un'applicazione olomorfa surgettiva tra due spazi complessi. Allora* f_X^* *è un funtore covariante dalla categoria dei fasci analitici su* Y *alla categoria dei fasci analitici su* X*. Il funtore* f_X^* *è esatto a destra.*

Dimostrazione. Il fatto che f_X^* sia esatto a destra segue dal fatto che il funtore *prodotto tensoriale* $-\otimes_{X\times_f\mathcal{O}_Y}$ è esatto a destra. $\square$

Osserviamo che

$$f_X^*(\mathcal{T}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{T}_k)\simeq f_X^*(\mathcal{T}_1)\oplus\cdots\oplus f_X^*(\mathcal{T}_k), \tag{10.9.5}$$

$$f_X^*(\mathcal{O}_Y)\simeq\mathcal{O}_X, \tag{10.9.6}$$

$$f_X^*(\mathcal{O}_Y^p)\simeq\mathcal{O}_X^p. \tag{10.9.7}$$

Definizione X.9.4. Supponiamo ora sia dato un sottospazio complesso chiuso $(Y',\mathcal{O}_{Y'})$ di $(Y,\mathcal{O}_Y)$, definito da un fascio coerente d'ideali $\mathcal{J}_Y$ di $\mathcal{O}_Y$. Un'applicazione olomorfa surgettiva $(f,\tilde{f}) : (X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ ci permette di definire un fascio coerente d'ideali $\mathcal{I}_X = f_X^*(\mathcal{J}_X)$.

Il corrispondente sottospazio complesso chiuso $(X',\mathcal{O}_{X'})$, con $X' = \operatorname{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_X)$ ed $\mathcal{O}_{X'} = (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_X)|X'$, si dice l'*immagine inversa* di $(Y',\mathcal{O}_{Y'})$ mediante $(f,\tilde{f})$.

Sia ora $(X,\mathcal{O}_X)$ un sottospazio complesso chiuso di $(Y,\mathcal{O}_Y)$, definito dal fascio coerente d'ideali $\mathcal{I}_Y$, ed indichiamo con $(\iota,\tilde{\iota})$ l'inclusione canonica. Se $\mathcal{S}$ è un fascio coerente su Y, dalla successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}_Y \longrightarrow 0, \tag{10.9.8}$$

tensorizzando per $\mathcal{S}$, otteniamo una successione esatta

$$\mathcal{I}_Y\otimes\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow (\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}_Y)\otimes\mathcal{S} \longrightarrow 0. \tag{10.9.9}$$

Osservando che l'immagine di $\mathcal{I}_Y\otimes\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$ è $\mathcal{I}_Y\cdot\mathcal{S}$, otteniamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y\cdot\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow (\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}_Y)\otimes\mathcal{S} \longrightarrow 0. \tag{10.9.10}$$

Questa si mantiene esatta dopo la restrizione ad X. Abbiamo

$$(\mathcal{O}_Y/(\mathcal{I}_Y\otimes\mathcal{S})|X = \iota_X^*(\mathcal{S}),$$

in quanto $\mathcal{S}|X = (X\times_Y\mathcal{S})$ ed $\mathcal{O}_X = (\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}_Y)|X$. Quindi

$$\iota_X^*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}/(\mathcal{I}_Y\cdot\mathcal{S})|X. \tag{10.9.11}$$

Definizione X.9.5. Chiamiamo il fascio analitico su X definito da (10.9.11) la *restrizione analitica* di $\mathcal{S}$ ad X, e lo denotiamo con $\mathcal{S}|_aX$.

10. Immersioni olomorfe

Sia $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un'applicazione olomorfa fra due spazi complessi. Sia $(Z, \mathcal{O}_Z)$ un sottospazio complesso chiuso di $(Y, \mathcal{O}_Y)$, definito da un fascio coerente di ideali $\mathcal{I}_Y$ di $\mathcal{O}_Y$. Supponiamo che $f(X) \subset Z$ (inclusione insiemistica). Indichiamo con $(\imath, \tilde{\imath}) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ l'inclusione.

Definizione X.10.1. Diciamo che f *si fattorizza attraverso* $(Z, \mathcal{O}_Z)$ se possiamo trovare un'applicazione olomorfa $(g, \tilde{g}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ tale che $(f, \tilde{f}) = (\imath, \tilde{\imath}) \circ (g, \tilde{g})$, cioè $f = \imath \circ g$ ed $\tilde{f} = \tilde{g} \circ \tilde{\imath}$.

Perché esista la fattorizzazione, occorre e basta che si possa definire la $\tilde{g}$. La $\tilde{\imath}$ si ottiene dalla proiezione canonica nel quoziente $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}_Y = \imath_*(\mathcal{O}_Y)$. La $\tilde{g}$ deve essere definita quindi in modo che la

$$\mathcal{O}_Z \to g_*(\mathcal{O}_X) = f_*(\mathcal{O}_X)|Z$$

dia, per passaggio alle estensioni banali, un'applicazione

$$\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X),$$

che renda commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y & \longrightarrow & \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}_Y \\ {\scriptstyle \tilde{f}}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ f_*(\mathcal{O}_X) & =\!=\!= & f_*(\mathcal{O}_X). \end{array}$$

Chiaramente, la condizione necessaria e sufficiente affinché si possa definire una tale applicazione è che sia $\mathcal{I}_Y \subset \underline{\ker} \tilde{f}$ e, quando questa condizione sia soddisfatta, la $\tilde{g}$ è univocamente determinata. Abbiamo perciò la

Proposizione X.10.2. *Sia* $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *un'applicazione olomorfa tra spazi complessi. Sia* $\mathcal{I}_Y$ *un fascio coerente d'ideali di* $\mathcal{O}_Y$ *e sia* $(Z, \mathcal{O}_Z)$ *il corrispondente sottospazio complesso chiuso. Condizione necessaria e sufficiente affinché* $(f, \tilde{f})$ *si fattorizzi attraverso* $(Z, \mathcal{O}_Z)$ *è che* $f(X) \subset Z$ *ed* $\tilde{f}(\mathcal{I}_Y) = 0$. □

Supponiamo ora che, con le notazioni dell'enunciato della Proposizione X.10.2, $\underline{\ker} \tilde{f}$ sia un fascio coerente d'ideali di $\mathcal{O}_Y$. Allora $\mathcal{I}_Y = \underline{\ker} \tilde{f}$ definisce un sottospazio complesso chiuso $(Z, \mathcal{O}_Z)$ di $(Y, \mathcal{O}_Y)$ e la $(f, \tilde{f})$ si fattorizza attraverso $(Z, \mathcal{O}_Z)$. Poiché la $\tilde{g}$ della fattorizzazione $(f, \tilde{f}) = (\imath, \tilde{\imath}) \circ (g, \tilde{g})$ è il quoziente iniettivo di $\tilde{f}$, essa è certamente iniettiva.

Esempio X.10.3. Sia $(\{0\}, \mathbb{C}^2)$ il punto doppio di $\mathbb{C}$. Consideriamo il fascio d'ideali (z) in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, cui è associato il punto semplice $(\{0\}, \mathbb{C})$. L'identità $(\mathrm{id}, \widetilde{\mathrm{id}}) : (\{0\}, \mathbb{C}^2) \to (\{0\}, \mathbb{C}^2)$ non si può fattorizzare attraverso il sotospazio $(\{0\}, \mathbb{C}) \subset (\{0\}, \mathbb{C})$.

ESEMPIO X.10.4. Consideriamo l'applicazione $\mathbb{C} \ni z \to (z^2, 0) \in \mathbb{C}^2$, con le strutture complesse standard su $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^2$. Allora $\tilde{f}_{(z^2,0)} : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,(z^2,0)} \to f_*(\mathbb{O}_{\mathbb{C},z})$ trasforma il germe di $u(z_1, z_2)$ in $(z^2, 0)$ nel germe di $u(z_1^2, 0)$ in $(z^2, 0)$. Quindi $\underline{\ker}\,\tilde{f} = (z_2)$ e la $(f, \tilde{f})$ si fattorizza attraverso la $(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ definita dal fascio d'ideali (z_2).

ESEMPIO X.10.5. Consideriamo la $(f, \tilde{f}) : (\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}) \to (\mathbb{C}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$ definita da

$$\begin{cases} f(z) = (z^2, z^3), \\ \tilde{f}(u)(z_1, z_2) = f_*(u(z^2, z^3)), \quad \text{con} \quad z_2 = z z_1. \end{cases}$$

La $(f, \tilde{f})$ si fattorizza attraverso il sottospazio complesso definito dal fascio coerente d'ideali $(z_2^2 - z_1^3)$ in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$. Infatti $(z_2^2 - z_1^3) = \underline{\ker}\,\tilde{f}$.

ESEMPIO X.10.6. Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}^n$. Se $\Omega \neq \mathbb{C}^n$, allora l'inclusione $(\imath, \tilde{\imath}) : (\Omega, \mathcal{O}_\Omega) \to (\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ non si fattorizza per mezzo di un sottospazio chiuso di $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$.

DEFINIZIONE X.10.7. Un'applicazione olomorfa $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un'*immersione olomorfa chiusa* se è possibile trovare una fattorizzazione di $(f, \tilde{f})$ mediante un sottospazio olomorfo $(Z, \mathcal{O}_Z)$

$$\begin{tikzcd} (X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "(f,\tilde{f})"] \arrow[d, "(g,\tilde{g})"'] & (Y, \mathcal{O}_Y) \\ (Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[r, equal] & (Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[u, "(\imath,\tilde{\imath})"'] \end{tikzcd} \tag{10.10.1}$$

tale che $(g, \tilde{g})$ sia un biolomorfismo. Ciò significa che $f(X) = Z$, che l'abbreviazione $g : X \to Z$ di f a Z è un omeomorfismo e che $\tilde{g} : \mathcal{O}_Z \to f_*(\mathcal{O}_X)$ è un isomorfismo di fasci.

Vale il

TEOREMA X.10.8. *Sia $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un'immersione olomorfa chiusa. Allora:*
(1) *Il funtore f_* è esatto dalla categoria dei fasci analitici su $(X, \mathcal{O}_Y)$ alla categoria dei fasci analitici su $(Y, \mathcal{O}_Y)$.*
(2) *Un $\mathcal{O}_X$-modulo $\mathcal{S}$ è coerente se e soltanto se $f_*(\mathcal{S})$ è un $\mathcal{O}_Y$-modulo coerente.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo una fattorizzazione (10.10.1). Il teorema segue dal fatto che, per ogni fascio $\mathcal{S}$ di $\mathcal{O}_X$-moduli, $f_*(\mathcal{S})$ è l'estensione banale di $g_*(\mathcal{S})$. $\square$

PROPOSIZIONE X.10.9 (criterio). *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione olomorfa $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ sia un'immersione olomorfa chiusa è che valgano le tre condizioni seguenti:*
(1) *$f : X \to Y$ è un'immersione topologica;*

(2) $\tilde{f} : \mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X)$ *è surgettiva;*
(3) $\underline{\ker}\,\tilde{f}$ *è un fascio d'ideali di tipo finito (e quindi coerente) di* $\mathcal{O}_Y$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $(Z, \mathcal{O}_Z)$ è il sottospazio complesso chiuso di $(Y, \mathcal{O}_Y)$ definito dall'ideale $\underline{\ker}\,\tilde{f}$, da (3) segue che $\tilde{f} : \mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X)$ è iniettiva. Per la (2) la $\tilde{g}$ è anche iniettiva, e quindi bigettiva. Per (1) esiste l'inversa della $(g, \tilde{g})$ che fattorizza $(f, \tilde{f})$. Chiaramente, anch'essa è olomorfa. $\square$

PROPOSIZIONE X.10.10. *Siano* $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *e* $(\phi, \tilde{\phi}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ *due applicazioni olomorfe tra spazi complessi e supponiamo che la* $(\phi, \tilde{\phi}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ *sia un'immersione olomorfa chiusa. Allora la composizione* $(h, \tilde{h}) = (\phi \circ f, \widetilde{\phi \circ f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ *è un'immersione olomorfa chiusa se e soltanto se è tale la* $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$.

DIMOSTRAZIONE. Usiamo il criterio della Proposizione X.10.9. Osserviamo che la (1) si riduce al criterio topologico per gli omeomorfismi. Analogamente, basta osservare che $\tilde{h} = \phi_*(\tilde{f}) \circ \tilde{\phi}$. Se $\tilde{f}$ è surgettiva, lo è anche $\phi_*(\tilde{f})$, perché il funtore ϕ_* è esatto per le immersioni olomorfe chiuse, e viceversa.

Consideriamo i fasci $\underline{\ker}\,\tilde{h}$ e $\underline{\ker}\,\tilde{f}$. Poiché $\tilde{\phi}$ è surgettiva, abbiamo $\underline{\ker}\,\tilde{h} = \tilde{\phi}^{-1}(\underline{\ker}\,(\phi_*(\tilde{f}))$. Poiché il funtore ϕ_* è esatto, $\underline{\ker}\,(\phi_*(\tilde{f})) = \phi_*(\underline{\ker}\,\tilde{f})$ e dunque $\underline{\ker}\,\tilde{h} = \tilde{\phi}^{-1}(\phi_*(\underline{\ker}\,\tilde{f}))$. Quindi $\underline{\ker}\,\tilde{h}$ è coerente se e soltanto se lo è $\phi_*(\underline{\ker}\,\tilde{f})$ e quest'ultimo è coerente se e soltanto se lo è $\underline{\ker}\,\tilde{f}$. $\square$

In particolare vale la *proprietà transitiva*: un sottospazio complesso chiuso di un sottospazio complesso chiuso di $(X, \mathcal{O}_X)$ è un sottospazio complesso chiuso di $(X, \mathcal{O}_X)$.

11. La bigezione $\mathrm{Hol}(X, \mathbb{C}^n) \simeq [\mathcal{O}_X(X)]^n$

DEFINIZIONE X.11.1. Dati due spazi complessi $(X, \mathcal{O}_X)$ ed $(Y, \mathcal{O}_Y)$, indichiamo con $\mathrm{Hol}(X, Y)$ l'insieme di tutte le applicazioni olomorfe da X in Y.

In particolare, una $f \in \mathrm{Hol}(X, \mathbb{C}^n)$ è il dato di
(1) un'applicazione continua $f : X \to \mathbb{C}^n$,
(2) un morfismo di fasci $\tilde{f} : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \to f_*(\mathcal{O}_X)$.

In particolare, le sezioni globali di $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$, cioè le funzioni intere su $\mathbb{C}^n$, definiscono sezioni globali di $f_*(\mathcal{O}_X)$, ed in particolare quindi di $\mathcal{O}_X$.

In particolare, le coordinate $z_1, \ldots, z_n$ definiscono, per ogni $f \in \mathrm{Hol}(X, \mathbb{C}^n)$, sezioni globali

$$f_1 = \tilde{f}(z_1), \ldots, f_n = \tilde{f}(z_n) \in \mathcal{O}_X(X). \tag{10.11.1}$$

La corrispondenza $f \to (f_1, \ldots, f_n)$ definisce quindi un'applicazione naturale

$$\mathrm{Hol}(X, \mathbb{C}^n) \to [\mathcal{O}_X(X)]^n. \tag{10.11.2}$$

Teorema X.11.2. *L'applicazione* (10.11.2) *è una bigezione.*

Dimostrazione. <u>Iniettività</u>: Siano f, g due applicazioni olomorfe su $(X, \mathcal{O}_X)$, a valori in $\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. Supponiamo sia $\tilde{f}(z_j) = \tilde{g}(z_j)$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Abbiamo allora $z_j(f(x)) = \tilde{f}(z_j)(x) = \tilde{g}(z_j)(x) = z_j(g(x))$. Quindi, $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in X$ e quindi f e g coincidono dal punto di vista insiemistico.

Per completare la dimostrazione, dobbiamo provare che, per ogni $x \in X$, $\tilde{f}_x$ e $\tilde{g}_x$ coincidono, come morfismi di anelli locali $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$. Fissato $x \in X$, sottraendo ad f e g una sezione costante, possiamo supporre che $f(x) = g(x) = 0$. Sia $\phi \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$. Se $s = \sum_\alpha s_\alpha z^\alpha$ è la sua serie di Taylor, per ogni intero non negativo m possiamo scrivere $s = \sum_{|\alpha|<m} s_\alpha z^\alpha + \sigma_m$, con $\sigma_m \in \mathfrak{m}^m(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0})$. Poiché $\tilde{f}_x$ e $\tilde{g}_x$ sono omomorfismi di algebre locali, abbiamo in particolare

$$\tilde{f}_x(\mathfrak{m}^m(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) \subset \mathfrak{m}^m(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) \quad \text{e} \quad \tilde{g}_x(\mathfrak{m}^m(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) \subset \mathfrak{m}^m(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Risulta

$$\tilde{f}_x\big(\sum\nolimits_{|\alpha|<m} s_\alpha z^\alpha\big) = \tilde{g}_x\big(\sum\nolimits_{|\alpha|<m} s_\alpha z^\alpha\big),$$

poiché $\tilde{f}_x$ e $\tilde{g}_x$ assumono gli stessi valori sui polinomi. Da questo si deduce che $(\tilde{f}_x(s) - \tilde{g}_x(s)) \in \mathfrak{m}^m(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0})$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ e quindi $\tilde{f}_x(s) = \tilde{g}_x(s)$ per il Lemma di Krull.

<u>Surgettività</u>: Siano $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_X(X)$ sezioni globali assegnate.

Supponiamo in primo luogo che $(X, \mathcal{O}_X)$ sia un sottospazio complesso chiuso di un aperto Ω di uno spazio complesso Euclideo $\mathbb{C}^m$, definito da un fascio d'ideali $\mathcal{I}_\Omega$ di $\mathcal{O}_\Omega$. Allora, per ogni punto $x \in X$ esisteranno un intorno aperto U^x di x in Ω ed n funzioni olomorfe $F_1^x, \dots, F_n^x \in \mathcal{O}(U^x)$ tali che $f_j|(U^x \cap X) = F_j^x|(U^x \cap X)$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Detta $(F^x, \tilde{F}^x)$ l'applicazione olomorfa da U^x in $\mathbb{C}^n$ definita da $(F_1^x, \dots, F_n^x)$, chiaramente la sua restrizione ad $(X \cap U^x, \mathcal{O}_X|(X \cap U^x))$ coincide con quella di $(f, \tilde{f})$.

Dimostriamo in questo modo che esiste un ricoprimento aperto $\{W_\alpha\}$ di X tale che per ogni α vi sia un elemento $f^\alpha \in \mathrm{Hol}(W^\alpha, \mathbb{C}^n)$ tale che $f_j = \tilde{f}^\alpha(z_j)$ su W_α. Per l'iniettività di (10.11.2) che abbiamo dimostrato sopra, è $f^\alpha|(W_\alpha \cap W_\beta) = f^\beta|(W_\alpha \cap W_\beta)$ per ogni α, β con $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$. Poiché $W \to \mathrm{Hol}(U, \mathbb{C}^n)$ è un fascio, questa condizione definisce una sezione globale $(f, \tilde{f}) \in \mathrm{Hol}(X, \mathbb{C}^n)$ con $f_j = \tilde{f}(z_j)$ (per $j = 1, \dots, n$) su X.

In generale, possiamo trovare un ricoprimento aperto $\{X_i\}_{i \in I}$ di X, in cui ogni aperto del ricoprimento corrisponda ad uno spazio complesso modello $(X_i, \mathcal{O}_X|X_i)$. Per la dimostrazione svolta sopra, risulta univocamente determinata $f^i \in \mathrm{Hol}(X_i, \mathbb{C}^n)$ tale che $f^i(z_j) = f_j|X_i$ per ogni indice i ed ogni $j = 1, \dots, n$. Poiché, per ogni coppia di indici $i, h \in I$, $f^i|(X_i \cap X_h) = f^h|(X_i \cap X_h)$ per l'unicità, ed $\underline{\mathrm{Hol}}(X, \mathbb{C}^n)$ è un fascio, le f^i definiscono una sezione globale $(f, \tilde{f})$ con $\tilde{f}(z_j) = f_j$ su X per $j = 1, \dots, n$. $\square$

12. Un lemma d'estensione

Lemma X.12.1. *Sia* $(X, \mathcal{O}_X)$ *uno spazio complesso ed* Ω *un aperto di uno spazio complesso Euclideo* $\mathbb{C}^n$. *Siano* $(X', \mathcal{O}_{X'})$ *un sottospazio complesso chiuso di* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ed* $(Y', \mathcal{O}_{Y'})$ *un sottospazio complesso chiuso di* $(\Omega, \mathcal{O}_\Omega)$. *Data un'applicazione olomorfa* $(f, \tilde{f}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Y', \mathcal{O}_{Y'})$, *per ogni punto* $x \in X'$ *esistono un intorno aperto* U *di* x *in* X *ed un'applicazione olomorfa* $(F, \tilde{F}) : (U, \mathcal{O}_X|U) \to (\Omega, \mathcal{O}_\Omega)$ *tale che* $(f, \tilde{f})|(X' \cap U) = (F, \tilde{F})|(X' \cap U)$.

Dimostrazione. Per composizione con l'inclusione di $(Y', \tilde{Y}')$ in $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, la $(f, \tilde{f})$ definisce un'applicazione $(f', \tilde{f}') \in \mathrm{Hol}(X', \mathbb{C}^n) \simeq [\mathcal{O}_{X'}(X')]^n$. Fissato un punto $x \in X'$, le $f'_1, \dots, f'_n$ associate alla $(f', \tilde{f}')$ sono, in un intorno in X' del punto x, restrizioni di applicazioni $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{O}_X(U)$ per un intorno aperto U di x in X. Possiamo supporre tale che $(F_1(p), \dots, F_n(p)) \in \Omega$ per ogni $p \in U$. La $(F, \tilde{F}) \in \mathrm{Hol}(U, \Omega)$ corrispondente alle $F_1, \dots, F_n$ gode delle proprietà richieste. $\square$

13. Prodotto diretto di spazi complessi

Definizione X.13.1. Siano $(X_1, \mathcal{O}_{X_1})$, $(X_2, \mathcal{O}_{X_2})$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ spazi complessi e siano $(\phi_i, \tilde{\phi}_i) : (X_i, \mathcal{O}_{X_i}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$, $i = 1, 2$, applicazioni olomorfe. Il *prodotto fibrato* di $(X_1, \mathcal{O}_{X_1})$ ed $(X_2, \mathcal{O}_{X_2})$ su Y, rispetto alle applicazioni $(\phi_i, \tilde{\phi}_i) : (X_i, \mathcal{O}_{X_i}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$, $i = 1, 2$, è uno spazio complesso $(X, \mathcal{O}_X)$ che gode della *proprietà universale*:

$$\exists (\pi_i, \tilde{\pi}_i) : (X, \mathcal{O}_X) \to (X_i, \mathcal{O}_{X_i}) \quad \text{applicazioni olomorfe, tali che,}$$

per ogni spazio complesso $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ed ogni coppia di applicazioni olomorfe

$$(\psi_i, \tilde{\psi}_i) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X_i, \mathcal{O}_{X_i}), \text{ con } \psi_1 \circ \phi_1 = \psi_2 \circ \phi_2 := \psi,$$

$$\exists! \quad (\psi, \tilde{\psi}) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X) \quad \text{tale che} \quad \psi_i = \pi_i \circ \psi, \text{ per } i = 1, 2.$$

Possiamo porre

$$X = X_1 \times_Y X_2 = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid \phi_1(x_1) = \phi_2(x_2)\}, \tag{10.13.1}$$

CAPITOLO 11

Fasci coerenti su insiemi analitici

1. Il Nullstellensatz di Rückert

DEFINIZIONE XI.1.1. Sia $\mathcal{S}$ un fascio analitico su uno spazio complesso $(X, \mathcal{O}_X)$. Indichiamo con $\underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S}$ il fascio dei germi degli annullatori di $\mathcal{S}$ in $\mathcal{O}_X$:

$$\underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S} = \bigcup\nolimits_{x\in X}\{f_x \in \mathcal{O}_{X,\,x} \mid f_x \cdot \mathcal{S}_x = 0_x\}. \tag{11.1.1}$$

LEMMA XI.1.2. *Se $\mathcal{S}$ è di tipo finito, allora $\underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S}$ è un fascio d'ideali di $\mathcal{O}_X$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f_x \in \underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S}_x$. Siano U un intorno aperto di x in X ed $s_1, \ldots, s_p \in \mathcal{S}(U)$ generatori di $\mathcal{S}|U$. Da $f_x s_{j,\,x} = 0_x$, segue che, per ogni j, $f\, s_j|U_j = 0|U_j$ per un intorno U_j di x in U_j. Quindi $f_y \in \underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S}_y$ per ogni y nell'intorno aperto $\bigcap_{j=1}^{p} U_j$. Ciò dimostra che $\underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S}$ è un aperto, e quindi un fascio di ideali di $\mathcal{O}_X$. $\square$

PROPOSIZIONE XI.1.3. *Se $\mathcal{S}$ è coerente, anche $\underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S}$ è coerente.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'applicazione naturale

$$\Phi : \mathcal{O}_X \to \underline{\mathrm{Hom}}\,(\mathcal{S}, \mathcal{S}).$$

Poiché sia $\mathcal{O}_X$ che $\mathcal{S}$ sono coerenti, anche $\underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S} = \underline{\ker}\,\Phi$ è coerente. $\square$

PROPOSIZIONE XI.1.4. *Se $\mathcal{S}$ è un fascio analitico coerente, allora*

$$\operatorname{supp}\mathcal{S} = N(\underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S}). \tag{11.1.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $f_x \in \underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S}_x$, la proiezione di $f_x s_x$ in $\mathcal{S}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} (\mathcal{O}_{X,\,x}/\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{X,\,x}))$ è nulla per ogni $s_x \in \mathcal{S}_x$. Poiché $\mathcal{S}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} (\mathcal{O}_{X,\,x}/\mathfrak{m}(\mathcal{O}_{X,\,x})) \neq 0$ se (e soltanto se) $x \in \operatorname{supp}\mathcal{S}$, deve essere $f_x(x) = 0$. Questo dimostra l'inclusione $\operatorname{supp}\mathcal{S} \subset N(\underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S})$.

D'altra parte, se $x \notin \operatorname{supp}\mathcal{S}$, allora $\mathcal{S}_y = 0_y$ per y in un intorno aperto U di x in X, e quindi $\underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S}_x = \mathcal{O}_{X,\,x}$ ed $x \notin N(\underline{\mathrm{Ann}}\,\mathcal{S})$. Vale dunque anche l'inclusione opposta e quindi la (11.1.2). $\square$

LEMMA XI.1.5. *Sia $\mathcal{S}$ un fascio analitico coerente in un aperto U di* 0 *in $\mathbb{C}^n$. Se*

$$\operatorname{supp}\mathcal{S} \subset \{z \in \Omega \mid z_1 = 0\}, \tag{11.1.3}$$

allora, per ogni punto esiste un intero positivo d tale che $z_1^d \mathcal{S}_0 = 0$.

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n. La tesi è banalmente vera per $n = 1$. Supponiamo quindi $n > 1$ e la tesi vera quando si sostituisca $(n-1)$ ad n. Sia g una funzione olomorfa in un intorno di 0 tale che $g_0\mathcal{S}_0 = 0_0$. Se g_0 fosse un'unità, ne seguirebbe che $\mathcal{S}_0 = 0_0$, e quindi non ci sarebbe niente da dimostrare. Se g_0 non è un'unità, scriviamo

$$g = \sum_{h\geq h_0} g_h(z_2,\dots,z_n)z_1^h, \quad \text{con} \quad g_h \in \mathcal{O}(U') \ \text{ e } \ g_{h_0} \neq 0,$$

per un intorno U' di 0 in $\mathbb{C}^{n-1}$. Consideriamo il fascio coerente $\mathcal{S}' = z_1^{h_0}\mathcal{S}$. Posto $g_0' = z_1^{-h_0}g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, abbiamo $g_0'\mathcal{S}_0' = 0$. Se g_0' è un'inità, ne segue che $z_1^{h_0}\mathcal{S}_0 = 0$, ed abbiamo finito. Altrimenti, mediante un cambiamento lineare di coordinate, possiamo supporre che g_{h_0} abbia uno zero d'ordine finito rispetto alla variabile distinta z_n. Ne ricaviamo in particolare che $\operatorname{supp}\mathcal{S} = N(\underline{\operatorname{Ann}}\,\mathcal{S})$ interseca l'asse z_n in un punto isolato e dunque, a meno di restringere opportunamente l'intorno Ω, possiamo supporre che la proiezione canonica di $\mathbb{C}^n_{z_1,\dots,z_n}$ su $\mathbb{C}^{n-1}_{z_1,\dots,z_{n-1}}$ si restringa ad un'applicazione finita π di $\operatorname{supp}\mathcal{S}'$ su un intorno aperto Ω' di 0 in $\mathbb{C}^{n-1}$. Allora $\pi_*(\mathcal{S}')$ è un fascio coerente su Ω', con supporto contenuto in $\{z_1 = 0\}\cap\Omega'$. Per l'ipotesi induttiva esiste un intero positivo d' tale che $z_1^{d'}\pi_*(\mathcal{S}_0') = 0_0$. Da questa ricaviamo che $z_1^{d'}\mathcal{S}_0' = 0_0$, e quindi $z_1^{d'+h_0}\mathcal{S}_0 = 0_0$. □

Teorema XI.1.6 (Nullstellensatz di Rückert). *Sia $\mathcal{S}_X$ un fascio coerente sullo spazio complesso $(X,\mathcal{O}_X)$. Se $f \in \mathcal{O}_X(X)$ si annulla su* $\operatorname{supp}\mathcal{S}$*, allora per ogni $x \in X$ possiamo trovare un intero positivo d tale che $f_x^d\mathcal{S}_{X,x} = 0$ (e dunque $f_{x'}^d\mathcal{S}_{X,x'} = 0$ per tutti gli x' in un intorno aperto U di x in X).*

Dimostrazione. Possiamo supporre che $(X,\mathcal{O}_X)$ sia uno spazio complesso modello, definito in un aperto Ω di $\mathbb{C}^n$ da un ideale corente $\mathcal{I}_\Omega$ di $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$, generato da un numero finito di funzioni olomorfe globali $f_1,\dots,f_m \in \mathcal{O}(\Omega)$, e che $f \in \mathcal{O}_X(X)$ sia la restrizione ad X di una $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$. Sia X_f il grafico di f, definito in $\mathbb{C}^{n+1}_{z,w}$ dal fascio coerente di ideali generato da $(f_1(z),\dots,f_m(z), w - f(z))$. Poiché l'applicazione $\gamma_f : X \ni x \to (x, f(x)) \in X_f$ definisce un isomorfismo di spazi complessi, l'immagine $(\gamma_f)_*(\mathcal{S})$ è un fascio coerente su $(X_f, \mathcal{O}_{X_f})$. La sua estensione banale $\mathcal{S}'_{\Omega\times\mathbb{C}}$ è un fascio coerente con il supporto contenuto in $\{w = 0\}$. Per il Lemma XI.1.5, fissato un qualsiasi punto z, esiste un intero positivo d tale che $w^d\mathcal{S}'_{\Omega\times\mathbb{C},(z,0)} = 0$. Ma questa relazione ci dà $f_z^d\mathcal{S}_{X,z} = 0$. □

Corollario XI.1.7. *Sia $(X,\mathcal{O}_X)$ uno spazio complesso ed $f \in \mathcal{O}_X(X)$ una funzione olomorfa con $[f](x) = 0$ per ogni $x \in X$. Allora tutti i germi f_x definiti da f sono nilpotenti.*

2. Applicazioni olomorfe aperte

Definizione XI.2.1. Un'applicazione continua $f : X \to Y$ tra due spazi topologici X, Y si dice *aperta* in un punto x_0 di X se trasforma intorni di

x_0 in X in intorni di $f(x_0)$ in Y.

Osserviamo che, se $f : X \to Y$ è aperta in $x_0 \in X$, esiste un sistema fondamentale di intorni aperti di x_0 in X che sono trasformati da f in un sistema fondamentale di intorni aperti di y_0 in Y.

[Se U è un intorno aperto di x_0 in X e V un intorno aperto di $f(x_0)$ in Y, contenuto in $f(U)$, allora $U' = U \cap f^{-1}(V)$ è un intorno aperto di x_0 con $f(U') = V$.]

PROPOSIZIONE XI.2.2. *Sia $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un'applicazione olomorfa, aperta nel punto $x_0 \in X$. Allora tutti gli elementi del nucleo dell'omomorfismo $\tilde{f}_{x_0} : \mathcal{O}_{Y, f(x_0)} \to \mathcal{O}_{X, x_0}$ sono nilpotenti.*

DIMOSTRAZIONE. Se $g \in \mathcal{O}_Y(V)$, per un intorno V di $f(x_0)$ in Y, ed $\tilde{f}_{x_0}(g_{x_0}) = 0$, allora $\tilde{f}(g)$ è una funzione olomorfa su un intorno aperto di x_0 in X. Poiché f è aperta in x_0, la $[g]$ si annulla su un intorno V' di $f(x_0)$ in Y, e $g_{f(x_0)}$ è quindi nilpotente per il Corollario XI.1.7. $\square$

Osserviamo che l'insieme dei punti in cui una $f \in \mathcal{O}_X(X)$ definisce un germe g_x divisore di zero è un chiuso di X. Esso è infatti il supporto del fascio $\underline{\ker}\, p_g$ ove $p_g : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ è definita dalla moltiplicazione per g.

DEFINIZIONE XI.2.3. Se $\mathbf{M}$ è un modulo sull'anello $\mathbb{A}$, definiamo *torsione* di $\mathbf{M}$ il sotto-$\mathbb{A}$-modulo

$$\mathbf{T}_{\mathbb{A}}(\mathbf{M}) = \{m \in \mathbf{M} \mid \exists\, a \in \mathbb{A} \setminus \{0\} \text{ tale che } a \cdot m = 0\}. \tag{11.2.1}$$

PROPOSIZIONE XI.2.4. *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio complesso localmente irriducibile. Allora, per ogni fascio analitico $\mathcal{S}_X$ su X, la torsione*

$$\mathcal{T}(\mathcal{S}_X) = \bigcup\nolimits_{x \in X} \mathbf{T}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{S}_{X,x}) \tag{11.2.2}$$

è un fascio analitico su X.

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo verificare che $\mathcal{T}(\mathcal{S}_X)$ è un aperto di $\mathcal{S}_X$. Se $s \in \mathcal{S}(U)$ e $g \in \mathcal{O}_X(U)$ per un intorno U di un punto $x \in X$, con $g_x \neq 0$ e $g_x s_x = 0$, abbiamo ancora $g_{x'} s_{x'}$ per x' in un intorno aperto U' di x in U. L'ipotesi che $(X, \mathcal{O}_X)$ sia localmente irriducibile significa che $\mathcal{O}_{X,x}$ è, per ogni $x \in X$, un dominio d'integrità. Quindi $g_x \neq 0$ significa che g_x non è divisore di 0 in $\mathcal{O}_{X,x}$ e quindi, per l'osservazione precedente, $g_{x'}$ non è divisore di 0 in $\mathcal{O}_{X,x'}$ per x' in un intorno aperto U'' di x in U'. Quindi la sezione $s|U''$ è un aperto di $\mathcal{S}_X$ contenuto in $\mathcal{T}(\mathcal{S}_X)$. $\square$

DEFINIZIONE XI.2.5. Se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio complesso localmente irriducibile ed $\mathcal{S}_X$ un fascio analitico su X, il fascio analitico $\mathcal{T}(\mathcal{S}_X)$ si dice il *fascio di torsione* di $\mathcal{S}_X$.

TEOREMA XI.2.6 (criterio dell'applicazione aperta). *Sia $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un'applicazione olomorfa finita tra spazi complessi. Supponiamo che $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sia localmente irriducibile. Allora f è aperta in ogni punto x per cui l'$\mathcal{O}_{Y, f(x)}$-modulo $f_*(\mathcal{O}_X)_{f(x)}$ sia privo di torsione.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ un punto in cui la f non sia aperta. Scegliamo intorni U di x e V di $f(x)$, con $f(U) \subset V$, tali che la f definisca un'applicazione finita da U in V per cui $f_*(\mathcal{O}_U)$ abbia un supporto $f(U)$ che non sia un intorno di $f(x)$ in V. Poiché $f_*(\mathcal{O}_X)|V$ è un fascio coerente, $f(U)$ è il sottospazio complesso definito dall'ideale $\mathcal{I}_V$ degli annichilatori di $f_*(\mathcal{O}_X)|V$. Potremo quindi trovare, in un intorno aperto V' di $f(x)$ in V, una sezione $h \in \mathcal{I}_V(V')$ con $h_{f(x)} \neq 0$. Per il Nullstellensatz di Rückert, esiste un intero $d > 0$ tale che $h^d_{f(x)} f_*(\mathcal{O}_U)_{f(x)} = 0$. Poiché abbiamo supposto $(Y, \mathcal{O}_Y)$ localmente irriducibile, $h^d_{f(x)} \neq 0$. Quindi $f_*(\mathcal{O}_U)_{f(x)}$ è tutto di torsione. Poiché esso è un sottomodulo di $f_*(\mathcal{O}_X)_{f(x)}$, ne concludiamo che anche questo modulo non è privo di torsione. $\square$

Proposizione XI.2.7. *Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio complesso localmente irriducibile. Il fascio di torsione $\mathcal{T}(\mathcal{S}_X)$ di un fascio analitco coerente $\mathcal{S}_X$ è corente.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che $\mathcal{S}^*_X = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{S}, \mathcal{O}_X)$ ed $\mathcal{S}^{**}_X = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{S}^*, \mathcal{O}_X)$ sono fasci coerenti. Allora il fascio di torsione è coerente perché è il nucleo del morfismo naturale $\mathcal{S}_X \to \mathcal{S}^{**}_X$. $\square$

Se $\mathbf{M}$ è un modulo di tipo finito su un campo d'integrità $\mathbb{A}$, allora per ogni ideale primo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(\mathbf{M})$ è possibile definire un omomorfismo non banale $\mathbf{M} \to \mathbb{A}/\mathfrak{p}$. In particolare, se $\mathbf{M} \neq \mathbf{T}(\mathbf{M})$, è $(0) \in \mathrm{supp}(\mathbf{M})$ e possiamo quindi definire un omomorfismo non banale $\mathbf{M} \to \mathbb{A}$, onde $\mathbf{M}^* \neq 0$. Dalla costruzione degli omomorfismi $\mathbf{M} \to \mathbb{A}$, segue che $\mathbf{T}(\mathbf{M})$ è il nucleo dell'omomorfismo $\mathbf{M} \to \mathbf{M}^{**}$.

Proposizione XI.2.8. *Se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio complesso localmente irriducibile ed $\mathcal{S}_X$ un fascio analitico coerente su X, allora l'insieme dei punti di X in cui $\mathcal{S}_x$ è privo di torsione è un aperto di X.*

CAPITOLO 12

Algebra Locale

In tutto il capitolo, indicheremo con $\mathbb{A}$ un anello commutativo e unitario. Anche gli $\mathbb{A}$-moduli che considereremo saranno tutti unitari. Un $\mathbb{A}$-modulo $\mathbf{M}$ si dice *di tipo finito* se ammette un insieme finito di generatori.

1. Localizzazione e anelli locali

DEFINIZIONE XII.1.1. Si dice *radicale* (di Jacobson) dell'anello $\mathbb{A}$ l'intersezione $\operatorname{rad}(\mathbb{A})$ di tutti gli ideali propri massimali di $\mathbb{A}$.

ESEMPIO XII.1.2. Il radicale di un campo è $\{0\}$, il radicale di $\mathbb{Z}$ è $\{0\}$, il radicale di $\mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ è $2\mathbb{Z}_8$.

LEMMA XII.1.3. *Un ideale $\mathbb{I}$ di $\mathbb{A}$ è contenuto nel radicale di $\mathbb{A}$ se, e soltanto se, per ogni elemento $a \in \mathbb{I}$, l'elemento $[1 + a]$ è invertibile.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\mathbb{I} \subset \operatorname{rad}(\mathbb{A})$ e sia $a \in \mathbb{I}$. Se $[1 + a]$ non fosse invertibile, sarebbe contenuto in un ideale proprio massimale $\mathbb{J}$. Ma $a \in \operatorname{rad}(\mathbb{A}) \subset \mathbb{J}$ implicherebbe che $1 = [1 + a] - a \in \mathbb{J}$, contraddicendo il fatto che $\mathbb{J}$ fosse proprio.

Supponiamo viceversa che $\mathbb{I}$ sia un ideale di $\mathbb{A}$ che goda della proprietà che $[1 + a]$ sia invertibile per ogni $a \in \mathbb{I}$. Sia $\mathbb{J}$ un ideale massimale proprio di $\mathbb{A}$ e consideriamo l'ideale $\mathbb{I} + \mathbb{J}$. Se esso è proprio, allora coincide con $\mathbb{J}$ per la massimalità, e quindi $\mathbb{I} \subset \mathbb{J}$. Altrimenti, $\mathbb{I} + \mathbb{J} = \mathbb{A}$ ed, in particolare, possiamo trovare $a \in \mathbb{I}$ e $b \in \mathbb{J}$ tali che $a + b = 1$. Ma questo non è possibile perché $b = [1 - a]$ sarebbe allora un elemento invertibile, contraddicendo il fatto che $\mathbb{J}$ fosse proprio. Quindi $\mathbb{I}$ è contenuto in tutti gli ideali propri massimali di $\mathbb{A}$ e perciò nel suo radicale $\operatorname{rad}(\mathbb{A})$. $\square$

DEFINIZIONE XII.1.4. Un anello commutativo unitario $\mathbb{A}$ si dice *locale* se l'insieme $\mathfrak{m}$ dei suoi elementi non invertibili è un ideale di $\mathbb{A}$.

In questo caso $\mathfrak{m}$ contiene tutti gli ideali propri di $\mathbb{A}$, ed è perciò l'unico ideale proprio massimale di $\mathbb{A}$ e coincide con il suo radicale.

Il quoziente $\mathbb{k}$ di un anello locale $\mathbb{A}$ per il suo ideale massimale $\mathfrak{m}$ è un campo, che si dice ad esso associato.

TEOREMA XII.1.5 (Lemma di Nakayama). *Sia $\mathbf{M}$ un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito ed $\mathbf{M}'$ un suo sotto-$\mathbb{A}$-modulo tale che*

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \operatorname{rad}(\mathbb{A})\mathbf{M}. \tag{12.1.1}$$

Allora $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$.

Dimostrazione. Sostituendo ad $\mathbf{M}$ il quoziente $\mathbf{N} = \mathbf{M}/\mathbf{M}'$, che è ancora un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito, possiamo riformulare la tesi nella forma:

$$\mathbf{N} = \operatorname{rad}(\mathbf{A})\mathbf{N} \Longleftrightarrow \mathbf{N} = 0. \tag{12.1.2}$$

Siano $n_1, \dots, n_\ell$ generatori di $\mathbf{N}$. Dall'uguaglianza $\mathbf{N} = \operatorname{rad}(\mathbb{A})\mathbf{N}$ segue che:

$$n_i = \sum_{j=1}^{\ell} n_j a_{j,i} \quad \text{con} \quad a_{j,i} \in \operatorname{rad}(\mathbb{A}).$$

Consideriamo la matrice $T = (\delta_{j,i} - a_{j,i})_{1 \leq j,i \leq \ell}$. Il suo determinante è un elemento della forma $[1+a]$ con $a \in \operatorname{rad}(\mathbb{A})$. Quindi la matrice T è invertibile. Da $(n_1, \dots, n_\ell)T = 0$ segue allora che $n_1 = 0, \dots, n_\ell = 0$, e ciò dimostra che $\mathbf{N} = 0$. □

Corollario XII.1.6. *Sia $\mathbf{M}$ un modulo di tipo finito su un anello locale $\mathbb{A}$, con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e campo associato $\mathbb{k}$. Il numero minimo $g_{\mathbb{A}}(\mathbf{M})$ di generatori di $\mathbf{M}$ è uguale alla dimensione su $\mathbb{k}$ dello spazio vettoriale $\mathbb{M} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{k} = \mathbf{M}/(\mathfrak{m} \cdot \mathbf{M})$.*

Dimostrazione. Sia V il $\mathbb{k}$-spazio vettoriale $\mathbb{M} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{k}$. Chiaramente $g_{\mathbb{A}}(\mathbf{M}) \geq \dim_{\mathbb{k}} V$, perché V è generato, come spazio vettoriale su $\mathbb{k}$, dall'immagine di un qualsiasi insieme di generatori di $\mathbf{M}$ come $\mathbb{A}$-modulo.

Siano ora $m_1, \dots, m_d$ elementi di $\mathbf{M}$, le cui immagini definiscano una base di V. Se $\mathbf{M}'$ è il sotto-$\mathbb{A}$-modulo di $\mathbf{M}$ generato da $m_1, \dots, m_d$, abbiamo $\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mathfrak{m}\mathbf{M}$, e quindi $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$ per il Lemma di Nakayama: perciò $m_1, \dots, m_d$ generano $\mathbf{M}$. □

Definizione XII.1.7. Sia $\mathbb{A}$ un anello commutativo e unitario e $\mathfrak{p}$ un ideale primo[1] di $\mathbb{A}$. Sia $\mathbb{S}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{A} \setminus \mathfrak{p}$. Sia $\mathbf{M}$ un $\mathbb{A}$-modulo. Definiamo su $\mathbf{M} \times \mathbb{S}_{\mathfrak{p}}$ la relazione di equivalenza

$$(m_1, s_1) \sim (m_2, s_2) \Longleftrightarrow \exists s_3 \in \mathbb{S}_{\mathfrak{p}} \text{ tale che } (m_1 s_2 - m_2 s_1) s_3 = 0. \tag{12.1.3}$$

Il quoziente $\mathbf{M}_{\mathfrak{p}} = \mathbf{M}/\sim$ si dice il *localizzato di* $\mathbf{M}$ *rispetto a* $\mathfrak{p}$.

Osservazione XII.1.8. Possiamo considerare $\mathbf{M}_{\mathfrak{p}}$ come il *modulo dei quozienti* degli elementi di $\mathbf{M}$ rispetto agli elementi di $\mathbb{S}_{\mathfrak{p}}$. Infatti con le regole usuali per il calcolo delle frazioni

$$\frac{m_1}{s_1} = \frac{m_2}{s_2} \Longleftrightarrow \frac{s_2 m_1}{s_1 s_2} = \frac{s_1 m_2}{s_1 s_2} \Longleftrightarrow \frac{s_2 s_3 m_1}{s_1 s_2 s_3} = \frac{s_1 s_3 m_2}{s_1 s_2 s_3}.$$

Nota che, se $\mathbb{A}$ è un dominio d'integrità, se cioè non ha divisori di zero, possiamo prendere $s_3 = 1$ nella (12.1.3).

Nel seguito indicheremo a volte con m/s (oppure $\frac{m}{s}$) la classe di equivalenza di $(m, s) \in \mathbf{M} \times \mathbb{S}_{\mathfrak{p}}$ in $\mathbf{M}_{\mathfrak{p}}$.

[1] Ciò significa che, se $a, b \in \mathbb{A}$, $a \notin \mathfrak{p}$ ed $ab \in \mathfrak{p}$, allora $b \in \mathfrak{p}$.

Osserviamo che il localizzato $\mathbf{M}_{\mathfrak{p}}$ è in modo naturale un $\mathbb{A}$-modulo, per il prodotto definito dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} \times \mathbf{M} \times \mathbb{S}_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{(a,m,s)\to(am,s)} & \mathbf{M} \times \mathbb{S}_{\mathfrak{p}} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\times\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{A} \times \mathbf{M}_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & \mathbf{M}_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

ove $\pi : \mathbf{M} \to \mathbf{M}_{\mathfrak{p}}$ è la proiezione nel quoziente.

Proposizione XII.1.9. *Sia $\mathbb{A}$ un anello commutativo e unitario e $\mathfrak{p}$ un ideale primo di $\mathbb{A}$. Allora:*

(1) *$\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$ è un anello locale, con ideale massimale $\mathfrak{p}\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$.*
(2) *$\mathbf{M}_{\mathfrak{p}}$ ha una struttura di $\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$-modulo unitario, con la struttura definita dal diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{A} \times S_{\mathfrak{p}}) \times (\mathbf{M} \times \mathbb{S}_{\mathfrak{p}}) & \xrightarrow{((a,s),(m,s'))\to(am,ss')} & \mathbf{M} \times \mathbb{S}_{\mathfrak{p}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}_{\mathfrak{p}} \times \mathbf{M}_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & \mathbf{M}_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono definite dalle proiezioni nei quozienti. □

Proposizione XII.1.10. *Sia $\mathbb{A}$ un anello commutativo e unitario e $\mathfrak{p}$ un ideale primo di $\mathbb{A}$. Allora*

(1) *La proiezione naturale $\mathbb{A} \ni a \to \mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$ è un omomorfismo d'anelli unitari.*
(2) *Gli ideali primi di $\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$ sono tutti e soli quelli della forma $\mathfrak{p}'\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$, al variare di $\mathfrak{p}'$ tra gli ideali primi contenuti in $\mathfrak{p}$.*
(3) *L'applicazione canonica di $\mathbf{M} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$ su $\mathbf{M}_{\mathfrak{p}}$, che associa al prodotto tensoriale di $m \in \mathbf{M}$ per la classe di equivalenza di $(a, s) \in \mathbb{A} \times \mathbb{S}_{\mathfrak{p}}$ la classe di equivalenza di $(am, s) \in \mathbf{M} \times \mathbb{S}_{\mathfrak{p}}$ è un isomorfismo.* □

2. Anelli e moduli Noetheriani

In questo paragrafo indichiamo con $\mathbb{A}$ un anello commutativo unitario.

Definizione XII.2.1. Un $\mathbb{A}$-modulo $\mathbf{M}$ è *Noetheriano* se ogni suo sottomodulo è di tipo finito[2].

Diciamo che $\mathbb{A}$ è un *anello Noetheriano* se è Noetheriano per la sua struttura naturale di $\mathbb{A}$-modulo.

Proposizione XII.2.2. *Se $\mathbb{A}$ è un anello Noetheriano, ogni $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito è Noetheriano.*

Se $\mathbb{A}$ è un anello Noetheriano e $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di $\mathbb{A}$, allora anche il suo localizzato $\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$ è Noetheriano. □

[2] Questa condizione è equivalente alla *condizione della catena ascendente*, cioè al fatto che ogni successione crescente di sotto-$\mathbb{A}$-moduli di $\mathbf{M}$ sia stazionaria.

Definizione XII.2.3. Un ideale $\mathbb{I}$ di un anello commutativo unitario si dice *primario* se il suo radicale è primo, cioè se vale

$$a, b \in \mathbb{A},\ ab \in \mathbb{I},\ \{a^k \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{I} = \emptyset \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } b^k \in \mathbb{I}. \tag{12.2.1}$$

Definizione XII.2.4. Sia $\mathbf{M}$ un $\mathbb{A}$-modulo unitario di tipo finito. Un ideale primo $\mathfrak{p}$ di $\mathbb{A}$ si dice *associato* ad $\mathbf{M}$ se esiste un elemento $m \in \mathbb{M}$ tale che

$$\operatorname{Ann}(m) = \{a \in \mathbb{A} \mid a \cdot m = 0\} = \mathfrak{p}. \tag{12.2.2}$$

Indichiamo con $\operatorname{Ass}_{\mathbb{A}}(\mathbf{M})$ l'insieme degli ideali primi associati ad $\mathbb{M}$.

Proposizione XII.2.5. *Sia $\mathbb{A}$ un anello commutativo e unitario Noetheriano. Allora, per ogni $\mathbb{A}$-modulo $\mathbf{M} \neq 0$, $\operatorname{Ass}_{\mathbb{A}}(\mathbf{M})$ è non vuoto. Ogni elemento massimale di $\{\operatorname{Ann}(m) \mid m \in \mathbf{M} \setminus 0\}$ appartiene ad $\operatorname{Ass}_{\mathbb{A}}(\mathbf{M})$.*

Dimostrazione. Poiché abbiamo supposto che $\mathbb{A}$ sia Noetheriano, la famiglia di ideali di $\mathcal{I} = \{\operatorname{Ann}(m) \mid m \in \mathbf{M} \setminus 0\}$ contiene elementi massimali.

Sia $\mathbb{I} = \operatorname{Ann}(m)$ un elemento massimale di $\mathcal{I}$. Se $\mathbb{I}$ non fosse primo, ci sarebbero due elementi $a, b \in \mathbb{A}$ con $a, b \notin \mathbb{I}$, ma $ab \in \mathbb{I}$. Allora $a \cdot m \neq 0$, ed $\operatorname{Ann}(a \cdot m) \supset (\mathbb{I} \cup \{b\}$, contraddicendo la massimalità di $\mathbb{I}$. □

Corollario XII.2.6. *Sia $\mathbb{A}$ un anello commutativo unitario Noetheriano, ed $\mathbf{M}$ un $\mathbb{A}$-modulo unitario. Se $a \in \mathbb{A}$ è tale che $\mathbf{M} \ni m \to a \cdot m \in \mathbf{M}$ non è iniettiva, allora a appartiene ad un ideale primo associato ad $\mathbf{M}$.* □

Corollario XII.2.7. *Sia $\mathbb{A}$ un anello commutativo unitario Noetheriano, ed $\mathbf{M}$ un $\mathbb{A}$-modulo unitario. Se $\mathbf{N}$ è un sotto-$\mathbb{A}$-modulo di $\mathbf{M}$, allora*

$$\operatorname{Ass}_{\mathbb{A}}(\mathbf{N}) \subset \operatorname{Ass}_{\mathbb{A}}(\mathbf{M}) \subset \operatorname{Ass}_{\mathbb{A}}(\mathbf{N}) \cup \operatorname{Ass}_{\mathbb{A}}(\mathbf{M}/\mathbf{N}). \quad \square \tag{12.2.3}$$

Proposizione XII.2.8. *Sia $\mathbb{A}$ un anello commutativo unitario Noetheriano, ed $\mathbf{M}$ un $\mathbb{A}$-modulo unitario. Se Φ è un sottoinsieme di $\operatorname{Ass}_{\mathbb{A}}(\mathbf{M})$, allora esiste un sotto-$\mathbb{A}$-modulo $\mathbb{N}$ di $\mathbf{M}$ tale che $\operatorname{Ass}_{\mathbb{A}}(\mathbf{N}) = \operatorname{Ass}_{\mathbb{A}}(\mathbf{M}) \setminus \Phi$.*

Definizione XII.2.9. Un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito $\mathbf{M}$ si dice *coprimario* se è diverso da 0 e soddisfa la condizione:

$$\forall a \in \mathbb{A} \text{ vale una delle due condizioni } \begin{cases} \exists m \in \mathbb{N} \text{ tale che } a^n \mathbf{N} = 0; \\ am \neq 0,\ \forall m \in \mathbf{M} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Proposizione XII.2.10. *Sia $\mathbf{M}$ un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito. Se $\mathbf{M}$ è coprimario, allora il radicale dell'annullatore di $\mathbf{M}$ è un ideale primo di $\mathbf{A}$.* □

Ricordiamo che l'annullatore di $\mathbf{M}$ è l'ideale

$$\operatorname{Ann}(\mathbf{M}) = \{a \in \mathbb{A} \mid a\mathbf{M} = 0\}. \tag{12.2.4}$$

Il suo radicale è

$$\sqrt{\operatorname{Ann}(\mathbf{M})} = \{a \in \mathbb{A} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } a^n \mathbf{M} = 0\}. \tag{12.2.5}$$

Definizione XII.2.11. Se $\mathbf{M}$ è un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito coprimario, l'ideale primo $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathrm{Ann}(\mathbf{M})}$ si dice *associato* ad $\mathbf{M}$, ed $\mathbf{M}$ si dice $\mathfrak{p}$-coprimario.

Proposizione XII.2.12. *Ogni sottomodulo non nullo di un $\mathbb{A}$-modulo $\mathfrak{p}$-coprimario è $\mathfrak{p}$-coprimario.* □

Teorema XII.2.13 (della decomposizione coprimaria). *Sia $\mathbf{M}$ un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito di un anello Noetheriano $\mathbb{A}$. Allora esiste una famiglia finita $\{\mathbf{N}_1, \ldots, \mathbf{N}_m\}$ di sotto-$\mathbb{A}$-moduli di $\mathbf{M}$ e corrispondenti ideali primi $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$ di $\mathbb{A}$, con le proprietà:*

$$\bigcap\nolimits_{j=1}^{m} \mathbf{N}_j = 0, \tag{12.2.6}$$

$$\mathbf{M}/\mathbf{N}_j \text{ è } \mathfrak{p}_j\text{-coprimario per } j = 1, \ldots, m, \tag{12.2.7}$$

$$\mathfrak{p}_j \neq \mathfrak{p}_k \quad \text{se} \quad 1 \leq j < k \leq m, \tag{12.2.8}$$

$$\bigcap\nolimits_{j \neq k} \mathbf{N}_j \neq 0 \quad \forall k = 1, \ldots, m. \tag{12.2.9}$$

Se $\{\mathbf{N}'_1, \ldots, \mathbf{N}'_{m'}\}$ è un'altra famiglia di sotto-$\mathbb{A}$-moduli di $\mathbb{M}$ e $\{\mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_{m'}\}$ ideali primi distinti di $\mathbb{A}$, tali che per ogni $i = 1, \ldots, m'$ il modulo $\mathbf{N}'_i$ sia $\mathfrak{p}'_i$-coprimario e $0 = \cap_{i=1}^{m'} \mathbf{N}'_i$, con $\cap_{i \neq j} \mathbf{N}'_i \neq 0$ per ogni $j = 1, \ldots, m'$, allora $m = m'$ e $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}'_{i'}$ per una permutazione $i \to i'$ degli indici $1 \ldots, m$. Inoltre, se $\mathfrak{p}_i$ è un primo massimale della collezione $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$, allora $\mathbf{N}'_{i'} = \mathbf{N}_i$.

Definizione XII.2.14. Sia $\mathbf{M}$ un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito sull'anello Noetheriano $\mathbb{A}$ e siano $\{\mathbf{N}_1, \ldots, \mathbf{N}_m\}$ sotto-$\mathbb{A}$-moduli di $\mathbf{M}$ e $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$ ideali primi di $\mathbb{A}$ tali che siano verificate le (12.2.6), (12.2.7), (12.2.8), (12.2.9). Diciamo allora che (12.2.6) è una *decomposizione coprimaria di* $\mathbf{M}$, ovvero una *decomposizione primaria* di 0 in $\mathbf{M}$ ed

$$\mathrm{Ass}(\mathbf{M}) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\} \tag{12.2.10}$$

si dice l'insieme dei *primi associati ad* $\mathbf{M}$.

L'*annullatore* di $\mathbf{M}$ è l'ideale

$$\mathrm{Ann}(\mathbf{M}) = \{a \in \mathbb{A} \mid a \cdot \mathbf{M} = 0\}. \tag{12.2.11}$$

Abbiamo

$$\sqrt{\mathrm{Ann}(\mathbf{M})} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_m. \tag{12.2.12}$$

Proposizione XII.2.15. *Sia $\mathbf{M}$ un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito e sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di $\mathbb{A}$. Allora gli ideali primi associati all'$\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$-modulo $\mathbf{M}_{\mathfrak{p}}$ sono i $\mathfrak{q} \cdot \mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$ con $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(\mathbf{M})$ e $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.*

Definizione XII.2.16. Si dice *dimensione* (di Krull) dell'anello $\mathbb{A}$, e si indica con $\dim(\mathbb{A})$, l'estremo superiore, finito o infinito, delle lunghezze d delle catene strettamente ascendenti di suoi ideali primi non nulli

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_d. \tag{12.2.13}$$

Se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di $\mathbb{A}$, chiamiamo *altezza* di $\mathfrak{p}$ la dimensione $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ del localizzato $\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$, che coincide con l'estremo superiore delle lunghezze delle catene ascendenti (12.2.13) di ideali primi di $\mathbb{A}$ contenuti in $\mathfrak{p}$.

Se $\mathbb{I}$ è un qualsiasi ideale di $\mathbb{A}$, chiamiamo altezza di $\mathbb{I}$, e indichiamo con $\mathrm{ht}(\mathbb{I})$, l'estremo superiore delle altezze degli ideali primi contenuti in $\mathbb{I}$.

Vale la diseguaglianza

$$\mathrm{ht}(\mathbb{I}) + \dim\bigl(\mathbb{A}/_{\mathbb{I}}\bigr) \leq \dim(\mathbb{A}). \tag{12.2.14}$$

Definizione XII.2.17. Sia $\mathbb{A}$ un anello locale Noetheriano con ideale massimale $\mathfrak{m}$. Si dice *ideale di definizione* di $\mathbb{A}$ un qualsiasi ideale $\mathbb{I}$ di $\mathbb{A}$ il cui radicale coincida con $\mathfrak{m}$, ovvero, in modo equivalente, che contenga una potenza dell'ideale massimale.

Teorema XII.2.18. *Ogni anello locale Noetheriano ha dimensione finita. La sua dimensione coincide con il numero minimo di elementi di un suo ideale di definizione.*

Dimostrazione. Poiché $\mathbb{A}$ è Noetheriano, vi è una catena massimale di ideali primi di $\mathbb{A}$,

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n. \tag{12.2.15}$$

Poiché $\mathbb{A}$ è locale, $\mathfrak{p}_n$ è l'ideale massimale $\mathfrak{m}$. Se scegliamo elementi $a_j \in \mathfrak{p}_j \setminus \mathfrak{p}_{j-1}$, per $j = 1, \ldots, n$, la n-upla $a_1, \ldots, a_n$ genera un ideale di definizione di $\mathbb{A}$. Infatti, per la massimalità della (12.2.15), $\mathfrak{p}_j$ è il radicale dell'ideale generato da $\mathfrak{p}_{j-1}$ ed a_j. Poiché chiaramente la dimensione di $\mathbb{A}$ è minore o uguale al numero minimo di generatori di un suo ideale di definizione, ne segue la tesi. $\square$

Definizione XII.2.19. Sia $\mathbb{A}$ un anello locale Noetheriano con ideale massimale $\mathfrak{m}$. Se $\mathbb{A}$ ha dimensione n ed $a_1, \ldots, a_n$ sono elementi di $\mathfrak{m}$ che generano un ideale di definizione di $\mathbb{A}$, diciamo che $a_1, \ldots, a_n$ formano un *sistema di parametri* di $\mathbb{A}$.

Siano $\mathbb{I}, \mathbb{I}'$ due ideali propri dell'anello locale Noetheriano $\mathbb{A}$, con $\mathbb{I}' \subset \mathbb{I} \subset \mathfrak{m}$ e $\mathrm{ht}(\mathbb{I}') - \mathrm{ht}(\mathbb{I}) = k > 0$. Siano $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ gli ideali primi di altezza uguale ad $\mathrm{ht}(\mathbb{I}')$ che contengono $\mathbb{I}'$. Poiché $\mathbb{I}$ ha altezza maggiore di quella di $\mathbb{I}'$, non è contenuto in nessuno degli ideali $\mathfrak{p}_j$, e possiamo quindi trovare un elemento $a_1 \in \mathbb{I} \setminus \bigcup_{j=1}^{r} \mathfrak{p}_j$. Ragionando per ricorrenza, troviamo elementi $a_1, \ldots, a_k)$ tali che $\mathrm{ht}(\mathbb{I}' + \mathbb{A}\, a_1 + \cdots + \mathbb{A}\, a_k) = \mathbb{I}$.

Sia ora $\mathfrak{p}$ un ideale primo. Applichiamo il ragionamento precedente al caso in cui $\mathbb{I}' = 0$ e $\mathbb{I} = \mathfrak{p}$. Ci sono allora $a_1, \ldots, a_k$, ove $k = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$, tali che

$$\mathrm{ht}(\mathbb{A}\, a_1 + \cdots \mathbb{A}\, a_k) = k = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}). \tag{12.2.16}$$

Applichiamo ancora il ragionamento precedente al caso in cui $\mathfrak{I}' = (a_1, \ldots, a_k)$ sia l'ideale generato da $a_1, \ldots, a_k$ ed $\mathfrak{I} = \mathfrak{m}$ sia l'ideale massimale di $\mathbb{A}$. Otteniamo allora elementi $a_{k+1}, \ldots, a_n$ tali che

$$\mathrm{ht}((a_1, \ldots, a_n)) = n = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}). \tag{12.2.17}$$

Abbiamo ottenuto

Teorema XII.2.20. *Sia* $\mathbb{A}$ *un anello locale Noetheriano di dimensione* n*, con ideale massimale* $\mathfrak{m}$*. Se* $\mathfrak{p}$ *è un ideale primo di* $\mathbb{A}$ *di altezza* k*, esiste un sistema di parametri* $a_1, \dots, a_n$ *di* $\mathbb{A}$ *tali che* $(a_1, \dots, a_k)$ *sia un ideale di altezza* k *contenuto in* $\mathfrak{p}$*.* □

Definizione XII.2.21. Sia $\mathbb{A}$ un anello commutativo unitario Noetheriano ed $\mathbf{M}$ un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito. Chiamiamo *dimensione* di $\mathbf{M}$ ed indichiamo con $\dim(\mathbf{M})$ la dimensione dell'anello $\mathbb{A}/\mathrm{Ann}(\mathbf{M})$.

Proposizione XII.2.22. *Sia* $\mathbb{A}$ *un anello commutativo unitario Noetheriano ed* $\mathbf{M}$ *un* $\mathbb{A}$*-modulo di tipo finito. Allora* $\mathbf{M}$ *ammette una serie di composizione*

$$0 = \mathbf{M}_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset \mathbf{M}_\nu = \mathbf{M} \tag{12.2.18}$$

tale che, per ogni $j = 1, \dots, \nu$*, il quoziente* $\mathbf{M}_j/\mathbf{M}_{j-1}$ *sia isomorfo ad un modulo* $\mathbb{A}/\mathfrak{p}_j$*, ove i* $\mathfrak{p}_j$ *sono ideali primi con* $\dim(\mathbb{A}/\mathfrak{p}_j) \leq \dim(\mathbf{M})$*.*

Questa proposizione si dimostra per ricorrenza, a partire dal

Lemma XII.2.23. *Sia* $\mathbb{A}$ *un anello commutativo unitario Noetheriano ed* $\mathbf{M}$ *un* $\mathbb{A}$*-modulo di tipo finito. Per ogni* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathbf{M})$*, esiste un sotto-*$\mathbb{A}$*-modulo* $\mathbf{N}$ *di* $\mathbf{M}$ *isomorfo a* $\mathbb{A}/\mathfrak{p}$*.*

Dimostrazione. Per definizione, $\mathbf{M}$ contiene un elemento m con $\mathfrak{p} = \mathrm{Ass}(m)$. Allora $\mathbf{N} = \mathbb{A}\, m$ ha le proprietà richieste. □

3. Chiusura integrale

Sia $\mathbb{A}$ un sottoanello unitario di un anello commutativo ed unitario $\mathbb{B}$.

Definizione XII.3.1. Un elemento b di $\mathbb{B}$ si dice *intero* su $\mathbb{A}$ se soddisfa una *relazione di dipendenza integrale*, della forma

$$b^d + a_1 b^d - 1 + \cdots + a_{d-1} b + a_d = 0, \quad \text{con } a_1, \dots, a_d \in \mathbb{A}. \tag{12.3.1}$$

Gli elementi di $\mathbb{B}$ che sono interi su $\mathbb{A}$ formano un sottoanello di $\mathbb{B}$, che contiene $\mathbb{A}$, e si dice *la chiusura integrale di* $\mathbb{A}$ *in* $\mathbb{B}$.

Se tutti gli elementi di $\mathbb{B}$ sono interi su $\mathbb{A}$, diciamo che $\mathbb{B}$ è *intero* su $\mathbb{A}$.

Chiaramente, se $\mathbb{B}$ è un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito, allora $\mathbb{B}$ è intero su $\mathbb{A}$.

Lemma XII.3.2. *Se* $\mathbb{B}$ *è intero su* $\mathbb{A}$*, allora* $\mathbb{B}$ *è un campo se e soltanto se anche* $\mathbb{B}$ *è un campo.*

Dimostrazione. Sia $a \in \mathbb{A}$ un elemento non nullo. Se $\mathbb{B}$ è un campo, allora l'inverso a^{-1} di $\mathbb{A}$ è un elemento di $\mathbb{B}$, e soddisfa quindi una relazione di dipendenza integrale su $\mathbb{A}$:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^d + a_1 \left(\frac{1}{a}\right)^{d-1} + \cdots + a_{d-1} \left(\frac{1}{a}\right)^{-1} + a_d = 0 \quad \text{con } a_1, \dots, a_d \in \mathbb{A}.$$

Moltiplicando quest'uguaglianza per $a^{d-1} \in \mathbb{A}$, troviamo che

$$\frac{1}{a} = -\left(a_1 + a_2 a + \cdots + a_d a^{d-1}\right) \in \mathbb{A}.$$

Viceversa, se $\mathbb{A}$ è un campo e $b \in \mathbb{B}$ è intero su $\mathbb{A}$, $b \neq 0$ e (12.3.1) è l'equazione minima di b su $\mathbb{A}$, abbiamo $a_d \neq 0$ e l'elemento

$$c = -a_d^{-1}(b^{d-1} + a_1 b^{d-2} + \cdots + a_{d-1}) \in \mathbb{B},$$

soddisfa $bc = cb = 1$, e questo ci dimostra che anche $\mathbb{B}$ è un campo. □

Definizione XII.3.3. Siano $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ anelli commutativi unitari con $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$. Se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di $\mathbb{A}$ e $\mathfrak{p}'$ un ideale primo di $\mathbb{B}$ con

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap \mathbb{A} \tag{12.3.2}$$

diciamo che $\mathfrak{p}'$ *sta sopra* $\mathfrak{p}$.

Proposizione XII.3.4. *Siano $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ anelli commutativi unitari con $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$. Supponiamo che $\mathbb{B}$ sia intero su $\mathbb{A}$. Allora:*

(1) *per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di $\mathbb{A}$ vi è uno ed un solo ideale primo $\mathfrak{p}'$ in $\mathbb{B}$ che stia sopra a $\mathfrak{p}$.*
(2) *Siano $\mathfrak{p}$ un ideale primo di $\mathbb{A}$ e $\mathfrak{p}'$ un ideale primo di $\mathbb{B}$ con* (12.3.2). *Allora condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathfrak{p}'$ sia massimale in $\mathbb{B}$ è che $\mathfrak{p}$ sia massimale in $\mathbb{A}$.*

Dimostrazione. La (2) si ottiene applicando il Lemma XII.3.2 agli anelli $\mathbb{A}/\mathfrak{p} \subset \mathbb{B}/\mathfrak{p}'$, tenuto conto del fatto che i quozienti sono dei campi se e soltanto se i corrispondenti ideali sono massimali.

Per dimostrare (1), consideriamo il localizzato $\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$. L'anello $\mathbb{B} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$ è allora un anello locale intero su $\mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$, e $\mathfrak{p}'$ è l'intersezione di $\mathbb{B} \simeq \mathbb{B} \otimes 1$ con l'ideale massimale di $\mathbb{B} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{A}_{\mathfrak{p}}$. □

Corollario XII.3.5. *Siano $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ anelli commutativi unitari con $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$. Se $\mathbb{B}$ è intero su $\mathbb{A}$, allora* $\dim(\mathbb{B}) = \dim(\mathbb{A})$. □

Definizione XII.3.6. Un anello commutativo e unitario $\mathbb{A}$ si dice *normale* se è un dominio d'integrità Noetheriano, che coincide con la propria chiusura integrale nel suo corpo delle frazioni $\mathbb{A}_{(0)}$.

Ciò significa che, se $a, b \in \mathbb{A}$, $b \neq 0$ e

$$a_0 a^d + a_1 a^{d-1} b + \cdots + a_d b^d = 0, \quad \text{con } a_0, a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{A},\ a_0 a_d \neq 0, \tag{12.3.3}$$

allora esiste $c \in \mathbb{A}$ tale che $a = bc$.

Esempio XII.3.7. Sia $\mathfrak{p}$ l'ideale primo di $\mathbb{C}[x, y]$ generato dal polinomio $p(x, y) = x^2 - y^3$ e sia $\mathbb{A} = \mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{p}$. L'elemento $b = (x/y)$ di $\mathbb{A}_{(0)}$ è intero su $\mathbb{A}$, in quanto verifica l'equazione $b^2 - y = 0$, ma non appartiene ad $\mathbb{A}$. Quindi $\mathbb{A}$, pur essendo un dominio d'integrità Noetheriano, *non* è un anello normale.

TEOREMA XII.3.8. *Sia $\mathbb{A}$ un sottoanello, normale e di caratteristica* 0, *di un dominio d'integrità $\mathbb{B}$. Supponiamo che $\mathbb{B}$ sia un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito e sia $\tilde{\mathbb{B}}$ la chiusura integrale di $\mathbb{B}$ nel suo campo delle frazioni $\mathbb{B}_{(0)}$. Sia $d = \dim_{\mathbb{A}_{(0)}} \mathbb{B}_{(0)}$. Esiste allora un elemento $b \in \mathbb{B}$ ed un polinomio monico*

$$P(T) = T^d + a_1 T^{d-1} + \cdots + a_d \in \mathbb{A}[T] \tag{12.3.4}$$

tale che

(1) $P(b) = 0$;
(2) $\Delta =$ (*discriminante di* P) $\in \mathbb{A} \setminus \{0\}$;
(3) $\Delta \cdot \tilde{\mathbb{B}} \subset \mathbb{A}[b]$.

In particolare, $\tilde{\mathbb{B}}$ è un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito, e quindi un anello normale, (che si dice il normalizzato di $\mathbb{B}$).

DIMOSTRAZIONE. Sia $b \in \mathbb{B}$ un qualsiasi elemento di $\mathbb{B}$. Esso è algebrico sul campo $\mathbb{A}_{(0)}$. Sia $p(T) = T^d + a_1 T^{d-1} + \cdots + a_d \in \mathbb{A}_{(0)}[T]$ il polinomio monico di grado minimo tale che

$$b^d + a_1 b^{d-1} + \cdots + a_d, \quad \text{con } a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{A}_{(0)}. \tag{12.3.5}$$

Poiché $\mathbb{B}$ è un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito, ed $\mathbb{A}$ è Noetheriano, tutti gli elementi di $\mathbb{B}$ sono interi su $\mathbb{A}$. Quindi b soddisfa anche, per un polinomio monico $p'(T) = T^{d'} + a'_1 T^{d'-1} + \cdots + a'_{d'} \in \mathbb{A}[T]$, un'equazione con coefficienti in $\mathbb{A}$:

$$b^{d'} + a'_1 b^{d'-1} + \cdots + a_{d'} = 0, \quad \text{con } a'_1, \ldots, a'_{d'} \in \mathbb{A}. \tag{12.3.6}$$

Sia $\Bbbk$ un'estensione del campo $\mathbb{B}_{(0)}$ in cui l'equazione (12.3.5) abbia d radici distinte $b_1, \ldots, b_d$. Poiché $p(T)$ divide $p'(T)$ in $\mathbb{A}_{(0)}[T]$, ciascuna di esse è ancora intera su $\mathbb{A}$. Ne segue che i coefficienti $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{A}_{(0)}$, essendo funzioni simmetriche delle radici $b_1, \ldots, b_d$, sono anch'essi interi su $\mathbb{A}$. Per l'ipotesi che $\mathbb{A}$ fosse un anello normale, ne segue che $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{A}$: se scegliamo $d' > 0$ minimo nella (12.3.6), abbiamo $d = d'$ ed $a'_j = a_j$ per ogni $j = 1, \ldots, d$.

Il campo $\mathbb{B}_{(0)}$ delle frazioni di $\mathbb{B}$ è un'estensione algebrica finita del campo $\mathbb{A}_{(0)}$ delle frazioni di $\mathbb{A}$. Possiamo allora trovare elementi $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{B}$ tali che $\mathbb{B}_{(0)} = \mathbb{A}_{(0)}[b_1, \ldots, b_r]$. In particolare, ogni elemento di $\mathbb{B}_{(0)}$ si può scrivere come una frazione b/a, con $b \in \mathbb{B}$ ed $a \in \mathbb{A}$. Poiché abbiamo supposto che $\mathbb{A}_{(0)}$ abbia caratteristica 0, l'estensione $\mathbb{B}_{(0)}$ di $\mathbb{A}_{(0)}$ è separabile. Essendo dunque $\mathbb{B}_{(0)}$ algebrica, separabile e finita, esiste un elemento primitivo $b \in \mathbb{B}_{(0)}$ tale che $\mathbb{B}_{(0)} = \mathbb{A}_{(0)}[b]$. Poiché b si può scivere come una frazione con denominatore in $\mathbb{A} \setminus 0$ e numeratore in $\mathbb{B}$, possiamo scegliere un elemento primitivo b in $\mathbb{B}$.

Sia (12.3.5) la sua equazione minima e $\Bbbk$ un'estensione di $\mathbb{B}_{(0)}$ in cui la (12.3.5) ammetta d radici distinte. Siano σ_i, per $i = 1, \ldots, d$, i corrispondenti $\mathbb{A}_{(0)}$-automorfismi di $\Bbbk$ che permutano le radici, e poniamo $\sigma_i(b) = b_i$, con $b_1 = b$. Sia $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (b_i - b_j)$ il discriminante del polinomio minimo di b. Ricordiamo che esso è uguale, a meno del segno, al determinante della matrice

$$\begin{pmatrix}
1 & a_1 & \cdots & a_{d-1} & a_d & & & \\
 & 1 & a_1 & \cdots & a_{d-1} & a_d & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\
 & & \dots & 1 & a_1 & \cdots & a_{d-1} & a_d \\
d & (d-1)a_1 & \dots & 2a_{d-2} & a_{d-1} & & & \\
 & d & (d-1)a_1 & \dots & 2a_{d-2} & a_{d-1} & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\
 & & & d & (d-1)a_1 & \dots & 2a_{d-2} & a_{d-1}
\end{pmatrix}$$

e quindi è un elemento di $\mathbb{A}$.

Un elemento c della chiusura integrale $\tilde{\mathbb{B}}$ di $\mathbb{B}$ nel suo campo delle frazioni si può scrivere nella forma $c = \alpha_0 + \alpha_1 b + \cdots + \alpha_{d-1} b^{d-1}$ con $\alpha_i \in \mathbb{A}_{(0)}$. Applicando gli automorfismi σ_i, otteniamo, per i coefficienti $\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1} \in \mathbb{A}_{(0)}$, un sistema lineare:

$$c_i = \sigma_i(c) = \alpha_0 + \alpha_1 b_i + \cdots + \alpha_{d-1} b_i^{d-1}, \quad \text{per } i = 1, \dots, d.$$

Poiché il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix}
1 & b_1 & b_1^2 & \dots & b_1^d \\
1 & b_2 & b_2^2 & \dots & b_2^d \\
1 & b_3 & b_3^2 & \dots & b_3^d \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
1 & b_d & b_d^2 & \dots & b_d^d
\end{pmatrix}$$

è il determinante di Vandermonde $\Delta = \prod_{i<j}(b_i - b_j)$, per la regola di Cramer ciascun α_j è un quoziente con denominatore Δ e numeratore un elemento di $\mathbb{k}$ intero su $\mathbb{A}$, in quanto somma di prodotti di elementi interi su $\mathbb{A}$. Quindi i prodotti $\Delta \alpha_j \in \mathbb{A}_{(0)}$, sono interi su $\mathbb{A}$ e quindi appartengono ad $\mathbb{A}$, perché $\mathbb{A}$ è normale. Abbiamo ottenuto quindi che $\Delta\, c \in \mathbb{B}$, cioè $\Delta \cdot \tilde{\mathbb{B}} \subset \mathbb{B}$. Ne segue che anche $\tilde{\mathbb{B}}$ è un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito. □

4. Ideali associati ad un modulo

DEFINIZIONE XII.4.1. Sia $\mathbb{A}$ un anello commutativo e unitario e sia $\mathbf{M}$ un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito. Una *presentazione finita* di $\mathbb{M}$ è una successione esatta

$$\mathbb{A}^p \xrightarrow{\lambda} \mathbb{A}^q \xrightarrow{\alpha} \mathbf{M} \longrightarrow 0 \tag{12.4.1}$$

ove p, q sono interi non negativi e α, λ omomorfismi di $\mathbb{A}$-moduli.

L'omomorfismo λ è un omomorfismo di anelli liberi ed è quindi rappresentato da una matrice

$$\lambda = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,p-1} & a_{q,p} \end{pmatrix}. \tag{12.4.2}$$

Definizione XII.4.2. Data una matrice (12.4.2) a coefficienti in $\mathbb{A}$, associamo ad essa i suoi *ideali di minori*

$$\sigma'_k(\lambda) = \begin{cases} \text{ideale generato dai minori di ordine } q-k \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{se } q-p \leq k < q, \\ 0 \quad \text{se } k < q-p, \\ \mathbb{A} \quad \text{se } k \geq q. \end{cases} \tag{12.4.3}$$

Lemma XII.4.3. *Sia $\mathbb{A}$ un anello commutativo e unitario e sia $\mathbf{M}$ un $\mathbb{A}$-modulo di tipo finito. Se* (12.4.1) *e*

$$\mathbb{A}^{p'} \xrightarrow{\lambda'} \mathbb{A}^{q'} \xrightarrow{\alpha'} \mathbf{M} \longrightarrow 0$$

è un'altra presentazione di $\mathbf{M}$, allora $\sigma'_k(\lambda') = \sigma'_k(\lambda)$ per ogni intero k.

Definizione XII.4.4. Sia $\mathbb{A}$ un anello commutativo e unitario ed $\mathbf{M}$ un $\mathbb{A}$-modulo unitario. Indichiamo con $\sigma_k(\mathbf{M})$ l'ideale di $\mathbb{A}$ formato da tutti gli $a \in \mathbb{A}$ tale che $a \cdot \mathbf{M}$ sia contenuto in un sotto-$\mathbb{A}$-modulo di $\mathbf{M}$ generato da k-elementi.

Lemma XII.4.5. *Sia $\mathbf{M}$ un $\mathbb{A}$-modulo unitario, di tipo finito. Un ideale primo $\mathfrak{p}$ contiene $\sigma_k(\mathbf{M})$ se e soltanto se il numero minimo $g_{\mathbb{A}_\mathfrak{p}}(\mathbf{M})$ di generatori del localizzato $\mathbf{M}_\mathfrak{p}$, come $\mathbb{A}_\mathfrak{p}$ modulo, è $> k$.*

Se $\mathbf{M}$ è di presentazione finita, allora $\sigma'_k(\mathbf{M}) \subset \sigma_k(\mathbf{M})$ e $\sqrt{\sigma'_k(\mathbf{M})} = \sqrt{\sigma_k(\mathbf{M})}$.

5. Piattezza

Definizione XII.5.1. Un $\mathbb{A}$-modulo $\mathbf{M}$ si dice *piatto* se $(\mathbf{M} \otimes_{\mathbb{A}} *)$ è un *funtore esatto nella categoria degli* $\mathbf{A}$*-modulli.* Ciò significa che, se

$$\mathbf{M_1} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{M}_2 \xrightarrow{\lambda} \mathbf{M}_3 \tag{12.5.1}$$

è una successione esatta di $\mathbf{A}$-moduli e di $\mathbf{A}$-omomorfismi, allora anche

$$\mathbf{M} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbf{M_1} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\alpha} \mathbf{M} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbf{M}_2 \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\beta} \mathbf{M} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbf{M}_3 \tag{12.5.2}$$

è esatta.

Esempio XII.5.2. I moduli piatti sull'anello $\mathbb{Z}$ degli interi sono i gruppi abeliani privi di torsione, che non contengono cioè elementi non banali di ordine finito.

Ricordiamo che un $\mathbb{A}$-modulo $\mathbf{P}$ si dice *proiettivo* se, per ogni coppia $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ di $\mathbb{A}$-moduli ed ogni coppia di $\mathbb{A}$-omomorfismi $\alpha : \mathbf{M}_1 \to \mathbf{M}_2$ e $\beta : \mathbf{P} \to \mathbf{M}_2$ esiste un $\mathbb{A}$-omomorfismo $\gamma : \mathbf{P} \to \mathbf{M}_1$ che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathbf{P} \arrow[d, "\beta"] \\ \mathbf{M}_1 \arrow[r, "\alpha"'] & \mathbf{M}_2. \end{tikzcd} \tag{12.5.3}$$

Proposizione XII.5.3. *Gli $\mathbb{A}$-moduli liberi sono proiettivi e gli $\mathbb{A}$-moduli proiettivi sono piatti.*

Definizione XII.5.4. Un $\mathbb{A}$-modulo $\mathbf{M}$ si dice *fedelmente piatto* se, per ogni successione di $\mathbf{A}$-moduli (12.5.1), la (12.5.1) è esatta se e soltanto se la (12.5.2) è esatta.

Vale il criterio:

Proposizione XII.5.5. *Un $\mathbb{A}$-modulo piatto $\mathbf{M}$ è fedelmente piatto se e soltanto se soddisfa una delle due seguenti condizioni equivalenti:*

(a) $$\mathbf{M} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbf{N} \neq 0 \quad \textit{per ogni } \mathbb{A}\textit{-modulo } \mathbf{N} \neq 0.$$

(b) $$\mathbf{M} \big/ \mathfrak{m}\mathbf{M} \neq 0 \quad \textit{per ogni ideale massimale } \mathfrak{m} \textit{ di } \mathbb{A}.$$

6. Il funtore Tor

Sia $\mathbb{A}$ un anello commutativo e unitario.

Definizione XII.6.1. Sia $\mathbf{M}$ un $\mathbb{A}$-modulo. Una *risoluzione proiettiva* (risp. *libera*) di $\mathbf{M}$ è una successione esatta

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \mathbf{M}_{h+1} \xrightarrow{\alpha_{h+1}} \mathbf{M}_h \xrightarrow{\alpha_h} \mathbf{M}_{h-1} \longrightarrow \\ \cdots \longrightarrow \mathbf{M}_1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathbf{M}_0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{0} \end{aligned} \tag{12.6.1}$$

di $\mathbb{A}$-moduli ed $\mathbb{A}$-omomorfismi, in cui i moduli $\mathbf{M}_h$, per ogni intero non negativo h, siano proiettivi (risp. liberi).

Se il numero di interi non negativi h per cui $\mathbf{M}_h \neq 0$ è finito, diciamo che la (12.6.1) è una *risoluzione finita* e il più grande intero $h \geq 0$ per cui $\mathbf{M}_h \neq 0$ si dice la *lunghezza* della (12.6.1).

Se un modulo $\mathbf{M}$ ammette una risoluzione proiettiva finita, la minima lunghezza di una sua risoluzione proiettiva si dice la sua *dimensione proiettiva* e si indica con $\text{pd}(\mathbf{M})$. In caso contrario, diciamo che la dimensione proiettiva di $\mathbf{M}$) è infinita.

Proposizione XII.6.2. *Ogni $\mathbb{A}$-modulo ammette una risoluzione libera.*

Dimostrazione. Possiamo definire $\mathbf{M}_0$ come l'$\mathbb{A}$-modulo libero somma diretta $\bigoplus_{m \in S_0} \mathbb{A}_m$ di una copia di $\mathbb{A}$ per ogni elemento di un insieme di generatori S_0 di $\mathbb{M}$. Indicando con $[m]$ l'elemento di $\mathbf{M}_0$ che corrisponde ad $m \in S_0$, l'omomorfismo α_0 è caratterizzato da $\alpha_0([m]) = m$ per ogni

$m \in S_0$. In generale, se supponiamo $h \geq 1$ e che siano stati definiti $\mathbf{M}_j$ ed α_j per $0 \leq j < h$, definiamo $\mathbf{M}_h$ come il modulo libero $\bigoplus_{\mu \in S_h} \mathbb{A}_\mu$, ove S_h è un insieme di generatori di $\ker \alpha_{h-1}$, e, detto $[\mu]$ l'elemento di $\mathbf{M}_h$ corrispondente a $\mu \in S_h$, la α_h è caratterizzata da $\alpha_h([\mu]) = \mu$ per ogni $\mu \in S_h$. □

Definizione XII.6.3. Siano (f_h) e (g_h) due morfismi di complessi

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathbf{M}_{h+1} & \xrightarrow{\alpha_{h+1}} & \mathbf{M}_h & \xrightarrow{\alpha_h} & \mathbf{M}_{h-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & {\scriptstyle f_{h+1}}\big\downarrow{\scriptstyle g_{h+1}} & & {\scriptstyle f_h}\big\downarrow{\scriptstyle g_h} & & {\scriptstyle f_{h-1}}\big\downarrow{\scriptstyle g_{h-1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & \mathbf{N}_{h+1} & \xrightarrow{\beta_{h+1}} & \mathbf{N}_h & \xrightarrow{\beta_h} & \mathbf{N}_{h-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array} \tag{12.6.2}$$

di $\mathbb{A}$-moduli (supponiamo cioè che $\alpha_h, \beta_h, f_h, g_h$ siano morfismi di $\mathbb{A}$-moduli e che sia $\alpha_h \circ \alpha_{h+1} = 0$ e $\beta_h \circ \beta_{h+1} = 0$ ed $f_{h-1} \circ \alpha_h = \beta_h \circ f_h$, $g_{h-1} \circ \alpha_h = \beta_h \circ g_h$ per ogni intero h). Diciamo che (f_h) e (g_h) sono sono *omotopi* se esistono $\mathbb{A}$-omomorfismi $\eta_h : \mathbf{M}_h \to \mathbf{N}_{h+1}$ tali che

$$f_h - g_h = \eta_{h-1} \circ \alpha_h + \beta_{h+1} \circ \eta_h \quad \forall h \in \mathbb{Z}. \tag{12.6.3}$$

Definizione XII.6.4. Due complessi

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathbf{M}_{h+1} & \xrightarrow{\alpha_{h+1}} & \mathbf{M}_h & \xrightarrow{\alpha_h} & \mathbf{M}_{h-1} & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots & \longrightarrow & \mathbf{N}_{h+1} & \xrightarrow{\beta_{h+1}} & \mathbf{N}_h & \xrightarrow{\beta_h} & \mathbf{N}_{h-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array} \tag{12.6.4}$$

di $\mathbb{A}$-moduli si dicono *omotopicamente equivalenti* se esistono morfismi di complessi

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathbf{M}_{h+1} & \xrightarrow{\alpha_{h+1}} & \mathbf{M}_h & \xrightarrow{\alpha_h} & \mathbf{M}_{h-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & {\scriptstyle f_{h+1}}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle g_{h+1}} & & {\scriptstyle f_h}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle g_h} & & {\scriptstyle f_{h-1}}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle g_{h-1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & \mathbf{N}_{h+1} & \xrightarrow{\beta_{h+1}} & \mathbf{N}_h & \xrightarrow{\beta_h} & \mathbf{N}_{h-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array} \tag{12.6.5}$$

tali che sia $(f_h \circ g_h)$ che $(g_h \circ f_h)$ siano omotopi all'identità.

Abbiamo:

Proposizione XII.6.5. *Due qualsiasi risoluzioni proiettive di un $\mathbb{A}$-modulo $\mathbf{M}$ sono omotopicamente equivalenti.*

Se $\mathbf{N}$ è un altro $\mathbb{A}$-modulo e (12.6.1) è una risoluzione proiettiva di $\mathbf{M}$, possiamo considerare il complesso di $\mathbb{A}$-moduli ed $\mathbb{A}$-omomorfismi

$$\begin{array}{l} \cdots \to \mathbf{M}_{h+1} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbf{N} \xrightarrow{\alpha_h \otimes \mathrm{id}} \mathbf{M}_h \otimes_{\mathbb{A}} \mathbf{N} \xrightarrow{\alpha_{h-1} \otimes \mathrm{id}} \mathbf{M}_{h-1} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbf{N} \longrightarrow \\ \qquad \cdots \longrightarrow \mathbf{M}_1 \otimes_{\mathbb{A}} \mathbf{N} \xrightarrow{\alpha_0 \otimes \mathrm{id}} \mathbf{M}_0 \otimes_{\mathbb{A}} \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{0} \end{array} \tag{12.6.6}$$

Abbiamo

Proposizione XII.6.6. *Ogni $\mathbb{A}$-modulo $\mathbf{M}$ ammette una risoluzione proiettiva.*

I quozienti $(\ker(\alpha_h \otimes \mathrm{id} : \mathbf{M}_h \otimes_{\mathbb{A}} \mathbf{N} \to \mathbf{M}_{h-1} \otimes_{\mathbb{A}}))/((\alpha_{h+1} \otimes \mathrm{id})(\mathbf{M}_{h+1} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbf{N}))$ *dipendono, a meno di* $\mathbb{A}$*-isomorfismi, solo dal modulo* $\mathbf{M}$ *e dall'intero non negativo* h*, e non dalla risoluzione proiettiva scelta.*

Definizione XII.6.7. Siano $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ due $\mathbb{A}$-moduli.
Se (12.6.6) è una risoluzione proiettiva di $\mathbf{M}$, l'$\mathbb{A}$-modulo quoziente

$$\mathrm{Tor}_h(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \frac{\ker(\alpha_h \otimes \mathrm{id} : \mathbf{M}_{h+1} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbf{N} \to \mathbf{M}_h \otimes_{\mathbb{A}}))}{((\alpha_{h+1} \otimes \mathrm{id})(\mathbf{M}_{h+1} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbf{N}))} \tag{12.6.7}$$

si dice l'h-esimo gruppo di torsione della coppia $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$.

CAPITOLO 13

Appendice

1. Strutture complesse sugli spazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale reale. Una *struttura complessa* su V è un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineare $J : V \to V$ tale che $J^2 = -I$. Poiché J ha polinomio minimo $\mu_J(\lambda) = \lambda^2 + 1$, e quindi autovalori puramente immaginari $\pm i$, condizione necessaria affinché V ammetta una struttura complessa è che la sua dimensione reale sia pari.

Se V ha dimensione pari $2n$, fissata una base $e_1, \ldots, e_{2n}$, l'applicazione $\mathbb{R}$-lineare J associata, nella base assegnata, alla matrice :

$$[J] = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \tag{13.1.1}$$

definisce una struttura complessa su V, e qualsiasi struttura complessa su V si potrà rappresentare con una matrice della forma (13.1.1) in un'opportuna base di V.

Uno spazio vettoriale reale V con una struttura complessa J si può considerare uno spazio vettoriale complesso, definendo il prodotto per un numero compesso mediante

$$\alpha \cdot v = \operatorname{Re} \alpha \cdot v \, + \, \operatorname{Im} \alpha \cdot J(v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \,, \; \forall v \in V \,.$$

Viceversa, uno spazio vettoriale complesso W, di dimensione n, si può considerare come uno spazio vettoriale reale V di dimensione $2n$, per restrizione del campo degli scalari. La moltiplicazione per l'unità immaginaria i è allora un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare su V e definisce su di esso una struttura complessa J.

Le nozioni di spazio vettoriale complesso W e di spazio vettoriale reale V, dotato di una struttura complessa J, cioè di una coppia (V, J), sono equivalenti.

Siano $W_1 \simeq (V_1, J_1)$, $W_2 \simeq (V_2, J_2)$ spazi vettoriali complessi e sia $A : V_1 \to V_2$ un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare. Dire che A è $\mathbb{C}$-lineare equivale al fatto che A commuti con le strutture complesse, che cioè risulti commutativo il diagramma :

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "J_1"'] & V_2 \arrow[d, "J_2"] \\ V_1 \arrow[r, "A"'] & V_2 \,. \end{tikzcd}$$

In generale, data un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $A : V_1 \to V_2$, possiamo sempre decomporla, in un unico modo, nella somma $A = A' + A''$ di un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare $A' : V_1 \to V_2$ e di una anti-$\mathbb{C}$-lineare A''. La A'' soddisfa cioè

$$A''(\alpha \cdot v) = \bar{\alpha} \cdot A''(v), \quad \text{ovvero} \quad A'' \circ J_1 = -J_2 \circ A''.$$

Infatti l'applicazione $\varepsilon : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, V_2) \ni A \to -J_2 \circ A \circ J_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, V_2)$ è un'involuzione, i cui punti fissi sono le applicazioni $\mathbb{C}$-lineari, mentre le anti-$\mathbb{C}$-lineari sono caratterizzate da $\varepsilon(A) = -A$. Basta quindi porre:

$$A' = \frac{A - J_2 \circ A \circ J_1}{2}, \quad A'' = \frac{A + J_2 \circ A \circ J_1}{2}.$$

Questa decomposizione induce una decomposizione dell'algebra di Grassmann reale $\Lambda^*_{\mathbb{C}}(V)$ dei *tensori alternati covarianti* su V, a valori complessi.

Prima di descrivere questa decomposizione, richiamiamo brevemente alcune definizioni e proprietà dell'algebra di Grassmann complessa di uno spazio vettoriale reale.

L'algebra di Grassmann complessa. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione m. Poniamo $\Lambda^0_{\mathbb{C}}(V) = \mathbb{C}$ e, per $h \geq 1$, indichiamo con $\Lambda^h_{\mathbb{C}}(V)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni $\mathbb{R}$-lineari alternate su V, a valori complessi. È cioè $\alpha \in \Lambda^h_{\mathbb{C}}(V)$ se

$$\alpha : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{h \text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{è } \mathbb{R}\text{-lineare in ogni variabile ed}$$
$$\alpha(v_1, \ldots, v_h) = 0 \quad \text{se } v_1, \ldots, v_h \text{ sono linearmente dipendenti.}$$

Consideriamo lo spazio vettoriale *graduato*

$$\Lambda^*_{\mathbb{C}}(V) = \bigoplus_{h=0}^{m} \Lambda^h_{\mathbb{C}}(V). \tag{13.1.2}$$

Gli elementi di $\Lambda^h_{\mathbb{C}}(V) \subset \Lambda^*_{\mathbb{C}}(V)$ si dicono *omogenei di grado h.*

L'*algebra di Grassmann complessa* di V si ottiene dotando lo spazio vettoriale $\Lambda^*_{\mathbb{C}}(V)$ di un prodotto interno ($\mathbb{R}$-bilineare)

$$\Lambda^*_{\mathbb{C}}(V) \times \Lambda^*_{\mathbb{C}}(V) \ni (\alpha, \beta) \to \alpha \wedge \beta \in \Lambda^*_{\mathbb{C}}(V). \tag{13.1.3}$$

Poiché in particolare (13.1.3) gode della proprietà distributiva, il prodotto di due elementi qualsiasi di $\Lambda^*_{\mathbb{C}}(V)$ è la somma dei prodotti delle loro componenti omogenee. Basterà dunque definirlo per le coppie di elementi omogenei. Il prodotto di un elemento a di $\Lambda^0_{\mathbb{C}}(V) = \mathbb{C}$ per un qualsiasi elemento α di $\Lambda^*_{\mathbb{C}}(V)$ è semplicemente il prodotto $a \cdot \alpha$ dello scalare a per la forma α. Su una coppia di elementi α, β, omogenei di grado positivo è definito da

(13.1.4)
$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \ldots, v_{h+k}) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_{h+k} \\ \sigma_1 < \cdots < \sigma_h \\ \sigma_{h+1} < \cdots < \sigma_{h+k}}} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_h}) \cdot \beta(v_{\sigma_{h+1}}, \ldots, v_{\sigma_{h+k}})$$
$$\text{se } \alpha \in \Lambda^h_{\mathbb{C}}(V),\ \beta \in \Lambda^k_{\mathbb{C}}(V),$$

ove $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ è la segnatura della permutazione σ. Il prodotto (13.1.3) si dice *prodotto esterno.*

Osserviamo che $\Lambda^*_{\mathbb{C}}(V)$ ha dimensione complessa 2^m e che, per ogni $h = 0, 1, \ldots, m$, $\Lambda^h_{\mathbb{C}}(V)$ è un suo sottospazio complesso di dimensione $\binom{m}{h}$.

Il prodotto esterno è associativo e non è commutativo se $m > 1$. Per gli elementi omogenei vale la formula di commutazione:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{h+k} \beta \wedge \alpha \quad \text{se} \quad \alpha \in \Lambda^h_{\mathbb{C}}(V)\,, \quad \beta \in \Lambda^k_{\mathbb{C}}(V)\,. \tag{13.1.5}$$

In particolare $\alpha \wedge \alpha = 0$ se tutte le componenti non nulle di α hanno grado dispari.

Gli elementi di $\Lambda^*_{\mathbb{C}}(V)$ definiscono, per estensione del campo degli scalari, forme $\mathbb{C}$-lineari alternate sulla complessificazione $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ di V. In particolare, $\Lambda^1_{\mathbb{C}}(V)$ si identifica con lo spazio $V^*_{\mathbb{C}}$ delle forme $\mathbb{C}$-lineari su $V_{\mathbb{C}}$ e $\Lambda^h_{\mathbb{C}}(V) \simeq \Lambda^h(V_{\mathbb{C}}) = \underbrace{V^*_{\mathbb{C}} \wedge \cdots \wedge V^*_{\mathbb{C}}}_{h \text{ volte}}$.

Vale il:

Lemma XIII.1.1. *Siano $0 \neq \xi \in \Lambda^1_{\mathbb{C}}(V) = V^*_{\mathbb{C}}$ un covettore non nullo ed $\alpha \in \Lambda^*_{\mathbb{C}}(V)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché si possa trovare $\beta \in \Lambda^*_{\mathbb{C}}(V)$ tale che $\alpha = \xi \wedge \beta$ è che $\xi \wedge \alpha = 0$. Se ξ è un covettore non nullo, abbiamo una successione esatta di spazi vettoriali di dimensione finita e di applicazioni lineari:*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} = \Lambda^0_{\mathbb{C}}(V) & \xrightarrow{\xi\wedge} & \Lambda^1_{\mathbb{C}}(V) & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots & \longrightarrow & \Lambda^h_{\mathbb{C}}(V) & \xrightarrow{\xi\wedge} & \Lambda^{h+1}_{\mathbb{C}}(V) & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \cdots & \longrightarrow & \Lambda^m_{\mathbb{C}}(V) \longrightarrow 0\,. \end{array} \quad \square$$

Abbiamo ancora:

Lemma XIII.1.2. *Sia $A : V \to V$ un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare. Allora, per ogni h positivo, la:*

$$\wedge^h(A)(\alpha)(v_1, \ldots, v_h) = \sum_{j=1}^{h} \alpha(v_1, \ldots, v_{j-1}, A(v_j), v_{j+1}, \ldots, v_h) \qquad \forall \alpha \in \Lambda^h_{\mathbb{C}}(V),\ \forall v_1, \ldots, v_h \in V$$

definisce un'applicazione lineare $\wedge^h(A) : \Lambda^h_{\mathbb{C}}(V) \to \Lambda^h_{\mathbb{C}}(V)$. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ sono gli autovalori di A, ripetuti con la loro molteplicità, allora $\{\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_h} \,|\, 1 \leq j_1 < \cdots < j_h \leq m\}$ è l'insieme degli autovalori di $\wedge^h(A)$.

Dimostrazione. L'applicazione $\wedge^1(A)$ è la trasposta della complessificazione dell'applicazione A, e quindi $\wedge^1(A) : \Lambda^1_{\mathbb{C}}(V) \simeq V^*_{\mathbb{C}} \xrightarrow{{}^tA} V^*_{\mathbb{C}} \simeq \Lambda^1_{\mathbb{C}}(V)$. Se $h > 0$, si verifica facilmente che $\wedge^h(A)(\alpha)(v_1, \ldots, v_h) = 0$ quando due dei vettori $v_1, \ldots, v_h$ sono uguali, e quindi $\wedge^h(A)$ definisce un'applicazione $\Lambda^h_{\mathbb{C}}(V) \to \Lambda^h_{\mathbb{C}}(V)$.

La trasposta della complessificazione dell'applicazione A ha gli stessi autovalori, ripetuti con le loro molteplicità algebriche, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ di A. Supponiamo che A sia semisemplice. Allora anche $\wedge^1(A)$ è semisemplice ed esiste quindi una base di autovettori $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \Lambda^1_{\mathbb{C}}(V)$ con $\wedge^1(A)(\alpha_j) = \lambda_j \alpha_j$ per $j = 1, \dots, m$. Allora gli elementi $\alpha_{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_h} \in \Lambda^h_{\mathbb{C}}(V)$, con $1 \leq j_1 < \cdots < j_h \leq m$, sono autovettori relativi agli autovalori $\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_h}$ di $\wedge^h(A)$, e formano una base di $\Lambda^h_{\mathbb{C}}(V)$. Questo dimostra la tesi nel caso di un endomorfismo A semisemplice.

Poiché gli endomorfismi semisemplici sono densi nello spazio degli endomorfismi, e gli autovalori di $\wedge^h(A)$ dipendono con continuità da A, l'affermazione resta vera anche quando A non è semisemplice. $\square$

Decomposizione dell'algebra di Grassmann complessa di uno spazio vettoriale dotato di una struttura complessa. Supponiamo ora che sullo spazio vettoriale reale V, di dimensione reale $m = 2n$, sia fissata una struttura complessa J. Fissato un intero p, con $0 \leq p \leq n$, indichiamo con:

$$T^{p,0}(V) = \{\alpha \in \Lambda^p_{\mathbb{C}}(V) \,|\, \alpha \text{ è multi-}\mathbb{C}\text{-lineare}\}$$
$$T^{0,p}(V) = \{\alpha \in \Lambda^p_{\mathbb{C}}(V) \,|\, \alpha \text{ è multi-}\mathbb{C}\text{-antilineare}\}\,.$$

Per ogni coppia di interi p, q con $0 \leq p\,,\ q \leq n$ poniamo poi:

$$T^{p,q}(V) = T^{p,0}(V) \wedge T^{0,q}(V) \subset \Lambda^{p+q}_{\mathbb{C}}(V)\,.$$

Abbiamo allora il:

Lemma XIII.1.3. *Per ogni $0 \leq h \leq 2n$ abbiamo la decomposizione:*

$$\Lambda^h_{\mathbb{C}}(V) = \bigoplus_{\substack{0 \leq p,q \leq n \\ p+q=h}} T^{p,q}(V)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione lineare:

$$\wedge^h(J) : \Lambda^h_{\mathbb{C}}(V) \to \Lambda^h_{\mathbb{C}}(V)$$

definita da:

$$\wedge^h(J)(\alpha)(v_1, \dots, v_h) = \sum_{j=1}^{h} \alpha(v_1, \dots, v_{j-1}, J(v_j), v_{j+1}, \dots, v_h)$$
$$\forall v_1, \dots, v_h \in V\,.$$

Essa ha autovalori:

$$\{(p-q) \cdot i \,|\, p, q \in \mathbb{N}\,,\ p+q = h\}\,.$$

Il sottospazio $T^{p,q}(V)$, con $p + q = h$, è l'autospazio corrispondente all'autovalore $(p-q) \cdot i$. $\square$

Fissiamo una base $e_1, \dots, e_{2n}$ di V in cui risulti:

$$\begin{cases} J(e_j) = e_{n+i} & \text{se} \quad 1 \leq j \leq n\,, \\ J(e_j) = -e_{i-n} & \text{se} \quad n < j \leq 2n\,. \end{cases} \tag{13.1.6}$$

Indichiamo con x^j (per $1 \leq j \leq 2n$) le componenti di un vettore x rispetto alla base $\{e_j\}$: $x = \sum_{j=1}^{2n} x^j e_j$. Le coordinate x^j sono funzioni lineari del vettore v. Porremo:

$$dx^j(v) = x^j \quad \text{se} \quad v = \sum_{j=1}^{2n} x^j e_j \in V\,. \tag{13.1.7}$$

I funzionali lineari $dx^1, \ldots, dx^n$ (differenziali delle coordinate) sono la *base duale* in V^* della base $e_1, \ldots, e_{2n}$ di V e definiscono anche una base della sua complessificazione $V^*_{\mathbb{C}} = \Lambda^1_{\mathbb{C}}(V)$. Per trasposizione otteniamo:

$$\begin{cases} {}^tJ(dx^j) = -dx^{n+j} & \text{se} \quad 1 \leq j \leq n\,, \\ {}^tJ(dx^j) = dx^{j-n} & \text{se} \quad n < j \leq 2n\,. \end{cases} \tag{13.1.8}$$

Quindi una base dello spazio vettoriale complesso delle forme $\mathbb{C}-lineari$ su (V, J) è data dalle forme

$$dz^j = dx^j - i\,[{}^tJ](dx^j) = dx^j + i dx^{n+j}\,, \quad \text{per} \quad 1 \leq j \leq n\,,$$

mentre una base dello spazio vettoriale complesso delle forme anti-$\mathbb{C}$-lineari su (V, J) è data dalle

$$d\bar{z}^j = dx^j - i\,dx^{n+j}\,, \quad \text{per} \quad 1 \leq j \leq n\,.$$

Osserviamo che $dz^1, \ldots, dz^n, d\bar{z}^1, \ldots, d\bar{z}^n$ è una base dello spazio vettoriale complesso $\Lambda^1_{\mathbb{C}}(V)$, ed abbiamo:

$$\begin{cases} dx^j = \frac{1}{2}\left(dz^j + d\bar{z}^j\right) & \text{se} \quad 1 \leq j \leq n\,, \\ dx^j = \frac{1}{2}\left(dz^{j-n} - d\bar{z}^{j-n}\right) & \text{se} \quad n < j \leq 2n\,. \end{cases} \tag{13.1.9}$$

Indichiamo con $\mathbf{S}_{h,k}$ l'insieme delle h-uple $(s_1, \ldots, s_h)$ di interi con $1 \leq s_j \leq k$ per $1 \leq j \leq h$, e, se $1 \leq h \leq k$, con $\mathbf{S}'_{h,k}$ il sottoinsieme formato dalle h-uple strettamente crescenti:

$$\mathbf{S}'_{h,k} = \{(s_1, \ldots, s_h) \,|\, s_j \in \mathbb{Z}\,,\ 1 \leq s_1 < \cdots < s_h \leq k\}\,.$$

Porremo ancora $\mathbf{S}_{0,k} = \mathbf{S}'_{0,k} = \{0\}$. Allora ogni elemento α di $\Lambda^*(V)$ si scrive in modo unico nella forma:

$$\alpha = \alpha_0 + \sum_{h=1}^{2n} \sum_{s \in \mathbf{S}'_{h,2n}} \alpha_{s_1,\ldots,s_h} dx^{s_1} \wedge \cdots \wedge dx^{s_h}\,,$$

$$\text{con} \quad \alpha_s = \alpha_{s_1,\ldots,s_h} \in \mathbb{C} \quad \forall s \in \cup_{0 \leq h \leq 2n} \mathbf{S}'_{h,2n}\,.$$

Utilizzando le (13.1.9), possiamo riscrivere la α, in modo unico, nella forma:

$$\alpha = \sum_{p,q=0}^{n} \underbrace{\sum_{\substack{s \in \mathbf{S}'_{p,n} \\ t \in \mathbf{S}'_{q,n}}} \alpha_{s,t} dz^{s_1}_1 \wedge \cdots \wedge dz^{s_p} \wedge d\bar{z}^{t_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{t_q}}_{\in T^{p,q}(V)}\,, \tag{13.1.10}$$

e questa ci dà la decomposizione di α rispetto alla *bigradazione* $\Lambda^*(V) = \bigoplus_{p,q=1}^{n} T^{p,q}(V)$.

2. La formula di Cauchy per funzioni di una variabile

In questo paragrafo dimostriamo alcuni risultati della teoria delle funzioni di una variabile complessa che utilizzeremo nei paragrafi successivi.

Teorema XIII.2.1 (La formula di Cauchy-Martinelli). *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{C}$, con frontiera di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti. Allora, per ogni funzione a valori complessi, di classe $\mathcal{C}^1$ sulla chiusura di Ω, vale la formula di rappresentazione*[1]*:*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{u(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\iint_{\Omega}\frac{\partial u(\zeta)/\partial\bar\zeta}{\zeta - z}d\zeta\wedge d\bar\zeta \quad \forall z\in\Omega\,. \tag{13.2.1}$$

Dimostrazione. Fissiamo un punto $z^0 \in \Omega$. Per ogni $0 < \epsilon < \operatorname{dist}(z^0, \partial\Omega)$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\iint_{\substack{z\in\Omega\\ |z-z^0|>\epsilon}}\frac{\partial u(\zeta)/\partial\bar\zeta}{\zeta - z}d\zeta\wedge d\bar\zeta &= -\iint_{\substack{z\in\Omega\\ |z-z^0|>\epsilon}} d\left(\frac{u(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right)\\ &= -\int_{\partial\Omega}\frac{u(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \int_{|z-z^0|=\epsilon}\frac{u(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\,.\end{aligned} \tag{13.2.2}$$

Operiamo, nell'ultimo integrale, il cambiamento di variabile $\zeta = z^0 + \epsilon e^{it}$. Poiché $d\zeta = i\epsilon e^{it}dt$ su $|z - z^0| = \epsilon$, otteniamo:

$$\int_{|z-z^0|=\epsilon}\frac{u(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = i\int_0^{2\pi} u\left(z^0 + \epsilon e^{it}\right)dt \longrightarrow 2\pi i\, u(z^0) \quad \text{per} \quad \epsilon \to 0^+\,.$$

Il primo membro della (13.2.2) converge, per $\epsilon \to 0^+$, all'integrale generalizzato a secondo addendo del secondo membro di (13.2.1). Otteniamo perciò la (13.2.1) dalla (13.2.2) passando al limite per $\epsilon \to 0^+$. □

Come conseguenza della (13.2.1) otteniamo la:

Proposizione XIII.2.2 (Formula integrale di Cauchy). *Sia Ω un aperto limitato del piano complesso, con frontiera di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)\cap\mathcal{C}^0(\bar\Omega)$, allora:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \qquad \forall z\in\Omega\,. \tag{13.2.3}$$

Dimostrazione. Se $f \in \mathcal{C}^1(\bar\Omega)$, la (13.2.3) è conseguenza diretta della (13.2.1). Per dimostrare la (13.2.3) è allora sufficiente osservare che, se z è un qualsiasi punto fissato di Ω, possiamo trovare un aperto ω di $\mathbb{C}$ con

[1] Osserviamo che il secondo addendo a secondo membro è un integrale singolare, che converge assolutamente perché l'ordine 1 con cui si annulla il denominatore $(\zeta - z)$ per $\zeta \to z$ è strettamente minore della dimensione reale 2 dello spazio $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

$z \in \omega \Subset \Omega$, con $\partial\omega$ regolare ed omotopa a $\partial\Omega$. Poiché $[f(\zeta)/(\zeta - z)]d\zeta$ è una forma differenziale chiusa in $\Omega \setminus \bar{\omega}$, è:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\,.$$

La dimostrazione è completa. □

Corollario XIII.2.3. *Sia U un aperto di $\mathbb{C}$. Le funzioni olomorfe in U sono di classe $\mathcal{C}^\infty$ in U, e tutte le loro derivate parziali rispetto alle coordinate sono ancora funzioni olomorfe in U.*

Dimostrazione. Per ogni aperto Ω con chiusura compatta in U e frontiera regolare, ed ogni $f \in \mathcal{O}(U)$, possiamo rappresentare la f in tutti i punti di Ω mediante la formula (13.2.3). Otteniamo allora la tesi derivando sotto il segno di integrale. □

Osservazione XIII.2.4. Se f è olomorfa in un aperto Ω di $\mathbb{C}$, abbiamo

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} = i^n \frac{\partial^{m+n} f}{\partial z^{m+n}} = i^n \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n+m} (f). \tag{13.2.4}$$

Per una funzione olomorfa f indicheremo quindi con $f^{(h)}$ la sua derivata parziale h-esima rispetto alla variabile reale x, ovvero la funzione che si ottiene applicando h volte ad f l'operatore differenziale $(\partial/\partial z)$.

Teorema XIII.2.5. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$, K un compatto contenuto in Ω ed U un intorno aperto relativamente compatto di K in Ω. Allora per ogni intero $h \geq 0$ esiste una costante positiva C_h tale che*

$$\sup_{z \in K} |f^{(h)}(z)| \leq C_h \sup_{z \in U} |f(z)| \quad \forall f \in \mathcal{O}(\Omega). \tag{13.2.5}$$

Dimostrazione. Sia V un intorno aperto di K in U, con frontiera regolare $\partial V \subset (U \setminus K)$. Per la formula di rappresentazione di Cauchy, derivando sotto il segno d'integrale otteniamo

$$f^{(h)}(z) = \frac{h!}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{h+1}} d\zeta, \qquad \forall z \in K,\ \forall f \in \mathcal{O}(\Omega). \tag{13.2.6}$$

Otteniamo la (13.2.5) con

$$C_h = \frac{h!}{2\pi} \int_{\partial V} \frac{ds(z)}{r^{h+1}(z)}$$

ove $r(z) = \operatorname{dist}(z, K)$ è una funzione continua e positiva di z sul compatto ∂V e $ds(z)$ è l'elemento di lunghezza sulla curva regolare ∂V. □

Corollario XIII.2.6. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ ed $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe in Ω, che converge ad una funzione f, uniformemente su tutti i compatti contenuti in Ω. Allora f è olomorfa in Ω.*

Otteniamo ancora il

Teorema XIII.2.7 (Stieltjes-Vitali). *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{C}$*. Se* $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ *è limitata su tutti i compatti di* Ω*, esiste una sottosuccessione* $\{f_{k_n}\}$ *di* $\{f_n\}$ *che converge, uniformemente sui compatti di* Ω*, ad una funzione* f *olomorfa in* Ω*.*

Dimostrazione. Per il Teorema XIII.2.5, le derivate prime e seconde delle f_n sono uniformemente limitate sui compatti di Ω. Per il teorema di Ascoli-Arzelà esiste quindi una sottosuccessione $\{f_{k_n}\}$ di $\{f_n\}$ che converge ad una funzione f, uniformemente con le derivate prime su tutti i compatti di Ω. Tale limite f è allora di classe $\mathcal{C}^1$ e soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann $\partial f/\partial \bar{z} = 0$, ed è quindi olomorfa in Ω. □

Definizione XIII.2.8. Il *raggio di convergenza* di una serie di potenze complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{13.2.7}$$

è

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty]. \tag{13.2.8}$$

Teorema XIII.2.9. *Se* (13.2.7) *ha raggio di convergenza* $r > 0$*, allora converge uniformemente su tutti i compatti contenuti nel disco aperto* $D_r = \{|z| < r\} \subset \mathbb{C}$ *e la somma definisce una funzione olomorfa su* D_r*.*

Sia viceversa Ω *un aperto di* $\mathbb{C}$ *ed* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$*. Se* $z_0 \in \Omega$*, allora la serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

ha raggio di convergenza maggiore o uguale di $\rho(z_0) = \operatorname{dist}(z_0, \complement\Omega)$ *e converge uniformemente ad* $f(z)$ *su tutti i compatti contenuti nel disco* $D_{\rho(z_0)}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho(z_0)$*.*

Dimostrazione. Sia $r > 0$ il raggio di convergenza della serie (13.2.7). Se $0 < \rho < r$, abbiamo, perun intero $n_0 > 0$,

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\rho} \quad \forall n \geq n_0, \quad \text{da cui} \quad |a_n| \leq C\frac{1}{\rho^n} \quad \forall n \geq 0.$$

per una costante $C > 0$. La serie (13.2.7) definisce quindi una serie di funzioni olomorfe che converge uniformemente su tutti i dischi compatti contenuti in D_r, perché maggiorata in norma da un multiplo della serie geometrica. Per il Corollario XIII.2.6 la sua somma è una funzione olomorfa su D_r.

Siano ora Ω un aperto di $\mathbb{C}$ ed f una funzione olomorfa su Ω. Fissiamo un punto $z_0 \in \Omega$ e siano $0 < \rho < r < \operatorname{dist}(z_0, \complement\Omega)$. Abbiamo allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Abbiamo

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n,$$

con convergenza uniforme per $|\zeta - z_0| = r$ e $|z - z_0| \leq \rho$. Sostituendo nell'integrale ed integrando per serie otteniamo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n$$

e la tesi segue dalla formula (13.2.6). □

Abbiamo inoltre:

Proposizione XIII.2.10. *Sia f è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$, con supporto compatto in $\mathbb{C}$. Definiamo*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \tag{13.2.9}$$

La u è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in $\mathbb{C}$, che verifica l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f \qquad in \quad \mathbb{C}. \tag{13.2.10}$$

Se, inoltre, la f ha supporto contenuto in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e soddisfa:

$$\iint_{\Omega} f g d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = 0 \qquad \forall g \in \mathcal{O}(\Omega), \tag{13.2.11}$$

allora la soluzione u di (13.2.10) *definita da* (13.2.9) *ha supporto compatto contenuto in Ω e inoltre:*

$$\operatorname{supp}(u) \subset \operatorname{supp}(f) \cup K \tag{13.2.12}$$

ove K è l'unione delle componenti connesse compatte di $\Omega \setminus \{f \neq 0\}$.

Dimostrazione. Mediante il cambiamento di variabili $\zeta \to \zeta + z$, otteniamo che

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{f(z + \zeta)}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \tag{13.2.13}$$

Poiché abbiamo supposto la f di classe $\mathcal{C}^1$, possiamo derivare la (13.2.13) sotto il segno d'integrale ed otteniamo allora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\partial f(z + \zeta)}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z} = f(z) \end{aligned}$$

per la (13.2.1) applicata ad un disco Ω che contenga al suo interno il supporto di f.

Supponiamo ora che, per un aperto Ω di $\mathbb{C}$, sia verificata la (13.2.11). Se $z \notin \Omega$, allora $\zeta \to 1/(\zeta - z)$ è una funzione olomorfa su Ω, e quindi

$u(z) = 0$. Poiché u è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(f)$, la tesi segue dalla proprietà della continuazione unica per le funzioni olomorfe. $\square$