CAPITOLO I

GRUPPI TOPOLOGICI

§1 Gruppi

Un *gruppo* è un insieme $\mathbf{G}$, che contiene un elemento distinto e e su cui è definita un'operazione binaria

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (a, b) \longrightarrow a \circ b \in \mathbf{G} \tag{1.1}$$

con le proprietà:

(i) $a \circ e = e \circ a = a \quad \forall a \in \mathbf{G}$ (e è l'elemento neutro di $\mathbf{G}$)
(ii) $\forall a \in \mathbf{G}\ \exists a^{-1} \in \mathbf{G}$ tale che $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ (esistenza dell'inverso);
(iii) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall a, b, c \in \mathbf{G}$ (proprietà associativa).

L'operazione di gruppo potrà a volte essere indicata scrivendo, invece che $a \circ b$, una qualunque delle espressioni: ab, $a \cdot b$, $a + b$, ... La notazione additiva sarà per lo più ristretta al caso di gruppi *commutativi* o *abeliani*, cioè nel caso in cui l'operazione binaria sia commutativa:

$$(iv) \quad a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in \mathbf{G} \quad \text{(proprietà commutativa).}$$

Un esempio fondamentale di gruppo si ottiene considerando l'insieme $\mathfrak{S}(E)$ di tutte le permutazioni, cioè di tutte le applicazioni bigettive, di un insieme E in sé, con l'operazione di composizione di applicazioni.

Se E contiene almento tre elementi, $\mathfrak{S}(E)$ non è commutativo.

Un altro esempio fondamentale è il *gruppo linerare* $\mathbf{GL}_{\Bbbk}(V)$ di uno spazio vettoriale V su un campo $\Bbbk$. Esso consiste di tutti gli automorfismi $\Bbbk$-lineari di V in sé, con l'operazione di composizione.

Dato un gruppo $\mathbf{G}$ e fissato un elemento a di $\mathbf{G}$, indichiamo con R_a, L_a e $\mathrm{ad}(a)$ le applicazioni bigettive di $\mathbf{G}$ in è definite da:

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_a &: \mathbf{G} \ni g \longrightarrow g \circ a \in \mathbf{G} && \text{(traslazione a destra)} \\ \mathrm{L}_a &: \mathbf{G} \ni g \longrightarrow a \circ g \in \mathbf{G} && \text{(traslazione a sinistra)} \\ \mathrm{ad}_a &: \mathbf{G} \ni g \longrightarrow a \circ g \circ a^{-1} \in \mathbf{G} && \text{(aggiunta)} \end{aligned}$$

Indicheremo nel seguito, per semplicità, per lo più con ab il prodotto di due elementi a e b di un gruppo $\mathbf{G}$, utilizzando "$\circ$" per indicare la composizione di applicazioni.

Se $\mathbf{G}$ è un gruppo, a un elemento di $\mathbf{G}$ e A un sottoinsieme di $\mathbf{G}$, scriveremo spesso per semplicità aA invece di $\mathrm{L}_a(A)$, Aa invece di $\mathrm{R}_a(A)$, aAa^{-1} invece di $\mathrm{ad}_a(A)$. Porremo ancora $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$ e, se B è un altro sottoinsieme di $\mathbf{G}$, indichiamo con $A\,B$ l'insieme $\{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$.

Si verifica facilmente che, per ogni coppia di elementi $a, b \in \mathbf{G}$, valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_a \circ \mathrm{R}_b &= \mathrm{R}_{ba} & \mathrm{L}_a \circ \mathrm{L}_b &= \mathrm{L}_{ab} \\ \mathrm{L}_a \circ \mathrm{R}_b &= \mathrm{R}_b \circ \mathrm{L}_a & \mathrm{ad}_a &= \mathrm{R}_{a^{-1}} \circ \mathrm{L}_a = \mathrm{L}_a \circ \mathrm{R}_{a^{-1}} \end{aligned}$$

Un sottoinsieme $\mathbf{H}$ di $\mathbf{G}$ è un suo *sottogruppo* se contiene e ed $a^{-1}b \in \mathbf{H}$ per ogni $a, b \in \mathbf{H}$. Scriviamo $\mathbf{H} < \mathbf{G}$ per indicare che $\mathbf{H}$ è un sottogruppo di $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H} \triangleleft \mathbf{G}$ per indicare che $\mathbf{H}$ è un sottogruppo *normale* di $\mathbf{G}$, cioè se $\mathbf{H} < \mathbf{G}$ ed inoltre $\mathrm{ad}_a(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ per ogni $a \in \mathbf{G}$.

Dati due gruppi $\mathbf{G}_1$ e $\mathbf{G}_2$, un'applicazione $\phi : \mathbf{G}_1 \longrightarrow \mathbf{G}_2$ è un *omomorfismo* se

$$\phi(a^{-1}b) = [\phi(a)]^{-1}\phi(b) \quad \forall a, b \in \mathbf{G}_1 .$$

Un *monomorfismo* è un omomorfismo iniettivo, un *epimoprfismo* un omomorfismo surgettivo e un *isomorfismo* un omomorfismo bigettivo.

Ricordiamo che $\ker\phi = \phi^{-1}(e) \triangleleft \mathbf{G}_1$ e $\mathrm{im}\,\phi = \phi(\mathbf{G}_1) < \mathbf{G}_2$.

Gli isomorfismi $\phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$ di un gruppo $\mathbf{G}$ in sé si dicono *automorfismi.* Gli automorfismi di $\mathbf{G}$ formano un gruppo $\mathrm{Aut}(\mathbf{G})$ rispetto al prodotto di composizione.

Se $\mathbf{G}$ è un gruppo ed E un insieme, un omomorfismo $\phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathfrak{S}(E)$ si dice una *rappresentazione* di $\mathbf{G}$ su E. Se ϕ è un monomorfismo, diciamo che la rappresentazione $\phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathfrak{S}(E)$ è *fedele.*

Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{k}$, un omomorfismo $\phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{k}}(V)$ si dice una *rappresentazione* $\mathbb{k}$*-lineare* di $\mathbf{G}$ su V.

Lemma 1.1 *Le applicazioni*

$$\begin{gathered} \mathrm{L} : \mathbf{G} \ni a \longrightarrow \mathrm{L}_a \in \mathfrak{S}(\mathbf{G}) \\ \mathrm{R} : \mathbf{G} \ni a \longrightarrow \mathrm{R}_{a^{-1}} \in \mathfrak{S}(\mathbf{G}) \end{gathered}$$

sono rappresentazioni fedeli del gruppo $\mathbf{G}$ *nel gruppo* $\mathfrak{S}(\mathbf{G})$ *delle applicazioni bigettive di* $\mathbf{G}$ *in sé.*

L'applicazione

$$\mathrm{ad} : \mathbf{G} \ni a \longrightarrow \mathrm{ad}(a) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{G})$$

è una rappresentazione di $\mathbf{G}$ *nel gruppo dei suoi automorfismi. Abbiamo:*

$$\ker \mathrm{ad} = \mathbf{Z}(\mathbf{G}) = \{a \in \mathbf{G} \mid ag = ga \ \forall g \in \mathbf{G}\}.$$

La rappresentazione $\mathrm{ad} : \mathbf{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{G})$ si dice la *rappresentazione aggiunta di* $\mathbf{G}$. Il suo nucleo $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ è il *centro* di $\mathbf{G}$ ed è il suo più grande sottogruppo abeliano normale.

§2 Definizione di gruppo topologico

Una topologia τ su un gruppo $\mathbf{G}$ è *compatibile con la struttura di gruppo* se l'applicazione

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g_1, g_2) \longrightarrow g_1^{-1} g_2 \in \mathbf{G}$$

è continua (su $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ si considera la topologia prodotto).

Ciò equivale al fatto che siano continue le due applicazioni

$$\mathbf{G}\times\mathbf{G}\ni(g_1,g_2)\longrightarrow g_1g_2\in\mathbf{G}\quad \text{e}\quad \mathbf{G}\ni g\longrightarrow g^{-1}\in\mathbf{G}.$$

Un *gruppo topologico* è un gruppo $\mathbf{G}$ su cui si sia fissata una topologia τ compatibile con la sua struttura di gruppo.

Lemma 2.1 *Se $\mathbf{G}$ è un gruppo topologico, allora per ogni $a\in\mathbf{G}$ le applicazioni R_a, L_a, ad_a sono omeomorfismi di $\mathbf{G}$ in sé.*

L'applicazione $r:\mathbf{G}\ni a\longrightarrow a^{-1}\in\mathbf{G}$ è un omeomorfismo di $\mathbf{G}$ in sé.

Se $\{e\}$ è chiuso, allora il centro $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ è chiuso in $\mathbf{G}$. Se $\mathbf{H}$ è un sottogruppo di $\mathbf{G}$, esso è un gruppo topologico con la topologia di sottospazio indotta da $\mathbf{G}$.

Corollario 2.2 *Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico e siano A,B,C,D sottoinsiemi di $\mathbf{G}$, con A aperto e B chiuso. Allora:*

(*i*) $\overline{C^{-1}}=\left(\bar{C}\right)^{-1}$;
(*ii*) $\overline{a\,C\,b}=a\,\bar{C}\,b$;
(*iii*) CA e AC *sono aperti*;
(*iv*) aBb *è chiuso per ogni* $a,b\in\mathbf{G}$;
(*v*) $\bar{C}\,\bar{D}\subset\overline{C\,D}$.

Osservazione La topologia discreta e la topologia indiscreta sono entrambe compatibili con la struttura di gruppo di un qualsiasi gruppo $\mathbf{G}$. Quindi ogni gruppo può essere considerato come gruppo topologico.

Un gruppo topologico con la topologia discreta si dice un *gruppo discreto*.

§3 Il gruppo degli omeomorfismi di uno spazio topologico

L'insieme $\mathfrak{S}_\tau(X)$ di tutti gli omeomorfismi di uno spazio topologico $\mathbf{X}=(X,\tau_X)$ in sé è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni. Consideriamo su $\mathfrak{S}_\tau(X)$ la topologia $\tilde{\tau}_X$ che ha come prebase $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ degli aperti gli insiemi

$$\mathrm{U}(K,A)=\{\phi\in\mathfrak{S}_\tau(X)\,|\,\phi(K)\subset A\}\quad\text{e}\quad \mathrm{U}^{-1}(K,A)=\{\phi\in\mathfrak{S}_\tau(X)\,|\,\phi^{-1}(K)\subset A\}$$

al variare di K tra i compatti e di A tra gli aperti di $\mathbf{X}$.

Si ottiene una prebase della stessa topologia di $\mathfrak{S}_\tau(X)$ se si fa variare A in una prebase degli aperti di $\mathbf{X}$.

Teorema 3.1 *Se $\mathbf{X}$ è uno spazio di Hausdorff localmente compatto, allora $\mathfrak{S}_\tau(X)$, con la topologia $\tilde{\tau}_X$, è un gruppo topologico.*

Dim. Chiaramente la $\mathfrak{S}_\tau(X)\ni\phi\longrightarrow\phi^{-1}\in\mathfrak{S}_\tau(X)$ è continua perché scambia tra loro gli aperti $\mathrm{U}(K,A)$ e $\mathrm{U}^{-1}(K,A)$ della prebase $\boldsymbol{\mathcal{U}}$.

Dimostriamo che anche la

$$\lambda:\mathfrak{S}_\tau(X)\times\mathfrak{S}_\tau(X)\ni(\phi,\psi)\longrightarrow\phi\circ\psi\in\mathfrak{S}_\tau(X)$$

è continua. Siano K un compatto e A un aperto di $\mathbf{X}$ e siano ϕ_0, ψ_0 due omeomorfismi in $\mathfrak{S}_\tau(X)$ tali che $\phi_0(\psi_0(K))\subset A$. Poiché $\psi_0(K)$ è un compatto di $\mathbf{X}$ contenuto in A, possiamo trovare un intorno aperto relativamente compatto V di $\psi_0(K)$ tale che $\overline{V}\Subset A$. Allora, se $\psi\in\mathrm{U}(K,V)$ e $\phi\in\mathrm{U}(\overline{V},A)$, abbiamo $\phi\circ\psi(K)\subset A$.

Quindi $\lambda^{-1}(\mathrm{U}(K,A))\supset\mathrm{U}(\overline{V},A)\times\mathrm{U}(K,V)\ni(\phi_0,\psi_0)$ è un intorno aperto di ogni suo punto e quindi un aperto.

In modo analogo, se $(\phi_0 \circ \psi_0)^{-1}(K) \subset A$, scegliamo un intorno aperto V del compatto $\phi_0^{-1}(K)$ con $\overline{V} \Subset A$. Allora l'inclusione $\lambda^{-1}(\mathrm{U}^{-1}(K,A)) \supset \mathrm{U}^{-1}(K,V) \times \mathrm{U}^{-1}(\overline{V},A) \ni (\phi_0,\psi_0)$ dimostra che $\lambda^{-1}(\mathrm{U}^{-1}(K,A))$ è intorno di ogni suo punto e quindi aperto.

Pertanto λ è continua. □

Teorema 3.2 *Se* $\mathbf{X} = (X, \tau_X)$ *è uno spazio di Hausdorff localmente compatto e localmente connesso, allora la topologia* $\tilde{\tau}_X$ *su* $\mathfrak{S}_\tau(X)$ *coincide con la topologia compatta-aperta.*

Dim. Sarà sufficiente dimostrare che, se K è un compatto ed A un aperto di $\mathbf{X}$, l'insieme $\mathrm{U}^{-1}(K,A)$ è aperto nella topologia compatta-aperta di $\mathfrak{S}_\tau(X)$. Poiché per ipotesi gli aperti relativamente compatti di $\mathbf{X}$ formano una base di τ_X, possiamo limitarci a considerare il caso in cui A sia relativamente compatto in $\mathbf{X}$. Possiamo inoltre supporre che K abbia parte interna non vuota e connessa. Infatti, fissato ϕ_0 in $\mathrm{U}^{-1}(K,A)$, possiamo trovare un ricoprimento finito $\{U_1, ..., U_n\}$ di K mediante aperti connessi e relativamente compatti con $\phi_0^{-1}(\overline{U}_j) \subset A$ per ogni $j = 1, ..., n$. Allora

$$\phi_0 \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{U}^{-1}(\overline{U}_j, A) \subset \mathrm{U}^{-1}(K,A)$$

e sarà allora sufficiente verificare che ciascuno degli insiemi $\mathrm{U}^{-1}(\overline{U}_j, A)$ sia aperto in $\mathfrak{S}_\tau(X)$ per la topologia compatta-aperta.

Supponiamo quindi che A sia un aperto relativamente compatto di $\mathbf{X}$ e che K sia un compatto di $\mathbf{X}$ con parte interna connessa.

Sia ϕ_0 un elemento di $\mathrm{U}^{-1}(K,A)$; fissiamo un punto $x_0 \in A$ la cui immagine $\phi_0(x_0)$ mediante ϕ_0 sia un punto interno di K, e consideriamo l'aperto

$$W = \mathrm{U}(\{x_0\}, \overset{\circ}{K}) \cap \mathrm{U}(\overline{A} \setminus A, X \setminus K)$$

della topologia compatta-aperta di $\mathfrak{S}_\tau(X)$. L'immagine della frontiera $bA = \overline{A} \setminus A$ dell'aperto A mediante un omeomorfismo ϕ di W non interseca il compatto K; quindi $\phi^{-1}(K) \subset A \cup (X \setminus \overline{A})$.

Osserviamo che K è connesso perché ha parte interna connessa. Allora $\phi^{-1}(K)$ è connesso e quindi contenuto o in A o nel complementare $X \setminus \overline{A}$ della sua chiusura. Poiché $\phi \in \mathrm{U}(\{x_0\}, \overset{\circ}{K})$, otteniamo $\phi^{-1}(x_0) \in \phi^{-1}(K) \cap A$ e dunque $\phi^{-1}(K) \subset A$. Ciò dimostra che $W \subset \mathrm{U}^{-1}(K,A)$. Abbiamo dimostrato in questo modo che $\mathrm{U}^{-1}(K,A)$ è intorno di ogni suo punto e quindi aperto nella topologia compatta-aperta di $\mathfrak{S}_\tau(X)$. □

§4 Proprietà generali dei gruppi topologici

Teorema 4.1 *La componente connessa* $\mathbf{G}_e$ *dell'identità in un gruppo topologico* $\mathbf{G}$ *è un sottogruppo chiuso normale di* $\mathbf{G}$*. Analogamente, la componente connessa per archi dell'identità è un sottogruppo normale di* $\mathbf{G}$*.*

Dim. L'immagine di $\mathbf{G}_e \times \mathbf{G}_e$ mediante l'applicazione

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g,h) \longrightarrow gh^{-1} \in \mathbf{G}$$

è un connesso di $\mathbf{G}$ che contiene e e dunque è contenuta in $\mathbf{G}_e$. Ciò dimostra che $\mathbf{G}_e$ è un sottogruppo di $\mathbf{G}$. Se $a \in \mathbf{G}$, allora l'immagine di $\mathbf{G}_e$ mediante $\mathrm{ad}(a)$ è un connesso di $\mathbf{G}$ che contiene e ed è dunque contenuta in $\mathbf{G}_e$. Ciò dimostra che $\mathbf{G}_e$ è un sottogruppo normale.

La seconda affermazione del teorema si dimostra in modo analogo, in quanto immagini continue di sottoinsiemi connessi per archi sono ancora connesse per archi. $\square$

Teorema 4.2 *Un sottogruppo aperto* $\mathbf{H}$ *di* $\mathbf{G}$ *è anche chiuso.*

Dim. Se $\mathbf{H}$ è un sottogruppo aperto di $\mathbf{G}$, allora il suo complementare $\mathbf{G} \setminus \mathbf{H}$ è aperto in $\mathbf{G}$ perché unione di aperti:

$$\mathbf{G} \setminus \mathbf{H} = \bigcup \{\mathrm{R}_g(\mathbf{H}) \,|\, g \notin \mathbf{H}\}. \quad \square$$

Dato un sottogruppo $\mathbf{H}$ di un gruppo $\mathbf{G}$, indichiamo con $\mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$ l'insieme delle sue classi laterali sinistre[1]:

$$\mathbf{G}/_{\mathbf{H}} = \{g\mathbf{H} \,|\, g \in \mathbf{G}\}.$$

Esso è il quoziente di $\mathbf{G}$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in \mathbf{H}.$$

Se $\mathbf{G}$ è un gruppo topologico, consideriamo su $\mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$ la topologia quoziente.

Teorema 4.3 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo topologico e sia* $\mathbf{H}$ *un suo sottogruppo. Allora la proiezione nel quoziente*

$$\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$$

è un'applicazione aperta.

Dim. Se A è un aperto di $\mathbf{G}$, allora

$$\pi^{-1}\pi(A) = \bigcup \{\mathrm{R}_h(A) \,|\, h \in \mathbf{H}\}$$

è aperto perché unione di aperti. $\square$

Corollario 4.4 *Se* $\mathbf{H}$ *è un sottogruppo normale di un gruppo topologico* $\mathbf{G}$, *allora la topologia quoziente su* $\mathbf{G}\,/_{\mathbf{H}}$ *è compatibile con la sua struttura di gruppo.*

---

[1] Si possono in modo analogo considerare le classi laterali destre

$$_{\mathbf{H}}\backslash\mathbf{G} = \{\mathbf{H}g \,|\, g \in \mathbf{G}\}.$$

Se $r : \mathbf{G} \ni x \longrightarrow x^{-1} \in \mathbf{G}$ è l'inversione, abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xrightarrow{r} & \mathbf{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ _{\mathbf{H}}\backslash\mathbf{G} & \xrightarrow[\hat{r}]{} & \mathbf{G}/_{\mathbf{H}} \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono le proiezioni nel quoziente. La $\hat{r}$ è bigettiva e, nel caso in cui $\mathbf{G}$ sia un gruppo topologico, un omeomorfismo. Potremo quindi nella discussione seguente limitarci a considerare soltanto classi laterali sinistre, poiché i risultati ottenuti si applicheranno automaticamente anche alle classi laterali destre.

Dim. Sia $\pi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$ la proiezione naturale sul quoziente. Consideriamo il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} \times \mathbf{G} & \xrightarrow{\lambda} & \mathbf{G} \\ {\scriptstyle \pi\times\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbf{G}/_{\mathbf{H}} \times \mathbf{G}/_{\mathbf{H}} & \xrightarrow{\hat{\lambda}} & \mathbf{G}/_{\mathbf{H}} \end{array}$$

dove $\lambda(a,b) = a\,b^{-1}$ e $\hat{\lambda}(\pi(a), \pi(b)) = \pi(a)[\pi(b)]^{-1}$ per ogni $a, b \in \mathbf{G}$. Se A è un aperto di $\mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$, allora $\lambda^{-1}(\pi^{-1}(A))$ è aperto in $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ perché λ e π sono continue e quindi $\hat{\lambda}^{-1}(A) = (\pi \times \pi)(\lambda^{-1}(\pi^{-1}(A))$ è aperto in $\mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$ perché π è aperta per il Teorema 4.3 e perciò anche $\pi\times\pi$ è aperta perché prodotto cartesiano di applicazioni aperte. $\square$

Teorema 4.5 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo topologico e sia* $\mathbf{H}$ *un suo sottogruppo. Allora anche la sua chiusura* $\overline{\mathbf{H}}$ *è un sottogruppo di* $\mathbf{G}$. *Se* $\mathbf{H}$ *è normale, anche la sua chiusura* $\overline{\mathbf{H}}$ *è un sottogruppo normale di* $\mathbf{G}$.

Dim. Indichiamo con r l'applicazione $r : \mathbf{G} \ni g \longrightarrow g^{-1} \in \mathbf{G}$ che ad ogni elemento di $\mathbf{G}$ fa corrispondere il suo inverso. La r è un omeomorfismo e quindi $r(\overline{A}) = \overline{r(A)}$ per ogni sottoinsieme A di $\mathbf{G}$. Se $\mathbf{H}$ è un sottogruppo di $\mathbf{G}$, $r(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ ed otteniamo:

$$r(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{r(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}}.$$

Analogamente, poiché per ogni $g \in \mathbf{G}$ le applicazioni L_g e R_g sono omeomorfismi, abbiamo $\mathrm{L}_g(\overline{A}) = \overline{\mathrm{L}_g(A)}$ e $\mathrm{R}_g(\overline{A}) = \overline{\mathrm{R}_g(A)}$ per ogni sottoinsieme A di $\mathbf{G}$. Se $g \in \mathbf{H}$, poiché $\mathrm{L}_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ e $\mathrm{R}_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$, avremo:

$$\mathrm{L}_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{\mathrm{L}_g(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}}, \qquad \mathrm{R}_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{\mathrm{R}_g(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}} \qquad \forall g \in \mathbf{H}.$$

Queste relazioni implicano che

$$\mathrm{R}_g(\mathbf{H}) \subset \overline{\mathbf{H}}, \qquad \mathrm{L}_g(\mathbf{H}) \subset \overline{\mathbf{H}} \qquad \forall g \in \overline{\mathbf{H}},$$

e pertanto, passando alle chiusure,

$$\mathrm{L}_g(\overline{\mathbf{H}}) = \mathrm{R}_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{\mathbf{H}} \quad \forall g \in \overline{\mathbf{H}}.$$

Quindi $\overline{\mathbf{H}}$ è un sottogruppo di $\mathbf{G}$.

Poiché ad_g è, per ogni $g \in \mathbf{G}$ un omeomorfismo di $\mathbf{G}$ in é, abbiamo $\mathrm{ad}_g(\overline{A}) = \overline{\mathrm{ad}_g(A)}$ per ogni sottoinsieme A di $\mathbf{G}$. Dire che $\mathbf{H}$ è un sottogruppo normale di $\mathbf{G}$ equivale al fatto che $\mathrm{ad}_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ per ogni $g \in \mathbf{G}$. Se quindi $\mathbf{H}$ è normale, risulta:

$$\mathrm{ad}_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{\mathrm{ad}_g(\mathbf{H})} = \overline{H} \quad \forall g \in \mathbf{G}$$

e questa uguaglianza dimostra che anche $\overline{\mathbf{H}}$ è normale. $\square$

TEOREMA 4.6 *Se* $\mathbf{H}$ *è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico* $\mathbf{G}$*, allora* $\mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$ *è uno spazio regolare. In particolare,* $\mathbf{G}$ *è uno spazio regolare se e soltanto se è uno spazio*[2] T_1 *e ciò equivale al fatto che* $\{e\}$ *sia un chiuso di* $\mathbf{G}$*.*

DIM. Se $\mathbf{H}$ è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico $\mathbf{G}$, allora tutte le sue classi laterali sinistre sono chiusi di $\mathbf{G}$ e quindi $\mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$ è uno spazio topologico T_1.

Sia F un chiuso di $\mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$ e sia g un elemento di $\mathbf{G}$ tale che $\pi(g) \notin F$. Consideriamo l'applicazione continua

$$\lambda : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (a, b) \longrightarrow a^{-1}b \in \mathbf{G}.$$

Poiché $\pi^{-1}(F)$ è un chiuso che non contiene $\lambda(e, g)$, possiamo trovare un intorno aperto U_e di e e un intorno aperto U_g di g in $\mathbf{G}$ tali che

$$g_1^{-1}g_2 \notin \pi^{-1}(F) \quad \text{per ogni} \quad g_1 \in U_e,\ g_2 \in U_g.$$

Consideriamo gli insiemi:

$$\tilde{U}_g = \pi^{-1}(\pi(U_g)) \text{ e } \tilde{V} = \bigcup\{\mathrm{R}_a(U_e) \mid a \in \pi^{-1}(F)\} = \bigcup\{\mathrm{L}_a(\pi^{-1}(F)) \mid a \in U_e\}.$$

Poiché la proiezione π è un'applicazione aperta, il primo è un aperto saturo che contiene g e il secondo un aperto saturo che contiene $\pi^{-1}(F)$. Dimostriamo che $\tilde{U}_g \cap \tilde{V} = \emptyset$. Se così non fosse, potremmo trovare $g_1 \in U_g$, $g_2 \in \mathbf{H}$, $g_3 \in U_e$, $g_4 \in \pi^{-1}(F)$ tali che $g_1g_2 = g_3g_4$.

Da questa relazione troviamo $g_3^{-1}g_1 = g_4g_2^{-1} \in \pi^{-1}(F)$, che contraddice la scelta di U_e e U_g.

Ciò dimostra che $\mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$ soddisfa l'assioma T_3 e quindi è regolare. □

Un gruppo topologico $\mathbf{G}$ in cui $\{e\}$ sia un sottoinsieme chiuso si dice *separato*. Per il teorema precedente, questa condizione equivale al fatto che $\mathbf{G}$ sia uno spazio regolare.

Se $\mathbf{G}$ è un gruppo topologico, per il teorema I.3.4, $\overline{\{e\}}$ è un sottogruppo chiuso normale di $\mathbf{G}$ e quindi $\mathbf{G}/_{\overline{\{e\}}}$ è, con la topologia quoziente, un gruppo topologico separato. Esso si dice il *separato* di $\mathbf{G}$ e si indica con $\mathbf{G}_{\mathrm{sep}}$.

TEOREMA 4.7 *Se* $\mathbf{G}$ *è un gruppo topologico separato, allora la chiusura di un sottogruppo abeliano di* $\mathbf{G}$ *è ancora un sottogruppo abeliano di* $\mathbf{G}$*.*

DIM. Sia $\mathbf{A}$ un sottogruppo abeliano di $\mathbf{G}$. Fissato un elemento a di $\mathbf{G}$ l'applicazione $f_a : \mathbf{G} \ni x \longrightarrow \mathrm{ad}_a(x)\, x^{-1} = a\, x\, a^{-1}\, x^{-1} \in \mathbf{G}$ è continua. Inoltre, se $a \in \mathbf{A}$, abbiamo $f_a(\mathbf{A}) = \{e\}$, perché $\mathbf{A}$ è abeliano. Poiché $\mathbf{G}$ è separato, $\{e\}$ è chiuso e quindi $f_a^{-1}(e)$ è un chiuso che contiene $\mathbf{A}$. Questo dimostra che $a\,x = x\,a$ per ogni $x \in \overline{\mathbf{A}}$ ed ogni $a \in \mathbf{A}$, ma questo equivale al fatto che $f_a(x) = e$ per ogni $a \in \overline{\mathbf{A}}$ ed ogni $x \in \mathbf{A}$.

Quindi, poiché $\{e\}$ è un chiuso di $\mathbf{G}$, per ogni $a \in \overline{\mathbf{A}}$, l'insieme $f_a^{-1}(e)$ è un chiuso che contiene $\mathbf{A}$: perciò $f_a^{-1}(e) \supset \overline{\mathbf{A}}$ per ogni $a \in \overline{\mathbf{A}}$, cioè $\overline{\mathbf{A}}$ è abeliano. □

[2]Uno spazio topologico X soddisfa l'assioma di separazione T_1 se tutti i suoi sottoinsiemi finiti sono chiusi; soddisfa l'assioma di separazione T_3 se dati un punto a di X e un chiuso A di X che non contiene a, esistono aperti disgiunti U e V con $a \in U$ e $A \subset V$; è regolare se soddisfa entrambi gli assiomi T_1 e T_3.

Più in generale, abbiamo:

PROPOSIZIONE 4.8 *Se* $\mathbf{G}$ *è un gruppo separato ed* E *un sottoinsieme di* $\mathbf{G}$*, il centralizzatore di* E *in* $\mathbf{G}$*:*

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(E) = \{g \in \mathbf{G} \,|\, \mathrm{ad}_g(x) = x \ \forall x \in E\}$$

è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{G}$*.*

DIM. Infatti, con la notazione del teorema precedente:

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(E) = \bigcap_{x \in E} f_x^{-1}(e)$$

è chiuso perché intersezione di chiusi. □

PROPOSIZIONE 4.9 *Se* $\mathbf{H}$ *è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico* $\mathbf{G}$*, allora in normalizzatore di* $\mathbf{H}$ *in* $\mathbf{G}$

$$\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \{g \in \mathbf{G} \,|\, \mathrm{ad}_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}\}$$

è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{G}$*.*

DIM. Per ogni $g \in \mathbf{G}$ l'applicazione $\lambda_g : \mathbf{G} \ni x \to x\,g\,x^{-1} \in \mathbf{G}$ è continua. Quindi $\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \bigcap_{h \in \mathbf{H}} \lambda_h^{-1}(\mathbf{H})$ è chiuso perché intersezione di chiusi. □

PROPOSIZIONE 4.10 *Sia* $\mathbf{H}$ *un sottogruppo di un gruppo topologico* $\mathbf{G}$*. Allora:*

(1) $\mathbf{H}$ *è chiuso se e soltanto se è localmente chiuso in un punto;*
(2) $\mathbf{H}$ *è aperto se e soltanto se contiene un punto interno;*
(3) $\mathbf{H}$ *è discreto se e soltanto se ha un punto isolato.*

Un sottogruppo discreto di un gruppo separato è chiuso.

DIM. Ricordiamo che $\mathbf{H}$ è localmente chiuso in un suo punto h se esiste un intorno aperto U di h in $\mathbf{G}$ tale che $\mathbf{H} \cap U$ sia chiuso in U, cioè $\overline{\mathbf{H}} \cap U = \mathbf{H} \cap U$. Poiché le traslazioni a destra e a sinistra sono omeomorfismi, se $\mathbf{H}$ è localmente chiuso in h è anche localmente chiuso in $e = R_{h^{-1}}(h)$. Possiamo quindi trovare un intorno aperto U di e tale che $\mathbf{H} \cap U$ sia chiuso in U. Poiché anche $\mathbf{H} \cap U \cap U^{-1}$ è chiuso in $U \cap U^{-1}$, non è restrittivo supporre che $U = U^{-1}$. Sia ora $x \in \overline{\mathbf{H}}$. Allora $x\,U \cap \mathbf{H}$ non è vuoto: possiamo quindi fissare un elemento $y \in \mathbf{H}$ e un $g \in U$ tali che $xg = y$. Osserviamo che

$$y^{-1}x = L_{y^{-1}}(x) \in L_{y^{-1}}(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{L_{y^{-1}}(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}}$$

e quindi $y^{-1}x = g^{-1} \in \overline{\mathbf{H}} \cap U = \mathbf{H} \cap U$ implica che $x = y\,g^{-1} \in \mathbf{H}$. Abbiamo così dimostrato che $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ è chiuso.

Poiché ogni chiuso è localmente chiuso, la (1) è completamente dimostrata.

La (2) e la (3) sono immediate e l'osservazione finale segue dalla (1). □

TEOREMA 4.11 *Ogni intorno aperto dell'identità di un gruppo connesso è un insieme di generatori del gruppo.*

DIM. Sia U un intorno aperto dell'identità del gruppo topologico connesso $\mathbf{G}$. Poniamo $U^{-1} = \{g^{-1} \,|\, g \in U\}$. Allora anche $V = U \cap U^{-1}$ è un intorno aperto dell'identità di $\mathbf{G}$. Poniamo

$$V^n = \{g_1 ... g_n \,|\, g_1, ..., g_n \in V\}.$$

Allora

$$\mathbf{H} = \cup_{n=1}^{\infty} V^n$$

è un sottogruppo aperto di $\mathbf{G}$. Esso è anche chiuso per il Teorema I.4.2 e quindi coincide con $\mathbf{G}$ perché $\mathbf{G}$ è connesso. $\square$

Teorema 4.12 *Un gruppo topologico separato e localmente compatto è paracompatto, e quindi, in particolare, uno spazio topologico normale*[3].

Dim. Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico separato localmente compatto. Fissiamo un intorno aperto V di e con $V = V^{-1} = \{g^{-1} \mid g \in V\}$ e $\overline{V}$ compatto. Per ogni n, sia $\overline{V}^n = \{g_1 \cdots g_n \mid g_1, \ldots, g_n \in \overline{V}\}$. Esso è compatto perché immagine del compatto $\underbrace{\overline{V} \times \cdots \times \overline{V}}_{n \text{ copie}}$ mediante l'applicazione continua $(g_1, \ldots, g_n) \longrightarrow g_1 \cdots g_n$.

Poniamo $V^n = \{g_1 \cdots g_n \mid g_1, \ldots, g_n \in V\}$. Osserviamo poi che $\overline{V} \subset V^2$: infatti per ogni $g \in \overline{V}$ è $gV \cap V \neq \emptyset$; otteniamo perciò $gg_1 = g_2$ con $g_1, g_2 \in V$ e quindi $g = g_1^{-1} g_2 \in V^2$ perché $V^{-1} = V$.

Da questa relazione otteniamo che

$$\mathbf{G}_0 = \bigcup_n \overline{V}^n = \bigcup_n V^n .$$

Quindi $\mathbf{G}_0$ è un sottogruppo aperto, e quindi anche chiuso, di $\mathbf{G}$, ed è paracompatto perché localmente compatto e unione numerabile di compatti. Ne segue che $\mathbf{G}$, unione disgiunta delle classi laterali $g\mathbf{G}_0$ ($g \in \mathbf{G}$) di $\mathbf{G}_0$, è paracompatto. $\square$

Corollario 4.13 *Se $\mathbf{G}$ è un gruppo topologico separato e localmente compatto ed $\mathbf{H}$ un suo sottogruppo chiuso, allora lo spazio omogeneo $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ è separato, localmente compatto, paracompatto, ed è quindi uno spazio topologico normale.*

Dim. Lo spazio omogeneo $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ è regolare perché $\mathbf{H}$ è chiuso; inoltre è localmente compatto perché immagine di uno spazio localmente compatto mediante un'applicazione aperta. Infine, con la notazione introdotta nella dimostrazione del teorema precedente, osserviamo che le orbite $\mathbf{G}_0 \cdot p$ ($p \in \mathbf{G}/\mathbf{H}$) di $\mathbf{G}_0$ in $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ sono aperte e paracompatte (i sottoinsiemi $\overline{V}^n \cdot p$ formano una successione di compatti la cui unione è l'orbita $\mathbf{G}_0 \cdot p$) e quindi $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ è paracompatto perché unione disgiunta di spazi paracompatti. $\square$

§5 Omomorfismi di gruppi topologici

Teorema 5.1 *Sia $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ un omomorfismo di gruppi tra due gruppi topologici $\mathbf{G}_1$ e $\mathbf{G}_2$. Condizione necessaria e sufficiente affinché ϕ sia un'applicazione continua è che essa sia continua nell'identità di $\mathbf{G}_1$.*

Dim. La condizione è ovviamente necessaria. Dimostriamo la sufficienza. Sia $g \in \mathbf{G}_1$ e sia V un intorno aperto di $\phi(g)$ in $\mathbf{G}_2$. Allora $(\phi(g))^{-1}V$ è un intorno aperto dell'identità e_2 di $\mathbf{G}_2$ e possiamo quindi trovare un intorno aperto U dell'identità e_1 di $\mathbf{G}_1$ tale che $\phi(U) \subset V$.

Allora gU è un intorno aperto di g in $\mathbf{G}_1$ e risulta

$$\phi(gh) = \phi(g)\phi(h) \in \phi(g)\left((\phi(g))^{-1}V\right) = V \quad \forall h \in U ,$$

[3] Ricordiamo che uno spazio topologico X è paracompatto se è di Hausdorff ed ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento chiuso localmente finito. Uno spazio di Hausdorff localmente compatto è paracompatto se e soltanto se è unione disgiunta di sottospazi che sono ciascuno un'unione numerabile di compatti. Lo spazio topologico X dice normale se è di Hausdorff e chiusi disgiunti hanno intorni aperti disgiunti. Ogni spazio topologico paracompatto è normale.

onde $\phi(gU) \subset V$. □

Un *omomorfismo di gruppi topologici* è un'applicazione continua $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ che sia anche un omomorfismo di gruppi. Se la ϕ è inoltre un omeomorfismo di spazi topologici essa è anche un isomorfismo di gruppi e si dice un *isomorfismo topologico*. Un omomorfismo di gruppi topologici iniettivo (risp. surgettivo) si dice un *monomorfismo topologico* (risp. *epimorfismo topologico*).

Indichiamo con $\mathrm{Aut}_c(\mathbf{G})$ l'insieme degli isomorfismi topologici di un gruppo topologico $\mathbf{G}$ in sé. Si verifica facilmente che $\mathrm{Aut}_c(\mathbf{G})$ è un gruppo per l'operazione di composizione di applicazioni. Se $\mathbf{G}$ è localmente compatto, $\mathrm{Aut}_c(\mathbf{G})$ è un gruppo topologico con la topologia $\tilde{\tau}_{\mathbf{G}}$ definita nel §2; questa coincide con la topologia compatta-aperta se $\mathbf{G}$ è anche localmente connesso.

Teorema 5.2 *Un epimorfismo topologico $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ è un'applicazione aperta se e soltanto se il suo quoziente iniettivo*

$$\hat{\phi} : \mathbf{G}_1/_{\ker\phi} \to \mathbf{G}_2$$

è un isomorfismo topologico.

Dim. Ciò è conseguenza del fatto che la proiezione $\mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_1/_{\ker\phi}$ è un'applicazione aperta. □

Teorema 5.3 *Se $\mathbf{G}_1$ è un gruppo topologico compatto e $\mathbf{G}_2$ un gruppo topologico separato, ogni epimorfismo topologico $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ è un'applicazione aperta.*

Dim. Sia $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ un epimorfismo topologico. Poiché $\mathbf{G}_2$ è separato, $\ker\phi$ è un sottogruppo normale chiuso di $\mathbf{G}_1$. Ne segue, passando al quoziente iniettivo, che l'applicazione

$$\hat{\phi} : \mathbf{G}_1/_{\ker\phi} \to \mathbf{G}_2$$

è continua e bigettiva tra spazi compatti di Hausdorff e dunque un omeomorfismo. La tesi segue allora dal teorema precedente. □

Esempio 5.1 Sia $\mathbb{H}$ il corpo dei quaternioni, che possiamo identificare alla sottoalgebra dell'algebra delle matrici 2×2 a coefficienti complessi formata dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Le matrici di $\mathbb{H}$ con determinante 1 formano un gruppo moltiplicativo, che è un gruppo topologico per la topologia definita dall'identificazione standard con la sfera $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Esso è un gruppo topologico separato e compatto, che si indica con $\mathbf{SU}^*(2)$. Il suo sottogruppo $\{I, -I\}$ è un sottogruppo chiuso normale e il gruppo quoziente $\mathbf{SU}^*(2)/_{\{I,-I\}}$ è omeomorfo a $\mathbb{RP}^3$.

Teorema 5.4 *Se $\mathbf{H}$ è un sottogruppo normale di un gruppo topologico $\mathbf{G}$, il gruppo $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ è un gruppo topologico per la topologia quoziente e l'omomorfismo $\mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ è un omomorfismo di gruppi topologici. Inoltre:*

(1) *$\mathbf{G}/\mathbf{H}$ è separato se e soltanto se $\mathbf{H}$ è chiuso in $\mathbf{G}$;*
(2) *$\mathbf{G}/\mathbf{H}$ è discreto se e soltanto se $\mathbf{H}$ è aperto in $\mathbf{G}$.*
(3) *Se $\mathbf{H}$ è discreto, allora la proiezione nel quoziente $\mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ è un omeomorfismo locale.*

§6 Il gruppo fondamentale

Sia X è uno spazio topologico e $x_0 \in X$. I *laccetti* in X di punto iniziale x_0 sono le applicazioni continue $\gamma : I = [0,1] \to X$ con $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Indichiamo con $\mathcal{C}^0(I, \{0,1\}; X, \{x_0\})$ l'insieme di tutti i laccetti di punto iniziale x_0. Due laccetti $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{C}^0(I, \{0,1\}; X, \{x_0\})$ sono *equivalenti*, e scriveremo in questo caso $\gamma_0 \sim \gamma_1$, se esiste un'applicazione continua $F : I \times I \to X$ tale che

(*i*) $F(0,s) = F(1,s) = x_0$ per ogni $s \in I$;
(*ii*) $F(t,0) = \gamma_0(t)$ e $F(t,1) = \gamma_1(t)$ per ogni $t \in I$.

Definiamo il *prodotto* di due laccetti $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{C}^0(I, \{0,1\}; X, \{x_0\})$ come il laccetto:

$$\gamma_0 \cdot \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_1(2t-1) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \,. \end{cases} \tag{6.1}$$

Il *gruppo fondamentale* $\pi_1(X, x_0)$ di X con punto base x_0 è il quoziente

$$\mathcal{C}^0(I, \{0,1\}; X, \{x_0\}) / \sim \,,$$

con l'operazione di gruppo indotta, per passaggio al quoziente, dal prodotto di laccetti:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(I, \{0,1\}; X, \{x_0\}) \times \mathcal{C}^0(I, \{0,1\}; X, \{x_0\}) & \xrightarrow{(\gamma_0,\gamma_1) \to \gamma_0 \cdot \gamma_1} & \mathcal{C}^0(I, \{0,1\}; X, \{x_0\}) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(\xi,\eta) \to \xi \cdot \eta} & \pi_1(X, x_0) \,. \end{array}$$

Per i gruppi topologici vale il seguente:

Teorema 6.1 *Il gruppo fondamentale di un gruppo topologico è abeliano.*

Dim. Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico, in cui indichiamo con $a \circ b$ l'operazione del gruppo, e siano γ_0, γ_1 due laccetti in $\mathbf{G}$ con punto base e. Definiamo un'applicazione continua $\phi : I \times I \to \mathbf{G}$ ponendo

$$\phi(t_1, t_2) = \gamma_0(t_1) \circ \gamma_1(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in I = [0,1] \,.$$

Allora $(\gamma_0 \cdot \gamma_1)(t) = \phi(\lambda_0(t))$ e $(\gamma_1 \cdot \gamma_0)(t) = \phi(\lambda_1(t))$, dove:

$$\lambda_0(t) = \begin{cases} (2t, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (1, 2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \lambda_1(t) = \begin{cases} (0, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2t-1, 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \,. \end{cases}$$

Allora la

$$F(t,s) = \phi(s\lambda_1(t) + (1-s)\lambda_0(t))$$

è un'omotopia tra i laccetti $\gamma_0 \cdot \gamma_1$ e $\gamma_1 \cdot \gamma_0$. Ciò dimostra che $\pi_1(\mathbf{G}, e)$ è abeliano.

Se a è un qualsiasi altro elemento di $\mathbf{G}$, la traslazione a sinistra L_a definisce un'applicazione bigettiva di $\mathcal{C}(I, \{0,1\}; \mathbf{G}, \{e\})$ su $\mathcal{C}(I, \{0,1\}; \mathbf{G}, \{a\})$ che dà un isomorfismo di gruppi $L_{a*} : \pi_1(\mathbf{G}, e) \to \pi_1(\mathbf{G}, a)$. Quindi $\pi_1(\mathbf{G}, a)$ è abeliano per ogni punto base $a \in \mathbf{G}$. $\square$

§7 Caratteri

Un *carattere* di un gruppo topologico $\mathbf{G}$ è un omomorfismo continuo $\chi : \mathbf{G} \to \mathbf{S}^1$ di $\mathbf{G}$ nel gruppo moltiplicativo $\mathbf{S}^1$ dei numeri complessi di modulo 1. Indichiamo con $\mathbf{G}'$ l'insieme dei caratteri di $\mathbf{G}$. Esso è un gruppo abeliano rispetto all'operazione di moltiplicazione di funzioni: la funzione $\chi_{\mathbf{G}}$, costantemente uguale a 1 su $\mathbf{G}$, è l'identità di $\mathbf{G}'$.

Si verifica facilmente che vale il:

Teorema 7.1 *Se* $\mathbf{G}$ *è un gruppo topologico, anche il gruppo* $\mathbf{G}'$ *dei suoi caratteri è un gruppo topologico per la topologia compatta-aperta. Se* $\mathbf{G}$ *è separato, anche* $\mathbf{G}'$ *è separato.*

Teorema 7.2 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo topologico localmente compatto e separato. Allora anche* $\mathbf{G}'$ *è localmente compatto e separato. Inoltre, se* $\mathbf{G}$ *è anche a base numerabile, anche* $\mathbf{G}'$ *è a base numerabile. Se* $\mathbf{G}$ *è compatto e separato, allora* $\mathbf{G}'$ *è discreto. Se* $\mathbf{G}$ *è discreto, allora* $\mathbf{G}'$ *è compatto.*

Dim. Se $\mathbf{G}$ è compatto, il carattere costante $\chi_{\mathbf{G}}$ è l'unico elemento di $U(\mathbf{G}, \mathbf{S}_\epsilon) = \{\chi \in \mathbf{G}' \mid \mathrm{Arg}(\chi(g)) \in]-\epsilon, \epsilon[\}$ se $\epsilon < \pi/2$. Quindi $\{\chi_{\mathbf{G}}\}$ è aperto e $\mathbf{G}'$ ha la topologia discreta.

Se $\mathbf{G}$ è discreto, allora l'applicazione $\mathbf{G}' \ni \chi \to (\chi(g))_{g \in \mathbf{G}} \in \left[\mathbf{S}^1\right]^{\mathbf{G}}$ è un'immersione di $\mathbf{G}'$ in un sottospazio chiuso di $\left[\mathbf{S}^1\right]^{\mathbf{G}}$, e quindi $\mathbf{G}'$ è compatto in quanto sottospazio chiuso di uno spazio compatto. $\square$

CAPITOLO II

ESPONENZIALE DI MATRICI

§1 Spazi di matrici

Indichiamo con $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{K})$ lo spazio vettoriale di dimensione mn su $\mathbb{K}$ delle matrici a m righe ed n colonne a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$; in particolare $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$ è lo spazio vettoriale complesso delle matrici $m \times n$ a coefficienti complessi. Data

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$$

indichiamo con A^* la coniugata della sua trasposta:

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \dots & \bar{a}_{m1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \dots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(n \times m, \mathbb{C}).$$

La matrice A^* si dice l'*aggiunta* della A. Date due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ in $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$ poniamo

$$(A|B) = \operatorname{tr}(B^* A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \bar{b}_{ij} a_{ij}.$$

L'applicazione

$$\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}) \times \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}) \ni (A, B) \longrightarrow (A|B) \in \mathbb{C}$$

definisce su $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$ un prodotto scalare Hermitiano. Indichiamo con

$$|A| = \sqrt{(A|A)} \quad \text{per} \quad A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$$

la norma associata e consideriamo su $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$ la relativa distanza:

$$d(A, B) = |A - B| \text{ se } A, B \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}).$$

Teorema 1.1 *L'applicazione $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}) \ni A \longrightarrow A^* \in \mathfrak{M}(n \times m, \mathbb{C})$ è un'isometria anti-$\mathbb{C}$-lineare.*

L'applicazione

$$\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}) \ni A \to {}^tA \in \mathfrak{M}(n \times m, \mathbb{C})$$

è un'isometria $\mathbb{C}$*-lineare.*

La moltiplicazione righe per colonne definisce un'applicazione continua

$$\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}) \times \mathfrak{M}(n \times k, \mathbb{C}) \ni (A, B) \to AB \in \mathfrak{M}(m \times k, \mathbb{C})$$

e si ha inoltre

$$|AB| \leq |A| \cdot |B| \quad \forall A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}),\ B \in \mathfrak{M}(n \times k, \mathbb{C}).$$

DIM. La verifica delle prime due affermazioni è immediata.

Per verificare l'ultima, scriviamo

$$A = \begin{pmatrix} {}^tA_1 \\ \vdots \\ {}^tA_m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = (B^1, ..., B^k) \quad \text{con} \quad A_1, ..., A_m, B^1, ..., B^k \in \mathbb{C}^n.$$

Allora

$$|AB|^2 = \sum_{i,j} |(A_i|B^j)_{\mathbb{C}^n}|^2 \leq \sum_i |A_i|^2 \sum_j |B^j|^2 = |A|^2 \cdot |B|^2,$$

ove abbiamo indicato con $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{C}^n}$ e con $|\cdot|$ rispettivamente il prodotto scalare Hermitiano standard di $\mathbb{C}^n$ e la norma ad esso associata. Da questa diseguaglianza segue la tesi. □

LEMMA 1.2 *Siano* m, n *interi positivi. Data una matrice* $A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$ *poniamo*

$$\|A\| = \sup\{|Av| \ ; v \in \mathbb{C}^n,\ |v| = 1\} .$$

Allora

$$\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}) \ni A \to \|A\| \in \mathbb{R}$$

è una norma equivalente a $|\cdot|$.

Inoltre, se k *è un altro intero positivo e* $A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$, $B \in \mathfrak{M}(n \times k, \mathbb{C})$ *vale la diseguaglianza:*

$$(*) \qquad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

DIM. Poiché tutte le norme definite su uno spazio vettoriale di dimensione finita sono equivalenti, basta dimostrare che $\|\cdot\|$ è una norma su $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$. A questo scopo osserviamo innanzi tutto che, per il teorema di Weierstrass, poiché l'applicazione $S^{2n-1} \ni v \to |Av| \in \mathbb{R}$ è continua e $S^{2n-1} = \{v \in \mathbb{C}^n \,|\, |v| = 1\}$ è compatto, per ogni $A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$ possiamo trovare un vettore $v_A \in S^{2n-1}$ tale che

$$|Av_A| = \|A\|.$$

Da questo si deduce che $\|\cdot\|$ è ben definita e si ricava immediatamente che

$$\|A\| > 0 \Leftrightarrow 0 \neq A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}), \quad \text{e} \quad \|0\| = 0\,.$$

È ovvio che
$$\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\| \quad \forall\lambda \in \mathbb{C},\ \forall A \in \mathfrak{M}(m\times n,\mathbb{C}).$$
Per concludere, dimostriamo la subadditività. Fissate $A, B \in \mathfrak{M}(m\times n,\mathbb{C})$ abbiamo, per un vettore $v_{A+B} \in S^{2n-1}$:
$$\|A+B\| = |(A+B)v_{A+B}| \leq |Av_{A+B}| + |Bv_{A+B}| \leq \|A\| + \|B\|\,.$$
Siano $A \in \mathfrak{M}(m\times n,\mathbb{C})$, $B \in \mathfrak{M}(n\times k,\mathbb{C})$. Se $B=0$, la $(*)$ è banalmente vera. Se $B\neq 0$, allora possiamo trovare un vettore $w_{AB} \in \mathbb{C}^k$ tale che $|w_{AB}|=1$, $Bw_{AB}\neq 0$ e $\|AB\| = |(AB)w_{AB}|$. Risulta allora:
$$\|AB\| = |(AB)(w_{AB})| = \left|A\left(\frac{B(w_{AB})}{|B(w_{AB})|}\right)\right| \cdot |B(w_{AB})| \leq \|A\|\cdot\|B\|.$$
$\square$

Fissato un campo $\mathbb{k}$, nel seguito useremo le notazioni:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{gl}(n,\mathbb{k}) &= \mathfrak{M}(n\times n,\mathbb{k})\\
\mathfrak{sl}(n,\mathbb{k}) &= \{A \in \mathfrak{M}(n\times n,\mathbb{k}) \mid \mathrm{tr}\,(A) = 0\}\\
\mathbf{GL}(n,\mathbb{k}) &= \{a \in \mathfrak{M}(n\times n,\mathbb{k}) \mid \det a \neq 0\} \quad \text{(gruppo linerare su } \mathbb{k})\\
\mathbf{SL}(n,\mathbb{k}) &= \{a \in \mathfrak{M}(n\times n,\mathbb{k}) \mid \det a = 1\} \quad \text{(gruppo speciale linerare su } \mathbb{k})
\end{aligned}$$

Se $\mathbb{k}$ è uno dei campi $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, su ciascuno di questi insiemi consideriamo la topologia di sottospazio di $\mathfrak{M}(n\times n,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$.

Teorema 1.3 *Con le operazioni di prodotto righe per colonne di matrici,* $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ *e* $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ *sono gruppi topologici.*

Dim. Per il Lemma II.1.2, il prodotto
$$\mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \times \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \ni (a,b) \longrightarrow ab \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$$
è un'applicazione continua.

La topologia di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ coincide con la topologia Euclidea di $\mathbb{C}^{n^2}$. In particolare
$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \ni A \longrightarrow \det A \in \mathbb{C}$$
è un'applicazione continua.

Indichiamo con $M^i_j(A)$ il determinante della matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta sopprimendo dalla matrice $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ la j-esima riga e la i-esima colonna. Le applicazioni
$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \ni A \longrightarrow M^i_j(A) \in \mathbb{C},\ 1 \leq i,j \leq n$$
sono continue. È allora continua l'applicazione
$$\mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \ni a \longrightarrow (-1)^{i+j}(\det a)^{-1} M^i_j(a) \in \mathbb{C}$$
che associa a una matrice invertibile a il coefficiente sulla riga i-esima e la colonna j-esima della sua inversa a^{-1} e quindi l'applicazione
$$\mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \ni a \longrightarrow a^{-1} \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}).$$

Questo dimostra che $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ è un gruppo topologico.

I gruppi $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ sono gruppi topologici perché sottogruppi di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. $\square$

§2 L'applicazione esponenziale

Nella proposizione che segue descriviamo la *decomposizione di Wedderburn* di un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo di caratteristica zero.

Teorema 2.1 (Decomposizione di Wedderburn) *Sia $\Bbbk$ un campo di caratteristica zero. Per ogni $A \in \mathfrak{gl}(n,\Bbbk)$ sono univocamente determinate una $S \in \mathfrak{gl}(n,\Bbbk)$ semisemplice*[4] *e una $N \in \mathfrak{gl}(n,\Bbbk)$ nilpotente tali che*

$$A = S + N \qquad e \qquad [S,N] = SN - NS = 0\,.$$

Abbiamo $S, N \in \Bbbk[A]$.

Se $a \in \mathbf{GL}(n,\Bbbk)$, sono univocamente determinate una matrice semisemplice $s \in \mathbf{GL}(n,\Bbbk)$ e una matrice unipotente[5] *$\nu \in \mathbf{GL}(n,\Bbbk)$ tali che*

$$a = s + \nu \qquad e \qquad s\,\nu = \nu\, s\,.$$

Risulta $s, \nu \in \Bbbk[a]$.

Dim. Indichiamo con $\mathfrak{n}$ l'ideale di $\Bbbk[A]$ generato dai suoi elementi nilpotenti. Se $\mu_A(\lambda) = p_1^{k_1}(\lambda)\cdots p_m^{k_m}(\lambda)$ è la decomposizione del polinomio minimo $\mu_A(\lambda)$ di A in prodotto di potenze di primi distinti, indichiamo con $f(\lambda) = p_1(\lambda)\cdots p_m(\lambda)$ il prodotto dei primi distinti contenuti in $\mu_A(\lambda)$. Allora $\mathfrak{n}$ è l'ideale principale generato da $f(A) = p_1(A)\cdots p_m(A)$.

Dimostriamo per ricorrenza che per ogni intero positivo k è possibile determinare un $A_k \in \Bbbk[A]$ tale che

$$(*) \qquad A_k = A - N_k \quad \text{con} \quad N_k \in \mathfrak{n}\,, \quad f(A_k) \in \mathfrak{n}^k$$

Per $k = 1$ possiamo scegliere $A_1 = A$. Supponiamo di aver ottenuto $A_1, \ldots, A_k$ che soddisfino $(*)$, e cerchiamo A_{k+1} nella forma $A_{k+1} = A_k + T$, con $T \in \mathfrak{n}^k$. Utilizzando la formula di Taylor otteniamo:

$$\begin{aligned} f(A_{k+1}) &= f(A_k + T) \\ &= f(A_k) + f'(A_k)\,T \,+\, T_1 \end{aligned}$$

con $T_1 \in \mathfrak{n}^{2k} \subset \mathfrak{n}^{k+1}$ in quanto $f(A_{k+1}) - f(A_k) - f'(A_k)T = T^2 B$ per qualche matrice $B \in \mathfrak{gl}(n,\Bbbk)$. Osserviamo ora che poiché A_k differisce da A per una matrice nilpotente di $\Bbbk[A]$, il suo polinomio minimo $\mu_{A_k}(\lambda)$ ha gli stessi fattori primi di $\mu_A(\lambda)$. Poiché $f(\lambda)$ contiene solo fattori primi semplici, $f(\lambda)$ ed $f'(\lambda)$, e quindi

[4] Un endomorfismo S si dice semisemplice, o completamente decomponibile, se ogni sottospazio S-invariante ammette un complementare S-invariante. Un endomorfismo S è semisemplice se e soltanto se il suo polinomio minimo μ_S è prodotto di fattori primi semplici.

[5] Una matrice ν si dice unipotente se la matrice $\nu - e$ è nilpotente.

anche $\mu_{A_k}(\lambda)$ ed $f'(\lambda)$, sono primi tra loro. Quindi $f'(A_k)$ è invertibile. Otteniamo perciò la $(*)$ per A_{k+1} scegliendo

$$T = -\left(f'(A_k)\right)^{-1} f(A_k) \in \mathfrak{n}^k\,.$$

Poiché $\mathfrak{n}^n = 0$, otteniamo la decomposizione cercata con $S = A_n$, $N = N_n$. Infatti $f(A_n) \in \mathfrak{n}^n = \{0\}$ ci dice che il polinomio minimo μ_{A_n} di A_n è proprio $f(\lambda)$ e quindi A_n è semplice perché il suo polinomio minimo contiene solo fattori primi semplici.

Dimostriamo ora l'unicità. Se S', N' sono due endomorfismi, il primo semisemplice e il secondo nilpotente, con $A = S' + N'$ e $S'N' = N'S'$, osserviamo innanzi tutto che ciascuno di essi commuta con A e quindi anche con gli endomorfismi $S, N \in \mathbb{k}[A]$ trovati in precedenza. Poiché S ed S' sono due endomorfismi semisemplici che commutano tra loro anche $S - S'$ è semisemplice, e poiché N ed N' sono due endomorfismi nilpotenti che commutano tra loro anche $N - N'$ è nilpotente. Quindi $S - S' = N' - N$ è al tempo stesso semisemplice e nilpotente e quindi è nullo. Ciò dimostra l'unicità della decomposizione di Wedderburn.

Sia ora $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{k})$. Se scriviamo $\nu = e + N'$, con N' nilpotente, la decomposizione cercata è $a = s(e + N') = s + sN'$ e si ottiene quindi dalla $a = S + N$ ottenuta in precedenza osservando che in questo caso la parte semisemplice $S = s$ è invertibile e quindi si può definire $N' = s^{-1}N$. □

Se $A = S + N$ è una decomposizione di Wedderburn di $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$, l' endomorfismo semisemplice S si dice *parte semisemplice* di A e l'endomorfismo nilpotente N *parte nilpotente* di A. Se $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{k})$, ed $a = s\nu = S + N$ con $s, S \in \mathbb{k}[a]$ semisemplici, $N \in \mathbb{k}[a]$ nilpotente e $\nu \in \mathbb{k}[a]$ unipotente, chiamiamo $s = S$ la sua *parte semisemplice*, N la sua *parte nilpotente*, $\nu = I_n + S^{-1}N$ la sua *parte unipotente*.

Nel caso complesso, la decomposizione di Wedderburn si può ricavare dalla decomposizione di Jordan: in una matrice di Jordan la diagonale è la sua parte semisemplice nella decomposizione di Wedderburn. Mediante il coniugio possiamo quindi ricondurre la decomposizione di Wedderburn a quella di Jordan.

Definiamo innanzi tutto l'applicazione esponenziale per endomorfismi nilpotenti. Sia $\mathbb{k}$ un campo di caratteristica zero e sia $N \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ un endomorfismo nilpotente. Poiché $N^m = 0$ se $m \geq n$, la serie:

$$\exp(N) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{N^h}{h!}$$

si riduce alla somma finita $\displaystyle\sum_{h=0}^{n-1} \frac{N^h}{h!}$. Indichiamo con $\mathcal{N}(n, \mathbb{k})$ l'insieme delle matrici nilpotenti di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ e con $\boldsymbol{\mathcal{U}}(n, \mathbb{k})$ l'insieme delle matrici unipotenti di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{k})$. Abbiamo:

Teorema 2.2 *L'applicazione* $N \longrightarrow \exp(N)$ *è una trasformazione bigettiva di* $\mathcal{N}(n, \mathbb{k})$ *su* $\boldsymbol{\mathcal{U}}(n, \mathbb{k})$.

Dim. L'esponenziale di una matrice nilpotente N è l'endomorfismo $e + N'$ dove $N' = \displaystyle\sum_{h=1}^{n-1} \frac{N^h}{h!}$ è nilpotente perché somma di endomorfismi nilpotenti che commutano tra loro. Quindi $\exp(N) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(n, \mathbb{k})$ se $N \in \mathcal{N}(n, \mathbb{k})$.

Indichiamo con $p_n(\lambda)$ il polinomio $p_n(\lambda) = \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h/h! \in \Bbbk[\lambda]$ e con $q_n(\lambda)$ il polinomio $q_n(\lambda) = \sum_{h=0}^{n-2} (-1)^h \lambda^{h+1}/(h+1) \in \Bbbk[\lambda]$. Se $\Bbbk = \mathbb{R}$, essi sono i polinomi di Taylor di grado $(n-1)$ di e^λ e di $\log(1+\lambda)$ rispettivamente. Poiché $\mathbb{Q} \subset \Bbbk$, otteniamo perciò che

$$p_n(q_n(\lambda)) = 1 + \lambda + \lambda^n f(\lambda)$$

per un opportuno polinomio $f(\lambda) \in \Bbbk[\lambda]$. Ne segue che, data $\nu \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(n,\Bbbk)$, la $N = q_n(\nu - e)$ è una matrice nilpotente per cui $p_n(N) = \exp(N) = \nu$. Ciò dimostra la surgettività dell'applicazione esponenziale.

Dimostriamo ora l'unicità. Innanzi tutto osserviamo che, se $N_1, N_2 \in \mathcal{N}(n,\Bbbk)$ ed $\exp(N_1) = \exp(N_2)$, allora $\ker N_1 = \ker N_2$. Supponiamo infatti per assurdo che ciò non sia vero e che, ad esempio, si possa trovare un vettore $v \in \ker N_1 \setminus \ker N_2$. Poiché $\exp(N_2)(v) = \exp(N_1)(v) = v$, otteniamo che $\sum_{h=1}^{n-1} N_2^h(v)/h! = 0$. Avendo supposto che $w = N_2(v)$ non sia nullo, avremo $f(N_2)(w) = 0$ con $f(\lambda) = 1 + \sum_{h=1}^{n-2} \lambda^h/(h+1)! \in \Bbbk[\lambda]$. Ma allora il polinomio minimo $\mu_{N_2}(\lambda)$ di N_2 dovrebbe contenere un fattore primo di $f(\lambda)$, e quindi un fattore primo che non si annulla per $\lambda = 0$, contro l'ipotesi che N_2 fosse nilpotente.

Posto $W = \ker N_1 = \ker N_2$, possiamo considerare gli endomorfismi nilpotenti $\widehat{N}_1$ e $\widehat{N}_2$ definiti da N_1 ed N_2 su $\Bbbk^n/W$ per passaggio al quoziente. Da $\exp(\widehat{N}_1) = \exp(\widehat{N}_2)$ ricaviamo, ripetendo il ragionamento precedente, che $\ker \widehat{N}_1 = \ker \widehat{N}_2$, cioè $\ker N_1^2 = \ker N_2^2$.

Per ricorrenza otterremo allora che $\ker N_1^m = \ker N_2^m$ per ogni intero positivo m. Questo ci dice che per una scelta opportuna della base di $\Bbbk^n$, i due endomorfismi nilpotenti N_1 ed N_2 si possono mettere entrambi in forma triangolare superiore.

Indichiamo con $\mathfrak{n}_+(n,\Bbbk)$ l'insieme di tutte le matrici triangolari superiori nilpotenti. Esse formano un anello nilpotente e, posto

$$\mathfrak{n}_+^k(n,\Bbbk) = \{N_1 \cdots N_k \mid N_1, \ldots, N_k \in \mathfrak{n}_+(n,\Bbbk)\},$$

risulta $\mathfrak{n}_+^n(n,\Bbbk) = \{0\}$.

Se $N_1, N_2 \in \mathfrak{n}_+(n,\Bbbk)$ ed $N_1 - N_2 \in \mathfrak{n}_+^k(n,\mathbb{K})$, allora $N_1^m - N_2^m \in \mathfrak{n}_+^{k+m-1}(n,\mathbb{K})$. Infatti questo è vero se $m = 1$ e segue per ricorrenza dall'uguaglianza: $N_1^m - N_2^m = (N_1 - N_2)N_1^{m-1} + N_2(N_1^{m-1} - N_2^{m-1})$ per $m \geq 2$.

Se $\exp(N_1) = \exp(N_2)$ con $N_1, N_2 \in \mathfrak{n}_+(n,\mathbb{K})$, abbiamo

$$(\dagger) \qquad N_1 - N_2 = \sum_{h=2}^{n-1} (N_2^h - N_1^h)/h!$$

Se fosse $N_1 \neq N_2$, dovrebbe essere $N_1 - N_2 \in \mathfrak{n}_+^k(n,\mathbb{K}) \setminus \mathfrak{n}_+^{k+1}(n,\mathbb{K})$ per qualche $k < n$, ma questo contraddice la $(\dagger)$ perché allora il secondo membro apparterrebbe a $\mathfrak{n}_+^{k+1}(n,\mathbb{K})$. $\square$

Osservazione Dalla dimostrazione del teorema segue che, se f è un polinomio di $\Bbbk[\lambda]$ con $f'(0) \neq 0$, l'applicazione $\mathfrak{n}_+(n,\Bbbk) \ni N \longrightarrow f(N) \in \mathfrak{gl}(n,\Bbbk)$ è iniettiva.

Teorema 2.3 *Per ogni $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, la serie*

$$\exp A = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} A^h$$

converge in $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ *e definisce un elemento di* $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. *L'applicazione*

$$\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \ni A \longrightarrow \exp A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$$

è continua e surgettiva.

Se $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ *sono gli autovalori di* $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, *ripetuti con la loro molteplicità, allora gli autovalori di* $\exp A$ *sono* $e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}$. *In particolare vale la formula*

$$\det \exp A \;=\; e^{\mathrm{tr}\,(A)}.$$

Se $A\,, B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ *commutano tra loro, allora* $\exp(A+B) = \exp(A)\,\exp(B)$.

Se $a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ *e* $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, *allora* $a \circ \exp(A) \circ a^{-1} = \exp(a \circ A \circ a^{-1}$.

Dim. Osserviamo che la serie a termini positivi

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \|A^h\|$$

è maggiorata termine a termine dalla serie convergente, a termini di segno positivo,

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \|A\|^h$$

e quindi la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} A^h$$

è convergente in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, uniformemente sui sottoinsiemi compatti di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Poiché per ogni polinomio $p \in \mathbb{C}[z]$ l'applicazione $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \ni A \longrightarrow p(A) \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ è continua, la funzione $\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ è continua perché limite uniforme, su ogni compatto di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, di una successione di applicazioni continue.

Se $A, B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ e $AB = BA$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} (A+B)^h &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \sum_{h_1+h_2=h} \frac{h!}{h_1! h_2!} A^{h_1} B^{h_2} \\ &= \sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!} A^{h_1} \sum_{h_2=0}^{\infty} \frac{1}{h_2!} B^{h_2} \\ &= \exp(A)\,\exp(B)\,. \end{aligned}$$

Se $A = S + N$ è la decomposizione di Wedderburn della matrice $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, la

$$\exp(A) = \exp(S+N) = \exp(S)\exp(N)$$

dà la decomposizione dell'esponenziale di A nel prodotto della sua parte semisemplice e di una matrice unipotente che con essa commuta.

Osserviamo che, se $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ e $a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, allora

$$(aAa^{-1})^h \;=\; aA^h a^{-1} \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo quindi

$$\exp(aAa^{-1}) = a(\exp A)a^{-1} \quad \forall A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\ \forall a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}).$$

Questa formula ci dà la possibilità di calcolare l'esponenziale di una matrice semisemplice S utilizzando la sua diagonalizzazione: se $a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ e

$$a \circ S \circ a^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avremo

$$\exp(S) = \exp\left(a^{-1} \circ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \circ a\right) = a^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \circ a\,.$$

Chiaramente la matrice $\exp S$ è invertibile, ed ha determinante

$$\det\exp S = e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)} = e^{\mathrm{tr}\,(A)}.$$

La matrice $\exp N$ è unipotente ed ha dunque determinante 1. Quindi

$$\det\exp A = \det(\exp(S+N)) = \det(\exp S \cdot \exp N) = \det\exp S = e^{\mathrm{tr}\,(A)} \neq 0$$

ed $\exp A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$.

Dimostriamo ora che $\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ è surgettiva. Fissiamo un isomorfismo lineare a in $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, e siano $s, \nu \in \mathbb{C}[a]$ la sua parte semisemplice e la sua parte unipotente. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di s e sia $b \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ tale che

$$b \circ s \circ b^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}$$

con $n_1 + \cdots + n_k = n$. Poiché i λ_i sono diversi da zero, possiamo trovare numeri complessi $\mu_1, \ldots, \mu_k$ tali che $e^{\mu_i} = \lambda_i$. Allora la matrice

$$S = b^{-1} \circ \begin{pmatrix} e^{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\mu_k} \end{pmatrix} \circ b\,,$$

poiché la sua restrizione ad ogni autospazio di s è un multiplo dell'identità, appartiene a $\mathbb{C}[s]$, e quindi a $\mathbb{C}[a]$, ed $\exp(S) = s$. Sia N la matrice nilpotente tale che $\exp(N) = \nu$. Poiché $S, N \in \mathbb{C}[a]$, le due matrici commutano tra loro e quindi

$$\exp(S+N) = \exp(S)\exp(N) = s\,\nu = a\,.$$

La dimostrazione è completa. □

Osservazione Se $A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, allora $\exp(A) \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$, ma, se $n \geq 2$, l' applicazione $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{\exp} \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ non è surgettiva. Consideriamo ad esempio il caso $n = 2$. Allora

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\} .$$

Per una matrice triangolare superiore in $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ abbiamo:

$$\exp \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & \beta \cdot \phi(\alpha) \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \phi(\alpha) = \begin{cases} \frac{\sinh \alpha}{\alpha} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}$$

Consideriamo ora la matrice $a = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$. Supponiamo per assurdo vi sia $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ con $\exp(A) = a$. La A è coniugata di una triangolare superiore B, e $b = \exp(B)$ è allora una triangolare superiore coniugata ad a: poiché b è della forma $b = \begin{pmatrix} -1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ con $k \neq 0$, e $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$, questo non è possibile: dovrebbe essere infatti $\alpha = (2h + 1)\pi\, i$ con $h \in \mathbb{Z}$, e quindi $\phi(\alpha) = 0$ ed $\exp(B)$ sarebbe diagonale.

Osservazione Il determinante dell'esponenziale di una matrice reale è l'esponenziale della sua traccia e quindi è un numero reale positivo. Quindi l'esponenziale definisce un'applicazione di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ nel sottogruppo normale $\mathbf{GL}_+(n, \mathbb{R})$ delle matrici reali invertibili con determinante positivo.

Come nell'osservazione precedente, si può verificare che la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) \subset \mathbf{GL}_+(2, \mathbb{R})$ non è l'esponenziale di una matrice reale, e che quindi $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbf{GL}_+(n, \mathbb{R})$ non è surgettivo.

Osservazione Se $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ sono due matrici che non commutano tra loro: $[A, B] = A \circ B - B \circ A \neq 0$, in generale non vale la formula di addizione: è cioè in generale

$\exp(A + B) \neq \exp A \circ \exp B.$

Lemma 2.4 *Per ogni $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ l'applicazione*

$$\mathbb{R} \ni t \to \exp(tA) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

è differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ e

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^k \exp(tA) = A^k \exp(tA) = \exp(tA) A^k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dim. Se $t, s \in \mathbb{R}$ ed $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, abbiamo:

$$\exp((t + s)A) = \exp(tA) \exp(sA) = \exp(sA) \exp(tA).$$

Quindi vale la

$$\begin{aligned} \exp((t + s)A) &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s^h}{h!} A^h \exp(tA) \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s^h}{h!} \exp(tA) A^h \qquad \forall t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e la serie converge uniformemente in norma su ogni compatto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La tesi segue allora dalla formula di Taylor. $\square$

LEMMA 2.5 *Sia* $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ *tale che* $\exp(tA) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ *per ogni* $t \in \mathbb{R}$. *Allora* $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

DIM. Infatti, da $\exp(tA) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ ricaviamo, derivando rispetto a t in $t = 0$, che

$$A = \left.\frac{d\, \exp(tA)}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\exp(tA) - I}{t} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

perché $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ è chiuso in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. $\square$

§3 MATRICI HERMITIANE

Una matrice $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ si dice:

Hermitiana se $A^* = A$,

antihermitiana se $A^* = -A$.

Gli insiemi $\mathfrak{p}(n)$ delle matrici Hermitiane e $\mathfrak{u}(n)$ delle matrici antihermitiane formano sottospazi vettoriali reali di dimensione n^2 di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ (pensato come spazio vettoriale reale di dimensione $2n^2$).

Infatti $* : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ è un'involuzione $\mathbb{R}$-lineare, e quindi, poiché $\mathfrak{p}(n)$ e $\mathfrak{u}(n)$ sono gli autospazi corrispondenti agli autovalori 1 e -1, abbiamo la decomposizione spettrale: $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{p}(n) \oplus \mathfrak{u}(n)$; inoltre la moltiplicazione per l'unità immaginaria i è un isomorfismo lineare che scambia $\mathfrak{p}(n)$ con $\mathfrak{u}(n)$, onde $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p}(n) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(n)$.

Una matrice $u \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ si dice *unitaria* se $uu^* = e$, dove e indica la matrice identità.

Le matrici unitarie sono le matrici di cambiamenti di basi ortonormali per il prodotto scalare Hermitiano standard di $\mathbb{C}^n$. Esse formano un sottogruppo di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, che denotiamo con $\mathbf{U}(n)$ e chiamiamo *gruppo unitario di ordine n*.

LEMMA 3.1 *Ogni matrice Hermitiana ha autovalori reali ed è diagonalizzabile in una base ortonormale: se cioè* $A \in \mathfrak{p}(n)$, *esiste* $a \in \mathbf{U}(n)$ *tale che* $a \circ A \circ a^{-1}$ *sia una matrice diagonale reale.*

DIM. Sia $A \in \mathfrak{p}(n)$, λ un suo autovalore e $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un autovettore relativo a λ. Abbiamo:

$$\lambda\, |v|^2 = (Av|v)_{\mathbb{C}^n} = (v|A^*v)_{\mathbb{C}^n} = (v|Av)_{\mathbb{C}^n} = (v|\lambda v)_{\mathbb{C}^n} = \bar{\lambda}\, |v|^2,$$

da cui $\lambda = \bar{\lambda}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se $w \in \mathbb{C}^n$ è un vettore ortogonale a v, allora

$$(v|Aw)_{\mathbb{C}^n} = (Av|w)_{\mathbb{C}^n} = \lambda\, (v|w) = 0.$$

Quindi il sottospazio dei vettori di $\mathbb{C}^n$ perpendicolari a v è A-invariante: da questo fatto si ricava immediatamente che $\mathbb{C}^n$ ammette una base ortonormale di autovettori di A. $\square$

Indichiamo con $\mathbf{P}_+(n)$ l'insieme delle matrici Hermitiane definite positive, cioè delle matrici Hermitiane che hanno tutti gli autovalori positivi. Consideriamo su tale insieme la topologia di sottospazio di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

TEOREMA 3.2 *Se* $A \in \mathfrak{p}(n)$, *allora* $\exp(A) \in \mathbf{P}_+(n)$. *L'applicazione esponenziale definisce un omeomorfismo*

$$\mathfrak{p}(n) \ni A \longrightarrow \exp(A) \in \mathbf{P}_+(n).$$

DIM. Si verifica immediatamente che $(\exp(A))^* = \exp(A^*)$. Quindi l' esponenziale di una matrice Hermitiana è ancora una matrice Hermitiana ed è definita positiva perché i suoi autovalori sono esponenziali di numeri reali.

Se $a \in \mathbf{P}_+(n)$, possiamo trovare una matrice unitaria u tale che

$$a = u \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix} u^{-1} \quad \text{con} \quad k_1, ..., k_n \quad \text{numeri reali positivi.}$$

Allora $A = u \begin{pmatrix} \log k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \log k_n \end{pmatrix} u^{-1} \in \mathfrak{p}(n)$ ed $\exp(A) = a$. Questo dimostra che l'esponenziale definisce un'applicazione surgettiva di $\mathfrak{p}(n)$ su $\mathbf{P}_+(n)$.

Dimostriamo ora che $\exp : \mathfrak{p}(n) \longrightarrow \mathbf{P}_+(n)$ è iniettiva. Siano $A, B \in \mathfrak{p}(n)$ tali che $\exp(A) = \exp(B)$. Fissiamo una base ortonormale $e_1, ..., e_n$ di autovettori di A. Abbiamo

$$A\, e_j \;=\; \lambda_j\, e_j \quad \text{con} \quad \lambda_j \in \mathbb{R} \quad \text{per} \quad j = 1, ..., n.$$

Allora

$$\exp(B)\, e_j \;=\; \exp(A)\, e_j \;=\; e^{\lambda_j}\, e_j \quad \text{per} \quad j = 1, ..., n.$$

Sia ora $v \neq 0$ un autovettore di B relativo a un autovalore $\mu \in \mathbb{R}$. Se $v = v^1 e_1 + ... + v^n e_n$, otteniamo

$$e^{\mu}\, v \;=\; \sum_{j=1}^{n} e^{\mu} v^j e_j \;=\; \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j} v^j e_j.$$

Quindi

$$e^{\mu} \;=\; e^{\lambda_j} \Rightarrow \mu = \lambda_j \quad \text{se} \quad v^j \neq 0.$$

In particolare

$$\mu\, v^j \;=\; \lambda_j\, v^j \quad \forall j = 1, ..., n$$

e dunque

$$B\, v \;=\; \mu\, v = \sum_{j=1}^{n} \mu\, v^j\, e_j \;=\; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, v^j\, e_j \;=\; A\, v.$$

Questa relazione vale per tutti gli autovettori di B e quindi, poiché $\mathbb{C}^n$ ammette una base ortonormale di autovettori di B, se ne deduce che $A = B$.

Abbiamo così dimostrato che $\exp : \mathfrak{p}(n) \longrightarrow \mathbf{P}_+(n)$ è invertibile. Resta da dimostrare che l'inversa è continua.

A questo scopo osserviamo che per una matrice Hermitiana A il quadrato della norma è la somma dei quadrati dei suoi autovalori, ripetuti con la loro molteplicità: $|A|^2 \;=\; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2$.

Da questo possiamo dedurre che l'esponenziale definisce un'applicazione chiusa di $\mathfrak{p}(n)$ su $\mathbf{P}_+(n)$.

Sia infatti F un sottoinsieme chiuso di $\mathfrak{p}(n)$ e sia $\{a_\nu\}$ una successione a valori in $\exp(F)$ che converge a una matrice $a \in \mathbf{P}_+(n)$. Gli autovalori di a e delle a_ν sono reali e positivi. Indichiamo con μ il più piccolo e con M il più grande degli autovalori di a e con μ_ν e M_ν il più piccolo e il più grande degli autovalori di a_ν. Dico che è possibile trovare un intero positivo ν_0 tale che

$$\mu/2 < \mu_\nu \le M_\nu < 2M \quad \forall \nu \ge \nu_0.$$

Infatti, se fosse $\mu_\nu \le \mu/2$ per infiniti indici $\nu \in \mathbb{N}$, potremmo trovare una sottosuccessione $\{a_{k_\nu}\}$ di $\{a_\nu\}$ tale che $\mu_{k_\nu} \le \mu/2$ per ogni ν. Sia v_{k_ν} un vettore di $\mathbb{C}^n$ con

$$|v_{k_\nu}| = 1 \quad \text{e} \quad a_{k_\nu}(v_{k_\nu}) = \mu_{k_\nu} v_{k_\nu}.$$

Poiché la sfera $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ è compatta, possiamo supporre, a meno di passare a una sottosuccessione estratta, che

$$v_{k_\nu} \longrightarrow v \in S^{2n-1}.$$

Avremmo allora

$$|a(v)| = \lim_{\nu \longrightarrow \infty} |a_{k_\nu}(v_{k_\nu})| \le \mu/2$$

e questo di dà una contraddizione perché

$$|a(v)| \ge \mu \quad \text{essendo} \quad |v| = 1.$$

In modo analogo si dimostra[6] che $M_\nu < 2M$ definitivamente.

Siano ora $\{A_\nu\} \subset F$ tali che $\exp A_\nu = a_\nu$. Allora per ogni $\nu \ge \nu_0$ le matrici A_ν appartengono al compatto

$$K = \{A \in \mathfrak{p}(n) \mid \|A\| \le \max\{|\log(\mu/2)|, |\log(2M)|\}.$$

Poiché F è un chiuso, $K \cap F$ è compatto e possiamo quindi estrarre una sottosuccessione $\{A_{k_\nu}\}$ convergente a un elemento $A \in K \cap F$. Poiché l'esponenziale è un'applicazione continua, otteniamo che $\exp A = a$ e quindi $\exp(F)$ è chiuso in $\mathbf{P}_+(n)$. Quindi $\exp : \mathfrak{p}(n) \to \mathbf{P}_+(n)$, essendo continua, chiusa e bigettiva è un omeomorfismo. $\square$

Denotiamo con

$$\log : \mathbf{P}_+(n) \to \mathfrak{p}(n)$$

l'applicazione inversa dell'esponenziale $\exp : \mathfrak{p}(n) \to \mathbf{P}_+(n)$.

Indichiamo con $\mathfrak{p}(n, \mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale reale delle matrici simmetriche a coefficienti reali e con $\mathbf{P}_+(n, \mathbb{R})$ il sottoinsieme di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ delle matrici reali simmetriche definite positive. Abbiamo allora

[6] In generale si può dimostrare che gli autovalori di una matrice sono funzioni continue dei coefficienti.

Teorema 3.3 *L'applicazione esponenziale definisce un omeomorfismo*

$$\exp : \mathfrak{p}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{P}_+(n, \mathbb{R}).$$

Dim. Infatti ogni matrice simmetrica reale $n \times n$ ammette una base ortonormale in $\mathbb{R}^n$. Ripetendo la dimostrazione svolta per il caso delle matrici complesse Hermitiane, si ottiene che $\exp : \mathfrak{p}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{P}_+(n, \mathbb{R})$ è continua, chiusa e bigettiva e quindi un omeomorfismo. □

§4 Decomposizione di Cartan delle matrici di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$

Teorema 4.1 *Ogni matrice $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ si può scrivere in modo unico come il prodotto*

$$a = u \circ p$$

di una matrice unitaria $u \in \mathbf{U}(n)$ e di una matrice Hermitiana definita positiva $p \in \mathbf{P}_+(n)$.

Dim. Data $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, la matrice $a^* a$ è Hermitiana e definita positiva. Sia $Q = \log(a^* a)$ e $p = \exp(Q/2)$. Poniamo

$$u = a \circ p^{-1}.$$

Allora

$$\begin{aligned} u \circ u^* &= a \circ p^{-1} \circ p^{-1} \circ a^* \\ &= a \circ (a^* \circ a)^{-1} \circ a \\ &= a \circ a^{-1} \circ (a^*)^{-1} a^* \\ &= e. \end{aligned}$$

Quindi $u^* = u^{-1}$ e $u \in \mathbf{U}(n)$.

Dimostriamo ora che la decomposizione è unica.

Se $a = u \circ p$ con $u \in \mathbf{U}(n)$ e $p \in \mathbf{P}_+(n)$, allora

$$a^* \circ a = p \circ u^* \circ u \circ p = p^2.$$

Per dimostrare l'unicità è allora sufficiente verificare che due matrici Hermitiane definite positive $p, q \in \mathbf{P}_+(n)$ che hanno quadrati uguali sono uguali. Siano $P, Q \in \mathfrak{p}(n)$ le matrici Hermitiane tali che $\exp P = p$, $\exp Q = q$. Da $\exp(2P) = \exp(2Q)$ otteniamo $2P = 2Q$ e quindi $P = Q$ e $p = q$. □

Se $p \in \mathbf{P}_+(n)$ indichiamo con $\sqrt{p}$ la sua radice quadrata in $\mathbf{P}_+(n)$, cioè l'unica matrice Hermitiana definita positiva $q \in \mathbf{P}_+(n)$ tale che $q^2 = p$.

Lemma 4.2 *L'applicazione $\mathbf{P}_+(n) \ni a \to \sqrt{a} \in \mathbf{P}_+(n)$ è un omeomorfismo.*

Dim. Abbiamo infatti il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P}_+(n) \arrow[r, "\sqrt{\cdot}"] & \mathbf{P}_+(n) \\ \mathfrak{p}(n) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "(1/2)"'] & \mathfrak{p}(n) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

in cui le frecce verticali e la $\mathfrak{p}(n) \ni P \longrightarrow P/2 \in \mathfrak{p}(n)$ sono degli omeomorfismi. $\square$

Teorema 4.3 *L'applicazione*

$$\mathbf{U}(n) \times \mathbf{P}_+(n) \ni (u,p) \longrightarrow u \circ p \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$$

è un omeomorfismo. In particolare $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ *è omeomorfo al prodotto topologico* $\mathbf{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$.

Dim. L'applicazione è continua e bigettiva per il teorema precedente. La sua inversa è data da

$$\mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \ni a \longrightarrow (a(\sqrt{a^* \circ a})^{-1}, \sqrt{a^* \circ a}) \in \mathbf{U}(n) \times \mathbf{P}_+(n)$$

ed è quindi continua.

Per concludere basta ricordare (Teorema II.3.3) che l'esponenziale definisce un omeomorfismo di $\mathfrak{p}(n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ su $\mathbf{P}_+(n)$. $\square$

Indichiamo con $\mathfrak{p}_0(n)$ il sottospazio delle matrici Hermitiane a traccia nulla.

Lemma 4.4 *L'applicazione esponenziale definisce un diffeomorfismo:*

$$\mathfrak{p}_0(n) \ni A \longrightarrow \exp(A) \in \mathbf{P}_+(n) \cap \mathbf{SL}(n,\mathbb{C})\,.$$

Dim. Poiché tutti gli autovalori di $A \in \mathfrak{p}(n)$ sono reali, la sua traccia è reale e quindi il determinante dell'esponenziale di $A \in \mathfrak{p}(n)$ è uguale a uno se e soltanto se la traccia è nulla. $\square$

Corollario 4.5 *L'applicazione:*

$$\mathbf{SU}(n) \times \mathfrak{p}_0 \ni (u,A) \longrightarrow u \circ \exp(A) \in \mathbf{SU}(n,\mathbb{C})$$

è un omeomorfismo.

Dim. Basta osservare che, se $(u,A) \in \mathbf{U}(n) \times \mathfrak{p}(n)$, allora condizione necessaria e sufficiente affinché $u \circ \exp(A)$ sia in $\mathbf{SU}(n,\mathbb{C})$ è che $u \in \mathbf{SU}(n)$ e $A \in \mathfrak{p}_0(n)$. $\square$

§5 Le decomposizioni di Gauss e di Iwasawa

Sia $e_1, \ldots, e_n$ la base canonica di $\mathbb{k}^n$. Un elemento $a = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ del gruppo lineare $\mathbf{GL}(n,\mathbb{k})$ si dice *regolare* se per ogni intero $k = 1, \ldots, n$ i vettori

$$a(e_1),\ \ldots,\ a(e_k),\ e_{k+1},\ \ldots,\ e_n$$

sono linearmente indipendenti, cioè se e soltanto se i determinanti dei suoi minori principali sono tutti diversi da zero:

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{per} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Indichiamo con

$\mathbf{T}_+(n,\mathbb{k})$ il gruppo delle matrici $n \times n$ triangolari superiori invertibili;

$\mathbf{T}_-(n,\mathbb{k})$ il gruppo delle matrici $n \times n$ triangolari inferiori invertibili;

$\mathbf{T}_{0,+}(n,\mathbb{k})$ il gruppo delle matrici $n\times n$ unipotenti triangolari superiori;
$\mathbf{T}_{0,-}(n,\mathbb{k})$ il gruppo delle matrici $n\times n$ unipotenti triangolari inferiori;
$\mathbf{\Delta}(n,\mathbb{k})$ il gruppo delle matrici $n\times n$ diagonali invertibili.

Teorema 5.1 (Decomposizione di Gauss) *Se $a\in\mathbf{GL}(n,\mathbb{k})$ è una matrice regolare, allora sono univocamente determinate tre matrici $t_+\in\mathbf{T}_{0,+}(n,\mathbb{k})$, $t_{\in}\mathbf{T}_{0,-}(n,\mathbb{k})$, $\delta\in\mathbf{\Delta}(n,\mathbb{k})$, tali che*

$$a = t_{\circ}\delta\circ t_+\,.$$

I coefficienti di t_+,t_-,δ sono funzioni razionali dei coefficienti di a.

Dim. Dimostriamo per ricorrenza sulla dimensione n che ogni $a\in\mathbf{GL}(n,\mathbb{k})$ regolare è prodotto di una triangolare inferiore e di una triangolare superiore unipotente:

$$(\Game)\qquad a=\tau_-\circ\tau_+\qquad\text{con}\quad \tau_-\in\mathbf{T}_-(n,\mathbb{k}),\ \tau_+\in\mathbf{T}_{0,+}(n,\mathbb{k})\,.$$

Se $n=1$ questa affermazione è banale, in quanto $\mathbf{T}_-(1,\mathbb{k})=\mathbb{k}\setminus\{0\}=\mathbf{GL}(1,\mathbb{k})$ e $\mathbf{T}_{0,+}(1,\mathbb{k})=\{1\}$.

Supponiamo quindi che ogni matrice regolare $(n-1)\times(n-1)$ ammetta una decomposizione $(\Game)$.

Fissiamo una $a\in\mathbf{GL}(n,\mathbb{k})$ regolare. Scriviamo a nella forma:

$$a=\begin{pmatrix} a_{11} & {}^t u\\ v & a'\end{pmatrix}\qquad\text{con}\quad u,v\in\mathbb{k}^{n-1},\ a'\in\mathfrak{gl}(n-1,\mathbb{k})\,.$$

Poiché $D_1(a)=a_{11}\neq 0$, possiamo definire la matrice

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1 & {}^t u/a_{11}\\ 0 & I_{n-1}\end{pmatrix}\in\mathbf{T}_{0,+}(n,\mathbb{k})\,,\quad\text{con}\quad \tau_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -{}^t u/a_{11}\\ 0 & I_{n-1}\end{pmatrix}.$$

Allora

$$a^{(1)}=a\circ\tau_1^{-1}=\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ v' & a''\end{pmatrix}$$

con $v'\in\mathbb{k}^{n-1}$ e con $a''\in\mathbf{GL}(n-1,\mathbb{k})$ regolare, perché $D_k(a'')=D_{k+1}(a)/a_{11}$.

Per l'ipotesi di ricorrenza, possiamo trovare una matrice $\tau'_+\in\mathbf{T}_{0,+}(n-1,\mathbb{k})$ tale che $a'\circ[\tau'_+]^{-1}\in\mathbf{T}_-(n-1,\mathbb{k})$. Se quindi poniamo:

$$\tilde{\tau}'_+=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \tau'_+\end{pmatrix}\qquad\text{e}\qquad \tau_+=\tilde{\tau}'_+\circ\tau_1\,,$$

otteniamo che $\tau_-=a\circ\tau_+^{-1}\in\mathbf{T}_-(n,\mathbb{k})$ e quindi a ammette la decomposizione $(\Game)$.

Una matrice triangolare inferiore $\tau_-=(t_{ij})\in\mathbf{T}_-(n,\mathbb{k})$ si decompone nel prodotto della matrice $(t_{ij}/t_{ii})\in\mathbf{T}_{0,-}(n,\mathbb{k})$ e della matrice diagonale $(t_{ii}\delta_{ij})\in\mathbf{\Delta}(n,\mathbb{k})$:

$$\tau_-=\begin{pmatrix}t_{11} & & & \\ t_{21} & t_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ \frac{t_{21}}{t_{11}} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{t_{n1}}{t_{11}} & \frac{t_{n2}}{t_{22}} & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_{11} & & & \\ & t_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_{nn}\end{pmatrix}.$$

Questo completa la dimostrazione dell'esistenza della decomposizione di Gauss.

Resta da verificare l'unicità: se $a = t_- \circ \delta \circ t_+ = t'_- \circ \delta' \circ t'_+$, abbiamo:

$$[t'_-]^{-1} \circ t_- \circ \delta \;=\; \delta' \circ t'_+ \circ [t_+]^{-1}\,.$$

Il primo membro è triangolare inferiore, il secondo triangolare superiore e dunque entrambi sono matrici diagonali. Esse coincidono allora con δ e δ' rispettivamente ed otteniamo perciò $t'_+ = t_+$, $t'_- = t_-$, $\delta = \delta'$.

Abbiamo ottenuto così l'unicità. Per costruzione i coefficienti delle matrici t_+, t_- e δ sono funzioni razionali di quelli di a. Osserviamo in particolare che i coefficienti della matrice diagonale δ sono dati da

$$(\natural) \qquad \delta_{ii} = \frac{D_i(a)}{D_{i-1}(a)} \qquad i = 1, \ldots, n$$

ove si è posto $D_0(a) = 1$. $\square$

Indichiamo con

$\mathbf{\Delta}_+(n, \mathbb{R})$ il gruppo delle matrici $n \times n$ diagonali reali invertibili con coefficienti non negativi.

Abbiamo:

Teorema 5.2 (Decomposizione di Iwasawa) *Ogni $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ si decompone in modo unico in un prodotto:*

$$(\ddagger) \qquad a \;=\; u \circ \delta \circ t$$

con $u \in \mathbf{U}(n)$, $\delta \in \mathbf{\Delta}_+(n, \mathbb{R})$, $t \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{C})$.

Osservazione Abbiamo in particolare:

(1) Se $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, allora
$u \in \mathbf{O}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, $\delta \in \mathbf{\Delta}_+(n, \mathbb{R})$, $t \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{R})$.

(2) Se $a \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$, allora
$u \in \mathbf{SU}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$, $\delta \in \mathbf{\Delta}_+(n, \mathbb{R})$, con $\det \delta = 1$, $t \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{C})$.

(3) Se $a \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$, allora
$u \in \mathbf{SO}(n) = \mathbf{O}(n) \cap \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$, $\delta \in \mathbf{\Delta}_+(n, \mathbb{R})$, con $\det \delta = 1$, $t \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{R})$.

Dim. Sia $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. La $a^* \circ a$ è una matrice Hermitiana definita positiva e quindi è regolare. Consideriamo la sua decomposizione di Gauss:

$$a^* \circ a = t_- \circ \theta \circ t_+ \quad \text{con} \quad t_\pm \in \mathbf{T}_{0,\pm}(n, \mathbb{C}),\; \theta \in \mathbf{\Delta}(n, \mathbb{C})\,.$$

Poiché $a^* \circ a$ è definita positiva, per ($\natural$) la θ è il quadrato di un elemento δ di $\mathbf{\Delta}_+(n, \mathbb{R})$. Da $a^* \circ a = [a^* \circ a]^* = t_+^* \circ \delta^2 \circ t_-^*$ ricaviamo, per l'unicità della decomposizione di Gauss, che $t_- = t_+^*$ e quindi, posto $t = t_+$, avremo:

$$[a \circ (\delta \circ t)^{-1}]^* \circ [a \circ (\delta \circ t)^{-1}] = e$$

onde $u = a \circ (\delta \circ t)^{-1} \in \mathbf{U}(n)$ ed otteniamo la decomposizione cercata.

L'unicità segue da quella della decomposizione di Gauss: infatti, se $a = u \circ \delta \circ t$ è una decomposizione di Iwasawa di a, allora $a^* \circ a = t^* \circ \delta^2 \circ t$ è una decomposizione di Gauss di $a^* \circ a$, onde $t \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{C})$ e $\delta^2 \in \mathbf{\Delta}_+(n, \mathbb{R}) \subset \mathbf{P}_+(n)$ sono univocamente determinati. Ma allora anche la radice quadrata $\delta \in \mathbf{\Delta}_+(n, \mathbb{R}) \subset \mathbf{P}_+(n)$ è univocamente determinata. La dimostrazione è completa. □

Osservazione In modo analogo si mostra che per ogni $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ sono univocamente determinate $t \in \mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{C})$, $\delta \in \mathbf{\Delta}_+(n, \mathbb{R})$ e $u \in \mathbf{U}(n)$ tali che

$$a = t \circ \delta \circ u\,.$$

Siano:

$\mathfrak{d}(n, \Bbbk)$ lo spazio vettoriale delle matrici diagonali $n \times n$ con coefficienti nel campo $\Bbbk$;

$\mathfrak{d}_0(n, \Bbbk)$ lo spazio vettoriale delle matrici diagonali di $\mathfrak{d}(n, \Bbbk)$ che hanno traccia nulla;

$\mathfrak{n}_+(n, \Bbbk)$ lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ nilpotenti triangolari superiori di $\mathfrak{gl}(n, \Bbbk)$;

$\mathfrak{n}_-(n, \Bbbk)$ lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ nilpotenti triangolari inferiori di $\mathfrak{gl}(n, \Bbbk)$.

L'applicazione esponenziale definisce omeomorfismi:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d}(n, \mathbb{R}) \ni H &\to \exp(H) \in \mathbf{\Delta}_+(n, \mathbb{R}) \\
\mathfrak{d}_0(n, \mathbb{R}) \ni H &\to \exp(H) \in \mathbf{\Delta}_+(n, \mathbb{R}) \cap \mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) \\
\mathfrak{n}_+(n, \mathbb{C}) \ni T &\to \exp(T) \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{C}) \\
\mathfrak{n}_-(n, \mathbb{C}) \ni T &\to \exp(T) \in \mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{C}) \\
\mathfrak{n}_+(n, \mathbb{R}) \ni T &\to \exp(T) \in \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{R}) \\
\mathfrak{n}_-(n, \mathbb{R}) \ni T &\to \exp(T) \in \mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Otteniamo quindi:

Teorema 5.3 *Le applicazioni:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{C}) \times \mathfrak{d}(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{U}(n) \ni (T, H, u) &\to \exp(T) \circ \exp(H) \circ u \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \\
\mathbf{U}(n) \times \mathfrak{d}(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{C}) \ni (u, H, T) &\to u \circ \exp(H) \circ \exp(T) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \\
\mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{d}(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{O}(n) \ni (T, H, u) &\to \exp(T) \circ \exp(H) \circ u \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \\
\mathbf{O}(n) \times \mathfrak{d}(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{R}) \ni (u, H, T) &\to u \circ \exp(H) \circ \exp(T) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \\
\mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{C}) \times \mathfrak{d}_0(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{SU}(n) \ni (T, H, u) &\to \exp(T) \circ \exp(H) \circ u \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{C}) \\
\mathbf{SU}(n) \times \mathfrak{d}_0(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{C}) \ni (u, H, T) &\to u \circ \exp(H) \circ \exp(T) \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{C}) \\
\mathbf{T}_{0,-}(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{d}_0(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{SO}(n) \ni (T, H, u) &\to \exp(T) \circ \exp(H) \circ u \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) \\
\mathbf{SO}(n) \times \mathfrak{d}_0(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{T}_{0,+}(n, \mathbb{R}) \ni (u, H, T) &\to u \circ \exp(H) \circ \exp(T) \in \mathbf{SL}(n, \mathbb{R})
\end{aligned}$$

sono omeomorfismi.

CAPITOLO III

GRUPPI LINEARI E LORO ALGEBRE DI LIE

Un *gruppo lineare* è un sottogruppo chiuso $\mathbf{G}$ di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ (per qualche intero positivo n). In questo capitolo iniziamo lo studio della struttura dei gruppi lineari.

§1 Algebre di Lie

Si dice *algebra di Lie* su un campo $\mathbb{K}$ un'algebra $\mathfrak{g}$ su $\mathbb{K}$ il cui prodotto[7], che indichiamo con

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}\,,$$

sia antisimmetrico e soddisfi l'*identità di Jacobi*:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Osservazione Se il prodotto in $\mathfrak{g}$ è antisimmetrico, il primo membro dell'identità di Jacobi è un'applicazione trilineare alternata. Per verificare che $\mathfrak{g}$ sia un'algebra di Lie sarà quindi sufficiente verificare

(1) che $[X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$
(2) che l'identità di Jacobi valga per ogni terna di vettori distinti di una base di $\mathfrak{g}$ come spazio vettoriale.

Esempio 1.1 Sia V un qualsiasi spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Allora V è un'algebra di Lie con il prodotto

$$V \times V \ni (v_1, v_2) \longrightarrow 0 \in V.$$

Un'algebra di Lie in cui il prodotto di due qualsiasi elementi sia 0 si dice *abeliana*.

Esempio 1.2 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di tutti gli endomorfismi lineari di V. Allora $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ è un'algebra di Lie su $\mathbb{K}$ rispetto all'operazione di commutazione di endomorfismi $\mathbb{K}$-lineari:

$$\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V) \times \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V) \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V).$$

Abbiamo infatti, se $X, Y, Z \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$:

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]] &= X \circ (Y \circ Z - Z \circ Y) - (Y \circ Z - Z \circ Y) \circ X \\ &= X \circ Y \circ Z - X \circ Z \circ Y - Y \circ Z \circ X + Z \circ Y \circ X \end{aligned}$$

e analogamente

$$[Y, [Z, X]] = Y \circ Z \circ X - Y \circ X \circ Z - Z \circ X \circ Y + X \circ Z \circ Y,$$

[7] Ricordiamo che un'algebra su un campo $\mathbb{K}$ è il dato di uno spazio vettoriale A su $\mathbb{K}$ e di un'applicazione bilineare $A \times A \ni (a, b) \longrightarrow a \cdot b \in A$.

$$[Z,[X,Y]] = Z\circ X\circ Y - Z\circ Y\circ X - X\circ Y\circ Z + Y\circ X\circ Z.$$

Sommando membro a membro, da queste tre uguaglianze otteniamo l'identità di Jacobi.

In particolare, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ è un'algebra di Lie su $\mathbb{K}$ rispetto all'operazione di commutazione di matrici:

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})\times\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})\ni(X,Y)\longrightarrow[X,Y]=XY-YX\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}).$$

Se il campo $\mathbb{K}$ è una estensione del campo $\mathbb{F}$, considereremo a volte $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ come un'algebra di Lie su $\mathbb{F}$ per *restrizione del campo degli scalari.*

Un'applicazione lineare $\phi:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{h}$ tra due algebre di Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ sullo stesso campo $\mathbb{K}$ si dice un *omomorfismo di algebre di Lie* se

$$\phi([X,Y]) = [\phi(X),\phi(Y)] \quad \forall X,Y\in\mathfrak{g}.$$

Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie su $\mathbb{K}$ e V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, si dice *rappresentazione lineare* di $\mathfrak{g}$ in V un omomorfismo di algebre di Lie

$$\phi:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)\,.$$

Se $\ker\phi = \{0\}$, la rappresentazione ϕ si dice *fedele.*

Una rappresentazione fedele permette di identificare $\mathfrak{g}$ ad una sottoalgebra dell'algebra di Lie degli endomorfismi di uno spazio vettoriale.

Esempio 1.3 Sia A sia un'algebra associativa sul campo $\Bbbk$, con prodotto $A\times A\ni(a,b)\longrightarrow a\cdot b\in A$. Otteniamo un'algebra di Lie $A_{\mathfrak{L}}$ considerando su A il prodotto:

$$[a,b] = a\cdot b - b\cdot a \quad \forall a,b\in A.$$

Supponiamo che $\mathfrak{g}$ sia un'algebra di Lie di dimensione finita N su un campo $\Bbbk$. Fissata una base $E_1,...,E_N$ di $\mathfrak{g}$, si definiscono *costanti di struttura* dell'algebra $\mathfrak{g}$ in tale base gli scalari $(c^i_{j,k})_{1\le i,j,k\le N}$ definiti da

$$[E_j,E_k] = \sum_{i=1}^{N} c^i_{j,k}E_i \quad \forall 1\le j,k\le N.$$

Le costanti di struttura verificano le relazioni:

$$c^i_{j,k} = -c^i_{k,j} \quad \text{(antisimmetria)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} c^i_{j,k}c^r_{i,h} + c^i_{k,h}c^r_{i,j} + c^i_{h,j}c^r_{i,k} = 0 \quad \text{(identità di Jacobi).}$$

Viceversa, dato uno spazio vettoriale $\mathfrak{g}$ su $\Bbbk$, una sua base $E_1,...,E_N$ e coefficienti $(c^i_{j,k})_{1\le i,j,k\le N}$ che verificano queste relazioni, vi è un'unica struttura di algebra di Lie su $\mathfrak{g}$ per cui tali coefficienti siano le costanti di struttura nella base $E_1,...,E_N$.

Esempio 1.4 Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio Euclideo di dimensione 3. Il *prodotto vettore*

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (v, w) \to v \times w \in \mathbb{R}^3$$

è definito dall'identità:

$$\det(v, w, z) = (v \times w | z) \quad \forall v, w, z \in \mathbb{R}^3,$$

dove abbiamo indicato con (v, w, z) la matrice 3×3 che ha come colonne i vettori v, w, z. Le regole di calcolo del prodotto vettore si esprimono nei vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica mediante:

$$e_i \times e_i = 0, \quad e_i \times e_j = \epsilon(i, j, k) e_k$$

per ogni $i = 1, 2, 3$ ed ogni permutazione (i, j, k) di $\{1, 2, 3\}$. Lo spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto vettore è un'algebra di Lie reale. Infatti il prodotto vettore è antisimmetrico perché, scambiando le prime due colonne di una matrice, il determinante cambia segno. Infine, per verificare l'identità di Jacobi basta verificare che

$$e_1 \times (e_2 \times e_3) + e_2 \times (e_3 \times e_1) + e_3 \times (e_1 \times e_2) = 0$$

Questa relazione è banale perché ciascuno degli addendi a primo membro è uguale a zero.

In modo equivalente, possiamo identificare $\mathbb{R}^3$ allo spazio vettoriale reale formato dai quaternioni puramente immaginari. In questa identificazione, la parte reale e la parte immaginaria del prodotto di due quaternioni puramente immaginari sono rispettivamente il prodotto scalare e il prodotto vettore dei vettori corrispondenti.

Se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono sottospazi vettoriali di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ sul campo $\mathbb{k}$, indichiamo con $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ il sottospazio vettoriale generato dagli elementi $[X, Y]$ al variare di X in $\mathfrak{a}$ e di Y in $\mathfrak{b}$. Poiché il prodotto è antisimmetrico, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}]$.

Un sottospazio vettoriale $\mathfrak{a}$ di $\mathfrak{g}$ si dice una *sottoalgebra di Lie di* $\mathfrak{g}$ se

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}.$$

Un sottospazio vettoriale $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{g}$ si dice un *ideale dell'algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ se

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}.$$

Si verifica facilmente:

Lemma 1.1 *Se $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ è un omomorfismo di algebre di Lie, allora* $\ker \phi$ *è un ideale di* $\mathfrak{g}$.

Se $\mathfrak{h}$ è un ideale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, allora vi è un'unica struttura di algebra di Lie su $\mathfrak{g}/_{\mathfrak{h}}$ che renda la proiezione nel quoziente

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}/_{\mathfrak{h}}$$

un omomorfismo di algebre di Lie.

Sia A un'algebra su un campo $\mathbb{k}$. Un endomorfismo $\mathbb{k}$-lineare

$$D : A \longrightarrow A$$

si dice una *derivazione* di A se verifica l'*identità di Leibnitz*:

$$D(a \cdot b) \,=\, (Da) \cdot b \,+\, a \cdot (Db).$$

LEMMA 1.2 *L'insieme* $\mathrm{Der}(A)$ *di tutte le derivazioni di un'algebra* A *su* $\mathbb{k}$ *è una sottoalgebra di Lie di* $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(A)$.

DIM. Osserviamo innanzi tutto che $\mathrm{Der}(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{gl}_K(A)$ perché il prodotto $A \times A \ni (a, b) \longrightarrow a \cdot b \in A$ è $\mathbb{k}$-bilineare.

Se $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(A)$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](a \cdot b) &= D_1(D_2 a \cdot b + a \cdot D_2 b) \,-\, D_2(D_1 a \cdot b + a \cdot D_1 b)\\
&= D_1 D_2 a \cdot b + D_2 a \cdot D_1 b + D_1 a \cdot D_2 b \,+\, a \cdot D_1 D_2 b\\
&\quad - D_2 D_1 a \cdot b - D_1 a \cdot D_2 b - D_2 a \cdot D_1 b - a \cdot D_2 D_1 b\\
&= (D_1 D_2 - D_2 D_1) a \cdot b + a \cdot (D_1 D_2 - D_2 D_1) b\\
&= [D_1, D_2] a \cdot b + a \cdot [D_1, D_2] b
\end{aligned}$$

e quindi $\mathrm{Der}(A)$ è un'algebra di Lie. □

Se A è un'algebra associativa, allora per ogni $a \in A$ l'applicazione

$$D_a : A \ni b \longrightarrow a \cdot b - b \cdot a \in A$$

è una derivazione di A.

Si verifica facilmente che vale il seguente:

LEMMA 1.3 *Sia* A *un'algebra associativa su* $\mathbb{k}$. *Allora l'applicazione*

$$A \ni a \longrightarrow D_a \in \mathrm{Der}(A)$$

è un omomorfismo dell'algebra di Lie $A_{\mathfrak{L}}$ *nell'algebra di Lie* $\mathrm{Der}(A)$ *delle derivazioni di* A.

Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ sul campo $\mathbb{k}$, ed un elemento $X \in \mathfrak{g}$, indichiamo con $\mathrm{ad}(X)$ l'endomorfismo lineare

$$\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \ni Y \longrightarrow \mathrm{ad}(X)Y = [X, Y] \in \mathfrak{g}.$$

TEOREMA 1.4 *L'applicazione*

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathfrak{g})$$

è una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ *nell'algebra* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *delle derivazioni di* $\mathfrak{g}$.

DIM. L'applicazione ad è lineare perché il prodotto $[\,\cdot,\,\cdot]$ è bilineare.

Dall'identità di Jacobi ricaviamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(X)[Y,Z] &= [X,[Y,Z]] \\
&= -[Y,[Z,X]] - [Z,[X,Y]] \\
&= [Y,\mathrm{ad}(X)Z] + [\mathrm{ad}(X)Y,Z] \\
\forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}
\end{aligned}$$

e quindi $\mathrm{ad}(X)$ è, per ogni $X \in \mathfrak{g}$, una derivazione dell'algebra $\mathfrak{g}$. Abbiamo inoltre

$$\begin{aligned}
[\mathrm{ad}(X),\mathrm{ad}(Y)]Z &= \mathrm{ad}(X)[Y,Z] - \mathrm{ad}(Y)[X,Z] \\
&= [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] \\
&= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] \\
&= -[Z,[X,Y]] \\
&= \mathrm{ad}([X,Y])Z, \\
&\qquad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g},
\end{aligned}$$

e quindi ad è un omomorfismo di algebre di Lie. $\square$

L'applicazione

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{gl}_{\Bbbk}(\mathfrak{g})$$

si dice la *rappresentazione aggiunta di* $\mathfrak{g}$. Gli elementi dell'immagine $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ si dicono *derivazioni interne di* $\mathfrak{g}$.

Ogni algebra di Lie di dimensione finita su un campo $\Bbbk$ si può identificare a una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n,\Bbbk)$ per qualche intero positivo n: infatti è stato dimostrato da I.D.Ado (Uspehi Mat.Nauk, 1947) nel caso di campi di caratteristica zero e K.Iwasawa (Japan J.Math., 1948) nel caso generale che vale il seguente:

Teorema 1.5 *Ogni algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ *di dimensione finita su un campo* $\Bbbk$ *ammette una rappresentazione lineare fedele.*

Nel seguito potremo quindi limitarci a considerare algebre di Lie $\mathfrak{g}$ che sono sottoalgebre di $\mathfrak{gl}(n,\Bbbk)$.

§2 Jacobiano dell'applicazione esponenziale

In questo paragrafo studieremo la relazione tra sottoalgebre di Lie di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ e sottogruppi di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. Dimostriamo innanzi tutto il seguente:

Lemma 2.1 *Per ogni* $X,\ Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ *valgono le seguenti formule di commutazione:*

(i) $\quad \mathrm{ad}(X)(XY) = X\mathrm{ad}(X)Y.$

(ii) $\quad X^kY = YX^k + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{ad}^j(X)YX^{k-j} \qquad \forall k \geq 1.$

(iii) $\quad YX^k = X^kY + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j X^{k-j}\mathrm{ad}^j(X)Y \qquad \forall k \geq 1.$

Dim. Dimostriamo la (i). Abbiamo:
$\mathrm{ad}(X)(XY) = [X,XY] = X^2Y - XYX = X\mathrm{ad}(X)Y \quad \forall X,Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}).$

La dimostrazione delle (*ii*) e (*iii*) sono simili. Mostriamo ad esempio che vale la (*iii*).

Ragioniamo per induzione sull'intero $k \geq 1$. Se $k = 1$, la

$$YX \,=\, XY \,-\, \mathrm{ad}(X)Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

segue dalla definizione di ad. Fissiamo quindi un intero $m \geq 2$ e supponiamo che la formula (*iii*) valga per $k = m - 1$. Allora

$$\begin{aligned}
YX^m &= YX^{m-1}X \\
&= X^{m-1}YX \,+\, \sum_{j=1}^{m-1} \tbinom{m-1}{j} (-1)^j X^{m-1-j} \mathrm{ad}^j(X)YX \\
&= X^mY \,-\, X^{m-1}\mathrm{ad}(X)Y \,+\, \sum_{j=1}^{m-1} \tbinom{m-1}{j} (-1)^j X^{m-j} \mathrm{ad}^j(X)Y \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{m-1} \tbinom{m-1}{j} (-1)^j X^{m-j-1} \mathrm{ad}^{j+1}(X)Y \\
&= X^mY \,-\, X^{m-1}\mathrm{ad}(X)Y \,+\, (-1)^m \mathrm{ad}^m(X)Y \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \{\tbinom{m-1}{j} + \tbinom{m-1}{j-1}\} X^{m-j} \mathrm{ad}^j(X)Y \\
&\qquad\qquad - \tbinom{m-1}{1} X^{m-1}\mathrm{ad}(X)Y
\end{aligned}$$

perché i due endomorfismi $\mathrm{ad}(X)$ e $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \ni Y \longrightarrow XY \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ commutano per la (*i*), da cui, tenuto conto della formula di somma dei binomiali:

$$\tbinom{m-1}{j} + \tbinom{m-1}{j-1} \,=\, \tbinom{m}{j},$$

otteniamo la (*iii*). □

Teorema 2.2 (Formula dello Jacobiano) *L'applicazione esponenziale* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{\exp} \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ *è differenziabile in ogni punto e il suo differenziale in* $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ *è dato da:*

$$d\exp(A) : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \ni X \longrightarrow \frac{I - \exp(-\mathrm{ad}(A))}{\mathrm{ad}(A)} \exp(A)X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}),$$

ove

$$\frac{I - \exp(-\mathrm{ad}(A))}{\mathrm{ad}(A)} \,=\, \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(h+1)!} \mathrm{ad}^h(A).$$

Dim. Fissiamo $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Per ogni $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ abbiamo:

$$\exp(A + X) \,=\, \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(A+X)^h}{h!}.$$

Ora, risulta:

$$(A+X)^h \;=\; A^h \;+\; \sum_{r=0}^{h-1} A^r X A^{h-r-1} \;+\; o(X).$$

Per la formula di commutazione (iii) abbiamo:

$$A^r X A^s \;=\; \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} A^{h-j-1} \mathrm{ad}^j(A) X.$$

Sostituendo troviamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{r+s=h-1} A^r X A^s \;&= \sum_{s=0}^{h-1}\sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} A^{h-j-1} \mathrm{ad}^j(A) X \\
&= \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^j \left(\sum_{k=0}^{h-j-1} \binom{j+k}{j} \right) A^{h-j-1} \mathrm{ad}^j(A) X \\
&= \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^j \binom{h}{j+1} A^{h-j-1} \mathrm{ad}^j(A) X.
\end{aligned}$$

Otteniamo perciò:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} \sum_{r+s=h-1} A^r X A^s \;=\; \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{h-1} \frac{A^{h-j-1}}{(h-j-1)!} \frac{(-1)^j \mathrm{ad}^j(A)}{(j+1)!} X$$

$$= \exp(A) \frac{I - \exp(-\mathrm{ad}(A))}{\mathrm{ad}(A)} X \;=\; \frac{I - \exp(-\mathrm{ad}(A))}{\mathrm{ad}(A)} \exp(A) X\,,$$

e quindi:

$$\exp(A+X) \;=\; \exp(A) \;+\; \frac{I - \exp(-\mathrm{ad}(A))}{\mathrm{ad}(A)} \exp(A) X \;+\; O(|X|^2),$$

che dà la formula desiderata per il differenziale. $\square$

Ricordiamo il

Teorema 2.3 (Teorema delle funzioni implicite) *Sia Ω un aperto di uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ e sia $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ (con $1 \le k \le \infty$). Sia $x_0 \in \Omega$ un punto in cui*

$$df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

sia un isomorfismo lineare. Allora esiste un intorno aperto U di x_0 in Ω tale che $f(U)$ sia aperto in $\mathbb{R}^n$ e

$$f|_U^{f(U)} : U \to f(U)$$

sia un omeomorfismo, con inversa $[f|_U^{f(U)}]^{-1}$ differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$.

Un omeomorfismo tra due aperti di $\mathbb{R}^n$ che sia differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ (con $1 \leq k \leq \infty$) ed abbia inversa differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ si dice un *diffeomorfismo di classe* $\mathcal{C}^k$.

Dal teorema delle funzioni implicite ricaviamo:

TEOREMA 2.4 *L'applicazione* $\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ *definisce un diffeomorfismo di classe* $\mathcal{C}^\infty$ *di un intorno aperto di* 0 *in* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ *su un intorno aperto di* e *in* $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$.

DIM. Infatti il differenziale di exp in 0 è l'applicazione identica:

$$d\exp(0) : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \ni X \to X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}). \quad \square$$

TEOREMA 2.5 (COORDINATE DI SECONDA SPECIE) *Siano* V, W *due sottospazi vettoriali reali di* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$*, considerato come spazio vettoriale reale di dimensione* $2n^2$*, tali che*

$$V \oplus W = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}).$$

Allora possiamo trovare un intorno aperto U_1 *di* 0 *in* V *e un intorno aperto* U_2 *di* 0 *in* W *tali che*

$$U_1 \times U_2 \ni (X,Y) \to \exp(X)\exp(Y) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$$

sia un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^\infty$ *su un intorno aperto di* e *in* $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$.

DIM. Sia $X = X_1 + X_2 \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ con $X_1 \in V$ e $X_2 \in W$. Allora, per la formula dello Jacobiano,

$$\begin{aligned}\exp(X_1)\exp(X_2) &= (e + X_1 + O(\|X_1\|^2))(e + X_2 + O(\|X_2\|^2)\\ &= e + X + O(\|X\|^2)\end{aligned}$$

e quindi l'applicazione

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \ni X \to \exp(X_1)\exp(X_2) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$$

ha in 0 differenziale uguale all'identità. La tesi segue quindi dal teorema delle funzioni implicite. $\square$

OSSERVAZIONE Se $a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ e $\|a - e\| < 1$, la serie

$$\log(a) = \log(e + (a-e)) = -\sum_{h=1}^{\infty} \frac{(e-a)^h}{h}$$

converge uniformemente su ogni aperto $\{\|a-e\| < r\}$ per $0 < r < 1$ e definisce un endomorfismo $\log(a) \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ tale che

$$\exp(\log(a)) = a.$$

LEMMA 2.6 *Se* A, $B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ *allora*

$$\exp(tA)\exp(tB) = \exp(t(A+B) + (t^2/2)[A,B]) + O(t^3) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

DIM. Basta dimostrare che le due applicazioni

$$F_1 : \mathbb{R} \ni t \longrightarrow \exp(tA)\exp(tB) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

e

$$F_2 : \mathbb{R} \ni t \longrightarrow \exp(t(A+B) + (t^2/2)[A, B]) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

assumono per $t = 0$ gli stessi valori ed hanno uguali per $t = 0$ le loro derivate prime e seconde.

Abbiamo $F_1(0) = e = F_2(0)$. Inoltre:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= (e + tA + (t^2/2)A^2 + O(t^3))(e + tB + (t^2/2)B^2 + O(t^3)) \\ &= e + t(A+B) + t^2(A^2/2 + AB + B^2/2) + O(t^3) \end{aligned}$$

ci dà

$$F_1'(0) = A + B, \qquad F_1''(0) = A^2 + 2AB + B^2.$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned} F_2(t) &= e + t(A+B) + (t^2/2)[A, B] + (1/2)(t(A+B) + (t^2/2)[A, B])^2 + O(t^3) \\ &= e + t(A+B) + (t^2/2)([A, B] + A^2 + AB + BA + B^2) + O(t^3) \\ &= e + t(A+B) + (t^2/2)(A^2 + 2AB + B^2) + O(t^3) \end{aligned}$$

e quindi anche

$$F_2'(0) = A + B, \qquad F_2''(0) = A^2 + 2AB + B^2.$$

□

§3 ALGEBRA DI LIE DI UN GRUPPO LINEARE

Il Lemma III.2.6 ci permette di esplicitare la relazione tra sottogruppi chiusi di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ e sottoalgebre di Lie reali di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$:

TEOREMA 3.1 *Sia* $\mathbf{G}$ *un sottogruppo chiuso di* $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. *Poniamo*

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G} \ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Allora $\mathfrak{g}$ *è una sottoalgebra di Lie reale di* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. *Inoltre*

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbf{G}$$

definisce un omeomorfismo di un intorno aperto di 0 *in* $\mathfrak{g}$ *su un intorno aperto di* e *in* $\mathbf{G}$.

DIM. È chiaro che, se $X \in \mathfrak{g}$, allora $tX \in \mathfrak{g}$ per ogni numero reale t. Dimostriamo ora che, se $X, Y \in \mathfrak{g}$, anche $X + Y \in \mathfrak{g}$. Abbiamo:

$$(\exp(tX/n)\exp(tY/n))^n \in \mathbf{G} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per il lemma III.3.6,

$$\exp(tX/n)\exp(tY/n) = \exp(t(X+Y)/n + O(t^2/n^2))$$

e quindi

$$(\exp(tX/n)\exp(tY/n))^n = \exp(t(X+Y)+O(t^2/n)).$$

Passando al limite per $n \longrightarrow \infty$, poiché $\mathbf{G}$ è chiuso, troviamo $\exp(t(X+Y)) \in \mathbf{G}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi $X+Y \in \mathfrak{g}$.

Poiché $\mathbf{G}$ è un gruppo, avremo allora anche

$$\exp(tX/n)\exp(tY/n)\exp(-t(X+Y)/n) \in \mathbf{G} \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Usiamo ancora il lemma III.3.6:

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\frac{tX}{n}\right)\exp\left(\frac{tY}{n}\right)\exp\left(\frac{-t(X+Y)}{n}\right)\\
&\qquad = \exp\left(\frac{t(X+Y)}{n} + \frac{t^2}{2n^2}[X,Y] + O\left(\frac{t^3}{n^3}\right)\right)\exp\left(\frac{-t(X+Y)}{n}\right)\\
&\qquad = \exp\left(\frac{t^2}{2n^2}[X,Y] + O\left(\frac{t^3}{n^3}\right)\right).
\end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$(\exp(tX/n)\exp(tY/n)\exp(-t(X+Y)/n))^{n^2} = \exp\left((t^2/2)[X,Y] + O(t^3/n)\right)$$

e, passando al limite per $n \longrightarrow \infty$ abbiamo

$$\exp\left(\frac{t^2}{2}[X,Y]\right) \in \mathbf{G}$$

perché $\mathbf{G}$ è chiuso. Poiché $\mathbf{G}$ è un gruppo, e quindi contiene l'inverso di ogni suo elemento, ricaviamo che anche $\exp(-(t^2/2)[X,Y]) \in \mathbf{G}$ e quindi $\exp(t[X,Y]) \in \mathbf{G}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $X,Y \in \mathfrak{g}$ e quindi $[X,Y] \in \mathfrak{g}$.

Sia $\mathbf{G}'$ il sottogruppo di $\mathbf{G}$ generato da

$$\exp(\mathfrak{g}) = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

Dico che $\mathbf{G}'$ è un intorno di e in $\mathbf{G}$. Se cosí non fosse, potremmo trovare una successione $\{g_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{G}\backslash\mathbf{G}'$ tale che $g_\nu \longrightarrow e$ per $\nu \longrightarrow \infty$. Scegliamo un sottospazio vettoriale reale V di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ complementare di $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Possiamo allora trovare intorni aperti U di 0 in $\mathfrak{g}$ e U' di 0 in V tali che

$$U \times U' \ni (X,Y) \longrightarrow \exp(X)\exp(Y) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$$

sia un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^\infty$ su un intorno W di e in $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. In particolare, possiamo supporre, a meno di passare a una sottosuccessione estratta, che

$$g_\nu = \exp(X_\nu)\exp(Y_\nu) \quad \text{con} \quad X_\nu \in U,\, Y_\nu \in U',\, \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo:

$$X_\nu \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad Y_\nu \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad \nu \longrightarrow \infty.$$

Inoltre, $Y_\nu \neq 0$ ed $\exp(Y_\nu) \in \mathbf{G}$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$. Sia m_ν un intero tale che

$$m_\nu \leq \|Y_\nu\|^{-1} < m_\nu + 1.$$

A meno di passare a una sottosuccessione, possiamo allora supporre che

$$\lim_{\nu \longrightarrow \infty} m_\nu Y_\nu = Y \in V \setminus \{0\}.$$

Per ogni coppia di interi p, q con $q > 0$ poniamo

$$p m_\nu = q s_\nu + r_\nu \quad \text{con} \quad 0 \leq r_\nu < q.$$

Poiché

$$\lim_{\nu \longrightarrow \infty} r_\nu Y_\nu = 0$$

otteniamo

$$\exp\left(\frac{p}{q}Y\right) = \lim_{\nu \longrightarrow \infty} \exp\left(\frac{p m_\nu}{q} Y_\nu\right) = \lim_{\nu \longrightarrow \infty} \left(\exp(Y_\nu)\right)^{s_\nu} \in \mathbf{G}.$$

Quindi $\mathbf{G}$ contiene gli elementi $\exp(tY)$ per ogni razionale positivo t. Poiché $\mathbf{G}$ è chiuso, $\exp(tY) \in \mathbf{G}$ per ogni t reale non negativo, e poiché $\mathbf{G}$ è un gruppo ciò vale anche per i t reali negativi. Abbiamo allora $Y \in \mathfrak{g}$, che contraddice la scelta di V. Ne segue che $\mathbf{G}'$ è un intorno aperto di e in $\mathbf{G}$ e quindi coincide con la componente connessa G_e dell'identità in $\mathbf{G}$. Inoltre, la dimostrazione mostra che l'esponenziale definisce un omeomorfismo dell'intorno aperto U di 0 in $\mathfrak{g}$ sull'intorno aperto $W \cap \mathbf{G}$ dell'identità in $\mathbf{G}$. □

Se $\mathbf{G}$ è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, chiamiamo

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G} \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$$

l'*algebra di Lie* del gruppo $\mathbf{G}$.

La dimensione di $\mathfrak{g}$ come spazio vettoriale reale si dice *dimensione* del gruppo $\mathbf{G}$.

Teorema 3.2 (Rappresentazione aggiunta) *Sia $\mathbf{G}$ un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ e sia $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ la sua algebra di Lie. Allora*

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1} \in \mathfrak{g} \quad \forall g \in \mathbf{G}, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Per ogni $g \in \mathbf{G}$ l'applicazione

$$\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

è un isomorfismo di algebre di Lie.

L'applicazione

$$\mathrm{Ad} : \mathbf{G} \ni g \to \mathrm{Ad}(g) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$$

è un omomorfismo di gruppi.

Dim. Se $X \in \mathfrak{g}$ e $g \in \mathbf{G}$, abbiamo

$$\exp(tgXg^{-1}) = g\exp(tX)g^{-1} \in \mathbf{G} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e quindi $\mathrm{Ad}(g)X \in \mathfrak{g}$. L'applicazione $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ è lineare.

Siano ora $g \in \mathbf{G}$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}[][\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y] &= (\mathrm{Ad}(g)X)(\mathrm{Ad}(g)Y) - (\mathrm{Ad}(g)Y)(\mathrm{Ad}(g)X) \\ &= (gXg^{-1})(gYg^{-1}) - (gYg^{-1})(gXg^{-1}) \\ &= g(XY - YX)g^{-1} = \mathrm{Ad}(g)[X, Y]\end{aligned}$$

e quindi $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ è un automorfismo dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Infine, abbiamo:

$$\mathrm{Ad}(g_1) \circ \mathrm{Ad}(g_2)X = g_1 \left(g_2 X g_2^{-1}\right) g_1^{-1} = (g_1 g_2) X (g_1 g_2)^{-1} = \mathrm{Ad}(g_1 g_2)X$$

per ogni $X \in \mathfrak{g}$ ed ogni $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$; questo dimostra che $\mathbf{G} \ni g \longrightarrow \mathrm{Ad}(g) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ è un omomorfismo di gruppi. □

L'applicazione

$$\mathrm{Ad} : \mathbf{G} \ni g \longrightarrow \mathrm{Ad}(g) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$$

si dice *rappresentazione lineare aggiunta di* $\mathbf{G}$.

§4 Algebre di Lie dei gruppi lineari e dei gruppi lineari speciali

Poiché l'applicazione esponenziale è definita per tutte le matrici di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, questa è per la nostra definizione l'algebra di Lie del gruppo lineare $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. Abbiamo anche osservato che in questo caso l'applicazione $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ è surgettiva.

Abbiamo poi:

Teorema 4.1 *L'algebra di Lie del gruppo speciale lineare complesso* $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ *è*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}\,(A) = 0\}\,.$$

L'algebra di Lie del gruppo lineare reale $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ *è* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

L'algebra di Lie del gruppo lineare speciale reale $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ *è*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}\,(A) = 0\}\,.$$

Dim. Sia A una matrice di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ tale che $\det \exp(tA) = 1$ per ogni numero reale t. Allora $t \cdot \mathrm{tr}\, A \in (2\pi)\mathbb{Z}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e questo equivale al fatto che $\mathrm{tr}\, A = 0$.

Se A è una matrice di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ tale che $\exp(t\,A)$ sia reale per ogni $t \in \mathbb{R}$, allora anche $(d/dt) \exp(t\,A)|_{t=0} = A$ è una matrice reale.

Da queste osservazioni segue la tesi. □

§5 Sottogruppi di Lie del gruppo lineare

I gruppi lineari hanno una struttura naturale di *varietà differenziabili* e la dimensione della loro algebra di Lie è uguale alla loro dimensione come sottovarietà differenziabili.

In questo paragrafo consideriamo sottogruppi non necessariamente chiusi del gruppo lineare.

Premettiamo alcune considerazioni di carattere generale.

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Indichiamo con $\mathcal{E}(M)$ l'anello delle funzioni reali di classe $\mathcal{C}^\infty$ definite su M e con $\mathfrak{X}(M) = \mathcal{C}^\infty(M, TM)$ l'$\mathcal{E}(M)$-modulo dei campi di vettori di classe $\mathcal{C}^\infty$ su M.

Una *distribuzione vettoriale* su M è un sotto-$\mathcal{E}(M)$-modulo $\mathcal{D}$ di $\mathfrak{X}(M)$. Per ogni punto $x \in M$ indichiamo con $\mathcal{D}_x$ il sottospazio vettoriale di T_xM formato dai valori in x dei campi di vettori di $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}_x = \{X_x \mid X \in \mathcal{D}\}\,.$$

La sua dimensione si dice il *rango* di $\mathcal{D}$ in x.

Una sottovarietà differenziabile connessa N di M si dice una *sottovarietà integrale* di $\mathcal{D}$ se $T_xN \subset \mathcal{D}_x$ per ogni $x \in N$. Chiaramente una tale N non può avere in alcun suo punto x dimensione maggiore del rango della distribuzione $\mathcal{D}$ in x. Se $T_xN = \mathcal{D}_x$ per ogni punto $x \in N$ diciamo che N è una *sottovarietà integrale completa* di $\mathcal{D}$.

Vale il

Teorema 5.1 (Frobenious) *Sia $\mathcal{D}$ una distribuzione vettoriale su X di rango costante. Sono condizioni equivalenti:*

(i) *per ogni punto x di M esite un intorno aperto U di x in M e una sottovarietà differenziabile chiusa N di U che contiene x ed è una sottovarietà integrale completa di $\mathcal{D}$;*

(ii) *la distribuzione $\mathcal{D}$ è formalmente integrabile: cioè*[8]

$$[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}\,.$$

Dim. $(i)\Rightarrow(ii)$ Siano $X, Y \in \mathcal{D}$, sia $x \in M$ e sia N una sottovarietà integrale completa di $\mathcal{D}$ passante per il punto x. Poiché le restrizioni di X e Y a N sono per ipotesi campi di vettori tangenti a N, anche il loro commutatore $[X, Y]$ è un campo di vettori tangente a N. Questo dimostra che $[X, Y]_x \in \mathcal{D}_x$. Poiché questa proprietà è verificata per ogni $x \in M$, otteniamo che $[X, Y] \in \mathcal{D}$.

$(ii)\Rightarrow(i)$ Dimostriamo, per induzione sul rango m della distribuzione $\mathcal{D}$, che per ogni punto p di M possiamo trovare un intorno aperto U di p e coordinate locali $y^1, \ldots, y^n$ in U tali che $\mathcal{D}|_U$ sia generata dalle derivate parziali rispetto alle prime m coordinate:

$$\mathcal{D}|_U = \mathcal{E}(U)\tfrac{\partial}{\partial y^1} + \cdots + \mathcal{E}(U)\tfrac{\partial}{\partial y^m}\,.$$

Fissato un punto x_0 di M, possiamo fissare un sistema di coordinate locali con centro in x_0 tali che, se m è il rango di $\mathcal{D}$, l'$\mathcal{E}(M)$-modulo $\mathcal{D}$ sia generato, nell'intorno coordinato U di x_0, da campi di vettori:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=m+1}^{n} a_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j} \qquad \text{per} \quad i = 1, \ldots, m\,.$$

Ciò è vero per $m = 1$. Fissiamo infatti coordinate locali $x^1, \ldots, x^n$ in un intorno U di p tali che $\mathcal{D}$ sia generato in U dal campo di vettori:

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{j=2}^{n} a^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}\,.$$

Consideriamo allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\phi}^1(t) = 1 \\ \dot{\phi}^j(t) = a^j(\phi(t)) & \text{se} \quad j = 2, \ldots, n \\ \phi^1(0) = 0 \\ \phi^j(0) = x^j & \text{se} \quad j = 2, \ldots, n\,. \end{cases}$$

[8] Ciò significa che $[X, Y] = XY - YX \in \mathcal{D}$ se $X, Y \in \mathcal{D}$.

Esso ha una soluzione unica $\phi^i(t; x^2, \dots, x^n)$ per $|(x^2, \dots, x^n|$ piccolo e la posizione:

$$x^i = \phi^i(y^1; y^2, \dots, y^n) \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

definisce per il teorema delle funzioni implicite un nuovo sistema di coordinate in cui $X = \partial/\partial y^1$.

Supponiamo ora $m > 1$ e la nostra asserzione vera per distribuzioni formalmente integrabili di rango minore di m. Possiamo fissare una carta coordinata con centro nel punto $p \in M$ assegnato, in modo che nelle coordinate locali $x^1, \dots, x^n$ la distribuzione $\mathcal{D}$ sia generata in U da campi di vettori della forma:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{k=m+1}^{n} a_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} \qquad \text{per} \quad i = 1, \dots, m\,.$$

Per la prima parte della dimostrazione possiamo ancora supporre che $a_1^k = 0$ in U per $k = m+1, \dots, n$, cioè $X_1 = \partial/\partial x^1$. L'integrabilitrà formale di $\mathcal{D}$ ci dà allora $[X_i, X_j] = 0$ in U per ogni $i, j = 1, \dots, m$, e questa ci dice in particolare che

$$\partial a_i^k/\partial x^1 \ = \ 0 \quad \text{per} \quad i = 2, \dots, m \;\; k = m+1, \dots, n\,.$$

Perciò $X_2, \dots, X_n$ generano in $U' = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \,|\, |x^j| < R\}$ una distribuzione formalmente integrabile di rango $(m-1)$. Per l'ipotesi induttiva possiamo trovare nuove coordinate $y^2, \dots, y^n$ tali che $X_j = \partial/\partial y^j$ per $j = 2, \dots, m$. Ponendo $y^1 = x^1$ abbiamo dimostrato la nostra asserzione.

Poiché nelle nuove coordinate abbiamo

$$X_i = \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{per} \quad i = 1, \dots, m\,,$$

otteniamo la sottovarietà integrale completa di $\mathcal{D}$ passante per p nella forma

$$N \cap U = \{y^{k+1} = 0, \ \dots, \ y^n = 0\}. \qquad \square$$

Ad ogni matrice $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ possiamo associare un campo di vettori sullo spazio Euclideo $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, identificando $A = (a_{ij})$ al campo costante

$$\overrightarrow{A} = \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\,.$$

Associeremo quindi ad ogni $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ un campo di vettori $\widetilde{A}$ su $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ ponendo

$$\widetilde{A}_x \ = \ \overrightarrow{xA} = \sum_{i,j} \sum_k x_{ik} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \quad \text{per ogni} \quad x = (x_{ij}) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})\,.$$

Si verifica allora che $[\widetilde{A}, \widetilde{B}] \ = \ \overbrace{[A, B]}^{\sim}$, dove le parentesi a primo membro rappresentano la commutazione dei campi di vettori e quelle a secondo membro il commutatore di due endomorfismi lineari.

Otteniamo in questo modo un omomorfismo iniettivo di algebre di Lie:

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \ni A \to \widetilde{A} \in \mathfrak{X}(\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})).$$

I campi di vettori $\widetilde{A}$ sono *invarianti a sinistra* su $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$: abbiamo cioè $L_{g_*}(\widetilde{A}) = \widetilde{A}$ per ongi $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Associamo a una sottoalgebra di Lie $\mathfrak{g}$ di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ la distribuzione vettoriale $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ su $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ generata dai campi di vettori $\widetilde{A}$ al variare di A in $\mathfrak{g}$. La $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ è allora formalmente integrabile e per il teorema di Frobenius esisterà una sottovarietà integrale completa massimale $\mathbf{G}$ di $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ che contiene l'identità I_n. Abbiamo:

Teorema 5.2 *Se $\mathfrak{g}$ è una sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, allora la sottovarietà integrale massimale completa $\mathbf{G}$ di $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ che contiene l'identità I_n è un sottogruppo del gruppo lineare $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$. Esso è il sottogruppo $\mathbf{G}$ di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ generato dagli elementi $\exp(A)$ al variare di A in $\mathfrak{g}$.*

Dim. Osserviamo che $\mathbf{G}$ contiene $\exp(X)$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$, in quanto la curva $\mathbb{R} \ni t \longrightarrow \exp(tX)$ è tangente a $\overrightarrow{\exp(tX)X} \in \mathcal{D}_{\exp(tX)}(\mathfrak{g})$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se fissiamo poi una coppia di elementi $X, Y \in \mathfrak{g}$, allora $\mathbf{G}$ contiene anche $\exp(X)\exp(Y)$ in quanto la curva $\mathbb{R} \ni t \longrightarrow \exp(X)\exp(tY)$ è per ogni $t \in \mathbb{R}$ tangente a $\overrightarrow{\exp(X)\exp(tY)Y} \in \mathcal{D}_{\exp(X)\exp(tY)}(\mathfrak{g})$, e contiene il punto $\exp(X)$ di $\mathbf{G}$. In modo analogo dimostriamo che $\mathbf{G}$ contiene ogni prodotto finito $\exp(X_1)\cdots\exp(X_m)$ con $X_1,\ldots,X_m \in \mathfrak{g}$ e quindi il sottogruppo $\mathbf{G}'$ di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ generato da $\{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$.

Fissiamo ora un intorno aperto U di 0 in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ tale che l'esponenziale definisca un omeomorfismo di U su $\exp(U)$. Sia $V = \exp(U \cap \mathfrak{g})$. Allora $\mathbf{G}'$ è il sottogruppo di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ generato da V.

Per dimostrare che $\mathbf{G} = \mathbf{G}'$, consideriamo su $\mathbf{G}$ la topologia di sottovarietà differenziabile di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, quella cioè per cui per ogni $g \in \mathbf{G}$ l'applicazione

$$U \cap \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow g\exp(X) \in gV$$

è un diffeomorfismo. È facile verificare allora che $\mathbf{G}'$ è aperto e chiuso in $\mathbf{G}$ e che quindi le due sottovarietà coincidono. $\square$

Occorre osservare che in generale la topologia di sottovarietà su $\mathbf{G}$ che si considera nella dimostrazione del teorema è più fine della topologia di sottospazio topologico: le due topologie coincidono quando $\mathbf{G}$ è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$.

Il gruppo $\mathbf{G}$ ottenuto nel teorema precedente, con la topologia di sottovarietà differenziabile di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, si dice il *sottogruppo (di Lie) analitico associato alla sottoalgebra di Lie* $\mathfrak{g}$.

Un sottogruppo $\mathbf{G}$ del gruppo lineare $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ che abbia al più un numero finito di componenti connesse e la cui componente connessa dell'identità $\mathbf{G}_e$ sia un sottogruppo analitico di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ si dirà un *sottogruppo di Lie del gruppo lineare* $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$.

Ad esempio, il sottogruppo analitico $\mathbf{G}$ di $\mathbf{GL}(4,\mathbb{R})$ corrispondente all'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\,A$ con

$$A = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -\pi \\ & & \pi & \end{pmatrix}$$

è la curva:

$$\mathbf{G} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & & \\ \sin t & \cos t & & \\ & & \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) \\ & & \sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

che è densa nel sottogruppo chiuso:

$$\overline{\mathbf{G}} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & & \\ \sin t & \cos t & & \\ & & \cos s & -\sin s \\ & & \sin s & \cos s \end{pmatrix} \middle| \quad t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Osserviamo che possiamo sempre considerare $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ come un sottogruppo chiuso del gruppo lineare reale $\mathbf{GL}(2n, \mathbb{R})$. La discussione che abbiamo sopra sviluppato per semplicità nel caso di sottoalgebre di Lie reali dell'algebra di Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, si può facilmente ripetere nel caso di sottogruppi di Lie reali di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Abbiamo:

PROPOSIZIONE 5.3 *Siano* $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ *sottogruppi di Lie analitici del gruppo lineare* $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, *con algebre di Lie* $\mathfrak{g}_1$ *e* $\mathfrak{g}_2$ *rispettivamente. Allora:* $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G}_2$ *se e soltanto se* $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2$.

Osserviamo che un sottogruppo di Lie $\mathbf{G}$ di un gruppo lineare $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ è un gruppo topologico con la topologia τ di sottospazio. La sua topologia τ_{Lie} di *sottogruppo di Lie* è comunque completamente determinata: essa è la meno fine tra le topologie localmente connesse che sono più fini di quella di sottospazio: sono aperti nella topologia τ_{Lie} tutte le componenti connesse degli aperti della topologia τ. Questi aperti connessi formano una base di τ_{Lie}.

L'*algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ di un sottogruppo di Lie $\mathbf{G}$ del gruppo lineare $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ è caratterizzata, come nel caso dei sottogruppi chiusi, da:

$$\mathfrak{g} = \{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G} \ \forall t \in \mathbb{R} \}.$$

CAPITOLO IV

GRUPPI LINEARI COMPATTI

Esamineremo in questo capitolo la struttura dei principali gruppi lineari compatti. Ricordiamo la loro definizione:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(n) &= \{a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \mid a^*a = I_n\} \quad \text{(gruppo unitario)} \\ \mathbf{SU}(n) &= \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{SL}(n,\mathbb{C}) \quad \text{(gruppo speciale unitario)} \\ \mathbf{O}(n) &= \{a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) \mid {}^t\!a\, a = I_n\} \quad \text{(gruppo ortogonale)} \\ \mathbf{SO}(n) &= \mathbf{O}(n) \cap \mathbf{SL}(n,\mathbb{R}) \quad \text{(gruppo speciale ortogonale)} \\ \mathbf{Sp}(n) &= \{a \in \mathbf{U}(2n) \mid {}^t\!a\, J\, a \;=\; J\} \quad \text{(gruppo unitario simplettico)} \end{aligned}$$

ove si è posto:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $\mathbf{G}$ *è un gruppo lineare compatto e* $\mathfrak{g}$ *la sua algebra di Lie, l'applicazione esponenziale* $\mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$ *ha come immagine la componente connessa* $\mathbf{G}_e$ *dell'identità di* $\mathbf{G}$.

In questo capitolo non daremo la dimostrazione generale di questo teorema, ma ne illustreremo la validità per ciascuno dei gruppi lineari compatti che considereremo.

§1 Proprietà topologiche di $\mathbf{U}(n)$

Lemma 1.1 *Ogni matrice di* $\mathbf{U}(n)$ *è diagonalizzabile in una base ortonormale di* $\mathbb{C}^n$*. I suoi autovalori hanno tutti modulo uguale a* 1.

Dim. Sia $u \in \mathbf{U}(n)$. Poiché il campo $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, u ha almeno un autovalore $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, con autovettore ϵ_1 che possiamo prendere di norma unitaria: $|\epsilon_1| = 1$. Se $v \in \epsilon_1^\perp$, allora

$$(u(v)|\epsilon_1) \;=\; \lambda^{-1}(u(v)|u(\epsilon_1)) \;=\; \lambda^{-1}(v|\epsilon_1) \;=\; 0.$$

Quindi $u(\epsilon_1^\perp) = \epsilon_1^\perp$ e la restrizione di u all'iperpiano $\epsilon_1^\perp$ è ancora un'applicazione unitaria su uno spazio vettoriale complesso di dimensione $n-1$. Per ricorrenza otteniamo che u è diagonalizzabile in una base ortonormale.

Infine, se λ è un autovalore di $u \in \mathbf{U}(n)$ e $v \neq 0$ un autovettore di u relativo all'autovalore λ, allora

$$|v|^2 \;=\; (v|v) \;=\; (u(v)|u(v)) \;=\; (\lambda v|\lambda v) \;=\; |\lambda|^2|v|^2$$

implica che $|\lambda| = 1$. $\square$

Teorema 1.2 *Il gruppo* $\mathbf{U}(n)$ *è un sottogruppo chiuso, compatto e connesso per archi di* $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$*. La sua algebra di Lie* $\mathfrak{u}(n)$ *è*

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid X + X^* = 0\} \tag{1.1}$$

ed ha dimensione reale n^2*. L'applicazione esponenziale*

$$\mathfrak{u}(n) \ni X \longrightarrow \exp(X) \in \mathbf{U}(n) \quad \textit{è surgettiva.} \tag{1.2}$$

Dim. L'applicazione $\phi : \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \ni a \longrightarrow a^*a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ è continua e quindi $U(n) = \phi^{-1}(e)$ è un chiuso, contenuto nel compatto $\{a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \mid \|a\| = 1\}$ e perciò compatto.

Abbiamo già osservato che $[\exp(A)]^* = \exp(A^*)$ per ogni $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Fissata $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, l'applicazione:

$$\alpha_A : \mathbb{R} \ni t \longrightarrow \exp(tA^*)\exp(tA) = [\exp(tA)]^*\exp(tA) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$$

è differenziabile e

$$\alpha'_A(t) = \exp(tA^*)\,(A^* + A)\exp(tA) \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi: se $A \in \mathfrak{u}(n)$, allora $\alpha_A(t) = I_n$ per ogni $t \in \mathbb{R}$; in particolare $A^* + A = \alpha'_A(0) = 0$. Viceversa, se $A^* + A = 0$, allora $\alpha'_A(t) = 0$; quindi $\alpha_A(t)$ è costante ed uguale ad I_n e perciò A appartiene all'algebra di Lie $\mathfrak{u}(n)$ di $\mathbf{U}(n)$.

Dimostriamo ora che l'applicazione $\exp : \mathfrak{u}(n) \longrightarrow \mathbf{U}(n)$ è surgettiva. Fissiamo $u \in \mathbf{U}(n)$. Per il lemma IV.1.1, possiamo trovare una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$, e quindi una matrice $a \in \mathbf{U}(n)$, tale che

$$aua^{-1} = aua^* = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\theta_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

Allora, posto

$$A = \begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i\theta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\theta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i\theta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & i\theta_n \end{pmatrix}$$

abbiamo $A \in \mathfrak{u}(n)$ e quindi $uAu^* \in \mathfrak{u}(n)$ e

$$\exp(uAu^*) = u\exp(A)u^* = a.$$

Essendo immagine dello spazio vettoriale $\mathfrak{u}(n)$ mediante l'applicazione continua exp, il gruppo $\mathbf{U}(n)$ è connesso per archi. $\square$

§2 Il gruppo speciale unitario

L'applicazione

$$\mathbf{U}(n) \ni u \longrightarrow \det u \in \mathbf{S}^1 \subset \mathbb{C}$$

è un omomorfismo continuo del gruppo unitario nel gruppo moltiplicativo $\mathbf{S}^1$ dei numeri complessi di modulo 1. Il suo nucleo

$$\mathbf{SU}(n) = \{u \in \mathbf{U}(n) \mid \det u = 1\}$$

è un sottogruppo chiuso normale di $\mathbf{U}(n)$, che si dice *gruppo unitario speciale* di ordine n.

Teorema 2.1 *L'algebra di Lie di $\mathbf{SU}(n)$ è la sottoalgebra di Lie $\mathfrak{su}(n)$ di $\mathfrak{u}(n)$, formata dalle matrici di $\mathfrak{u}(n)$ che hanno traccia nulla:*

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \mathrm{tr}\,(X) = 0\}.$$

L'applicazione

$$\mathfrak{su}(n) \ni X \longrightarrow \exp(X) \in \mathbf{SU}(n)$$

è surgettiva. Il gruppo $\mathbf{SU}(n)$ ha dimensione reale $n^2 - 1$. Esso è compatto e connesso per archi.

Dim. La prima affermazione segue dalla formula: $\det(\exp(X)) = e^{\mathrm{tr}\,(X)}$. Infatti, se $X \in \mathfrak{su}(n)$, da $\exp(tX) \in \mathbf{SU}(n)$ per ogni numero reale t, segue che:

$$\begin{cases} X + X^* = 0 \\ \mathrm{tr}\,(tX) = t \cdot \mathrm{tr}\,(X) = 2k\pi i \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{con} \quad k = k(t) \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La seconda relazione implica che $\mathrm{tr}\,(X) = 0$.

Sia ora $u \in \mathbf{SU}(n)$. Allora possiamo trovare $a \in \mathbf{U}(n)$ tale che

$$aua^{-1} = aua^* = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\theta_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

La condizione $\det u = 1$ dà allora

$$\exp(i(\theta_1 + \dots + \theta_n)) = 1$$

e quindi

$$e^{i\theta_n} = \exp(-i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1})).$$

Posto

$$U = \begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i\theta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\theta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i\theta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1}) \end{pmatrix}$$

abbiamo $U \in \mathfrak{su}(n)$ e quindi $aUa^* = aUa^{-1} \in \mathfrak{su}(n)$ per l'invarianza della traccia rispetto al coniugio in $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ e

$$\exp(aUa^*) = a \exp(U) a^* = u.$$

L'applicazione $\mathfrak{u}(n) \ni X \to i\mathrm{tr}\,(X) \in \mathbb{R}$ è un funzionale lineare non identicamente nullo su $\mathfrak{u}(n)$ e quindi $\mathfrak{su}(n)$ ha dimensione $n^2 - 1$. Il gruppo $\mathbf{SU}(n)$ è compatto perché è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{U}(n)$ e connesso per archi perché immagine continua, mediante l'applicazione esponenziale, della propria algebra di Lie $\mathfrak{su}(n)$. $\square$

§3 I gruppi $\mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{SO}(n)$

Il gruppo $\mathbf{O}(n)$ (*gruppo ortogonale di ordine* n) è il gruppo delle isometrie lineari e $\mathbf{SO}(n)$ (*gruppo speciale ortogonale o gruppo delle rotazioni di ordine* n) quello delle isometrie lineari di determinante 1 dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$.

Osserviamo che $\mathbf{SO}(n)$ è un sottogruppo normale di indice 2 di $\mathbf{O}(n)$. Poiché $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, anche $\mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{SO}(n)$ sono sottogruppi chiusi di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$.

I gruppi $\mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{SO}(n)$ sono compatti, in quanto valgono le:

$$\mathbf{O}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{SO}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$$

e quindi $\mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{SO}(n)$ sono sottogruppi chiusi del gruppo compatto $\mathbf{U}(n)$.

Teorema 3.1 *I due gruppi* $\mathbf{O}(n)$ *e* $\mathbf{SO}(n)$ *hanno la stessa algebra di Lie*

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid X + {}^tX = 0\}.$$

Dim. Sia X un elemento dell'algebra di Lie $\mathfrak{o}(n)$ di $\mathbf{O}(n)$. Poiché $\exp(tX) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) \cap \mathbf{U}(n)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, il determinante di $\exp(tX)$ sarà reale e di modulo 1. Poiché il determinante di una matrice reale è positivo, avremo allora:

$$\det(\exp(tX)) = e^{t\cdot \mathrm{tr}\,(X)} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e quindi

$$\exp(tX) \in \mathbf{SO}(n) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

dimostra che $\mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{SO}(n)$ hanno la stessa algebra di Lie. Abbiamo poi

$$I_n = {}^t(\exp(tX))\exp(tX) = \exp(t\cdot {}^tX)\exp(tX) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Poiché

$$\frac{d}{dt}\left[{}^t(\exp(tX))\exp(tX)\right] = \exp(t\cdot {}^tX)\left({}^tX + X\right)\exp(tX) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

la condizione ${}^tX + X = 0$ è necessaria e sufficiente affinché $X \in \mathfrak{o}(n)$. $\square$

Teorema 3.2 *L'applicazione*

$$\mathfrak{o}(n) \ni X \to \exp(X) \in \mathbf{SO}(n)$$

è surgettiva.

Dim. Per ogni rotazione $a \in \mathbf{SO}(n)$, possiamo trovare una decomposizione di $\mathbb{R}^n$ in somma diretta di sottospazi a-invarianti e due a due ortogonali

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$$

tale che ogni sottospazio V_j abbia dimensione minore o uguale a 2 e la restrizione di a ai sottospazi V_j della decomposizione che hanno dimensione 1 sia l'identità.

Su ciascuno dei sottospazi V_j di dimensione 2 la a definisce una rotazione dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^2$. Sarà quindi sufficiente dimostrare che

$$\mathfrak{o}(2) \ni X \to \mathbf{SO}(2)$$

è surgettiva. Un elemento di $\mathfrak{o}(2)$ è una matrice della forma

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$A(\theta)^{2h} = \begin{pmatrix} (-1)^h\theta^{2h} & 0 \\ 0 & (-1)^h\theta^{2h} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A(\theta)^{2h+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^h\theta^{2h+1} \\ -(-1)^h\theta^{2h+1} & 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$\exp(A(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ciò dimostra che $\exp : \mathfrak{o}(2) \to \mathbf{SO}(2)$ è surgettiva. La dimostrazione è completa. □

Teorema 3.3 $\mathbf{SO}(n)$ *è un gruppo compatto e connesso per archi di dimensione* $n(n-1)/2$. *Il gruppo* $\mathbf{O}(n)$ *è unione di due componenti connesse, omeomorfe a* $\mathbf{SO}(n)$.

Dim. Abbiamo già osservato che i gruppi $\mathbf{SO}(n)$ e $\mathbf{O}(n)$ sono compatti, in quanto sottogruppi chiusi di $\mathbf{U}(n)$. Inoltre $\mathbf{SO}(n)$ è connesso per archi perché immagine mediante l'esponenziale dello spazio vettoriale $\mathfrak{o}(n)$. Questo ha dimensione $n(n-1)/2$, in quanto le matrici di $\mathfrak{o}(n)$ sono le matrici antisimmetriche e queste si parametrizzano con i coefficienti che sono al di sopra della diagonale principale.

In quanto immagine dell'algebra di Lie di $\mathbf{O}(n)$ mediante l'applicazione esponenziale, $\mathbf{SO}(n)$ è la componente connessa dell'identità in $\mathbf{O}(n)$. La moltiplicazione a sinistra per la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}(n)$$

è un omeomorfismo di $\mathbf{SO}(n)$ su $\mathbf{O}(n) \setminus \mathbf{SO}(n)$ e quindi $\mathbf{O}(n)$ ha esattamente due componenti connesse, omeomorfe a $\mathbf{SO}(n)$. □

Osserviamo che $\mathbf{SO}(1)$ è un punto, mentre l'applicazione

$$\mathbf{SO}(2) \ni a \to a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

definisce un omeomorfismo di $\mathbf{SO}(2)$ su S^1.

§4 L'omomorfismo canonico $\mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SO}(3)$

Le algebre di Lie $\mathfrak{o}(3)$ e $\mathfrak{su}(2)$ sono algebre di Lie di dimensione reale 3. Abbiamo

$$\mathfrak{o}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & -z \\ -y & z & 0 \end{pmatrix} \,|\, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

e
$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix} \mid x,y,z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Poniamo
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
e
$$B_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora A_1, A_2, A_3 formano una base di $\mathfrak{o}(3)$ e B_1, B_2, B_3 una base di $\mathfrak{su}(2)$ e il prodotto di Lie delle due algebre è descritto nelle due basi dalle tabelle:

$$[A_j, A_h] = A_k,\ [B_j, B_h] = B_k \Leftrightarrow (j,h,k) \text{ è una permutazione positiva di } \{1,2,3\}.$$

Le due algebre sono quindi isomorfe e isomorfe all'algebra di Lie definita su $\mathbb{R}^3$ dal prodotto vettore.

Indichiamo con
$$\mathbf{s} : \mathfrak{o}(3) \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$$
l'isomorfismo di algebre di Lie che fa corrispondere ad $A_j \in \mathfrak{o}(3)$ l'elemento $B_j \in \mathfrak{su}(2)$.

Per descrivere una rappresentazione di $\mathbf{SU}(2)$ nel gruppo delle rotazioni di $\mathbb{R}^3$, introduciamo l'isomorfismo $\mathbb{R}$-lineare:

$$\lambda : \mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2).$$

Abbiamo
$$\mathbf{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid (\alpha,\beta) \in S^3 \right\} \simeq S^3 \subset \mathbb{C}^2.$$

Facciamo operare $\mathbf{SU}(2)$ su $\mathfrak{su}(2)$ mediante la rappresentazione aggiunta:

$$\mathbf{SU}(2) \times \mathfrak{su}(2) \ni (u, X) \longrightarrow \mathrm{Ad}(u)X = uXu^{-1} \in \mathfrak{su}(2).$$

L'isomorfismo λ ci permette di definire una rappresentazione lineare

$$\rho : \mathbf{SU}(2) \longrightarrow \mathbf{GL}(3,\mathbb{R})$$

mediante
$$\rho(u)v = \lambda^{-1}(\mathrm{ad}(u)\lambda(v)) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

Lemma 4.1 *Per ogni $u \in \mathbf{SU}(2)$, è $\rho(u) \in \mathbf{SO}(3)$.*
Dim. Osserviamo che

$$|v|^2 = \det \lambda(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

Abbiamo perciò

$$|\rho(u)v|^2 = \det(u\lambda(v)u^{-1}) = \det\lambda(v) = |v|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

Teorema 4.2 *L'applicazione*

$$\rho : \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SO}(3)$$

è un omomorfismo di gruppi surgettivo. Il suo nucleo è il sottogruppo normale

$$\{\pm I_2\} \subset \mathbf{SU}(2).$$

Dim. Siano $a, b \in \mathbf{SU}(2)$. Allora

$$\begin{aligned} \rho(a)\circ\rho(b)v &= \rho(a)(\lambda^{-1}\mathrm{Ad}(b)\lambda(v)) \\ &= \lambda^{-1}\circ\mathrm{Ad}(a)\circ\lambda\circ\lambda^{-1}\mathrm{Ad}(b)\lambda(v) \\ &= \lambda^{-1}\circ\mathrm{Ad}(a)\circ\mathrm{Ad}(b)\lambda(v) \\ &= \lambda^{-1}\circ\mathrm{Ad}(ab)\lambda(v) \\ &= \rho(ab)v \qquad \forall v \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Ciò dimostra che ρ è un omomorfismo. Calcoliamone il nucleo. Esso è formato dalle trasformazioni $u \in \mathbf{SU}(2)$ tali che

$$\mathrm{Ad}(u)X = X \quad \forall X \in \mathfrak{su}(2),$$

cioè

$$[u, X] = uX - Xu = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{su}(2).$$

Scrivendo queste identità con $X = B_j$, $(j = 1, 2, 3)$, si ottiene, per $u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}$:

$$\beta = 0,\ \alpha = \pm 1.$$

Per completare la dimostrazione, basta osservare che la trasformazione $\rho : \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SO}(3)$ può essere definita dal diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{su}(2) & \xrightarrow{\exp} & \mathbf{SU}(2) \\ {\scriptstyle \mathbf{s}}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ \mathfrak{o}(3) & \xrightarrow[\exp]{} & \mathbf{SO}(3). \end{array}$$

Da questo diagramma otteniamo immediatamente che ρ è surgettiva in quanto

$$\rho\circ\exp|_{\mathfrak{su}(2)}\circ\mathbf{s}^{-1} = \exp|_{\mathfrak{o}(3)}$$

è surgettiva. $\square$

Teorema 4.3 *Il gruppo topologico* $\mathbf{SO}(3)$ *è omeomorfo allo spazio proiettivo* $\mathbb{RP}^3$.

Dim. Il quoziente iniettivo della rappresentazione $\rho : \mathbf{SU}(2) \longrightarrow \mathbf{SO}(3)$ dà un omeomorfismo
$$\mathbf{SU}(2)/_{\{\pm I_2\}} \to \mathbf{SO}(3).$$
Il quoziente $\mathbf{SU}(2)/_{\{\pm I_2\}}$ è omeomorfo al quoziente di $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ rispetto alla mappa antipodale
$$S^3 \ni \xi \longrightarrow -\xi \in S^3$$
e quindi allo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^3$. □

Osservazione L'omomorfismo canonico $\mathbf{SU}(2) \longrightarrow \mathbf{SO}(3)$ ha un importante significato fisico: il fattore $1/2$ che compare nell'isomorfismo $\mathbf{s}$ tra l'algebra di Lie delle matrici 3×3 antisimmetriche e l'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$ delle matrici antihermitiane 2×2 a traccia nulla si può interpretare come uno *spin*.

Angoli di Eulero

Per ricavare la surgettività dell'applicazione $\rho : \mathbf{SU}(2) \longrightarrow \mathbf{SO}(3)$ possiamo utilizzare la rappresentazione di $\mathbf{SO}(3)$ mediante gli *angoli di Eulero*. Consideriamo gli omomorfismi
$$\tau, \sigma : S^1 \longrightarrow \mathbf{SO}(3)$$
definiti da
$$\tau(e^{i\phi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \sigma(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$
(rotazioni intorno all'asse x e rotazioni intorno all'asse y).

Lemma 4.4 *L'applicazione*
$$\alpha : S^1 \times S^1 \times S^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) \longrightarrow \tau(e^{i\theta_1}) \circ \sigma(e^{i\theta_2}) \circ \tau(e^{i\theta_3}) \in \mathbf{SO}(3)$$
è surgettiva.

Dim. Sia e_1, e_2, e_3 la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Un'applicazione $a \in \mathbf{SO}(3)$ è completamente determinata dall'immagine dei vettori e_1, e_2. Poniamo $\epsilon_j = a(e_j)$ per $j = 1, 2$. Poiché $|\epsilon_1| = 1$, abbiamo per opportuni $\phi, \psi \in \mathbb{R}$:
$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\phi\sin\psi \\ \cos\phi\sin\psi \end{pmatrix}$$
(coordinate polari in $\mathbb{R}^3$). Una base ortogonale di $\epsilon_1^\perp$ è data dai vettori
$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\phi \\ -\sin\phi \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\sin\psi \\ \sin\phi\cos\psi \\ \cos\phi\cos\psi \end{pmatrix}.$$
Quindi $\epsilon_2 = v_1\cos\theta + v_2\sin\theta$ per un opportuno $\theta \in \mathbb{R}$. Chiaramente
$$a = \alpha(e^{-i\phi}, e^{i\psi}, e^{i\theta}).$$

Osservazione In generale gli angoli di Eulero si riferiscono a una scelta di ϕ, ψ, θ con $0 \le \psi < \pi$ e $0 \le \phi, \theta < 2\pi$.

Definiamo ora

$$\hat{\tau}, \hat{\sigma} : S^1 \to \mathbf{SU}(2)$$

mediante

$$\hat{\tau}(e^{i\phi}) = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Sia

$$\hat{\alpha} : S^1 \times S^1 \times S^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) \longrightarrow \hat{\tau}(e^{i\theta_1}) \circ \hat{\sigma}(e^{i\theta_2}) \circ \hat{\tau}(e^{i\theta_3}) \in \mathbf{SU}(2).$$

Otteniamo allora il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 \times S^1 & \xrightarrow{=} & S^1 \times S^1 \times S^1 \\ {\scriptstyle\hat{\alpha}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ \mathbf{SU}(2) & \xrightarrow[\rho]{} & \mathbf{SO}(3). \end{array}$$

§5 Il gruppo unitario simplettico $\mathbf{Sp}(n)$

Abbiamo definito il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ come il gruppo di tutte le matrici complesse unitarie a di ordine $2n$ che soddisfano ${}^t a\, J\, a = J$, ove $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$.

Il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ *si può identificare al gruppo delle matrici* $n \times n$ *a coefficienti quaternioni che preservano il prodotto scalare canonico di* $\mathbb{H}^n$.

Ricordiamo che il corpo (non commutativo) $\mathbb{H}$ dei quaternioni di Hamilton si può identificare all'anello associativo delle matrici 2×2 a coefficienti complessi della forma $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ con $z, w \in \mathbb{C}$. Un numero complesso z si rappresenta con la matrice $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$. Indichiamo con j la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Possiamo allora scrivere il quaternione $\mathbf{q}$ mediante:

$$\mathbf{q} = z + wj = z + j\bar{w}.$$

Il prodotto di due quaternioni si può esprimere mediante:

$$(z_1 + w_1 j) \cdot (z_2 + w_2 j) = (z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2) + (z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2) j \quad \forall z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}.$$

Questa formula si ricava immediatamente da:

$$jz = \bar{z} j \ \ \forall z \in \mathbb{C} \qquad \text{e} \qquad j^2 = -1.$$

Il coniugato di un quaternione (corrispondente all'aggiunta della matrice con cui è definito) è dato da:

$$\overline{z + wj} = \bar{z} - wj.$$

Indichiamo con σ l'isomorfismo:

$$\sigma : \mathbb{C}^{2n} \ni (z^h, w^h)_{1\leq h\leq n} \longrightarrow (z^h \ + \ j\, w^h)_{1\leq h\leq n} \in \mathbb{H}^n$$

e con

$$\varsigma : \mathbb{C}^{2n} \ni (z^h, w^h) \to (\bar{z}^h, \bar{w}^h) \in \mathbb{C}^{2n}$$

il coniugio. Allora, indicando con $(\cdot j)$ la moltiplicazione a destra di un vettore di $\mathbb{H}^n$ per il quaternione j, abbiamo:

$$\sigma^{-1} \circ (\cdot j) \circ \sigma = -J \circ \varsigma = \begin{pmatrix} & -I_n \\ I_n & \end{pmatrix} \circ \varsigma\,.$$

Consideriamo una matrice $B = C + jD = (C_{hk} + jD_{hk})_{1\leq h,k\leq n}$ con coefficienti $C_{hk} + jD_{hk} \in \mathbb{H}$, $C_{hk}, D_{hk} \in \mathbb{C}$. Se $u = v + jw \in \mathbb{H}^n$, con $v, w \in \mathbb{C}^n$, abbiamo

$$Bu = (Cv - \bar{D}w) + j(Dv + \bar{C}w).$$

Ad essa risulta dunque associata una $\tilde{B} \in \mathfrak{M}(2n, 2n; \mathbb{C})$ rappresentata dalla matrice:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} C & D \\ -\bar{D} & \bar{C} \end{pmatrix}.$$

Le matrici di questa forma sono tutte e sole le matrici $2n \times 2n$ complesse A che soddisfano la:

$$(*) \qquad AJ = J\bar{A}.$$

Esse formano una sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C})$, che si indica con $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$. Gli elementi invertibili di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$ formano il *gruppo lineare di ordine n sui quaternioni*, che indichiamo con $\mathbf{GL}(n, \mathbb{H})$.

Consideriamo ora un elemento $g \in \mathbf{Sp}(n)$. Esso è rappresentato da una matrice complessa unitaria $(2n)\times(2n)$, che verifica ${}^t g\, J\, g = J$. Poiché ${}^t g = \bar{g}^{-1}$, sostituendo otteniamo $(*)$.

Abbiamo perciò un'inclusione naturale: $\mathbf{Sp}(n) \hookrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{H})$.

Possiamo quindi caratterizzare $\mathbf{Sp}(n)$ come il gruppo delle trasformazioni $\mathbb{H}$-lineari su $\mathbb{H}^n$, che lasciano invariato il prodotto scalare sui quaternioni:

$$(**) \qquad (u_1|u_2)_{\mathbb{H}} = \sum_{h=1}^{n} u_1^h \bar{u}_2^h.$$

Se scriviamo le componenti u_l^h nella forma $v_l^h + jw_l^h$ con $v_l^h, w_l^h \in \mathbb{C}$ per $l = 1, 2$, troviamo per il prodotto scalare sui quaternioni l'espressione:

$$\begin{aligned}(u_1|u_2)_{\mathbb{H}} &= \textstyle\sum_{h=1}^n v_1^h \bar{v}_2^h + \bar{w}_1^h w_2^h + j \sum_{h=1}^n w_1^h \bar{v}_2^h - \bar{v}_1^h w_2^h \\ &= \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ w_1 \end{pmatrix}^* I_{2n} \begin{pmatrix} \bar{v}_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \ + \ \left[{}^t\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ w_1 \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \bar{v}_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \right] j\,,\end{aligned}$$

da cui segue che $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ consiste esattamente delle matrici di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{H})$ che preservano il prodotto $(**)$.

Teorema 5.1 *Per ogni intero $n \geq 1$ il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ è compatto e connesso per archi. La sua algebra di Lie è*

$$\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) \mid {}^tXJ + JX = 0\,,\ X^* + X = 0\,\}.$$

L'esponenziale definisce un'applicazione surgettiva

$$\exp : \mathfrak{sp}(n) \longrightarrow \mathbf{Sp}(n)\,.$$

Dim. $\mathbf{Sp}(n)$ è compatto perché è un sottospazio chiuso di $\mathbf{U}(2n)$, che è compatto.

La caratterizzazione della sua algebra di Lie $\mathfrak{sp}(n)$ si ottiene con argomenti simili a quelli utilizzati in precedenza: si osserva che $\mathfrak{sp}(n) \subset \mathfrak{u}(2n)$ e che, posto $\gamma(t) = \exp(t\,{}^tX)\,J\,\exp(tX)$, risulta:

$$\gamma'(t) \,=\, \exp(t\,{}^tX)\,(J\,{}^tX \,+\, X\,J)\,\exp(tX).$$

Da questa si ottiene facilmente che la condizione $J\,{}^tX + X\,J = 0$ è necessaria e sufficiente affinché una $X \in \mathfrak{u}(2n)$ appartenga a $\mathfrak{sp}(n)$. Moltiplicando a sinistra per J e calcolando la traccia troviamo che $\operatorname{tr} X = 0$ (e quindi $X \in \mathfrak{su}(2n)$) e moltiplicando a destra e a sinistra per J troviamo la condizione equivalente ${}^tXJ + JX = 0$.

Osserviamo infine che *per ogni $g \in \mathbf{Sp}(n)$ possiamo trovare $a \in \mathbf{Sp}(n)$ tale che*

$$(*) \qquad a\,g\,a^{-1} \,=\, \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{i\theta_n} & & & \\ & & & e^{-i\theta_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{-i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

Sia infatti λ_1 un autovalore di g e sia v_1 un suo autovettore con $|v_1| = 1$. Abbiamo allora:

$$a(J\bar{v}_1) = J\bar{a}\bar{v}_1 = J(\bar{\lambda}_1 v_1) = \bar{\lambda}_1(J\bar{v}_1)\,.$$

Ragionando per ricorrenza, troviamo una base ortonormale di $\mathbb{C}^{2n}$ della forma:

$$v_1,\ \ldots,\ v_n,\ J(v_1),\ \ldots,\ J(v_n)\,.$$

I suoi vettori formano le colonne della matrice $a \in \mathbf{Sp}(n)$ per cui $a^{-1}ga$ ha la forma diagonale $(*)$.

La matrice

$$X = a^{-1} \begin{pmatrix} i\theta_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & i\theta_n & & & \\ & & & -i\theta_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -i\theta_n \end{pmatrix} a$$

appartiene a $\mathfrak{sp}(n)$ ed $\exp(X) = g$.

Ciò dimostra la surgettività dell'esponenziale e quindi il fatto che $\mathbf{Sp}(n)$ è connesso per archi. $\square$

§6 Sfere e gruppi compatti

Sia $\mathbb{k}$ uno dei corpi $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e indichiamo con $e_1, e_2, \ldots, e_n$ la base canonica di $\mathbb{k}^n$. Possiamo allora identificare $\mathbf{O}(n-1)$ (risp. $\mathbf{SO}(n-1)$, $\mathbf{U}(n-1)$, $\mathbf{SU}(n-1)$,

$\mathbf{Sp}(n-1)$) al sottogruppo di $\mathbf{O}(n)$ (risp. $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{SU}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$) delle trasformazioni che lasciano fisso il vettore e_n. Abbiamo allora i seguenti omeomorfismi:

Teorema 6.1

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(1) \simeq \mathbf{SO}(2) &\simeq S^1 \\ \mathbf{SU}(2) \simeq \mathbf{Sp}(1) &\simeq S^3 \\ \mathbf{O}(n)/\mathbf{O}(n-1) \simeq \mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-1) &\simeq S^{n-1} \quad (n>1) \\ \mathbf{U}(n)/\mathbf{U}(n-1) \simeq \mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-1) &\simeq S^{2n-1} \quad (n>1) \\ \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1) &\simeq S^{4n-1} \quad (n>1) \end{aligned}$$

Dim. Dim In ciascuno dei casi l'omeomorfismo cercato è il quoziente iniettivo dell'applicazione $g \longrightarrow g(e_n)$.

Teorema 6.2 *Per ogni $n \geq 2$ il gruppo $\mathbf{U}(n)$ è omeomorfo al prodotto topologico $\mathbf{SU}(n) \times S^1$.*

Dim. Indichiamo con $D_n(\lambda)$ la matrice $n \times n$:

$$D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} .$$

Definiamo allora l'omeomorfismo cercato mediante:

$$\mathbf{SU}(n) \times S^1 \ni (g, \lambda) \longrightarrow D_n(\lambda)\, g \in \mathbf{U}(n)\,;$$

il suo inverso è dato da:

$$\mathbf{U}(n) \ni g \longrightarrow (D_n(1/\det g)\, g, \det g) \in \mathbf{SU}(n) \times S^1\,.$$

$\square$

Abbiamo le successioni esatte di omotopia dei fibrati:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_2(S^n) & \longrightarrow & & \\ \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SO}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^n) & \longrightarrow & \mathbf{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_2(S^{2n+1}) & \longrightarrow & & \\ \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SU}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{SU}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^{2n+1}) & \longrightarrow & \mathbf{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \cdots & \longrightarrow & \pi_2(S^{3n+1}) & \longrightarrow & & \\ \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{Sp}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{Sp}(n+1)) & \longrightarrow & \pi_1(S^{3n+1}) & \longrightarrow & \mathbf{1} \end{array}$$

da cui si deduce:

Teorema 6.3 *I gruppi $\mathbf{SU}(n)$ e $\mathbf{Sp}(n)$ sono semplicemente connessi per ogni $n \geq 1$. Per ogni $n \geq 2$ il gruppo $\mathbf{SO}(n)$ non è semplicemente connesso e $\pi_1(\mathbf{SO}(2)) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbf{SO}(n)) \simeq \mathbb{Z}_2$ per ogni $n \geq 3$.*

§7 Rivestimenti e gruppo degli spinori

Teorema 7.1 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo topologico connesso e localmente connesso per archi. Il gruppo fondamentale* $\pi_1(\mathbf{G})$ *è commutativo.*

Sia $\hat{\mathbf{G}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}$ *un rivestimento connesso di* $\mathbf{G}$*. Fissato un punto* $\hat{e} \in \pi^{-1}(e)$*, vi è un'unica struttura di gruppo topologico su* $\hat{\mathbf{G}}$ *per cui* $\hat{e}$ *sia l'identità di* $\hat{\mathbf{G}}$ *e* π *sia un omomorfismo di gruppi topologici.*

Dim. Se $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow \mathbf{G}$ sono cammini continui con $\alpha(0) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1) = e$, consideriamo l'applicazione continua:

$$F : [0,1] \times [0,1] \ni (t,s) \longrightarrow \alpha(t) \cdot \beta(s) \in \mathbf{G}\,.$$

Allora

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \begin{cases} F(2t, 0) & \text{se} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ F(1, 2t-1) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

e

$$(\beta \cdot \alpha)(t) = \begin{cases} F(0, 2t) & \text{se} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ F(2t-1, 1) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

e possiamo definire un'omotetia tra $\alpha \cdot \beta$ e $\beta \cdot \alpha$ mediante:

$$G(s,t) = \begin{cases} F((1-s)2t, 2st) & \text{se} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ F((1-s) + s(2t-1), s + (1-s)(2t-1)) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1\,. \end{cases}$$

Ciò dimostra che $\pi_1(\mathbf{G})$ è un gruppo abeliano.

Sia ora $\pi : \hat{\mathbf{G}} \longrightarrow \mathbf{G}$ un rivestimento connesso di $\mathbf{G}$. Osserviamo che $\hat{\mathbf{G}}$ è connesso per archi.

Per ogni $\hat{g} \in \hat{\mathbf{G}}$ indichiamo con $\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{g})$ il gruppo fondamentale di $\hat{\mathbf{G}}$ con punto base $\hat{g}$. Dimostriamo innanzitutto il seguente:

Lemma 7.2 *Sia* $g \in \mathbf{G}$ *e sia* $\hat{g} \in \pi^{-1}(g)$*. Allora per ogni* $\xi \in \pi_*(\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{e}))$ *risulta* $L_{g*}(\xi) \in \pi_*(\pi_1(\hat{\mathbf{G}}, \hat{g}))$*.*

Dim. Sia $\hat{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \hat{\mathbf{G}}$ un laccetto con $\hat{\alpha}(0) = \hat{\alpha}(1) = \hat{e}$ e poniamo $\alpha = \pi \circ \alpha$. Dobbiamo dimostrare che il laccetto $L_g \circ \alpha : [0,1] \ni t \longrightarrow L_g(\alpha(t)) \in \mathbf{G}$, si rialza a un laccetto di punto iniziale $\hat{g}$.

Sia $\hat{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \hat{\mathbf{G}}$ un cammino continuo con estremi $\hat{e}$ e $\hat{g}$ e sia $\gamma = \pi \circ \hat{\gamma}$. Consideriamo l'applicazione continua:

$$[0,1] \times [0,1] \ni (t,s) \longrightarrow G(t,s) = \gamma(s) \cdot \alpha(t) \in \mathbf{G}\,.$$

Essa si rialza ad un'applicazione continua $\hat{G}(t,s)$ e $t \longrightarrow \hat{G}(t,1)$ rialza $L_g \circ \alpha$. Per dimostrare che questo è un laccetto, consideriamo l'insieme A degli $s \in [0,1]$ tali che $\hat{G}(0,s) = \hat{G}(1,s)$. Esso contiene 0, è chiuso perché $\hat{\mathbf{G}}$ è uno spazio di Hausdorff, ed è aperto perché $\pi \circ \hat{G}(0,s) = \gamma(s) = \pi \circ \hat{G}(1,s)$ e $\hat{\mathbf{G}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}$ è un rivestimento. Coincide quindi con $[0,1]$: in particolare $\hat{G}(0,1) = \hat{G}(1,1)$ e $t \longrightarrow \hat{G}(t,1)$ è un laccetto. $\square$

Conclusione della dimostrazione del Teorema 7.1

Siano $\hat{g}_1$ e $\hat{g}_2$ due elementi di $\hat{\mathbf{G}}$ e siano $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 : [0,1] \longrightarrow \hat{\mathbf{G}}$ cammini continui con $\hat{\alpha}_i(0) = \hat{\beta}_i(0) = \hat{e}_i$, $\hat{\alpha}_i(1) = \hat{\beta}_i(1) = \hat{g}_i$, per $i = 1, 2$. Poniamo $\alpha_i = \pi \circ \hat{\alpha}_i$, $\beta_i = \pi \circ \hat{\beta}_i$ $(i = 1, 2)$. Consideriamo i cammini continui $\alpha : [0,1] \ni t \longrightarrow \alpha_1(t)\alpha_2(t) \in \mathbf{G}$ e $\beta : [0,1] \ni t \longrightarrow \beta_1(t)\beta_2(t) \in \mathbf{G}$ e siano $\hat{\alpha} : [0,1] \longrightarrow \hat{\mathbf{G}}$ e $\hat{\beta} : [0,1] \rightarrow \hat{\mathbf{G}}$ i loro rialzamenti con punto iniziale $\hat{e}$. Dimostriamo che $\hat{\alpha}(1) = \hat{\beta}(1)$. A questo scopo osserviamo che

$$F(t,s) = \begin{cases} \alpha_1(t+st) \cdot \alpha_2(t-st) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_1(s+t-st) \cdot \alpha_2(t+st-s) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è un'omotetia tra α e

$$\alpha' = \alpha_1 \cdot (L_{g_1} \circ \alpha_2) = \begin{cases} \alpha_1(2t) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1 \cdot \alpha_2(2t-1) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1\,. \end{cases}$$

Se indichiamo con $\hat{\alpha}'$ il rilevamento di α' con punto iniziale $\hat{e}$, avremo quindi $\hat{\alpha}'(1) = \hat{\alpha}(1)$. Analogamente, posto

$$\beta' = \beta_1 \cdot (L_{g_1} \circ \beta_2) = \begin{cases} \beta_1(2t) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1 \cdot \beta_2(2t-1) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1\,, \end{cases}$$

i rilevamenti $\hat{\beta}$ e $\hat{\beta}'$ di β e β' con punto iniziale $\hat{e}$ hanno lo stesso punto finale in $\hat{\mathbf{G}}$.

Osserviamo ora che i punti finali di $\hat{\alpha}$ e di $\hat{\beta}$ sono i punti finali dei rialzamenti dei cammini $L_{g_1} \circ \alpha_2$ e $L_{g_1} \circ \beta_2$ con punto iniziale $\hat{g}_1$. Questi coincidono perché $(L_{g_1} \circ \alpha_2) \cdot (L_{g_1} \circ \beta_2)^{-1} = L_{g_1} \circ (\alpha_2 \cdot \beta_2^{-1})$ è l'immagine mediante la traslazione a sinistra per g_1 del laccetto $\alpha_2 \cdot \beta_2^{-1}$, che per ipotesi è immagine mediante π di un laccetto in $\hat{\mathbf{G}}$ di punto iniziale $\hat{e}$. Per il Lemma IV.7.2, esso è allora l'immagine di un laccetto di punto iniziale $\hat{g}_1$ in $\hat{\mathbf{G}}$.

Possiamo quindi definire:

$$\hat{g}_1\hat{g}_2 \;=\; \hat{\alpha}(1)$$

in quanto la definizione non dipende dalla scelta dei cammini α_1 e β_1 che congiungono $\hat{e}$ ai punti $\hat{g}_1$, $\hat{g}_2$ rispettivamente.

Si verifica poi senza difficoltà che con questa definizione di prodotto $\hat{\mathbf{G}}$ è un gruppo topologico con unità $\hat{e}$ e che $\pi : \hat{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ è un omomorfismo di gruppi. $\square$

Il rivestimento universale di $\mathbf{SO}(n)$, per $n \geq 3$, è un gruppo topologico che si indica con $\mathbf{Spin}(n)$ e si dice il *gruppo degli spinori di ordine n.* Il rivestimento $\mathbf{Spin}(n) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SO}(n)$ è a due fogli ed è un omomorfismo di gruppi. Osserviamo che $\mathbf{Spin}(3) \simeq \mathbf{SU}(2)$.

CAPITOLO V

LA LISTA DI CARTAN DEI GRUPPI CLASSICI

Un *gruppo di Lie* è un gruppo topologico separato localmente isomorfo[9] a un sottogruppo di Lie del gruppo lineare reale.

La sua *algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ si identifica all'algebrea di Lie del corrispondente sottogruppo di Lie del gruppo lineare.

Ogni gruppo di Lie $\mathbf{G}$ con un numero finito di componenti connesse è diffeomorfo ad una varietà prodotto $\mathbf{K}\times\mathbb{R}^k$, ove $\mathbf{K}$ è un sottogruppo di Lie compatto massimale di $\mathbf{G}$. In questo capitolo introduciamo i gruppi lineari classici della lista di Cartan e per ciascuno di essi descriviamo questa decomposizione.

Per una presentazione opportuna di $\mathbf{G}$ come gruppo lineare, cioè come sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, il sottogruppo compatto massimale $\mathbf{K}$ sarà l'intersezione $\mathbf{G}\cap\mathbf{U}(n)$ di $\mathbf{G}$ con il gruppo delle matrici unitarie.

§1 Proprietà topologiche dei gruppi classici

Un sottogruppo $\mathbf{G}$ del gruppo lineare $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ si dice *pseudoalgebrico* se può essere definito mediante un sistema di equazioni:

$$(*) \qquad f_1(g,g^*) \,=\, ... \,=\, f_N(g,g^*) \,=\, 0$$

dove $f_1,...,f_N$ sono polinomi a coefficienti reali delle parti reali e immaginarie dei coefficienti di $g\in\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. I sottogruppi pseudoalgebrici sono ovviamente chiusi.

I gruppi classici della lista di Cartan che introdurremo nel paragrafo seguente sono tutti pseudoalgebrici.

Il seguente teorema ci dà un metodo per rappresentarli topologicamente come il prodotto del sottogruppo compatto $\mathbf{G}\cap\mathbf{U}(n)$ e di uno spazio euclideo $\mathbb{R}^k$.

Teorema 1.1 *Sia $\mathbf{G}$ un sottogruppo pseudoalgebrico connesso di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ che goda della proprietà:*

$$g\in\mathbf{G}\Rightarrow g^*\in\mathbf{G}\,,$$

e sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di $\mathbf{G}$. Allora l'applicazione

$$(\mathbf{G}\cap\mathbf{U}(n))\times(\mathfrak{g}\cap\mathfrak{p})\ni(u,B)\rightarrow u\exp(B)\in\mathbf{G}$$

è un omeomorfismo.

Dim. Per il Teorema II.4.1 ogni elemento $g\in\mathbf{G}\subset\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ si scrive in modo unico come

$$g \,=\, u\circ p \quad \text{con} \quad u\in\mathbf{U}(n),\, p\in\mathbf{P}_+(n).$$

[9] $\mathbf{G}$ è un gruppo di Lie se esiste un sottogruppo di Lie $\mathbf{G}'$ di un gruppo lineare $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ e un omeomorfismo $\phi:U\longrightarrow U'$ di un intorno dell'identità di $\mathbf{G}$ su un intorno dell'identità U' di $\mathbf{G}'$ tale che, se $g_1,g_2,g_1g_2\in U$, allora $\phi(g_1g_2)=\phi(g_1)\phi(g_2)$.

Poiché per ipotesi anche

$$g^* = p \circ u^* = p \circ u^{-1} \in \mathbf{G},$$

il gruppo $\mathbf{G}$ contiene l'elemento

$$g^* g = p^2.$$

Per il Teorema II.3.2, vi è un unico elemento $B \in \mathfrak{p}(n)$ tale che

$$p = \exp(B).$$

Sia $a \in \mathbf{U}(n)$ tale che $a \circ B \circ a^*$ sia in forma diagonale:

$$a \circ B \circ a^* = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \theta_n \end{pmatrix}$$

con $\theta_j \in \mathbb{R}$ per $j = 1, ..., n$. Il gruppo $\mathrm{ad}(a)(\mathbf{G})$ è ancora un sottogruppo pseudoalgebrico di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ e quindi le matrici diagonali reali di $\mathrm{ad}(a)(\mathbf{G})$ formano un sottogruppo pseudoalgebrico $\mathbf{Q}$ di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. Possiamo perciò trovare un insieme finito di polinomi $f_1, ..., f_N \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ tali che la matrice diagonale reale

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$$

appartenga a $\mathbf{Q}$ se e soltanto se

$$f_j(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N) = 0 \quad \text{per} \quad j = 1, ..., N.$$

Abbiamo allora

$$f_j(e^{2k\theta_1}, e^{2k\theta_2}, ..., e^{2k\theta_n}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j = 1, ..., N.$$

□

Per concludere la dimostrazione utilizziamo il seguente

LEMMA 1.2 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione esponenziale-polinomiale della forma:*

$$f(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j e^{b_j t} \qquad t \in \mathbb{R}$$

con $c_j, b_j \in \mathbb{R}$ e $b_i \neq b_j$ se $i \neq j$. Se f si annulla per ogni $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, allora f si annulla per ogni $t \in \mathbb{R}$.

DIM. Poniamo $\exp(b_j) = \xi_j$. Consideriamo la matrice

$$M(\xi_1, ..., \xi_N) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_N \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \dots & \xi_N^2 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 & \xi_3^3 & \dots & \xi_N^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^N & \xi_2^N & \xi_3^N & \dots & \xi_N^N \end{pmatrix}.$$

Dico che

$$\det M(\xi_1, ..., \xi_N) = \xi_1 \cdots \xi_n \cdot \prod_{1 \le i < j \le N} (\xi_j - \xi_i).$$

Per dimostrare questa formula osserviamo che

$$\det M(\xi_1, ..., \xi_N) = \xi_1 \cdot ... \cdot \xi_N \cdot \det V(\xi_1, ..., \xi_N)$$

dove $V(\xi_1, ..., \xi_N)$ è la matrice di Vandermonde di ordine N:

$$V(\xi_1, ...\xi_N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_N \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \dots & \xi_N^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{N-1} & \xi_2^{N-1} & \xi_3^{N-1} & \dots & \xi_N^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$\det V(\xi_1, ..., \xi_N) = \prod_{1 \le i < j \le N} (\xi_j - \xi_i).$$

Per dimostrare questa formula, ragioniamo per ricorrenza su N. La formula del determinante di Vandermonde è facilmente verificata nel caso $N = 2$. Supponiamo quindi $N > 2$ e la formula vera per determinanti di Vandermonde di ordine $N - 1$. Sottraendo alla $j+1$-esima riga ξ_1 volte la $j-esima$, per $j = 1, ..., N-1$, otteniamo:

$$\det V(\xi_1, ..., \xi_N) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \xi_2 - \xi_1 & \xi_3 - \xi_1 & \dots & \xi_N - \xi_1 \\ 0 & \xi_2(\xi_2 - \xi_1) & \xi_3(\xi_3 - \xi_1) & \dots & \xi_N(\xi_N - \xi_1) \\ 0 & \xi_2^2(\xi_2 - \xi_1) & \xi_3^2(\xi_3 - \xi_1) & \dots & \xi_N^2(\xi_N - \xi_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \xi_2^{N-2}(\xi_2 - \xi_1) & \xi_3^{N-2}(\xi_3 - \xi_1) & \dots & \xi_N^{N-2}(\xi_N - \xi_1) \end{pmatrix}$$

Raccogliendo il fattore $(\xi_j - \xi_1)$ nella j-esima colonna, per $j = 2, ..., N$, si ottiene

$$\det V(\xi_1, ..., \xi_N) = (\xi_2 - \xi_1) \cdot ... \cdot (\xi_N - \xi_1) \cdot \det V(\xi_2, ..., \xi_N)$$

da cui la formula segue per l'ipotesi di ricorrenza.

In particolare, $M(\xi_1, ..., \xi_N)$ è una matrice invertibile e la relazione

$$(c_1, ..., c_N) M(\xi_1, ..., \xi_N) = 0$$

implica che $c_1 = ... = c_N = 0$. $\square$

Concludiamo ora la dimostrazione del teorema. Per il lemma appena dimostrato, otteniamo che

$$f_j(e^{t\theta_1}, ..., e^{t\theta_n}) \; = \; 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},\, j = 1, ..., N.$$

Quindi $\exp(2t(aBa^*)) \in \mathbf{Q}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e ciò mostra che

$$B \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n).$$

Allora $p \in \mathbf{G}$ e perciò $u \; = \; g \circ p^{-1} \in \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$. L'applicazione

$$(\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)) \ni (u, B) \longrightarrow u \exp(B) \in \mathbf{G}$$

è quindi continua e surgettiva e ha inversa:

$$\mathbf{G} \ni g \longrightarrow (g \circ (g^* g)^{-1/2}, (g^* g)^{1/2}) \in (\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n))$$

continua, onde è un omeomorfismo.

Nello studiare un gruppo classico $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ della lista di Cartan con algebra di Lie $\mathfrak{g}$ seguiremo quindi il seguente procedimento:

(1) Verificheremo che esso contenga l'aggiunto di ogni suo elemento;
(2) Calcoleremo $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)$;
(3) Studieremo il sottogruppo compatto $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$.

Osserviamo ancora che l'algebra di Lie di $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ è $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n)$ e che l'applicazione esponenziale

$$\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n) \ni X \longrightarrow \exp(X) \in \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$$

ha come immagine la componente connessa dell'identità in $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$. Abbiamo infatti

Teorema 1.3 (Cartan-Weyl-Hopf) *Sia $\mathbf{G}$ un sottogruppo compatto e connesso di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Allora*

$$\mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$$

è surgettiva.

Non diamo qui la dimostrazione di questo teorema[10], la cui validità è stata verificata per ciascuno dei gruppi classici compatti e connessi: $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{SU}(n)$ e $\mathbf{Sp}(n)$.

§2 Alcuni gruppi di matrici e le loro algebre di Lie

Nel capitolo precedente abbiamo esaminato i gruppi classici compatti della lista di Cartan. Completiamo ora la *lista di Cartan* dando l'elenco dei gruppi classici non compatti, con le loro algebre di Lie.

$\boxed{\mathbf{U}(p, q)}$ è il gruppo delle matrici complesse $a \in \mathbf{GL}(p + q, \mathbb{C})$ che soddisfano $a\, K\, a^* \; = \; K$ per una matrice Hermitiana simmetrica K con segnatura (p, q). Ad esempio, possiamo prendere $K = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$. La sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{u}(p, q) = \{X \in \mathfrak{gl}(p + q, \mathbb{C}) \,|\, X^* K \; + \; K\, X \; = \; 0\,\}\,.$$

[10] Possiamo introdurre su $\mathbf{G}$ una metrica Riemanniana invariante per le traslazioni a destra e a sinistra; allora le geodetiche per l'origine sono tutti e soli i sottogruppi a un parametro di $\mathbf{G}$. La tesi segue allora dal fatto che l'identità e di $\mathbf{G}$ si può congiungere a un qualsiasi punto $g \in \mathbf{G}$ mediante una geodetica $\gamma : [0, 1] \ni t \longrightarrow \exp(tX) \in \mathbf{G}$ di lunghezza minima per cui $\gamma(0) = e$ e $\gamma(1) = g$.

$\boxed{\mathbf{SU}(p,q)}$ è il gruppo delle matrici complesse $a \in \mathbf{U}(p,q)$ con determinante 1: $\mathbf{SU}(p,q) = \mathbf{U}(p,q) \cap \mathbf{SL}(p+q,\mathbb{C})$. L'algebra di Lie corrispondente è

$$\mathfrak{su}(p,q) = \{X \in \mathfrak{u}(p,q) \,|\, \operatorname{tr} X = 0\} = \mathfrak{u}(p,q) \cap \mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{C}) \,.$$

$\boxed{\mathbf{SU}^*(2n)}$ è il gruppo delle matrici[11] $a \in \mathbf{SL}(2n,\mathbb{C})$ tali che

$$a\,J \;=\; J\,\bar{a}$$

dove $\bar{a}$ è la matrice i cui coefficienti sono i coniugati dei coefficienti di a e J è una matrice reale antisimmetrica di rango $2n$. Ad esempio possiamo fissare $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$. La sua algebra di Lie è:

$$\mathfrak{su}^*(2n) = \left\{X \in \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C}) \;\middle|\; X\,J \;=\; J\,\bar{X} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^n \right\} \,.$$

$\boxed{\mathbf{SO}(n,\mathbb{C})}$ è il gruppo delle matrici a di $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$ che lasciano invariata una matrice simmetrica non degenere Q:

$$\mathbf{SO}(n,\mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{SL}(n,\mathbb{C}) \mid {}^t a\,Q\,a \;=\; Q\} \,.$$

La sua algebra di Lie è:

$$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) \;=\; \{X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \mid {}^t X\,Q \;+\; Q\,X \;=\; 0\,\}.$$

$\boxed{\mathbf{SO}(p,q)}$ è il gruppo delle matrici reali $a \in \mathbf{SL}(p+q,\mathbb{R})$ tali che ${}^t a\,K\,a \;=\; K$ per una matrice reale simmetrica $K \in \mathfrak{M}((p+q),(p+q);\mathbb{R})$ di segnatura (p,q). La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{o}(p,q) = \{X \in \mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{R}) \mid {}^t X\,K \;+\; K\,X \;=\; 0\,\}.$$

$\boxed{\mathbf{SO}^*(2n)}$ è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{SL}(2n,\mathbb{C})$ tali che

$$a^* J\,a = J \qquad \text{e} \qquad {}^t a\,a \;=\; K$$

ove J è una matrice antihermitiana di rango $2n$ e K è una matrice simmetrica di rango $2n$ con $JK = KJ$. Possiamo ad esempio fissare $K = I_{2n}$ e $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$. L'algebra di Lie corrispondente è:

$$\mathfrak{so}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C}) \,|\, X^*J + JX = 0\,,\ {}^t XK + KX = 0\,\}\,.$$

$\boxed{\mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})}$ è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{GL}(2n,\mathbb{C})$ tali che ${}^t aJa = J$ per una matrice antisimmetrica $J \in \mathfrak{M}(2n,\mathbb{C})$ di rango $2n$. La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \mid {}^t XJ + JX = 0\,\}\,.$$

[11] Questo gruppo si può indicare anche mediante $\mathbf{SL}(n,\mathbb{H})$ e la corrispondente algebra di Lie mediante $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})$.

$\boxed{\mathbf{Sp}(n,\mathbb{R})}$ è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{GL}(2n,\mathbb{R})$ tali che ${}^t aJa = J$ per una matrice antisimmetrica $J \in \mathfrak{M}(2n,\mathbb{R})$ di rango $2n$. La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{R}) \mid {}^t XJ + JX = 0\}.$$

$\boxed{\mathbf{Sp}(p,q)}$ è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})$ (con $p+q=n$) tali che $a^*Ka = K$ per una matrice Hermitiana simmetrica K di segnatura $(2p,2q)$ che commuta con J. Se $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$, possiamo fissare ad esempio

$$K = \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & I_p & \\ & & & -I_q \end{pmatrix}.$$

La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(p,q) = \{X \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) \mid X^*K + KX = 0\}.$$

Osserviamo che $\mathbf{Sp}(n) = \mathbf{Sp}(n,0) = \mathbf{Sp}(0,n) = \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n)$.

§3 I gruppi $\mathbf{U}(p,q)$ e $\mathbf{SU}(p,q)$

Fissiamo $K = I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$ e poniamo $n = p+q$.

Lemma 3.1 *Se $g \in \mathbf{U}(p,q)$, allora $g^* \in \mathbf{U}(p,q)$.*

Dim. Per la definizione del gruppo $\mathbf{U}(p,q)$, abbiamo

$$g^* I_{p,q} = I_{p,q} g^{-1}.$$

Da questa otteniamo, passando alle inverse:

$$gI_{p,q} = (g^*)^* I_{p,q} = I_{p,q}(g^*)^{-1}$$

e quindi $g^* \in \mathbf{U}(p,q)$. □

Lemma 3.2 $\mathbf{U}(p,q) \cap \mathbf{U}(n) \cong \mathbf{U}(p) \bowtie \mathbf{U}(q)$.

Dim. Scriviamo un elemento $g \in \mathbf{U}(p,q) \cap \mathbf{U}(n)$ nella forma

$$g = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$$

con matrici a di tipo $p \times p$, b di tipo $q \times q$, c di tipo $p \times q$, d di tipo $q \times p$. Poiché $g \in \mathbf{U}(p,q)$, abbiamo

$$a^*a - d^*d = I_p, \quad a^*c = d^*b, \quad b^*b - c^*c = I_q.$$

Essendo $g \in \mathbf{U}(n)$, abbiamo anche:

$$a^*a + d^*d = I_p, \quad a^*c + d^*b = 0, \quad b^*b + c^*c = I_q.$$

Da queste uguaglianze ricaviamo

$$c = 0, \quad d = 0$$

da cui segue la tesi.

Corollario 3.3 $\mathbf{SU}(p,q) \cap \mathbf{U}(n)$ *è omeomorfo al prodotto topologico* $\mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(q) \times S^1$.

Dim. Se $\sigma \in \mathbb{C}$, per ogni intero positivo h indichiamo con $D_h(\sigma)$ la matrice diagonale $h \times h$:

$$D_h(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione

$$\mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(q) \times S^1 \ni (a, b, \sigma) \longrightarrow \begin{pmatrix} D_p(\sigma)\, a & 0 \\ 0 & D_q(\sigma^{-1})\, b \end{pmatrix} \in \mathbf{SU}(p,q) \cap \mathbf{U}(n)$$

è continua e bigettiva e dunque un omeomorfismo perché i due spazi sono compatti di Hausdorff.

Teorema 3.4 $\mathbf{SU}(p,q)$ *è omeomorfo al prodotto topologico* $\mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(q) \times S^1 \times \mathbb{C}^{pq}$. $\mathbf{U}(p,q)$ *è omeomorfo al prodotto topologico* $\mathbf{SU}(p,q) \times S^1$. *I due gruppi sono pertanto connessi per archi ma non compatti se* $pq \neq 0$.

Dim. Calcoliamo l'intersezione $\mathfrak{u}(p,q) \cap \mathfrak{p}(n)$. Scriviamo $X \in \mathfrak{u}(p,q) \cap \mathfrak{p}(n)$ nella forma $X = \left(\begin{smallmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{smallmatrix}\right)$ con $X_{11} \in \mathfrak{p}(p)$, $X_{22} \in \mathfrak{p}(q)$ e X_{12} matrice complessa di tipo $p \times q$. Allora:

$$\begin{aligned} 0 &= X^* I_{p,q} + I_{p,q} X \\ &= X\, I_{p,q} + I_{p,q} X \\ &= \left(\begin{smallmatrix} 2X_{11} & 0 \\ 0 & 2X_{22} \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}.$$

Quindi

$$\mathfrak{u}(p,q) \cap \mathfrak{p}(n) = \mathfrak{su}(p,q) \cap \mathfrak{p}(n) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{12}^* & 0 \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; X_{12} \in \mathfrak{M}(p \times q, \mathbb{C}) \right\}$$

La tesi è perciò conseguenza dei lemmi precedenti e del Teorema V.1.1.

§4 I gruppi $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SU}^*(2n)$

Lemma 4.1 *Se* $g \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$, *allora* $g^* \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$.

Dim. Abbiamo

$$^t g J g = J$$

e dunque

$$J g = {}^t g^{-1} J$$

da cui, passando alle inverse:

$$g^{-1} J = J\, {}^t g.$$

Passando ai coniugati, otteniamo:

$$\bar{g}^{-1}J = Jg^*$$

da cui

$${}^tg^* J g^* = J$$

e dunque $g^* \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})$. □

TEOREMA 4.2 $\mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})$ *è omeomorfo a* $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbb{R}^{n(2n+1)}$.
DIM. Sia $g \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})$. Possiamo decomporre g in modo unico nella forma:

$$g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) \quad \text{e} \quad b \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C}) \cap \mathbf{P}_+(2n).$$

La b si può rappresentare in modo unico come esponenziale di una matrice $B \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2n)$. Scriviamo B nella forma

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} \end{pmatrix}$$

con B_{hk} matrici complesse $n \times n$, B_{11} e B_{22} Hermitiane. Da ${}^tBJ + JB = 0$ otteniamo allora le uguaglianze:

$$B_{11} = {}^tB_{22}$$

$$B_{12} = {}^tB_{12}.$$

La matrice B è dunque della forma

$$(*) \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ \bar{B}_{12} & -\bar{B}_{11} \end{pmatrix}$$

con B_{11} Hermitiana e B_{12} simmetrica. Le matrici Hermitiane della forma $(*)$ formano uno spazio vettoriale reale L di dimensione $n^2 + n(n+1) = n(2n+1)$ e dunque la tesi segue dall'omeomorfismo del Teorema V.1.1:

$$\mathbf{Sp}(n) \times L \ni (a, B) \longrightarrow a \exp(B) \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C}).$$

TEOREMA 4.3 *Il gruppo* $\mathbf{SU}^*(2n)$ *è omeomorfo a* $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbb{R}^{2n^2-n-1}$.
DIM. Ricordiamo che $g \in \mathbf{SU}^*(2n)$ se $g \in \mathbf{SL}(2n,\mathbb{C})$ e

$$Jg = \bar{g}J.$$

Ne segue che, se $g \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n)$ abbiamo

$${}^tgJg = J$$

e dunque $g \in \mathbf{Sp}(n)$.

Si verifica immediatamente che $g^* \in \mathbf{SU}^*(2n)$ se $g \in \mathbf{SU}^*(2n)$ e dunque possiamo ripetere il ragionamento fatto nella dimostrazione del teorema precedente, decomponendo g mediante

$$g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n) \text{e} \quad b \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{P}_+(2n)\,.$$

La b è l'esponenziale di una matrice Hermitiana B in $\mathfrak{su}^*(2n)$: questo è lo spazio vettoriale reale L di dimensione $2n^2 - n - 1$ delle matrici della forma:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ -\bar{B}_{12} & \bar{B}_{11} \end{pmatrix}$$

con B_{11} matrice $n \times n$ Hermitiana con traccia nulla e B_{12} matrice $n \times n$ complessa antisimmetrica: ${}^tB_{12} = -B_{12}$. Per il Teorema V.1.1 otteniamo un omeomorfismo:

$$\mathbf{Sp}(n) \times L \ni (a, B) \longrightarrow a \exp(B) \in \mathbf{SU}^*(2n),$$

che dimostra la tesi. □

§5 I gruppi $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ e $\mathbf{SO}^*(2n)$

Teorema 5.1 $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ *è omeomorfo a* $\mathbf{SO}(n) \times \mathbb{R}^{(n^2-n)/2}$.

Dim. Osserviamo in primo luogo che l'aggiunta g^* di un elemento g di $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ è ancora un elemento del gruppo. Infatti le equazioni che definiscono il gruppo sono:

$$\det(g) = 1, \ {}^tg\, g = I.$$

Quindi, poiché anche $g\, {}^tg = I$:

$$\det(g^*) = \overline{\det(g)} = 1 \qquad \text{e} \qquad {}^tg^* g^* = \left(g\, {}^tg\right)^* = I\,.$$

Un elemento g di $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n)$ soddisfa

$${}^tg = g^{-1} = g^*$$

e dunque è una matrice a coefficienti reali. Otteniamo perciò:

$$\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n) = \mathbf{SO}(n).$$

Decomponiamo $g \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ in modo unico mediante

$$g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n) \quad \text{e} \quad b \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{P}_+(n).$$

Gli elementi di $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{P}_+(n)$ sono tutti e soli gli esponenziali delle matrici dello spazio vettoriale reale L di dimensione $(n^2 - n)/2$:

$$L = \{B | B \text{ Hermitiana e } {}^tB = -B\} = i \cdot \mathfrak{o}(n)$$

cioè delle matrici a coefficienti puramente immaginari antisimmetriche. La tesi segue dal Teorema V.1.1. □

TEOREMA 5.2 $\mathbf{SO}^*(2n)$ *è omeomorfo a* $\mathbf{U}(n)\times\mathbb{R}^{n^2-n}$.

DIM. Dimostriamo in primo luogo che il gruppo $\mathbf{SO}^*(2n)\cap\mathbf{U}(2n)$ è isomorfo, come gruppo topologico, a $\mathbf{U}(n)$. Infatti, per un elemento g di tale gruppo, valgono le equazioni:

$$^t gg = I, \quad g^*Jg = J, \quad g^*g = I, \quad \det(g) = 1.$$

La prima e la terza di queste equazioni ci dicono che g è una matrice reale di $\mathbf{SO}(2n)$. La seconda ci dice allora che g commuta con J e dunque è $\mathbb{C}$-lineare per la struttura complessa su $\mathbb{R}^{2n}$ definita da J. Si verifica facilmente che, se definiamo l'isomorfismo $\mathbb{R}$-lineare $\sigma:\mathbb{R}^{2n}\longrightarrow\mathbb{C}^n$ mediante

$$\sigma(e_k) = e_k \quad \text{per} \quad 1\le k\le n \quad \text{e} \quad \sigma(Je_k) = \sigma(e_{k+n}) = ie_k$$

l'applicazione

$$\mathbf{SO}^*(2n)\cap\mathbf{U}(2n)\ni g\longrightarrow \sigma\circ g\circ\sigma^{-1}\in\mathbf{U}(n)$$

è un isomorfismo di gruppi topologici. Per concludere la dimostrazione, osserviamo che il gruppo $\mathbf{SO}^*(2n)$ è chiuso rispetto all'aggiunzione e dunque, dalla decomposizione

$$g = ab \quad \text{con} \quad a\in\mathbf{SO}^*(2n)\cap\mathbf{U}(2n) \quad \text{e} \quad b\in\mathbf{SO}^*(2n)\cap\mathbf{P}_+(2n)\,.$$

Troviamo allora che $b = \exp(B)$ dove $B\in\mathfrak{so}^*(2n)\cap\mathfrak{p}(2n)$ è univocamente determinata come un elemento dello spazio vettoriale reale L di dimensione n^2-n delle matrici:

$$B = i\begin{pmatrix} X & Y \\ Y & -X\end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad X, Y\in\mathfrak{o}(n)\,.$$

L'omeomorfismo cercato segue dal Teorema V.1.1. □

§6 I GRUPPI $\mathbf{Sp}(p,q;\mathbb{C})$

TEOREMA 6.1 *Abbiamo l'omeomorfismo*

$$\mathbf{Sp}(p,q)\cong\mathbf{Sp}(p)\times\mathbf{Sp}(q)\times\mathbb{R}^{4pq}.$$

DIM. Ricordiamo che il gruppo $\mathbf{Sp}(p,q;\mathbb{C})$ è caratterizzato dalle equazioni:

$$^t gJg = J \qquad \text{e} \qquad g^*\begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q}\end{pmatrix}g = \begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q}\end{pmatrix}.$$

Come abbiamo visto in precedenza, possiamo considerare un elemento g dell' intersezione $\mathbf{Sp}(p,q;\mathbb{C})\cap\mathbf{U}(2n)\subset\mathbf{Sp}(n)$ come un elemento di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{H})$. Scriviamo $\tilde g$ per la matrice a coefficienti quaternioni corrispondente a g. Troviamo allora: se $g\in\mathbf{Sp}(p,q;\mathbb{C})$, allora

$$\tilde g^*\tilde g = I$$

$$\tilde g^* I_{p,q} g = I_{p,q}.$$

Si ottiene quindi

$$\tilde g = \begin{pmatrix} g_1 & \\ & g_2\end{pmatrix} \quad \text{con} \quad g_1\in\mathbf{Sp}(p),\ g_2\in\mathbf{Sp}(q).$$

D'altra parte abbiamo al solito l'invarianza di $\mathbf{Sp}(p,q;\mathbb{C})$ rispetto all'aggiunzione. Dal Teorema V.1.1 otteniamo un omeomorfismo

$$\mathbf{Sp}(p)\times\mathbf{Sp}(q)\times L\ni(g_1,g_2,B)\longrightarrow\begin{pmatrix}g_1&\\&g_2\end{pmatrix}\exp(B)\in\mathbf{Sp}(p,q;\mathbb{C})$$

ove in questo caso $L=\mathfrak{sp}(p,q;\mathbb{C})\cap\mathfrak{p}(2n)$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione $4pq$ di matrici Hermitiane. Le matrici di L hanno la forma:

$$B=\begin{pmatrix}0&B_{12}&0&B_{14}\\B_{12}^*&0&{}^tB_{14}&0\\0&\bar{B}_{14}&0&-\bar{B}_{12}\\B_{14}^*&0&-{}^tB_{12}&0\end{pmatrix}$$

con B_{12} e B_{14} matrici complesse di tipo $p\times q$. □

§7 I gruppi $\mathbf{SO}(p,q)$

Teorema 7.1 *Siano p,q due interi positivi con $p+q=n$. Allora il gruppo $\mathbf{SO}(p,q)$ è omeomorfo a $\{-1,1\}\times SO(p)\times SO(q)\times\mathbb{R}^{pq}$.*

Dim. Ragioniamo come nella dimostrazione dei teoremi precedenti. Ricaviamo in primo luogo che $\mathbf{SO}(p,q)\cap\mathbf{U}(n)$ è formato dalle matrici:

$$g=\begin{pmatrix}g_1&0\\0&g_2\end{pmatrix}$$

con $g_1\in\mathbf{O}(p)$, $g_2\in\mathbf{O}(q)$ e $\det(g_1)\cdot\det(g_2)=1$.

Quindi abbiamo l'omeomorfismo:

$$\mathbf{SO}(p,q)\cap\mathbf{U}(n)\cong\{-1,1\}\times\mathbf{SO}(p)\times\mathbf{SO}(q).$$

D'altra parte $\mathbf{SO}(p,q)\cap\mathbf{P}_+(n)$ è l'immagine iniettiva mediante l'applicazione esponenziale delle matrici

$$B=\begin{pmatrix}0&B_{12}\\{}^tB_{12}&0\end{pmatrix}$$

ove B_{12} è una matrice reale $p\times q$. Concludiamo utilizzando il Teorema V.1.1. □

CAPITOLO VI

ALGEBRE DI LIE

Prima di proseguire lo studio dei gruppi di Lie ed in particolare dei gruppi di Lie lineari, è conveniente raccogliere in questo capitolo alcune delle definizioni generali e delle proprietà più importanti delle algebre di Lie astratte.

§1 Nozioni fondamentali

Sia $\mathbb{k}$ un campo. Un'*algebra di Lie su* $\mathbb{k}$ è uno spazio vettoriale $\mathfrak{g}$ su $\mathbb{k}$ su cui è assegnata un'operazione binaria (*commutatore*):

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \longrightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g} \tag{1.1}$$

che gode delle seguenti proprietà:

(*i*) l'operazione (1.1) è $\mathbb{k}$-bilineare;
(*ii*) $[X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$;
(*iii*) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$
(Identità di Jacobi).

Osserviamo che (*ii*)$\Rightarrow$(*ii*$'$):$[X, Y] = -[Y, X] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ e che (*ii*) e (*ii*$'$) sono equivalenti se $\mathbb{k}$ ha caratteristica $\neq 2$.

Osservazione Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{k}$. Se poniamo $[v, w] = 0$ per ogni $v, w \in V$, questo prodotto definisce su V una struttura di algebra di Lie. In generale chiamiamo algebra di Lie *abeliana* o *commutativa* un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ in cui il commutatore di due qualsiasi elementi sia nullo.

Dati due sottospazi vettoriali $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, indichiamo con $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{g}$ generato dai vettori della forma $[X, Y]$ con $X \in \mathfrak{A}$, $Y \in \mathfrak{B}$. Per la (*ii*$'$), abbiamo $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = [\mathfrak{B}, \mathfrak{A}]$.

Un sottoinsieme $\mathfrak{a}$ di $\mathfrak{g}$ si dice una *sottoalgebra di Lie di* $\mathfrak{g}$ se è un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{g}$ e $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$; esso si dice un *ideale di* $\mathfrak{g}$ se è una sua sottoalgebra di Lie e inoltre $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$.

Osserviamo che $\{0\}$ e $\mathfrak{g}$ sono ideali (banali) di $\mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sono ideali di $\mathfrak{g}$, anche $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ e $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ sono ideali di $\mathfrak{g}$. Altri esempi di ideali di $\mathfrak{g}$ sono il suo *centro* $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ e il suo *derivato* $\mathfrak{g}^{(1)}$, definiti da

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\}, \tag{1.2}$$

$$\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]. \tag{1.3}$$

Se $\mathfrak{a}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{g}$, il suo *normalizzatore in* $\mathfrak{g}$

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] \in \mathfrak{a} \quad \forall Y \in \mathfrak{a}\} \tag{1.4}$$

è ancora una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{g}$: essa contiene $\mathfrak{a}$ ed è la più grande sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ che contiene $\mathfrak{a}$ come un ideale. Analogamente il *centralizzatore di* $\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{g}$

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X,Y] = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{a}\} \tag{1.5}$$

è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{g}$.

Siano $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ due algebre di Lie sullo stesso campo $\mathbb{k}$. Un'applicazione $\phi : \mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{g}$ si dice un *morfismo di algebre di Lie* se è $\mathbb{k}$-lineare e soddisfa inoltre:

$$\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{f}\,. \tag{1.6}$$

LEMMA 1.1 *Sia $\phi : \mathfrak{f} \longrightarrow \mathfrak{g}$ un morfismo di algebre di Lie su $\mathbb{k}$. Allora $\phi(\mathfrak{f})$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{g}$ e $\ker\phi$ è un ideale di $\mathfrak{f}$.*

Se $\mathfrak{a}$ è un ideale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, allora vi è un'unica struttura di algebra di Lie sul quoziente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ che renda la proiezione naturale $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ un morfismo di algebre di Lie. Con questa struttura $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ si dice l'*algebra di Lie quoziente* di $\mathfrak{g}$ rispetto all'ideale $\mathfrak{a}$.

Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ si dice *semplice* se non è commutativa e non contiene ideali non banali.

§2 ESEMPI

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{k}$. Lo spazio vettoriale $\mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V)$ di tutti gli endomorfismi $\mathbb{k}$-lineari di V è un'algebra di Lie con il prodotto definito da

$$[A,B] = A \circ B - B \circ A \quad \forall A, B \in \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V)\,. \tag{2.1}$$

Con la struttura di algebra di Lie, esso si indica con $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$. Se $V = \mathbb{k}^n$, scriviamo $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{k})$ invece di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^n)$. Ogni sottoalgebra di un'algebra di Lie $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ si dice un'*algebra di Lie lineare*. Un teorema di Ado-Iwasawa dice che *ogni algebra di Lie di dimensione finita è isomorfa a un'algebra di Lie lineare.* Esempi importanti di algebre di Lie lineari sono i seguenti, ove $V = \mathbb{k}^n$, $1 \le n < \infty$:

(A_ℓ) $\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{k}) = \{X \in \mathfrak{gl}(\ell+1,\mathbb{k}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$;

(B_ℓ) $\mathfrak{so}(\ell,\ell+1;\mathbb{k})$: trasformazioni antisimmetriche rispetto a una forma bilineare simmetrica con indice di Witt ℓ in uno spazio vettoriale di dimensione dispari $n = 2\ell+1$; qui dobbiamo supporre che $\mathbb{k}$ abbia caratteristica $\neq 2$;

(C_ℓ) $\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{k})$: trasformazioni simplettiche, cioè che soddisfano
$$a(X(v),w) + a(v,X(w)) = 0 \quad \forall v, w \in V$$
per una forma alternata non degenere a su uno spazio vettoriale V di dimensione pari $n = 2\ell$ su un campo $\mathbb{k}$ di caratteristica $\neq 2$;

(D_ℓ) $\mathfrak{so}(\ell,\ell;\mathbb{k})$: trasformazioni antisimmetriche rispetto a una forma bilineare simmetrica con indice di Witt ℓ in uno spazio vettoriale di dimensione pari $n = 2\ell$; anche qui dobbiamo supporre che caratteristica($\mathbb{k}$) $\neq 2$;

- l'algebra $\mathfrak{t}_+(n,\mathbb{k})$ delle matrici triangolari superiori a coefficienti in $\mathbb{k}$;
- l'algebra $\mathfrak{n}_+(n,\mathbb{k})$ delle matrici triangolari superiori a coefficienti in $\mathbb{k}$ con diagonale principale nulla;
- l'algebra $\mathfrak{t}_-(n,\mathbb{k})$ delle matrici triangolari inferiori a coefficienti in $\mathbb{k}$;
- l'algebra $\mathfrak{n}_-(n,\mathbb{k})$ delle matrici triangolari inferiori a coefficienti in $\mathbb{k}$ con diagonale principale nulla;
- l'algebra $\mathfrak{d}(n,\mathbb{k})$ delle matrici diagonali a coefficienti in $\mathbb{k}$.

Notiamo che:

$$\mathfrak{t}_+(n,\Bbbk) = \mathfrak{n}_+(n,\Bbbk) \oplus \mathfrak{d}(n,\Bbbk) \quad \text{e} \quad [\mathfrak{t}_+(n,\Bbbk), \mathfrak{t}_+(n,\Bbbk)] = \mathfrak{n}_+(n,\Bbbk),$$
$$\mathfrak{t}_-(n,\Bbbk) = \mathfrak{n}_-(n,\Bbbk) \oplus \mathfrak{d}(n,\Bbbk) \quad \text{e} \quad [\mathfrak{t}_-(n,\Bbbk), \mathfrak{t}_-(n,\Bbbk)] = \mathfrak{n}_-(n,\Bbbk).$$

Sia $\mathfrak{A}$ un'algebra su $\Bbbk$, con prodotto $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (a,b) \longrightarrow a \cdot b \in \mathfrak{A}$. Una *derivazione* di $\mathfrak{A}$ è un'applicazione $\Bbbk$-lineare $D : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ che soddisfa l'*identità di Leibniz*:

$$D(a \cdot b) = (D(a)) \cdot b + a \cdot (D(b)) \qquad \forall a, b \in \mathfrak{A}\,. \tag{2.2}$$

Indichiamo con $\mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{A})$ l'insieme delle derivazioni di $\mathfrak{A}$. Si verifica facilmente che $\mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{A})$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\Bbbk}(\mathfrak{A})$ e quindi un'algebra di Lie lineare.

Consideriamo in particolare l'algebra di Lie delle derivazioni di una $\Bbbk$-algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Fissato $X \in \mathfrak{g}$, l'applicazione

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X) : \mathfrak{g} \ni Y \longrightarrow [X,Y] \in \mathfrak{g} \tag{2.3}$$

è $\Bbbk$-lineare ed è una derivazione per l'identità di Jacobi:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)([Y,Z]) &= [X,[Y,Z]] = -[Y,[Z,X]] - [Z,[X,Y]] \\ &= [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] \\ &= [\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(Y), Z] + [Y, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(Z)] \qquad \forall Y,Z \in \mathfrak{g}\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le derivazioni della forma $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$, al variare di X in $\mathfrak{g}$, si dicono *derivazioni interne* di $\mathfrak{g}$; l'applicazione

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X) \in \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{g}) \tag{2.5}$$

è un morfismo di algebre di Lie, che si dice *rappresentazione aggiunta* di $\mathfrak{g}$: le derivazioni interne formano un ideale dell'algebra di Lie $\mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{g})$. Infatti, se $D \in \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{g})$ e $X \in \mathfrak{g}$ abbiamo, per ogni $Y \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} [D, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)](Y) &= D([X,Y]) - [X, D(Y)] \\ &= [D(X), Y] + [X, D(Y)] - [X, D(Y)] \\ &= \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,(D(X))\,(Y)\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$[D, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)] = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,(D(X)) \qquad \forall D \in \mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{g}), \quad \forall X \in \mathfrak{g} \tag{2.6}$$

dimostra che $[\mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{g}), \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})] \subset \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. Osserviamo che il nucleo della rappresentazione aggiunta è il centro $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ di $\mathfrak{g}$. Gli elementi di $\mathrm{Der}_{\Bbbk}(\mathfrak{g})$ che non appartengono ad $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ si dicono *derivazioni esterne* di $\mathfrak{g}$. L'ideale delle derivazioni interne di $\mathfrak{g}$ si indica anche con $\mathrm{int}_{\Bbbk}(\mathfrak{g})$.

Osserviamo che, se $\mathfrak{g}$ è semplice, allora il morfismo $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{int}_{\Bbbk}(\mathfrak{g})$ è un *isomorfismo*: quindi ogni algebra di Lie semplice è isomorfa in modo naturale ad un'algebra di Lie lineare.

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Lo spazio $\mathcal{E}(M;\mathbb{R})$ delle funzioni differenziabili di classe $\mathcal{C}^\infty$, a valori reali, definite su M è un'algebra reale per il prodotto di funzioni. L'algebra di Lie reale $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}(M,\mathbb{R}))$ è l'algebra $\mathfrak{X}(M)$ dei campi di vettori (di classe $\mathcal{C}^\infty$) su M.

§3 Rappresentazioni lineari

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie sul campo $\Bbbk$. Una *rappresentazione lineare* di $\mathfrak{g}$ è il dato di uno spazio vettoriale V sul campo $\Bbbk$ e di un morfismo di algebre di Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\Bbbk}(V)\,. \tag{3.1}$$

In questo caso diciamo anche che V, con la struttura data dall'operazione:

$$\mathfrak{g} \times V \ni (X, v) \longrightarrow \rho(X)(v) \in V \tag{3.2}$$

è un $\mathfrak{g}$-modulo. Quando ciò non provochi confusione, scriveremo anche $X \cdot v$ oppure Xv invece di $\rho(X)(v)$.

La rappresentazione aggiunta discussa nel paragrafo precedente è un esempio di rappresentazione.

Un altro esempio di rappresentazione lineare è la rappresentazione banale: dato un qualsiasi spazio vettoriale V su $\Bbbk$ si fa corrispondere ad ogni X di $\mathfrak{g}$ l' endomorfismo nullo di V.

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo $\Bbbk$ e sia $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\Bbbk}(V)$ una rappresentazione lineare di dimensione finita di $\mathfrak{g}$. Diciamo che ρ (o il corrispondente $\mathfrak{g}$-modulo V) è *riducibile* se esiste un sotto-$\mathfrak{g}$-modulo proprio non banale W di V; altrimenti la ρ si dice *irriducibile* o *semplice*; diciamo che ρ è *decomponibile* se V è somma diretta di due sotto-$\mathfrak{g}$-moduli W_1, W_2 non banali: $V = W_1 \oplus W_2$ con W_1, $W_2 \neq \{0\}$; *indecomponibile* se non è decomponibile. Infine, diciamo che ρ (o il $\mathfrak{g}$-modulo V) è *completamente riducibile* o *completamente decomponibile* o *semisemplice* se V è somma diretta di sotto-$\mathfrak{g}$-moduli semplici.

Vale il:

Teorema 3.1 (Lemma di Schur) *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita n su $\Bbbk$ e $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\Bbbk}(V)$ una rappresentazione lineare di dimensione finita irriducibile. Se $A \in \mathfrak{gl}_{\Bbbk}(V)$ soddisfa:*

$$[A, \rho(X)] = 0 \qquad \forall X \in \mathfrak{g} \tag{3.3}$$

allora o $A = 0$, oppure A è un endomorfismo semisemplice invertibile.

Se $\Bbbk$ è algebricamente chiuso, allora A è un multiplo dell'identità.

In generale, il commutatore di $\rho(\mathfrak{g})$ in $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ è un corpo (non necessariamente commutativo) ed è un'estensione di dimensione finita di $\Bbbk$.

Dim. Possiamo limitarci a considerare il caso $V \neq \{0\}$. Sia p un fattore primo del polinomio minimo di A e poniamo $V_p = \cup_{h\in\mathbb{N}} \ker p(A)^h$, $W = \ker p(A)$. Allora $W \subset V_p$ sono sottospazi $\mathfrak{g}$-invarianti di V, diversi da $\{0\}$. Per l'irriducibilità di ρ, deve essere $W = V_p = V$ e questo dimostra che A è semisemplice e il suo spettro contiene un solo ideale primo di $\Bbbk[x]$.

Indichiamo ora con $\mathbb{F}$ il commutatore di $\rho(\mathfrak{g})$ in $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$. Per la prima parte della dimostrazione ogni elemento diverso da 0 è invertibile e quindi $\mathbb{F}$ è un corpo.
□

Osservazione Se Se $\Bbbk = \mathbb{C}$ è il campo dei numeri complessi, il commutatore $\mathbb{F}$ di $\rho(\mathfrak{g})$ in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, per una rappresentazione irriducibile $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ di $\mathfrak{g}$, è $\mathbb{F} = \{k\,\mathrm{I}_V \mid k \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}$.

OSSERVAZIONE Se $\Bbbk = \mathbb{R}$ è il campo dei numeri reali, il commutatore $\mathbb{F}$ di $\rho(\mathfrak{g})$, per una rappresentazione irriducibile $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ di $\mathfrak{g}$, può essere $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, oppure $\mathbb{H}$ e quindi le rappresentazioni irriducibili di un'algebra di Lie reale si dividono nei tipi *reale, complesso, quaternionico.*

Ad esempio, le rappresentazioni naturali $\mathfrak{o}(n) \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{u}(n) \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{R})$ e $\mathfrak{sp}(n) \subset \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(4n,\mathbb{R})$ sono rispettivamente di tipo reale, complesso e quaternionico.

Per distinguere i diversi casi, si può considerare l'algebra di Lie complessa $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ e la corrispondente rappresentazione $\tilde{\rho} : \tilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\tilde{V})$ dove $\tilde{V} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ è la complessificazione dello spazio vettoriale reale V. La ρ è reale se $\tilde{\rho}$ è irriducibile. Altimenti la $\tilde{\rho}$ si decompone nella somma diretta di due rappresentazioni complesse irriducibili: se esse sono isomorfe, allora la ρ è di tipo quaternionico; se esse non sono isomorfe, allora la ρ è di tipo complesso.

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita $\Bbbk$ e $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\Bbbk}(V)$ una rappresentazione lineare di dimensione finita. Allora anche la

$$\rho^* : \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow -\,{}^t\rho(X) \in \mathfrak{gl}_{\Bbbk}(V^*)\,, \tag{3.4}$$

ove $V^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$ è il duale dello spazio vettoriale V, è una rappresentazione lineare di dimensione finita, che si dice *controgradiente* della ρ.

A due rappresentazioni lineari di dimensione finita $\rho_V : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\Bbbk}(V)$, $\rho_W : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\Bbbk}(W)$ possiamo associare il *prodotto tensoriale* delle rappresentazioni ρ_V e ρ_W:

$$\rho_V \otimes \rho_W : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\Bbbk}(V \otimes_{\Bbbk} W) \tag{3.5}$$

definita da:

$$\begin{aligned} &\rho_V \otimes \rho_W(X)(v \otimes w) = \rho_V(X)(v) \otimes w + v \otimes \rho_W(X)(w) \\ &\qquad \forall X \in \mathfrak{g},\ \forall v \in V,\ \forall w \in W\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Utilizzando la rappresentazione controgradiente e l'identificazione di $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$ al prodotto tensoriale $W \otimes V^*$, si ottiene la rappresentazione

$$\rho_{V \longrightarrow W} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\Bbbk}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)) \tag{3.7}$$

definita da

$$\rho_{V \longrightarrow W}(X)(A) = \rho_W(X) \circ A - A \circ \rho_V(X) \qquad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall A \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)\,. \tag{3.8}$$

In particolare la ρ_V induce una rappresentazione $\rho_{\mathrm{End}_{\Bbbk}(V)}$ su $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ definita da

$$\rho_{\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V)}(X)(A) = \rho_V(X) \circ A - A \circ \rho_V(X) \qquad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall A \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)\,. \tag{3.9}$$

§4 AUTOMORFISMI

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su $\Bbbk$.

Un automorfismo α di $\mathfrak{g}$ è un isomorfismo dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ con se stessa. Con il prodotto di composizione, gli automorfismi dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ formano un gruppo, che indicheremo con $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$.

Un elemento X dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ si dice *ad-nilpotente* se $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ è nilpotente. Se il campo $\Bbbk$ ha caratteristica 0, possiamo definire l'*esponenziale* di $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ mediante:

$$\exp\left(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X))^m}{m!}\,. \tag{4.1}$$

Poiché abbiamo supposto X ad-nilpotente, la somma è una somma finita. Essa definisce un'applicazione $\Bbbk$-lineare su $\mathfrak{g}$, che è un automorfismo di $\mathfrak{g}$.

Più in generale vale il:

LEMMA 4.1 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie sul campo $\Bbbk$ di caratteristica 0 e sia D una derivazione nilpotente di $\mathfrak{g}$. Allora*

$$\exp(D) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^m}{m!} \tag{4.2}$$

è un automorfismo di $\mathfrak{g}$.

DIM. Vale la formula di Leibnitz:

$$D^n([X,Y]) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} [D^m(X), D^{n-m}(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}\,. \tag{4.3}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \exp(D)([X,Y]) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^m([X,Y])}{m!} \\ &= \sum_{m',m''=0}^{\infty} \frac{1}{m'!\,m''!} [D^{m'}(X), D^{m''}(Y)] \\ &= [\exp(D)(X), \exp(D)(Y) \qquad\qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}\,, \end{aligned}$$

ove tutte le sommatorie hanno significato perché contengono soltanto un numero finito di termini non nulli.

Infine $\exp(D)$ è invertibile ed $\exp(D)^{-1} = \exp(-D)$ mostra che anche l'inversa è un morfismo dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ in sé. $\square$

Gli automorfismi che sono composizione di un numero finito di automorfismi della forma $\exp\left(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)\right)$, con X elemento ad-nilpotente di $\mathfrak{g}$, si dicono *elementari.* Indicheremo con $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ il gruppo degli automorfismi elementari.

LEMMA 4.2 *Il gruppo $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ degli automorfismi elementari di $\mathfrak{g}$ è un sottogruppo normale di $\mathrm{Aut}_{\Bbbk}(\mathfrak{g})$.*

DIM. Infatti, se $X \in \mathfrak{g}$ è un elemento ad-nilpotente e $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\Bbbk}(\mathfrak{g})$, allora $\alpha(X)$ è ancora un elemento ad-nilpotente di $\mathfrak{g}$ e $\alpha \circ \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)) \circ \alpha^{-1} = \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\alpha(X)))$. $\square$

§5 ALGEBRE DI LIE RISOLUBILI

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su $\Bbbk$. Definiamo una sequenza decrescente di ideali $\{\mathfrak{D}^m\mathfrak{g}\}_{m\in\mathbb{N}}$ di $\mathfrak{g}$ (SERIE DERIVATA) mediante:

$$\begin{cases} \mathfrak{D}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \\ \mathfrak{D}^{m+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{D}^m\mathfrak{g}, \mathfrak{D}^m\mathfrak{g}] \qquad \forall m \geq 0\,. \end{cases} \tag{5.1}$$

Diciamo che $\mathfrak{g}$ è *risolubile* se $\mathfrak{D}^n\mathfrak{g} = \{0\}$ per qualche intero non negativo n.

Ad esempio, l'algebra $\mathfrak{t}(n, \mathbb{k})$ delle matrici triangolari superiori con coefficienti nel campo $\mathbb{k}$ è un'algebra di Lie risolubile.

Teorema 5.1 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su $\mathbb{k}$.*

(1) *Se $\mathfrak{g}$ è risolubile, allora ogni sottoalgebra $\mathfrak{a}$ di $\mathfrak{g}$ è risolubile ed ogni immagine di $\mathfrak{g}$ mediante un morfismo di algebre di Lie è un'algebra di Lie risolubile.*
(2) *Se $\mathfrak{a}$ è un ideale risolubile di $\mathfrak{g}$ e l'algebra quoziente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ è risolubile, allora $\mathfrak{g}$ è risolubile.*
(3) *Se $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sono ideali risolubili di $\mathfrak{g}$, allora $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ è un ideale risolubile di $\mathfrak{g}$.*

In particolare ogni algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di dimensione finita contiene un ideale risolubile massimale rispetto all'inclusione. Esso si dice il *radicale* di $\mathfrak{g}$ e si indica con $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$.

Un'algebra di Lie di dimensione finita $\mathfrak{g}$ per cui sia $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ si dice *semisemplice.*

Osserviamo che l'algebra quoziente $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ è semisemplice.

Vale il fondamentale risultato (Decomposizione di Levi-Malčev):

Teorema 5.2 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita. Allora $\mathfrak{g}$ contiene una sottoalgebra semisemplice $\mathfrak{l}$ tale che*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \,. \tag{5.2}$$

Una sottoalgebra semisemplice $\mathfrak{l}$ di $\mathfrak{g}$ tale che $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{r}$ si dice una *sottoalgebra di Levi* di $\mathfrak{g}$.

§6 Algebre di Lie nilpotenti

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo $\mathbb{k}$. Si dice *serie centrale discendente* di $\mathfrak{g}$ la sequenza di ideali di $\mathfrak{g}$ definiti per ricorrenza da:

$$\begin{cases} \mathfrak{C}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \\ \mathfrak{C}^{m+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{C}^m\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \qquad \text{per} \quad m \geq 0 \,. \end{cases} \tag{6.1}$$

Diciamo che $\mathfrak{g}$ è *nilpotente* se $\mathfrak{C}^n\mathfrak{g} = \{0\}$ per qualche intero non negativo n. Poiché $\mathfrak{D}^m\mathfrak{g} \subset \mathfrak{C}^m\mathfrak{g}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, un'algebra di Lie nilpotente è anche risolubile.

L'algebra di Lie lineare $\mathfrak{n}(n, \mathbb{k})$ è un esempio di algebra di Lie nilpotente.

Teorema 6.1 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su $\mathbb{k}$.*

(1) *Se $\mathfrak{g}$ è nilpotente, allora ogni sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{g}$ ed ogni immagine di $\mathfrak{g}$ mediante un morfismo di algebre di Lie è nilpotente.*
(2) *$\mathfrak{g}$ è nilpotente se e soltanto se $\mathfrak{g}/Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ è nilpotente.*
(3) *Se $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ ed è nilpotente, allora $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.*

Dim. La (1) e la (2) sono immediate. Per la (3) osserviamo che se $\mathfrak{g}$ è nilpotente e m è il più grande intero non negativo per cui $\mathfrak{C}^m\mathfrak{g} \neq \{0\}$, allora $\mathfrak{C}^m\mathfrak{g} \subset Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. $\square$

§7 Il teorema di Engel

Lemma 7.1 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{k}$. Se $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ è nilpotente, allora anche $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)}(A)$ è nilpotente.*

DIM. Siano L_A e R_A gli endomorfismi di $\mathfrak{gl}_{\Bbbk}(V)$ definiti rispettivamente da:

$$\begin{cases} L_A(X) = A \circ X & \forall X \in \mathfrak{gl}_{\Bbbk}(V) \\ R_A(X) = X \circ A & \forall X \in \mathfrak{gl}_{\Bbbk}(V) . \end{cases}$$

Ciaramente L_A ed R_A sono nilpotenti e commutano tra loro. Quindi anche

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_{\Bbbk}(V)}(A) = L_A - R_A$$

è nilpotente. □

TEOREMA 7.2 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 1$ su $\Bbbk$. Sia $\mathfrak{a}$ una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\Bbbk}(V)$ formata da elementi nilpotenti. Allora esiste un vettore $v \in V \setminus \{0\}$ tale che $A(v) = 0$ per ogni $A \in \mathfrak{a}$.*

DIM. Ragioniamo per induzione su $m = \dim_{\Bbbk}(\mathfrak{a})$. Se $m \leq 1$, la tesi è banalmente vera. Supponiamo quindi $m > 1$ e il teorema valido per algebre di Lie di dimensione $< m$ di endomorfismi nilpotenti di uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Sia $\{0\} \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{b} \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{a}$ una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{a}$. Per il Lemma 7.1, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b})$ è un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di $\mathfrak{a}$. Per passaggio al quoziente, gli elementi di $\mathfrak{b}$ definiscono un'algebra di Lie di endomorfismi nilpotenti di $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$. Per l'ipotesi induttiva esiste allora $A \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}$ tale che $[\mathfrak{b}, A] \subset \mathfrak{b}$. In particolare $N_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{b}$.

Scegliamo ora la sottoalgebra $\mathfrak{b}$ massimale tra le sottoalgebre di Lie propriamente contenute in $\mathfrak{a}$. Per le considerazioni precedenti deve essere $N_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$ e quindi $\mathfrak{b}$ è un ideale di $\mathfrak{a}$. Consideriamo il morfismo di algebre di Lie $\pi : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{b}$. Se $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ avesse dimensione > 1, l'immagine inversa $\pi^{-1}(\mathfrak{l})$ di una retta $\mathfrak{l}$ di $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ sarebbe una sottoalgebra di $\mathfrak{a}$ con $\mathfrak{b} \underset{\neq}{\subset} \pi^{-1}\mathfrak{l} \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{a}$. Questo è assurdo per la massimalità di $\mathfrak{b}$ e quindi $\dim_{\Bbbk}\mathfrak{a}/\mathfrak{b} = 1$.

Dunque, se $A \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}$, abbiamo

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \Bbbk A .$$

Sia $W = \{v \in V \,|\, B(v) = 0 \quad \forall B \in \mathfrak{b}\}$. Per l'ipotesi induttiva $\dim_{\Bbbk}W > 0$. Inoltre, poiché $\mathfrak{b}$ è un ideale di $\mathfrak{a}$, abbiamo $A(W) \subset W$. Infatti $B(A(w)) = A(B(w)) + [B, A](w) = 0$ per ogni $w \in W$ e $B \in \mathfrak{b}$. La restrizione di A a W è ancora nilpotente e quindi esiste $v \in W \setminus \{0\}$ tale che $A(v) = 0$. Questo implica che $X(v) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{a}$. La dimostrazione è completa. □

Dal Teorema 7.2 si ottiene il TEOREMA DI ENGEL:

TEOREMA 7.3 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su $\Bbbk$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathfrak{g}$ sia nilpotente è che tutti i suoi elementi siano ad-nilpotenti.*

DIM. La necessità è ovvia. Per dimostrare la sufficienza ragioniamo per ricorrenza su $m = \dim_{\Bbbk}\mathfrak{g}$. Se $m \leq 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo $m > 1$. Per il teorema precedente esiste $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ tale che $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)(X) = 0$ per ogni $Y \in \mathfrak{g}$. In particolare $X \in Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$. Osserviamo a questo punto che $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}/Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ ha dimensione $< m$ e ogni elemento di $\mathfrak{a}$ è ad-nilpotente. Per l'ipotesi induttiva $\mathfrak{a}$ è nilpotente e questo implica che $\mathfrak{g}$ è nilpotente. □

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su $\mathbb{k}$. Una *bandiera completa* in V è una successione di sottospazi vettoriali di V:

$$\begin{cases} V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n \\ \text{con } \dim_{\mathbb{k}} V_i = i \text{ per } 0 \leq i \leq n. \end{cases} \tag{7.1}$$

Vale il seguente:

TEOREMA 7.4 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{k}$ e sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di endmomorfismi nilpotenti di V. Allora esiste una bandiera completa $\{V_i\}_{0\leq i\leq n}$ tale che $X(V_i) \subset V_{i-1}$ per ogni $1 \leq i \leq n$.*

DIM. Se $\dim_{\mathbb{k}} V = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi $\dim_{\mathbb{k}}(V) = n > 0$ e il teorema vero per algebre di Lie nilpotenti di endomorfismi di uno spazio vettoriale di dimensione $< n$ su $\mathbb{k}$. Per il Teorema 7.2, esiste $v_1 \in V \setminus \{0\}$ tale che $X(v_1) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Sia $V_1 = \mathbb{k} \cdot v_1$ e consideriamo la rappresentazione ρ di $\mathfrak{g}$ su $W = V/V_1$ ottenuta per passaggio al quoziente. Sia $\pi : V \longrightarrow W$ la proiezione nel quoziente. Poiché $\rho(\mathfrak{g})$ consiste di endomorfismi nilpotenti di W, esiste per l'ipotesi induttiva una bandiera completa $\{W_i\}_{0\leq i\leq n-1}$ di W tale che $\rho(X)(W_i) \subset W_{i-1}$. Otteniamo allora la bandiera completa $\{V_i\}_{0\leq i\leq n}$ desiderata aggiungendo a $\{0\} = V_0$ e a $V_1 = \mathbb{k} \cdot v_1$ i sottospazi $V_i = \pi^{-1}(W_{i-1})$ per $2 \leq i \leq n$. $\square$

Applicando questo risultato alla rappresentazione aggiunta otteniamo:

TEOREMA 7.5 *Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie nilpotente, allora esiste una successione di ideali di $\mathfrak{g}$:*

$$\mathfrak{a}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \mathfrak{a}_{m-1} \subset \mathfrak{a}_m = \mathfrak{g}$$

tale che, per ogni $1 \leq h \leq m$, l'algebra di Lie $\mathfrak{a}_h/\mathfrak{a}_{h-1}$ sia abeliana e di dimensione uno.

TEOREMA 7.6 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{k}$ e sia $\mathfrak{g}$ una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ formata da endomorfismi nilpotenti. Allora $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie nilpotente.*

DIM. Sia infatti $\{V_i\}_{0\leq i\leq n}$ una bandiera completa tale che $X(V_i) \subset V_{i-1}$ per $1 \leq i \leq n$, per ogni $X \in \mathfrak{g}$. Scegliamo una base $e_1, \ldots, e_n$ di V tale che $e_i \in V_i \setminus V_{i-1}$. In tale base ogni elemento di $\mathfrak{g}$ si rappresenta con una matrice di $\mathfrak{n}(n, \mathbb{k})$. Da questa osservazione segue la tesi. $\square$

LEMMA 7.7 *Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie nilpotente di dimensione finita e $\mathfrak{a}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$, allora $\mathfrak{a} \cap Z_{\mathfrak{g}}\mathfrak{g} \neq \{0\}$.*

DIM. $\mathfrak{g}$ opera su $\mathfrak{a}$ mediante la rappresentazione aggiunta. Tutti gli $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)|_{\mathfrak{a}}$, per $X \in \mathfrak{g}$, sono nilpotenti e quindi esiste $A \in \mathfrak{a}$ tale che $[\mathfrak{g}, A] = \{0\}$. Chiaramente $A \in \mathfrak{a} \cap Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. $\square$

§8 Il Teorema di Lie

TEOREMA 8.1 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita $n > 0$ su un campo $\mathbb{k}$, di caratteristica 0 e algebricamente chiuso. Sia $\mathfrak{g}$ una sottoalgebra di Lie risolubile di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$. Esiste un vettore $v \in V \setminus \{0\}$ tale che*

$$\forall A \in \mathfrak{g} \quad \exists \lambda(A) \in \mathbb{k} \quad \textit{tale che} \quad A(v) = \lambda(A)v\,. \tag{8.1}$$

Dim. Ragioniamo per induzione su $m = \dim_{\Bbbk}(\mathfrak{g})$. La tesi è banale se $m \leq 1$. Supponiamo quindi $m > 1$ e il teorema vero per algebre risolubili di endomorfismi lineari di uno spazio di dimensione finita positiva sul campo $\Bbbk$.

Osserviamo che $\mathfrak{g}$ contiene un ideale $\mathfrak{a}$ di codimensione 1: a questo scopo basta scegliere $\mathfrak{a}$ uguale a un qualsiasi iperpiano di $\mathfrak{g}$ contenente $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Per l'ipotesi induttiva, esiste una forma lineare $\lambda : \mathfrak{a} \to \Bbbk$ tale che il sottospazio

$$W = \{v \in V \mid A(v) = \lambda(A)v \quad \forall A \in \mathfrak{a}\}$$

abbia dimensione positiva.

Dimostriamo ora che $X(W) \subset W$ *per ogni* $X \in \mathfrak{g}$. Sia $w \in W$ e $X \in \mathfrak{g}$. Se $Y \in \mathfrak{a}$ abbiamo:

$$Y(X(w)) = X(Y(w)) + [Y, X](w) = \lambda(Y)(X(w)) + \lambda([Y, X])(w)\,.$$

Basterà quindi dimostrare che $\lambda([X, Y]) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{a}$. Fissiamo $X \in \mathfrak{g}$ e $w \in W$. Sia k il più grande intero non negativo tale che

$$w,\ X(w),\ \ldots,\ X^k(w) \tag{8.2}$$

siano linearmente indipendenti. Indichiamo con W_i il sottospazio vettoriale di dimensione i generato da w, $X(w)$, $\ldots$, $X^{i-1}(w)$, per $1 \leq i \leq k+1$ e poniamo $W_0 = \{0\}$. Ogni $Y \in \mathfrak{a}$ lascia i sottospazi W_i invarianti e quindi la sua restrizione a W_{k+1} si scrive come una matrice triangolare superiore nella base (8.2). Verifichiamo, per ricorrenza su $i = 0, ..., k$ che

$$w_{i,Y} = Y(X^i(w)) - \lambda(Y)X^i(w) \in W_i \qquad \forall Y \in \mathfrak{a}\,, \tag{8.3}$$

per $i = 0, \ldots, k$.

Per $i = 0$ questo è conseguenza della definizione di W. Supponiamo ora che la (8.1) valga per $i = h$, con $0 \leq h < k$ e dimostriamo che vale per $i = h+1$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
Y(X^{h+1}(w)) &= Y(X(X^h(w))) \\
&= XY(X^h(w)) - [X, Y](X^h(w)) \\
&= X(\lambda(Y)X^h(w) + w_{h,Y}) - \lambda([X, Y])X^h(w) - w_{h,[X,Y]} \\
&= \lambda(Y)X^{h+1}(w) + X(w_{h,Y}) - \lambda([X, Y])X^h(w) - w_{h,[X,Y]} \\
&= \lambda(Y)X^{h+1}(w) + w_{h+1,Y}
\end{aligned}$$

e $w_{h+1,Y} \in W_{h+1}$ perché $X(w_{h,Y}) \in X(W_h) \subset W_{h+1}$, $X^h(w) \in W_{h+1}$ e $w_{h,[X,Y]} \in W_h \subset W_{h+1}$. In particolare, per ogni Y possiamo considerare la traccia $\mathrm{tr}_{W_{k+1}}(Y)$ della restrizione di Y a W_{k+1} e

$$\mathrm{tr}_{W_{k+1}}(Y) = (k+1)\lambda(Y)\,.$$

Ora, anche X opera su W_{k+1} e la traccia della restrizione a W_{k+1} del commutatore $[X, Y]$ è nulla. Da

$$0 = \mathrm{tr}_{W_{k+1}}([X, Y]) = (k+1)\lambda([X, Y])$$

segue che $\lambda([X, Y]) = 0$ perché $\Bbbk$ ha caratteristica zero.

Quindi W è $\mathfrak{g}$-invariante. Se $A \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{a}$, abbiamo $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathbb{k}A$. Osserviamo che, essendo $\mathbb{k}$ algebricamente chiuso, $W \ni w \longrightarrow A(w) \in W$ ha un autovettore $v \in W \setminus \{0\}$. Tale $v \neq 0$ soddisfa la tesi del teorema. □

Come corollario del Teorema 8.1, otteniamo il Teorema di Lie:

Teorema 8.2 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo algebricamente chiuso $\mathbb{k}$ di caratteristica 0. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra risolubile di endomorfismi di V. Allora esiste una bandiera completa $\{V_i\}_{0\leq i\leq n}$ di V tale che $A(V_i) \subset V_i$ per ogni $A \in \mathfrak{g}$.*

Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie risolubile (di dimensione finita su un campo $\mathbb{k}$ algebricamente chiuso di caratteristica zero) e $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ una sua rappresentazione lineare di dimensione finita, $\rho(\mathfrak{g})$ è risolubile e quindi stabilizza una bandiera completa di V. Applicando questa osservazione alla rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{g}$ otteniamo:

Teorema 8.3 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie risolubile di dimensione finita n su un campo $\mathbb{k}$ algebricamente chiuso di caratteristica zero. Allora esiste una catena di ideali*

$$\{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \mathfrak{a}_{n-1} \subset \mathfrak{a}_n = \mathfrak{g} \tag{8.4}$$

di $\mathfrak{g}$ con $\dim_{\mathbb{k}}(\mathfrak{a}_i) = i$ per $i = 0, 1, \ldots, n-1, n$.

Vale il seguente risultato relativo al cambiamento del campo di base:

Lemma 8.4 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo $\mathbb{k}$. Sia $\tilde{\mathbb{k}}$ un'estensione del campo $\mathbb{k}$. Sia $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di dimensione finita su $\tilde{\mathbb{k}}$ ottenuta per estensione $\tilde{\mathbb{k}}$-bilineare del commutatore di $\mathfrak{g}$. Allora*

1. *$\tilde{\mathfrak{g}}$ è risolubile se e soltanto se $\mathfrak{g}$ è risolubile.*
2. *$\tilde{\mathfrak{g}}$ è nilpotente se e soltanto se $\mathfrak{g}$ è nilpotente.*

Utilizzando il lemma, dimostriamo il seguente:

Teorema 8.5 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo $\mathbb{k}$ di caratteristica zero. L'algebra $\mathfrak{g}$ è risolubile se e soltanto se il suo derivato $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è nilpotente.*

Dim. Chiaramente, se $\mathfrak{g}^{(1)}$ è nilpotente, $\mathfrak{g}$ è risolubile. Dimostriamo il viceversa.

Per il lemma precedente, possiamo supporre che il campo $\mathbb{k}$ sia algebricamente chiuso: infatti, detta $\tilde{\mathbb{k}}$ la chiusura algebrica di $\mathbb{k}$ e posto $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$, abbiamo $\tilde{\mathfrak{g}}^{(1)} = \tilde{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}^{(1)}$.

Sia dunque $\mathbb{k}$ algebricamente chiuso; sia $\{\mathfrak{a}_i\}_{0\leq i\leq n}$ una catena crescente di ideali di $\mathfrak{g}$ con $\dim_{\mathbb{k}}\mathfrak{a}_i = i$. Fissiamo una base $X_1, \ldots, X_n$ di $\mathfrak{g}$ con $X_i \in \mathfrak{a}_i \setminus \mathfrak{a}_{i-1}$ per $1 \leq i \leq n$. Per ogni $X \in \mathfrak{g}$, l'endomorfismo $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ si rappresenta nella base $X_1, \ldots, X_n$ mediante una matrice di $\mathfrak{t}(n, \mathbb{k})$. Poiché $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}([X, Y]) = [\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(X), \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)]$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$, gli elementi di $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{(1)})$ si rappresentano nella base $X_1, \ldots, X_n$ come matrici di $\mathfrak{n}(n, \mathbb{k})$ e sono quindi nilpotenti. Ne segue che $\mathfrak{g}^{(1)}$ è nilpotente per il teorema di Engel. □

Come corollario deduciamo il seguente:

Teorema 8.6 *Sia $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie risolubile su un campo $\mathbb{k}$ di caratteristica zero. Allora possiamo costruire una successione di sottoalgebre di $\mathfrak{g}$ con:*

$$\{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{m-1} \subset \mathfrak{a}_m = \mathfrak{g}$$

tali che $\mathfrak{a}_{h-1}$ sia un ideale in $\mathfrak{a}_h$ e il quoziente $\mathfrak{a}_h/\mathfrak{a}_{h-1}$ sia un'algebra di Lie abeliana di dimensione uno.

Dim. Sia $m = \dim_{\mathbb{k}}\mathfrak{g}$, $m' = \dim_{\mathbb{k}}\mathfrak{g}^{(1)}$ e sia $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ la proiezione nel quoziente. Poiché $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ è un'algebra di Lie abeliana, se

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{m-m'} = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$$

è una qualsiasi bandiera completa, le $\mathfrak{a}_h = \pi^{-1}(V_{h-m'})$, per $h = m', \dots, m$ sono sottoalgebre di $\mathfrak{g}$, ciascuna è un ideale di codimensione uno nella successiva e $\mathfrak{a}_h/\mathfrak{a}_{h-1}$ è un'algebra di Lie abeliana di dimensione uno per $h = m'+1, \dots, m$.

Per concludere la dimostrazione basta osservare che $\mathfrak{a}_{m'} = \mathfrak{g}^{(1)}$ è un'algebra di Lie nilpotente e quindi per il teorema di Engel contiene una sequenza di ideali

$$\{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{m'-1} \subset \mathfrak{a}_{m'} = \mathfrak{g}^{(1)}\,,$$

tali che $\mathfrak{a}_h/\mathfrak{a}_{h-1}$ sia un'algebra di Lie abeliana di dimensione uno, per $h = 1, \dots, m'$. $\square$

Osserviamo che, a differenza del caso in cui avevamo supposto che $\mathbb{k}$ fosse algebricamente chiuso, qui non possiamo in generale ottenere che gli $\mathfrak{a}_h$ siano *ideali* in $\mathfrak{g}$, ma soltanto ciascuno un ideale nella successiva *sottoalgebra* $\mathfrak{a}_{h+1}$ di $\mathfrak{g}$.

§9 Il radicale nilpotente e il nilradicale

In tutto questo paragrafo supporremo che il campo $\mathbb{k}$ abbia caratteristica zero. Tutte le algebre di Lie considerate saranno algebre di Lie su $\mathbb{k}$ di dimensione finita.

Si dice *radicale nilpotente* dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ l'intersezione $\mathrm{nil}(\mathfrak{g})$ dei nuclei delle sue rappresentazioni lineari irriducibili di dimensione finita.

Lemma 9.1 *Sia $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{k}$. Sia $\mathfrak{g}$ una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$. Supponiamo che V sia un $\mathfrak{g}$-modulo irriducibile. Se $\mathfrak{a}$ è un ideale abeliano di $\mathfrak{g}$, allora $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}^{(1)} = \{0\}$.*

Dim. Sia $\mathcal{A}$ la sottoalgebra unitaria (commutativa) di $\mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V)$ generata da $\mathbf{1}_V$ ed $\mathfrak{a}$. Dimostriamo che

se $\mathfrak{b}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$ contenuto in $\mathfrak{a}$ e $\mathrm{tr}_V(AB) = 0$ per ogni $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathfrak{b}$, allora $\mathfrak{b} = \{0\}$.

Abbiamo infatti, se $B \in \mathfrak{b}$,

$$\mathrm{tr}_V(B^n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > 0\,,$$

e quindi ogni elemento $B \in \mathfrak{b}$ è nilpotente. Per il teorema di Engel,

$$W = \{v \in V \mid B(v) = 0 \quad \forall B \in \mathfrak{b}\} \neq \{0\}\,.$$

Poiché $\mathfrak{b}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$ abbiamo

$$B(X(v)) = X(B(v)) - [X, B](v) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}\,,\ \forall B \in \mathfrak{b}\,, \quad \forall v \in W\,.$$

Quindi W è $\mathfrak{g}$-invariante e dunque $W = V$ in quanto V è un $\mathfrak{g}$-modulo irriducibile. Ciò implica che $\mathfrak{b} = \{0\}$.

Possiamo applicare questo risultato a $\mathfrak{b} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$. Infatti: se $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{a}$ e $A \in \mathcal{A}$, otteniamo:

$$\mathrm{tr}_V([X,Y]A) = \mathrm{tr}_V(XYA - YXA) = \mathrm{tr}_V(XYA - XAY) = \mathrm{tr}_V(X[Y,A]) = 0$$

perch'e $\mathcal{A}$ è una sottoalgebra commutativa di $\mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V)$. Quindi $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = 0$. Da ciò segue che gli endomorfismi di $\mathfrak{g}$ commutano con quelli di $\mathcal{A}$. Fissiamo quindi $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $A \in \mathcal{A}$. Abbiamo:

$$\mathrm{tr}_V([X,Y]A) = \mathrm{tr}_V(X[Y,A]) = 0$$

perché $[Y, A] = 0$. Quindi $\mathrm{tr}_V(ZA) = 0$ per ogni $Z \in \mathfrak{g}^{(1)}$, $A \in \mathcal{A}$. Applicando quindi le considerazioni svolte all'inizio della dimostrazione all'ideale $\mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$, otteniamo che $\mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{a} = \{0\}$. $\square$

Otteniamo quindi la caratterizzazione del radicale nilpotente:

TEOREMA 9.2 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo $\mathbb{k}$ di caratteristica zero. Allora*

$$\mathrm{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{g})\,. \tag{9.1}$$

DIM. Ogni funzionale lineare $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{k}$ che si annulla su $\mathfrak{g}^{(1)}$ definisce una rappresentazione unidimensionale, e quindi irriducibile, di $\mathfrak{g}$. Quindi $\mathrm{nil}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}$.

Consideriamo la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{g}$. Possiamo determinare una sequenza di sottospazi vettoriali $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$-invarianti di $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{G}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{G}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_m = \mathfrak{g}$$

tali che la rappresentazione indotta su ciascuno dei quozienti $\mathfrak{G}_h/\mathfrak{G}_{h-1}$ $(1 \leq h \leq m)$ sia irriducibile. In particolare $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ è nilpotente per ogni $X \in \mathrm{nil}(\mathfrak{g})$, in quanto $[X, \mathfrak{G}_h] \subset \mathfrak{G}_{h-1}$ per ogni $h = 1, \ldots, m$ se $X \in \mathrm{nil}(\mathfrak{g})$. Per il teorema di Engel $\mathrm{nil}(\mathfrak{g})$ è un ideale nilpotente di $\mathfrak{g}$ e quindi è contenuto in $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$.

Abbiamo quindi ottenuto l'inclusione

$$\mathrm{nil}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{g})\,.$$

Per dimostrare l'inclusione opposta, consideriamo una qualsiasi rappresentazione lineare irriducibile di dimensione finita $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$.

Sia $k \geq 0$ il più piccolo numero naturale tale che $\rho(\mathfrak{D}^{k+1}\mathrm{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$. Poniamo $\mathfrak{g}' = \rho(\mathfrak{g})$ e $\mathfrak{a} = \rho(\mathfrak{D}^k\mathrm{rad}(\mathfrak{g}))$. Allora V è un $\mathfrak{g}'$-modulo irriducibile e $\mathfrak{a}$ è un ideale abeliano di $\mathfrak{g}'$. Per il Lemma 9.1,

$$\rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{D}^k\mathrm{rad}(\mathfrak{g})) \subset \mathfrak{D}\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{a} = \{0\}\,.$$

Se fosse $k > 0$, avremmo $\mathfrak{D}^k\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}$ e quindi $\rho(\mathfrak{D}^k\mathrm{rad}(\mathfrak{g})) = \rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{D}^k\mathrm{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$ contraddirebbe la scelta di k. Deve essere perciò $k = 0$ e quindi $\rho(\mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{g})) = \{0\}$. Dunque $\ker\rho \supset \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ per ogni rappresentazione ρ irriducibile di dimensione finita: la dimostrazione è completa. $\square$

Corollario 9.3 *Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie risolubile, allora il radicale nilpotente di $\mathfrak{g}$ è $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Se ρ è una rappresentazione semplice di dimensione finita $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{k}}(V)$ di $\mathfrak{g}$, allora $\rho(\mathfrak{g})$ è commutativa e la sottoalgebra associativa di* $\mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V)$ *generata dall'identità* I_V *e da $\rho(\mathfrak{g})$ è un'estensione algebrica di $\mathbb{k}$.*

Dim. Poiché $\mathfrak{g}$ coincide con il proprio radicale $\mathfrak{r}$, abbiamo $\mathrm{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{g}^{(1)}$. Quindi $[\rho(\mathfrak{g}), \rho(\mathfrak{g})] = \rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \{0\}$ e $\rho(\mathfrak{g})$ è commutativa. Se indichiamo con $\mathbb{F}$ la sottoalgebra associativa di $\mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V)$ generata da $\rho(\mathfrak{g})$ e da I_V, essa è quindi commutativa ed ogni elemento diverso da zero è invertibile per il lemma di Schur. Quindi $\mathbb{F}$ è un campo. Poiché $\mathbb{F}$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{k}$, esso ne è un'estensione algebrica. □

Corollario 9.4 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su $\mathbb{k}$, con radicale $\mathfrak{r}$. Allora i seguenti insiemi sono uguali:*

1) il più grande ideale nilpotente di $\mathfrak{g}$;
2) il più grande ideale nilpotente di $\mathfrak{r}$;
3) l'insieme degli $X \in \mathfrak{r}$ tali che $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ *sia nilpotente;*
4) l'insieme degli $X \in \mathfrak{r}$ tali che $\mathrm{ad}_{\mathfrak{r}}(X)$ *sia nilpotente.*

Dim. Indichiamo con $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ gli ideali descritti rispettivamente nei punti 1), 2), 3) 4). Abbiamo chiaramente $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{c} \subset \mathfrak{d}$. Poiché $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{r}$ per ogni $X \in \mathfrak{r}$, vale anche l'inclusione $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{c}$ e quindi $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$. Per dimostrare che i quattro ideali sono uguali basterà quindi verificare che $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$. Consideriamo la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{g}$ e sia

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{m-1} \subset V_m = \mathfrak{g}$$

una serie di Jordan-Hölder per $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$, cioè una catena massimale di sottospazi vettoriali $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$-invarianti di $\mathfrak{g}$. Indichiamo con ρ_h la rappresentazione indotta sul quoziente V_h/V_{h-1} dalla restrizione a $\mathfrak{r}$ della rappresentazione aggiunta. Poiché essa è irriducibile, abbiamo $\rho_h(X) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{r}$ per cui $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ è nilpotente. Quindi $\mathfrak{d} = \bigcap_h \ker \rho_h$ è un ideale nilpotente di $\mathfrak{g}$ e quindi è contenuto in $\mathfrak{a}$. □

L'ideale $\mathfrak{n}$ formato dagli elementi $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-nilpotenti $\mathfrak{r}$ del radicale di $\mathfrak{g}$ si dice il *nilradicale* o *il più grande ideale nilpotente* di $\mathfrak{g}$.

Se indichiamo con $\mathfrak{n}_0$ il radicale nilpotente[12] $\mathrm{nil}(\mathfrak{g})$ di $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{r} \supset \mathfrak{n} \supset \mathfrak{n}_0 \,.$$

§10 Automorfismi speciali

Proposizione 10.1 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su un campo $\mathbb{k}$ di caratteristica zero e siano $\mathfrak{n}$ il suo ideale nilpotente massimale ed $\mathfrak{n}_0$ il suo radicale nilpotente. Allora*

$$\mathrm{Aut}_{\mathfrak{n}} = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{n}\} \qquad e \qquad \mathrm{Aut}_{\mathfrak{n}_0} = \{\exp(X) \mid X \in \mathfrak{n}_0\}$$

sono sottogruppi normali di $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *contenuti in* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

Dim. Basta osservare che sia $\mathfrak{n}$ che $\mathfrak{n}_0$ sono ideali caratteristici di $\mathfrak{g}$, cioè invarianti per automorfismi di $\mathfrak{g}$. □

Gli elementi di $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{n}_0}(\mathfrak{g})$ si dicono *automorfismi speciali* di $\mathfrak{g}$.

Vale la seguente precisazione del Teorema VI.5.2:

[12] Anche l'inclusione $\mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}$ può essere propria. Ad esempio, se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie abeliana, abbiamo $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{n}_0 = \{0\}$.

Teorema 10.2 *Se $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}'$ sono due sottoalgebre di Levi di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ su un campo $\mathbb{k}$ di caratteristica zero, allora esiste un automorfismo speciale $a \in \mathrm{Aut}_{\mathfrak{n}_0}(\mathfrak{g})$ tale che $\mathfrak{l}' = a(\mathfrak{l})$.*

CAPITOLO VII

GRUPPI DI LIE ASTRATTI

§1 Gruppi e algebre di Lie astratte

Abbiamo definito un gruppo di Lie $\mathbf{G}$ come un gruppo topologico separato localmente isomorfo a un sottogruppo di Lie del gruppo lineare reale.

Possiamo dare una definizione equivalente dicendo che un gruppo di Lie è un gruppo topologico separato su cui è definita una struttura di varietà analitica reale tale che l'applicazione

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g_1, g_2) \to g_1^{-1} g_2 \in \mathbf{G}$$

sia analitica[13].

Le traslazioni a destra e a sinistra in un gruppo di Lie $\mathbf{G}$ sono diffeomorfismi analitici.

Denotiamo con $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$ lo spazio vettoriale reale dei campi di vettori di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $\mathbf{G}$. Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$ su $\mathbf{G}$ si dice *invariante a sinistra* se $L_{g_*}X = X$ per ogni $g \in \mathbf{G}$. Chiaramente un campo di vettori invariante a sinistra è analitico. Indichiamo con $\mathfrak{X}^{\mathbf{G}}(\mathbf{G})$ l'insieme dei campi di vettori invarianti a sinistra su $\mathbf{G}$. Vale il:

Teorema 1.1 *Con l'operazione di commutazione di campi di vettori:*

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{G}),\ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{G}, \mathbb{R})$$

e con la struttura naturale di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, *l'insieme* $\mathfrak{X}^{\mathbf{G}}(\mathbf{G})$ *dei campi di vettori invarianti a sinistra è un'algebra di Lie.*

L'applicazione $\mathfrak{X}^{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) \ni X \to X_e \in T_e\mathbf{G}$ *è un isomorfismo lineare.*

Sia $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$ lo spazio tangente nell'identità del gruppo di Lie $\mathbf{G}$. Su di esso definiamo una struttura di algebra di Lie reale mediante l'identificazione con $\mathfrak{X}^{\mathbf{G}}(\mathbf{G})$ del teorema precedente: se $X, Y \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$, indichiamo con $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ i corrispondenti campi di vettori invarianti a sinistra e poniamo $[X,Y] = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e$.

Se $X \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$, indichiamo con $\exp(tX) \in \mathbf{G}$ la soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$(\dagger) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\exp(tX) = \tilde{X} = L_{\exp(tX)_*}X \\ \exp(0\,X) = \exp(0) = e\,. \end{cases}$$

[13] Il teorema di Gleason, Montgomery e Zippin (cf. Montgomery, Zippin "Topological Transformation Groups" Interscience, N.Y., 1955) dice che un gruppo topologico localmente euclideo ha una ed una sola struttura analitica in cui le operazioni di gruppo sono analitiche.

Poiché si verifica facilmente che $\exp(t_1 X)\exp(t_2 X) = \exp([t_1+t_2]\, X)$ se t_1, t_2, t_1+t_2 appartengono all'intervallo di esistenza della soluzione di (†), si verifica facilmente che la soluzione esiste per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Se $\mathbf{G} = \mathbf{GL}(n, \Bbbk)$, con $\Bbbk$ uguale a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$, allora $\mathfrak{L}(\mathbf{G}) = \mathfrak{gl}(n, \Bbbk)$ ed otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\exp(tX) = \exp(tX) \circ X \\ \exp(0 \cdot X) = \exp(0) = I_n \end{cases}$$

che ha come soluzione l'esponenziale definito sulle matrici nel capitolo II. III §5

Se $\mathbf{G}$ è un gruppo lineare, o un sottogruppo di lie di un gruppo lineare, la definizione di algebra di Lie data in precedenza coincide con la definizione astratta che abbiamo ora introdotto (cf. la discussione dei sottogruppi di Lie del gruppo lineare in III §5).

In modo analogo al caso dei sottogruppi di Lie dei gruppi lineari, anche per i gruppi di Lie astratti vale il:

Teorema 1.2 *Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. L'applicazione esponenziale:*

$$\mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$$

definisce un diffeomorfismo tra un intorno aperto di 0 in $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^\ell$ e un intorno aperto dell'identità in $\mathbf{G}$.

Un *omomorfismo* tra due gruppi di Lie $\mathbf{G}_1$ e $\mathbf{G}_2$ è un'applicazione $\phi : \mathbf{G}_1 \longrightarrow \mathbf{G}_2$ che è al tempo stesso un omomorfismo di gruppi ed un'applicazione differenziabile.

Esso si dice un *isomorfismo* di gruppi di Lie se è invertibile ed anche l'inversa $\phi^{-1} : \mathbf{G}_2 \longrightarrow \mathbf{G}_1$ è un omomorfismo di gruppi di Lie.

Teorema 1.3 *Sia $\phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{H}$ un omomorfismo di gruppi di Lie. Allora:*

(1) $d\phi_e : \mathfrak{L}(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathbf{H})$ *è un omomorfismo di algebre di Lie.*
(2) $\ker\phi$ *è un sottogruppo chiuso normale di $\mathbf{G}$, con algebra di Lie* $\ker d\phi_e$.
(3) $\phi(\mathbf{G})$ *è un sottogruppo di Lie di $\mathbf{H}$, con algebra di Lie* $d\phi_e(\mathfrak{L}(\mathbf{G}))$.
(4) *Un isomorfismo di gruppi topologici tra due gruppi di Lie è anche un isomorfismo di gruppi di Lie.*

Due gruppi di Lie $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ si dicono *localmente isomorfi* se esiste un omeomorfismo analitico $\phi : U \longrightarrow V$ di un intorno U di $e_{\mathbf{G}}$ in $\mathbf{G}$ su un intorno V di $e_{\mathbf{H}}$ in $\mathbf{H}$ tale che $\phi(g_1)\phi(g_2) = \phi(g_1 g_2)$ per ogni $g_1, g_2 \in \mathbf{U}$ tali che $g_1 g_2 \in \mathbf{U}$. In questo caso, il differenziale di ϕ nell'identità definisce un isomorfismo $d\phi_{e_{\mathbf{G}}} : \mathfrak{L}(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathbf{H})$ tra le loro algebre di Lie.

Più in generale, chiamiamo *omomorfismo locale* tra due gruppi di Lie $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ un'applicazione analitica $\phi : U \longrightarrow \mathbf{H}$ definita su intorno aperto U di $e_{\mathbf{G}}$ in $\mathbf{G}$ tale che $\phi(g_1)\phi(g_2) = \phi(g_1 g_2)$ se g_1, g_2, $g_1 g_2 \in U$. Il suo differenziale nell'identità $d\phi_{e_{\mathbf{G}}} : \mathfrak{L}(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathbf{H})$ è allora un morfismo di algebre di Lie.

Il fatto che ogni gruppo di Lie sia localmente isomorfo a un sottogrupo di Lie del gruppo lineare è conseguenza del seguente teorema[14]

[14] La dimostrazione di questo risultato è dovuta ad I.D.Ado [*Rappresentazione matriciale di algebre di Lie* (in russo) Usp. Math. Nauk **2** no. 6 (**1947** pp.159-173)] per i campi di caratteristica 0, e a K. Iwasawa [*On the representation of Lie algebras* Japan J. Math **19**, (**1948**), pp.405-426] per campi di caratteristica qualsiasi.

Teorema 1.4 (Ado-Iwasawa) *Ogni algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di dimensione finita su un campo $\Bbbk$ ammette una rappresentazione fedele di dimensione finita. Esiste cioè per qualche intero positivo n un omomorfismo iniettivo di algebre di Lie $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \Bbbk)$.*

Il gruppo di Lie $\mathbf{G}$ sarà quindi localmente isomorfo al gruppo analitico associato a una qualsiasi rappresentazione matriciale fedele della sua algebra di Lie.

Vale il seguente:

Teorema 1.5 *Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie. Allora il suo rivestimento universale $\widetilde{\mathbf{G}}$ ammette un'unica struttura di gruppo di Lie che rende la proiezione di rivestimento $\pi : \widetilde{\mathbf{G}} \to \mathbf{G}$ un omomorfismo di gruppi di Lie e un isomorfismo locale. Il particolare $\pi_* : \mathfrak{L}(\widetilde{\mathbf{G}}) \to \mathfrak{L}(\mathbf{G})$ è un isomorfismo di algebre di Lie.*

Data un'algebra di Lie reale $\mathfrak{g}$ esiste unico, a meno di isomorfismi, un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso $\mathbf{G}_{\mathfrak{g}}$ la cui algebra di Lie è isomorfa a $\mathfrak{g}$.

Se $\mathbf{G}$ è un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso ed $\mathbf{H}$ un qualsiasi gruppo di Lie, allora per ogni omomorfismo $\Phi : \mathfrak{L}(\mathbf{G}) \to \mathfrak{L}(\mathbf{H})$ delle loro algebre di Lie esiste un unico omomorfismo $\phi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ tale che $\Phi = d\phi_{e_{\mathbf{G}}}$.

Se $\mathbf{G}$ è un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso ed $\mathbf{H}$ un qualsiasi gruppo di Lie, allora ogni omomorfismo locale di $\mathbf{G}$ in $\mathbf{H}$ è restrizione di un omomorfismo globale, univocamente determinato.

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie. Un sottogruppo di Lie di $\mathbf{G}$ è un suo sottogruppo $\mathbf{H}$, dotato di una struttura di varietà analitica tale che l'immersione $\mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{G}$ sia un'applicazione analitica. Osserviamo che la topologia di $\mathbf{H}$ è, in generale, più fine della topologia di sottospazio.

In modo analogo al caso dei sottogruppi del gruppo lineare abbiamo:

Teorema 1.6 *Ogni sottogruppo chiuso $\mathbf{H}$ di un gruppo di Lie $\mathbf{G}$ è un suo sottogruppo di Lie con la topologia indotta.*

Per ogni sottoalgebra di Lie $\mathfrak{h}$ dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di un gruppo di Lie $\mathbf{G}$ esiste una e uno e un solo sottogruppo di Lie connesso $\mathbf{H}$ di $\mathbf{G}$ che ha algebra di Lie $\mathfrak{h}$.

Un'azione ϕ[15] (sinistra) di un gruppo di Lie $\mathbf{G}$ su una varietà differenziabile M è un'applicazione differenziabile:

$$\mathbf{G} \times M \ni (g, x) \longrightarrow \phi(g)(x) \in M \qquad \text{tale che}$$

$$\phi(g_1 g_2)(x) = \phi(g_1)(\phi(g_2)(x)) \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbf{G},\ \forall x \in M\,, \quad \phi(e)(x) = x \quad \forall x \in M\,.$$

Vale il seguente:

Teorema 1.7 *Sia ϕ un'azione a sinistra di un gruppo di Lie $\mathbf{G}$ su una varietà differenziabile M, sia x_0 un punto di M. Consideriamo l'applicazione differenziabile: $\phi_{x_0} : \mathbf{G} \ni g \longrightarrow \phi(g)(x_0) \in M$. Allora:*

(1) *Lo stabilizzatore $\mathbf{G}_{x_0} = \{g \in \mathbf{G} \mid \phi(g)(x_0) = x_0\}$ è un sottogruppo di Lie chiuso di $\mathbf{G}$ con algebra di Lie uguale a $\ker d_e\phi_{x_0}$.*
(2) *L'orbita $\mathbf{G}x_0 = \phi_{x_0}(\mathbf{G}) = \{\phi(g)(x_0) \mid g \in \mathbf{G}\}$ è una sottovarietà differenziabile di M.*

[15] In modo analogo si definisce un'azione a destra di un gruppo di Lie $\mathbf{G}$ su una varietà differenziabile M come un'applicazione differenziabile: $M \times \mathbf{G} \ni (x, g) \longrightarrow x \cdot \phi(g) \in M$ tale che $x \cdot \phi(g_1 g_2) = (x \cdot \phi(g_1)) \cdot \phi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbf{G},\ \forall x \in M\,, \quad x \cdot \phi(e) = x \quad \forall x \in M\,.$

§2 Struttura dei gruppi di Lie astratti

Descriviamo in questo paragrafo alcune proprietà generali dei gruppi di Lie astratti, che si ricollegano ai risultati sulla struttura delle algebre di Lie esposti nel capitolo VI.

Teorema 2.1 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso, con algebgra di Lie* $\mathfrak{g}$. *Sia* $\mathfrak{a}$ *un ideale di* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathbf{A}$ *il corrispondente sottogruppo analitico di* $\mathbf{G}$. *Allora* $\mathbf{A}$ *è un sottogruppo normale chiuso di* $\mathbf{G}$.

Dim. Sia $\mathbf{H}$ un gruppo di Lie analitico con algebra di Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Poiché $\mathbf{G}$ è semplicemente connesso, esiste un omomorfismo di gruppi di Lie $\phi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ il cui differenziale nell'identità $d\phi_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ sia la proiezione canonica nel quoziente. Allora $\mathbf{A}$ è la componente connessa dell'identità del nucleo di ϕ, e quindi è un sottogruppo chiuso normale di $\mathbf{G}$. $\square$

Il sottogruppo $\mathbf{A}$ risulta essere semplicemente connesso[16]. Vale infatti il seguente:

Teorema 2.2 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso e sia* $\mathbf{A}$ *un suo sottogruppo analitico normale. Allora* $\mathbf{A}$ *è chiuso e sia* $\mathbf{A}$ *che* $\mathbf{G}/\mathbf{A}$ *sono semplicemente connessi. Inoltre il fibrato* $\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}/\mathbf{A}$ *ammette una sezione analitica globale.*

Dividiamo la dimostrazione del teorema in una serie di lemmi.

Lemma 2.3 *Sia* $\mathfrak{g}$ *un'algebra di Lie su un campo* $\Bbbk$ *di caratteristica zero ed* $\mathfrak{a}$ *un suo ideale, massimale tra gli ideali propriamente contenuti in* $\mathfrak{g}$. *Allora esiste una sottoalgebra* $\mathfrak{b}$ *di* $\mathfrak{g}$ *tale che* $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$.

Dim. Poiché $\mathfrak{a}$ è massimale, l'algebra quoziente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ è semplice, quindi o ha dimensione uno, o è semisemplice. Nel primo caso, è sufficiente scegliere $\mathfrak{b} = \Bbbk X$ per un qualsiasi $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{a}$. Nel secondo caso, osserviamo che il radicale $\mathfrak{r}$ di $\mathfrak{g}$ è contenuto in $\mathfrak{a}$. Quindi, se $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$ è una decomposizione di Levi-Malčev di $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{s}$ è un ideale di $\mathfrak{s}$ e quindi $\mathfrak{s} = (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{r}) \oplus \mathfrak{b}$ per un ideale $\mathfrak{b}$ di $\mathfrak{s}$. Quindi $\mathfrak{b}$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ per cui risulta $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. $\square$

Lemma 2.4 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso, con algebra di Lie* $\mathfrak{g}$. *Siano* $\mathfrak{a}$ *un ideale e* $\mathfrak{b}$ *una sottoalgebra di* $\mathfrak{g}$ *tali che* $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$, *e siano* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *i sottogruppi analitici generati da* $\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{b}$ *rispettivamente. Allora l'applicazione*

$$\mathbf{A} \ltimes \mathbf{B} \ni (a, b) \longrightarrow ab \in \mathbf{G}$$

è un isomorfismo di gruppi di Lie. In particolare $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *sono entrambi chiusi e semplicemente connessi e abbiamo:*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{G}\,, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{e\}.$$

Dim. Siano $\tilde{\mathbf{A}}$ e $\tilde{\mathbf{B}}$ gruppi di Lie analitici semplicemente connessi con algebre di Lie $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$. Poiché $\tilde{\mathbf{B}}$ è semplicemente connesso, l'applicazione

$$\mathfrak{b} \ni X \longrightarrow \mathrm{ad}(X)|_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a})$$

si estende a un'applicazione

$$\widetilde{\mathrm{ad}} : \tilde{\mathbf{B}} \ni b \longrightarrow \widetilde{\mathrm{ad}}_b \in \mathrm{Aut}(\tilde{\mathbf{A}})$$

[16] A. Malčev "*On the simple connectedness of invariant subrups of Lie groups*" Doklady Akademii Nauk SSSR **34** (1942) pp.10-13.

e possiamo quindi definire il prodotto semidiretto $\mathbf{G}' = \tilde{\mathbf{A}} \ltimes \tilde{\mathbf{B}}$ ponendo

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \widetilde{\mathrm{ad}}_{b_1}(a_2), b_1 b_2) \text{ se } a_1, a_2 \in \tilde{\mathbf{A}} \text{ e } b_1, b_2 \in \tilde{\mathbf{B}}.$$

Poiché topologicamente $\mathbf{G}'$ è prodotto cartesiano di connessi e semplicemente connessi, è connesso e semplicemente connesso, con algebra di Lie $\mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}$. Quindi l'isomorfismo naturale tra $\mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{g}$ definisce un isomorfismo tra i gruppi di Lie $\mathbf{G}'$ e $\mathbf{G}$. Ne segue la tesi, in quanto $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono le immagini di $\tilde{\mathbf{A}}$ e $\tilde{\mathbf{B}}$ nell'isomorfismo di $\mathbf{G}'$ su $\mathbf{G}$. □

Lemma 2.5 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso, con algebra di Lie* $\mathfrak{g}$. *Siano* $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_m$ *sottoalgebre di Lie di* $\mathfrak{g}$, *tali che*

(i) $\mathfrak{g} = \bigoplus_{h=0}^m \mathfrak{b}_h$,

(ii) $\mathfrak{a}_{h-1} = \bigoplus_{0 \le j < h} \mathfrak{b}_j$ *è un ideale di* $\mathfrak{a}_h = \bigoplus_{0 \le j \le h} \mathfrak{b}_j$ *per ogni* $h = 1, \ldots, m$.

Allora, per ogni $h = 0, 1, \ldots, m$, *il sottogruppo analitico* $\mathbf{B}_h$ *di* $\mathbf{G}$ *con algebra di Lie* $\mathfrak{b}_h$ *è semplicemente connesso e l'applicazione:*

$$\mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_1 \times \cdots \times \mathbf{B}_m \ni (b_0, b_1, \ldots, b_m) \longrightarrow b_0 \cdot b_1 \cdots b_m \in \mathbf{G}$$

è un diffeomorfismo.

Dim. Indichiamo con $\mathbf{A}_h$ i sottogruppi analitici di $\mathbf{G}$ con algebra di Lie $\mathfrak{a}_h$ ($h = 0, 1, \ldots, m$). Utilizzando il lemma precedente, si ottiene per ricorrenza che per ogni $h = 1, \ldots, m$ i sottogruppi $\mathbf{A}_{m-h}$ e $\mathbf{B}_{m-h+1}$ sono semplicemente connessi e $\mathbf{A}_{m-h} \times \mathbf{B}_{m-h+1} \ni (a, b) \longrightarrow a \cdot b \in \mathbf{A}_{m-h+1}$ è un diffeomorfismo. Poiché $\mathbf{A}_m = \mathbf{G}$, otteniamo la tesi da

$$\begin{aligned}\mathbf{G} \simeq \mathbf{A}_{m-1} \times \mathbf{B}_m \simeq \mathbf{A}_{m-2} \times \mathbf{B}_{m_1} \times \mathbf{B}_m \simeq \mathbf{A}_{m-3} \times \mathbf{B}_{m_2} \times \mathbf{B}_{m_1} \times \mathbf{B}_m \\ \simeq \cdots \simeq \mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_1 \cdots \times \mathbf{B}_m = \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_1 \cdots \times \mathbf{B}_m\,.\end{aligned}$$

□

La dimostrazione del Teorema VII.2.2 si ricava dai lemmi precedenti: se $\mathfrak{a}$ è l'algebra di Lie di $\mathbf{A}$, possiamo costruire una catena massimale di sottoalgebre

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \subsetneqq \mathfrak{a}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{a}_{m-1} \subsetneqq \mathfrak{a}_m = \mathfrak{g}$$

tale che ogni $\mathfrak{a}_h$ sia un ideale in $\mathfrak{a}_{h+1}$. Usando il Lemma VII.2.3, possiamo trovare sottoalgebre $\mathfrak{b}_h$ tali che $\mathfrak{a}_h = \mathfrak{a}_{h-1} \oplus \mathfrak{b}_h$ per ogni $h = 1, \ldots, m$. Posto allora $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}_0$, abbiamo $\mathfrak{g} = \bigoplus_{h=0}^m \mathfrak{b}_h$ e possiamo applicare il Lemma VII.2.5 per ottenere la tesi del Teorema VII.2.2. □

Corollario 2.6 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie* $\mathfrak{g}$. *Sia* $\mathfrak{z}$ *il centro di* $\mathfrak{g}$. *Il sottogruppo analitico* $\mathbf{Z}$ *di* $\mathbf{G}$ *con algebra di Lie* $\mathfrak{z}$ *è semplicemente connesso.*

§3 Il commutatore

Il *commutatore* $\mathbf{G}'$ di un gruppo $\mathbf{G}$ è il sottogruppo generato dagli elementi $(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$, al variare di a e b in $\mathbf{G}$.

Lemma 3.1 *Il commutatore* $\mathbf{G}'$ *è un sottogruppo normale di* $\mathbf{G}$ *ed è il suo più piccolo sottogruppo normale per cui il quoziente* $\mathbf{G}/\mathbf{G}'$ *sia un sottogruppo abeliano.*

Dim. Se $a, b, g \in \mathbf{g}$, allora $\mathrm{ad}_g\left((a, b)\right) = \left(\mathrm{ad}_g(a), \mathrm{ad}_g(b)\right)$. Quindi $\mathbf{G}'$ è un sottogruppo normale. Se $\mathbf{A}$ è un qualsiasi gruppo abeliano e $\phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{A}$ un omomorfismo di gruppi, allora $\mathbf{G}' \subset \ker \phi$, e quindi $\mathbf{G}'$ è il più piccolo sottogruppo normale di $\mathbf{G}$ per cui il quoziente $\mathbf{G}/\mathbf{G}'$ sia abeliano. $\square$

Il *commutatore* di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ su un campo $\mathbb{k}$ è il sottospazio vettoriale $\mathfrak{g}'$ generato dagli elementi della forma $[X,Y]$ al variare di X, Y in $\mathfrak{g}$. Abbiamo:

Lemma 3.2 *Il commutatore $\mathfrak{g}'$ di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ su $\mathbb{k}$ è un'ideale di $\mathfrak{g}$; esso è il più piccolo ideale per cui il quoziente $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ sia un'algebra di Lie abeliana.*

Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di un gruppo di Lie $\mathbf{G}$. Allora $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ è l'algebra di Lie del commutatore $\mathbf{G}'$ di $\mathbf{G}$.

Se $\mathbf{G}$ è connesso e semplicemente connesso allora il suo commutatore $\mathbf{G}'$ è un sottogruppo chiuso e connesso di $\mathbf{G}$, ed è il sottogruppo analitico di $\mathfrak{g}'$.

Dim. Le prime affermazioni sono di facile verifica e ne tralasciamo perciò la dimostrazione.

Supponiamo ora che $\mathbf{G}$ sia un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso. Consideriamo l'algebra di Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$. Essa è abeliana e quindi possiamo considerarla come l'algebra di Lie del gruppo additivo $\mathbb{R}^k$ per qualche intero positivo k. Per il Teorema VI.1.5, l'omomorfismo canonico $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ è il differenziale nell'identità di un omomorfismo di algebre di Lie $\phi : \mathbf{G} \to \mathbb{R}^k$. Il suo nucleo è un sottogruppo chiuso normale $\mathbf{H}$ di $\mathbf{G}$, con algebra di Lie $\mathfrak{g}'$. Poiché $\mathbf{G}/\mathbf{H} \simeq \mathbb{R}^k$ è abeliano, $\mathbf{H} \supset \mathbf{G}'$.

Dico che $\mathbf{H}$ è connesso. Siano infatti a, b due punti distinti di $\mathbf{H}$. Poiché $\mathbf{G}$ è connesso per archi, possiamo trovare un cammino continuo $s : [0,1] \to \mathbf{G}$ con $s(0) = a$, $s(1) = b$. Allora $\phi(s(t))$ è un laccetto continuo in $\mathbb{R}^k$, con $\phi(s(0))\phi(s(1)) = 0$. Sia $F : [0,1]\times[0,1] \ni (t,\tau) \to F(t,\tau) \in \mathbb{R}^k$ un'omotopia di $\phi\circ s$ con il laccetto costante: $F(0,\tau) = 0$, $F(1,\tau) = 0$ per ogni $\tau \in [0,1]$ e $F(t,1) = 0$ per ogni $t \in [0,1]$. Poiché ϕ è una fibrazione localmente banale, la F si rialza a un'applicazione continua $\tilde{F} : [0,1] \times [0,1] \ni (t,\tau) \to \tilde{F}(t,\tau) \in \mathbf{G}$ con $\tilde{F}(t,0) = s(t)$ per $t \in [0,1]$, $\tilde{F}(0,\tau) = a$ ed $\tilde{F}(1,\tau) = b$ per ogni $\tau \in [0,1]$, $\phi \circ \tilde{F} = F$. Poiché $F(t,1) = 0$, abbiamo $\tilde{F}(t,1) \in \mathbf{H}$ per ogni $t \in [0,1]$ e quindi $[0,1] \ni t \to \tilde{F}(t,1) \in \mathbf{H}$ è un cammino continuo in $\mathbf{H}$ che congiunge a a b. Perciò $\mathbf{H}$ è connesso per archi.

Quindi $\mathbf{H}$ è il sottogruppo analitico con algebra di Lie $\mathfrak{g}'$. Otteniamo così l'inclusione $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}'$, e quindi, poiché vale anche l'inclusione opposta, concludiamo che $\mathbf{H} = \mathbf{G}'$. $\square$

Da questo lemma si ricava subito la:

Proposizione 3.3 *Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie connesso, con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, allora $\mathbf{G}$ coincide con il suo commutatore $\mathbf{G}'$.*

Sia ora $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{h}$ è una sottoalgebra di Lie dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di un gruppo di Lie $\mathbf{G}$, in generale il sottogruppo analitico $\mathbf{H}$ generato da $\mathfrak{h}$ non è chiuso in $\mathbf{G}$. Possiamo allora considerare il più piccolo sottogruppo chiuso $\mathbf{Q}$ di $\mathbf{G}$ che contiene $\mathbf{H}$. La sua algebra di Lie $\mathfrak{q}$ si indica con $\mathfrak{h}^M$ e si dice la *chiusura di Malčev* di $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$.

Vale il:

Teorema 3.4 *Se $\mathfrak{h}$ è una sottoalgebra dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di un gruppo di Lie $\mathbf{G}$ e $\mathfrak{h}^M$, allora il suo commutatore $\mathfrak{h}'$ è uguale al commutatore della sua chiusura di Malčev $\left(\mathfrak{h}^M\right)'$.*

Dim. Sia
$$\mathbf{H}_1 = \{g \in \mathbf{G} \,|\, (\mathrm{Ad}_g - \mathrm{I}_{\mathfrak{g}})(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}'\}.$$
Allora $\mathbf{H}_1$ è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{G}$ e la sua algebra di Lie è
$$\mathfrak{h}_1 = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, \mathrm{ad}(X)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}'\}.$$
Poiché $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_1$, abbiamo $\mathfrak{h}^M \subset \mathfrak{h}^1$, cioè $[\mathfrak{h}^M, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}'$.

Consideriamo quindi il sottogruppo chiuso:
$$\mathbf{H}_2 = \{g \in \mathbf{G} \,|\, (\mathrm{Ad}_g - \mathrm{I}_{\mathfrak{g}})(\mathfrak{h}^M) \subset \mathfrak{h}'\}$$
con algebra di Lie
$$\mathfrak{h}_2 = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, \mathrm{ad}(X)(\mathfrak{h}^M) \subset \mathfrak{h}'\}.$$
Poiché $\mathfrak{h}_2 \supset \mathfrak{h}$, ne segue che $\mathfrak{h}^m \subset \mathfrak{h}_2$, cioè $(\mathfrak{h}^M)' = [\mathfrak{h}^M, \mathfrak{h}^M] \subset \mathfrak{h}'$ come volevamo dimostrare. □

Utilizzando questo teorema, possiamo dimostrare la:

Proposizione 3.5 *Sia* $\mathbf{H}$ *un sottogruppo di Lie analitico di un gruppo di Lie* $\mathbf{G}$. *Se* $\mathbf{F}$ *è la chiusura di* $\mathbf{H}$ *in* $\mathbf{G}$, *ed* $\tilde{\mathbf{F}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{F}$ *il rivestimento universale di* $\mathbf{F}$, *allora il sottogruppo analitico* $\tilde{\mathbf{H}} = \left(\pi^{-1}(\mathbf{H})\right)_e$ *è un sottogruppo chiuso di* $\tilde{\mathbf{F}}$ *localmente isomorfo ad* $\mathbf{H}$.

Dim. Il gruppo $\mathbf{F}$ è il sottogruppo analitico di $\mathbf{G}$ che ha come algebra di Lie $\mathfrak{f}$ la chiusura di Malčev $\mathfrak{h}^M$ dell'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ di $\mathbf{H}$. Osserviamo ora che $\mathbf{F}/\mathbf{F}'$ è un gruppo di Lie semplicemente connesso con algebra di Lie abeliana, e quindi isomorfo al gruppo additivo di uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^m$. Poiché $\mathfrak{h}' = \mathfrak{f}'$, il quoziente $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}'$ è una sottoalgebra di Lie dell'algebra di Lie $\mathfrak{f}/\mathfrak{f}'$ di $\tilde{\mathbf{F}}/\tilde{\mathbf{F}}'$. Il corrispondente sottogruppo analitico $\mathbf{A}$ è un sottospazio vettoriale di $\tilde{\mathbf{F}}/\tilde{\mathbf{F}}' \simeq \mathbb{R}^m$ e quindi chiuso. La sua immagine inversa in $\tilde{\mathbf{F}}$ rispetto alla proiezione $\tilde{\mathbf{F}} \longrightarrow \tilde{\mathbf{F}}/\tilde{\mathbf{F}}'$ è un sottogruppo chiuso, di cui $\tilde{\mathbf{H}}$ è la componente connessa dell'identità. □

Se $\mathbf{G}_1$ e $\mathbf{G}_2$ sono due sottogruppi normali di un gruppo $\mathbf{G}$, allora il sottogruppo $(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)$ generato dai commutatori $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ con $g_1 \in \mathbf{G}_1$ e $g_2 \in \mathbf{G}_2$ è ancora un sottogruppo normale di $\mathbf{G}$, che si dice il mutuo commutatore di $\mathbf{G}_1$ e $\mathbf{G}_2$.

In modo analogo il commutatore $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2]$ di due ideali di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è ancora un ideale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Enunciamo il seguente teorema, che ci sarà utile per discutere la struttura dei gruppi di Lie risolubili e nilpotenti.

Teorema 3.6 *Se* $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ *sono due sottogruppi di Lie normali connessi di un gruppo di Lie* $\mathbf{G}$, *allora il loro mutuo commutatore è ancora un gruppo di Lie normale connesso. La sua algebra di Lie è* $\mathfrak{L}((\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)) = [\mathfrak{L}(\mathbf{G}_1), \mathfrak{L}(\mathbf{G}_2)]$.

Se $\mathfrak{h}_1$ *e* $\mathfrak{h}_2$ *sono due ideali dell'algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ *di* $\mathbf{G}$ *e* $\mathfrak{h}_1^M$, $\mathfrak{h}_2^M$ *le loro chiusure di Malčev, abbiamo:*
$$[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2] = [\mathfrak{h}_1^M, \mathfrak{h}_2^M].$$

§4 Gruppi di Lie nilpotenti e risolubili

Dato un gruppo $\mathbf{G}$ poniamo:

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}(G) = \boldsymbol{\mathcal{D}}^1(G) = (G, G) \qquad \boldsymbol{\mathcal{D}}^k(\mathbf{G}) = (\boldsymbol{\mathcal{D}}^{k-1}(\mathbf{G}), \boldsymbol{\mathcal{D}}^{k-1}(\mathbf{G})) \quad \text{per} \quad k > 1$$
$$\boldsymbol{\mathcal{C}}(G) = \boldsymbol{\mathcal{C}}^1(G) = (G, G) \qquad \boldsymbol{\mathcal{C}}^k(\mathbf{G}) = (\boldsymbol{\mathcal{C}}^{k-1}(\mathbf{G}), \mathbf{G}) \quad \text{per} \quad k > 1.$$

Teorema 4.1 *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo di Lie connesso con algebra di Lie* $\mathfrak{g}$*. Allora, per ogni* $k \geq 1$, $\boldsymbol{\mathcal{D}}^k(\mathbf{G})$ *e* $\boldsymbol{\mathcal{C}}^k(\mathbf{G})$ *sono sottogruppi di Lie connessi e normali di* $\mathbf{G}$*, con algebre di Lie* $\mathfrak{L}(\boldsymbol{\mathcal{D}}^k(\mathbf{G})) = \mathfrak{D}^k(\mathfrak{g})$ *e* $\mathfrak{L}(\boldsymbol{\mathcal{C}}^k(\mathbf{G})) = \mathfrak{C}^k(\mathfrak{g})$*. Se* $\mathbf{G}$ *è anche semplicemente connesso, allora* $\boldsymbol{\mathcal{D}}^k(\mathbf{G})$ *e* $\boldsymbol{\mathcal{C}}^k(\mathbf{G})$ *sono chiusi e semplicemente connessi.*

Questo teorema è un'immediata conseguenza del Teorema VII.3.6.

Ricordiamo che un gruppo $\mathbf{G}$ si dice *nilpotente* (o *unipotente*) se $\boldsymbol{\mathcal{C}}^m(\mathbf{G}) = \{e\}$ per qualche intero $m > 0$. Un gruppo $\mathbf{G}$ si dice *risolubile* se se $\boldsymbol{\mathcal{D}}^m(\mathbf{G}) = \{e\}$ per qualche intero $m > 0$.

Ricaviamo ancora come corollario:

Corollario 4.2 *Un gruppo di Lie connesso è nilpotente se e soltanto se la sua algebra di Lie è nilpotente.*

Un gruppo di Lie connesso è risolubile se e soltanto se la sua algebra di Lie è risolubile.

Se $\mathbf{H}$ *è un sottogruppo normale nilpotente di un gruppo di Lie* $\mathbf{G}$*, anche la sua chiusura* $\overline{\mathbf{H}}$ *è un sottogruppo normale nilpotente di* $\mathbf{G}$*.*

Se $\mathbf{H}$ *è un sottogruppo normale risolubile di un gruppo di Lie* $\mathbf{G}$*, anche la sua chiusura* $\overline{\mathbf{H}}$ *è un sottogruppo normale risolubile di* $\mathbf{G}$*.*

Un gruppo di Lie $\mathbf{G}$ si dice *semisemplice* se la sua algebra di Lie è semisemplice, cioè se ogni suo sottogruppo di Lie normale risolubile è discreto[17].

Abbiamo:

Corollario 4.3 *Se* $\mathbf{G}$ *è un gruppo connesso semisemplice con algebra di Lie* $\mathfrak{g}$*, allora* $(\mathbf{G}, \mathbf{G}) = \mathbf{G}$ *e* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$*.*

I gruppi di Lie connessi nilpotenti e risolubili hanno rivestimento universale Euclideo. Abbiamo infatti:

Teorema 4.4 *Se* $\mathbf{G}$ *è un gruppo di Lie nilpotente connesso con algebra di Lie* $\mathfrak{g}$*, allora l'applicazione esponenziale*

$$\mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$$

è un rivestimento. L'immagine inversa dell'identità mediante l'applicazione esponenziale è un sottogruppo additivo discreto $\mathbf{\Gamma}$ *di* $\mathfrak{g}$*, contenuto nel centro* $\mathfrak{z}$ *di* $\mathfrak{g}$*, isomorfo al gruppo fondamentale* $\pi_1(\mathbf{G})$*, ed abbiamo un diffeomorfismo* $\mathbf{G} \simeq \mathfrak{g}/\mathbf{\Gamma}$*.*

Dim. Per l'esponenziale vale la formula del differenziale che abbiamo dimostrato nel caso delle matrici:

$$(d\exp)(X) \;=\; d(L_{\exp(X)})(e) \circ \frac{\mathrm{I}_{\mathfrak{g}} - \exp(-\mathrm{ad}(X))}{\mathrm{ad}(X)} \qquad \forall X \in \mathfrak{g}\,,$$

avendo identificato $T_X\mathfrak{g}$ con $\mathfrak{g}$.

Utilizziamo il teorema di Ado per rappresentare $\mathfrak{g}$ come una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ per uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita. Per il Teorema di Engel possiamo, scegliendo un'opportuna base di V, identificare $\mathfrak{g}$ a un'algebra nilpotente di matrici triangolari inferiori. Possiamo così verificare direttamente che la trasformazione $(\mathrm{I}_{\mathfrak{g}} - \exp(-\mathrm{ad}(X)))/\mathrm{ad}(X))$ ha determinante 1 per ogni X

[17] Questa definizione differisce da quella che si utilizza ad esempio nella teoria dei gruppi finiti, in cui si richiede che $\mathbf{G}$ non contenga sottogruppi normali risolubili non banali.

ed è quindi invertibile: l'esponenziale $\mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \exp(X) \in \mathbf{G}$ è una sommersione differenziabile.

Siano A, B due elementi di $\mathfrak{g}$ per cui $\exp(A) = \exp(B)$. Poiché $\mathrm{Ad}(\exp(X)) = \exp(\mathrm{ad}(X))$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$, avremo anche $\exp(\mathrm{ad}(A)) = \exp(\mathrm{ad}(B))$. L' esponenziale di matrici è iniettivo sull'insieme delle matrici nilpotenti (Teorema II.2.2), onde si ha $\mathrm{ad}(A) = \mathrm{ad}(B)$, cioè $C = A - B \in \mathfrak{z}$. Poiché $C \in \mathfrak{z}$, otteniamo:

$$\exp(B) = \exp(A) = \exp(B + C) = \exp(B)\exp(C) = \exp(C)\exp(B)$$

e quindi $\exp(C) = e$.

Otteniamo perciò la caratterizzazione:

$$\mathbf{\Gamma} = \{Z \in \mathfrak{z} \mid \exp(Z) = e\}\,.$$

Osserviamo che Γ è un sottogruppo additivo di $\mathfrak{g}$ perché è contenuto in $\mathfrak{z}$ e quindi, se $Z_1, Z_2 \in \mathbf{\Gamma}$, abbiamo $\exp(Z_1 + Z_2) = \exp(Z_1)\exp(Z_2) = e$.

Per completare la dimostrazione osserviamo che l'esponenziale di matrici $\mathrm{Exp} : \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V) \longrightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ definisce un diffeomorfismo tra $\mathfrak{g}$ e il gruppo nilpotente di matrici $\widetilde{\mathbf{G}} = \mathrm{Exp}(\mathfrak{g})$. Esso si identifica quindi al rivestimento universale di $\mathbf{G}$ e l'applicazione di rivestimento si ottiene dal diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{Exp}} & \widetilde{\mathbf{G}} \\
\Big\| & & \Big\downarrow p \\
\mathfrak{g} & \xrightarrow{\exp} & \mathbf{G}\,,
\end{array}$$

da cui si ricavano le altre affermazioni del teorema. □

Teorema 4.5 *Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie risolubile connesso e semplicemente connesso. Sia $X_1, \ldots, X_m$ una base di $\mathfrak{g}$ adattata alla sequenza di sottoalgebre $\{\mathfrak{a}_h\}$ descritta nel Teorema VI.8.6. Allora l'applicazione*

$$\mathbb{R}^m \ni (t_1, \ldots, t_m) \longrightarrow \exp(t_1X_1)\cdots\exp(t_mX_m) \in \mathbf{G}$$

è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^m$ su $\mathbf{G}$.

Dim. La dimostrazione è un'applicazione immediata del Lemma VII.2.5. Poiché le algebre di Lie $\mathfrak{b}_i = \mathbb{R}\,X_i$ soddisfano le ipotesi del Lemma VII.2.5, i sottogruppi a un parametro $\mathbf{B}_i = \{\exp(tX_i) \mid t \in \mathbb{R}\}$ sono semplicemente connessi e l'applicazione $\mathbf{B}_1 \times \cdots \times \mathbf{B}_m \ni (b_1, \ldots, b_m) \longrightarrow b_1 \cdots b_m \in \mathbf{G}$ è un diffeomorfismo. □

Corollario 4.6 *Se $\mathbf{G}$ è un gruppo di Lie risolubile connesso e $X_1, \ldots, X_m$ una base di $\mathfrak{g}$ adattata alla sequenza di sottoalgebre $\{\mathfrak{a}_h\}$ descritta nel Teorema VI.8.6. Allora l'applicazione*

$$\mathbb{R}^m \ni (t_1, \ldots, t_m) \longrightarrow \exp(t_1X_1)\cdots\exp(t_mX_m) \in \mathbf{G}$$

è un rivestimento di $\mathbf{G}$.

Dal Teorema VII.4.5 ricaviamo:

Teorema 4.7 *I sottogruppi analitici di un gruppo di Lie risolubile semplicemente connesso sono chiusi e semplicemente connessi.*

Dim. Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie risolubile, connesso e semplicemente connesso, con algebra di Lie $\mathfrak{g}$, sia $\mathbf{B}$ un sottogruppo di Lie connesso di $\mathbf{G}$, con algebra di Lie $\mathfrak{b}$. Fissiamo una bandiera completa di sottoalgebre di $\mathfrak{g}$:

$$(\dagger) \qquad \{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_{m-1} \subset \mathfrak{a}_m = \mathfrak{g}$$

con $\mathfrak{a}_{h-1}$ ideale in $\mathfrak{a}_h$ e $\mathfrak{a}_h/\mathfrak{a}_{h-1}$ algebra di Lie abeliana di dimensione uno per ogni $h = 1, \ldots, m$. Consideriamo le intersezioni $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}_h$. È $\dim(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}_h) \leq 1 + \dim(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}_{h-1})$ e quindi possiamo fissare una base $X_1, \ldots, X_m$ di $\mathfrak{g}$, adattata alla bandiera ($\dagger$) tale che, per una sequenza $1 \leq h_1 < \cdots < h_\mu \leq m$, i vettori $X_{h_1}, \ldots, X_{h_\mu}$ formino una base di $\mathfrak{b}$. Allora $\mathbf{B}$ risulta uguale all'immagine del sottospazio vettoriale $V = \{t \in \mathbb{R}^m \,|\, t_j = 0 \text{ se } j \neq h_1, \ldots, h_\mu\}$ mediante il diffeomorfismo

$$\mathbb{R}^m \ni t \longrightarrow \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_m X_m) \in \mathbf{G}$$

e quindi chiuso e semplicemente connesso. $\square$

Teorema 4.8 *Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie connesso, con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Sia $\mathfrak{r}$ il radicale di $\mathbf{G}$ e sia $\mathfrak{s}$ una sottoalgebra di Levi di $\mathfrak{g}$, cioè una sottoalgebra semisemplice e massimale di $\mathfrak{g}$ tale che $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$. Indichiamo con $\mathbf{R}$ il sottogruppo analitico generato da $\mathfrak{r}$ e con $\mathbf{S}$ il sottogruppo analitico generato da $\mathfrak{s}$.*

Allora:

1. $\mathbf{R}$ *è un sottogruppo chiuso normale di* $\mathbf{G}$.
2. $\mathbf{G} = \mathbf{R}\,\mathbf{S}$;
3. *Se $\mathbf{S}'$ è un altro sottogruppo di Lie analitico semisemplice massimale in $\mathbf{G}$, allora $\mathbf{S}$ e $\mathbf{S}'$ sono coniugati in $\mathbf{G}$, abbiamo $\mathbf{S}' = g\mathbf{S}g^{-1}$ con $g \in \mathbf{N}_0$ dove $\mathbf{N}_0$ è il sottogruppo analitico che ha come algebra di Lie il radicale nilpotente $\mathfrak{n}_0$ di $\mathfrak{g}$, e $\mathbf{G} = \mathbf{R}\,\mathbf{S}'$;*
4. *Se $\mathbf{G}$ è semplicemente connesso, allora $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$ sono chiusi e semplicemente connessi e l'applicazione*
$$\mathbf{R} \times \mathbf{S} \ni (a, b) \longrightarrow ab \in \mathbf{G}$$
è un diffeomorfismo.

Dim. Osserviamo che, se $\mathfrak{r}^M$ è la chiusura di Malčev di $\mathfrak{r}$, da $[\mathfrak{r}^M, \mathfrak{r}^M] = [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ segue che $\overline{\mathbf{R}}$ è ancora risolubile e quindi, poiché la chiusura di un sottogruppo normale è ancora normale, $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$ è chiuso. In modo analogo si ottiene che anche il sottogruppo analitico $\mathbf{N}$ la cui algebra di Lie è l'ideale nilpotente massimale di $\mathfrak{g}$ è chiuso.

Poiché $\mathbf{R}$ è un sottogruppo normale di $\mathbf{G}$, il prodotto $\mathbf{R}\,\mathbf{S}$ è un sottogruppo di $\mathbf{G}$. L'applicazione $\mathbf{R} \times \mathbf{S} \ni (a, b) \longrightarrow ab \in \mathbf{G}$ è differenziabile ed il suo differenziale è surgettivo in $(e_{\mathbf{R}}, e_{\mathbf{S}})$. Perciò la sua immagine contiene un intorno dell'identità di $\mathbf{G}$ e quindi, essendo un sottogruppo ed essendo $\mathbf{G}$ connesso, coincide con $\mathbf{G}$.

Se $\mathbf{G}$ è semplicemente connesso, allora, per il Lemma VII.2.4, $\mathbf{S}$ è semplicemente connesso e l'applicazione $\mathbf{R} \times \mathbf{S} \ni (a, b) \longrightarrow ab \in \mathbf{G}$ è un diffeomorfismo.

La 3) è conseguenza del Teorema VI.10.2. $\square$

Corollario 4.9 *Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie connesso, con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Siano $\mathfrak{r}$ il radicale di $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$ l'ideale nilpotente massimale di $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{n}_0$ il radicale nilpotente di $\mathfrak{g}$. Allora i sottogruppi analitici $\mathbf{R}$ con algebra di Lie $\mathfrak{r}$, $\mathbf{N}$ con algebra di Lie $\mathfrak{n}$, sono chiusi. Se $\mathbf{G}$ è semplicemente connesso, $\mathbf{R}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{N}_0$ sono chiusi e semplicemente connessi.*

Dim. Osserviamo che il fatto che $\mathbf{R}$ e $\mathbf{N}$ siano chiusi è una conseguenza del Corollario VII.4.2, in quanto $\overline{\mathbf{R}}$ è ancora risolubile e $\overline{\mathbf{N}}$ è ancora nilpotente. Nel caso in cui $\mathbf{G}$ sia semplicemente connesso, $(\mathbf{G}, \mathbf{G})$ è chiuso e quindi anche $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cap (\mathbf{G}, \mathbf{G})$ è chiuso. Inoltre $\mathbf{R}$ è semplicemente connesso per il Teorema VII.4.8 e quindi lo sono anche $\mathbf{N}$ e $\mathbf{N}_0$ in quanto sottogruppi analitici di un gruppo risolubile semplicemente connesso. □

§5 Rappresentazioni lineari di gruppi di Lie

Chiamiamo *rappresentazione lineare di dimensione finita* di un gruppo di Lie $\mathbf{G}$ il dato di uno spazio vettoriale reale V e di un omomorfismo di gruppi di Lie $\rho : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$.

La rappresentazione ρ si dice

irriducibile se non esiste nessun sottospazio vettoriale $\rho(\mathbf{G})$-invariante W di V con $\{0\} \underset{\neq}{\subset} W \underset{\neq}{\subset} V$,

indecomponibile se non esistono due sottospazi lineari $\rho(\mathbf{G})$-invarianti W_1, W_2 diversi da $\{0\}$ e tali che $V = W_1 \oplus W_2$,

totalmente decomponibile se esistono sottospazi $\rho(\mathbf{G})$-invariante W_i, $i = 1, \ldots, k$, tali che $V = \bigoplus_{i=1}^k W_i$ e $\rho_i : \mathbf{G} \ni g \to \rho(g)|_{W_i} \in \mathbf{GL}(W_i)$ sia irriducibile per ongi i.

Diciamo che un gruppo di Lie $\mathbf{G}$ è *linearizzabile* se ammette una rappresentazione lineare di dimensione finita *fedele* (cioè iniettiva).

Per le rappresentazioni lineari vale il

Teorema 5.1 (Lemma di Schur) *Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie e sia $\rho : \mathbf{G} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ una sua rappresentazione di dimensione finita irriducibile. Se $\mathfrak{A}$ è un sottoanello commutativo unitario di $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ i cui endomorfismi commutano con tutte le applicazioni di $\rho(\mathbf{G})$, allora $\mathfrak{A}$ è un campo, isomorfo a $\mathbb{R}$ o al campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.*

Dim. Infatti, se T è un qualsiasi endomorfismo di $\mathfrak{A}$, $\ker T$ è $\rho(\mathbf{G})$-invariante e quindi è uguale o a $\{0\}$, o a V. In particolare tutti gli elementi di $\mathfrak{A}$ diversi da 0 sono invertibili e quindi $\mathfrak{A}$ è un'estensione algebrica del campo dei numeri reali.

Per il Teorema di Ado, ogni gruppo di Lie è localmente isomorfo a un sottogruppo di Lie di un gruppo lineare $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, ma non tutti i gruppi di Lie sono *globalmente* isomorfi a sottogruppi di Lie di un gruppo lineare.

Per costruire un esempio, possiamo utilizzare il:

Teorema 5.2 *Se $\mathbf{G}$ è un sottogruppo connesso semisemplice di un gruppo lineare, allora il suo centro $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ è finito.*

Dim. Supponiamo che $\mathbf{G}$ sia un gruppo di Lie connesso semisemplice e che la rappresentazione $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ sia irriducibile. Il centro $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ è un sottogruppo chiuso discreto di $\mathbf{G}$. Per il Lemma di Schur, l'anello unitario $\mathfrak{A}$ di $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ generato da $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$, è isomorfo o al campo $\mathbb{R}$ o al campo $\mathbb{C}$. Poiché $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, ogni elemento $X \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ ha traccia nulla e dunque ogni elemento di $\mathbf{G}$ ha determinante 1. Quindi gli unici multipli dell'identità che possono essere contenuti in $\mathbf{G}$ sono $\pm \mathrm{I}_V$. Supponiamo che $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ contenga un elemento a che non sia un multiplo dell'identità. Esso ha due autovalori complessi distinti $\lambda, \bar{\lambda}$ con $|\lambda| = 1$. Poiché $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ è chiuso e discreto in $\mathbf{G}$, $\lambda = e^{i\theta}$ (con $\theta \in \mathbb{R}$) deve essere una radice intera dell'unità e $\{a^h \mid h \in \mathbb{Z}\}$ isomorfo a un sottogruppo finito di $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Inoltre V si decompone nella somma diretta di sottospazi di dimensione due: $V = \bigoplus W_i$ su ciascuno dei quali a si rappresenta come una rotazione di angolo θ. Per il Lemma di Schur $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \subset \mathbb{R}[a]$. Quindi $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ si può considerare come un sottogruppo discreto del gruppo $\mathbf{SO}(2)$ e quindi è un gruppo finito.

Se la rappresentazione fedele $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ non è irriducibile, utilizziamo la proprietà di totale decomponibilità delle rappresentazioni lineari dei gruppi di Lie semisemplici[18]: scriviamo $V = \oplus_{h=1}^{m} V_h$ come una somma diretta di sottospazi vettoriali, ciascuno dei quali sia $\mathbf{G}$-irriducibile. Indichiamo con ρ_h la rappresentazione lineare su V_h indotta dalla restrizione. Per la prima parte della dimostrazione, $\mathbf{Z}(\rho_h(\mathbf{G}))$ è finito. Poiché l'applicazione
$$\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \ni a \longrightarrow (\rho_1(a), \ldots, \rho_m(a)) \in \mathbf{Z}(\rho_1(\mathbf{G})) \times \cdots \times \mathbf{Z}(\rho_m(\mathbf{G}))$$
è iniettiva per la fedeltà della $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$, ne segue che $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ è finito. $\square$

Se $\tilde{\mathbf{G}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}$ è un rivestimento connesso di un gruppo di Lie connesso $\mathbf{G}$, allora $\pi^{-1}(e_{\mathbf{G}})$ è contenuto nel centro di $\tilde{\mathbf{G}}$: infatti, se $a \in \pi^{-1}(e_{\mathbf{G}})$, l'applicazione $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathbf{G}}}(a)$ è un automorfismo di $\mathbf{G}$ che coincide con l'identità in un intorno di $e_{\tilde{\mathbf{G}}}$ e quindi su $\tilde{\mathbf{G}}$. In particolare, il rivestimento universale di un gruppo di Lie semisemplice che abbia gruppo fondamentale non finito non è linearizzabile.

Ad esempio, il rivestimento universale $\widetilde{\mathbf{SL}}(2,\mathbb{R})$ di $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ non è linearizzabile e il suo centro è isomorfo a $\mathbb{Z}$. In modo analogo non sono linearizzabili i rivestimenti universali $\widetilde{\mathbf{SO}}(p,2)$ di $\mathbf{SO}(p,2)$ se $p \geq 1$ ed $\widetilde{\mathbf{SU}}(p,q)$ di $\mathbf{SU}(p,q)$ se $p,q \geq 1$.

La condizione di avere un gruppo fondamentale finito è necessaria ma non sufficiente per la linearizzabilità di un gruppo di Lie semisemplice: sappiamo[19] infatti che per ogni $n \geq 1$ il gruppo $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ ammette un rivestimento $\boldsymbol{\mathcal{A}}_n$ a n fogli, che non è linearizzabile[20].

Per i gruppi di Lie risolubili vale il criterio[21]:

Teorema 5.3 *Un gruppo di Lie semisemplice connesso* $\mathbf{G}$ *ammette una rappresentazione lineare fedele se e soltanto se* $(\mathbf{G},\mathbf{G})$ *è semplicemente connesso.*

Citiamo infine il seguente teorema di Djokovic[22]:

Teorema 5.4 *Se un gruppo di Lie connesso ammette una rappresentazione lineare fedele, allora è isomorfo, come gruppo di Lie, a un sottogruppo chiuso di un gruppo lineare.*

---

[18] Vedi il Capitolo X: per un gruppo di Lie semisemplice connesso la totale decomponibilità delle sue rappresentazioni lineari è facile conseguenza di quella delle corrispondenti rappresentazioni lineari della sua algebra di lie

[19] Vedi V.V.Gorbatsevich, A.L.Onishchik, E.B.Vinberg "*Structure of Lie groups and Lie algebras*", in *Lie groups and Lie Algebras III*, *Encyclopaedia of Mthematical Sciences 41*, Springer, Berlin 1994, p.153

[20] Un gruppo di Lie connesso linearizzabile $\mathbf{G}$ ammette una *complessificazione* $\hat{\mathbf{G}}$: se $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ è una linearizzazione di $\mathbf{G}$, allora $\hat{\mathbf{G}}$ è il sottogruppo analitico di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ la cui algebra di Lie è la complessificazione $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{L}(\mathbf{G})$ dell'algebra di Lie di $\mathbf{G}$. L'affermazione segue quindi dal fatto che $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ è semplicemente connesso: infatti ogni gruppo di Lie linearizzabile e connesso con algebra di Lie isomorfa a $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ è generato in un $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ dall'immagine mediante l'esponenziale di $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$, ed è quindi isomorfo a $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$.

[21] A.L.Malčev "*On piecewise connected locally closed groups*" Dokl. Akad. Nauk SSSR **40** (1943) pp.108-110.

[22] D.Djokovic "*A closure theorem for analytic subgroups of a real Lie group*" Can. Math. Bull. **19** (1976) pp.435-439

CAPITOLO VIII

MISURA DI HAAR E RAPPRESENTAZIONI LINEARI

§1 La misura di Haar sui gruppi topologici localmente compatti

Cominciamo ricordando alcune nozioni di teoria della misura.

Una *tribù* è una famiglia $\mathfrak{T}$ di sottoinsiemi di un insieme assegnato E che contiene la differenza $A \setminus B$ di ogni coppia A, B di suoi sottoinsiemi e l'unione e l'intersezione $\bigcup A_n$, $\bigcap A_n$ di una sua qualsiasi sottofamiglia $\{A_n\}_{n \in M \subset \mathbb{N}}$ finita o numerabile.

Si dice *misura* su E una funzione μ, definita su una tribù $\mathfrak{T}$ di E

$$\mu : \mathfrak{T} \ni A \longrightarrow \mu(A) \in [0, +\infty] \subset \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

che sia *completamente additiva*, cioè:

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n) \quad \text{se} \quad \{A_n\}_{n \in M \subset \mathbb{N}} \subset \mathfrak{T} \quad \text{e} \quad A_m \cap A_n = \emptyset \quad \forall m \neq n \in M\,;$$

e che goda inoltre della proprietà:

$$\forall A \in \mathfrak{T} \quad \exists \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{T} \quad \text{con} \quad \mu(A_n) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\,.$$

Gli insiemi di $\mathfrak{T}$ si dicono *misurabili.* La misura μ si dice *completa* se tutti i sottoinsiemi di un insieme misurabile di misura nulla sono misurabili. Ogni misura si può completare a una misura completa, estendendone la definizione alla più piccola tribù $\widetilde{\mathfrak{T}}$ che contenga sia $\mathfrak{T}$ che tutti i sottoinsiemi degli insiemi misurabili di misura nulla.

Una funzione reale $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, a valori non negativi, si dice *misurabile* rispetto a μ se per ogni numero reale $t > 0$ l'insieme $\{x \in E \,|\, f(x) \geq t\}$ è misurabile. Sono allora misurabili tutti gli insiemi $E(f; s, t) = \{x \in E \,|\, s \leq f(x) < t\}$ con $0 < s < t \leq +\infty$. Definiamo il suo integrale mediante:

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) \;=\; \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j \mu(E(f; t_j, t_{j+1})) \;\middle|\; 0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = +\infty \right\}.$$

Se il suo integrale è finito, la f si dice *integrabile.*

Una funzione $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *misurabile* se $f^+ = \max\{f, 0\}$ ed $f^- = \max\{-f, 0\}$ sono entrambe misurabili, ed integrabile se sono entrambe integrabili. In questo caso si pone

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) = \int_E f^+(x)\, d\mu(x) \;-\; \int_E f^-(x)\, d\mu(x)\,.$$

Una $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice misurabile (risp. integrabile) se lo sono sia la sua parte reale $\operatorname{Re} f$ che la sua parte immaginaria $\operatorname{Im} f$. Se è integrabile poniamo

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) \;=\; \int_E \operatorname{Re} f(x)\, d\mu(x) \;+\; i \int_E \operatorname{Im} f(x)\, d\mu(x)\,.$$

Supponiamo ora che E sia uno spazio topologico localmente compatto e sia $\mathcal{C}_c(E,\mathbb{C})$ lo spazio delle funzioni continue a valori complessi nulle fuori da un compatto di E. Indichiamo con $\mathcal{C}_c(E,\mathbb{R}^+) \subset \mathcal{C}_c(E,\mathbb{C})$ il sottoinsieme delle f che assumono valori reali non negativi.

Sia μ una misura su E per cui tutte le funzioni di $\mathcal{C}_c(E,\mathbb{C})$ siano integrabili: allora

$$\mathcal{C}_c(E,\mathbb{C}) \ni f \longrightarrow I(f) = \int_E f(x)\, d\mu(x) \in \mathbb{C}$$

è un funzionale lineare tale che

$$I(f) \geq 0 \quad \text{ per ogni } \quad f \in \mathcal{C}_c(E,\mathbb{R}^+).$$

Vale il Teorema di Riesz-Markoff[23]:

Teorema 1.1 *Sia E uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff e sia $I : \mathcal{C}_c(E,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ un funzionale lineare tale che $I(f) \geq 0$ per ogni $f \in \mathcal{C}_c(E,\mathbb{R}^+)$. Allora risulta univocamente determinata una misura μ, definita sulla più piccola tribù $\mathfrak{B}(E)$ di E che contiene tutti i sottoinsiemi compatti di E, tale che*

$$\mu(K) = \inf\{I(f) \mid f \in \mathcal{C}_c(E,\mathbb{R}^+) \text{ e } f(x) \geq 1\ \forall x \in K\,\} \quad \forall \text{ compatto } K \subset E.$$

Le funzioni $f \in \mathcal{C}_c(E,\mathbb{C})$ sono integrabili rispetto a μ e

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) = I(f) \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(E,\mathbb{C})\,.$$

La tribù $\mathfrak{B}(E)$ generata dai compatti di E si dice la *tribù di Borel* di E e la misura definita nel Teorema VIII.1.1 si dice una *misura di Radon* su E.

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico. Si dice *misura di Haar su* $\mathbf{G}$ una misura di Radon μ non nulla e invariante a sinistra su $\mathbf{G}$. L'invarianza a sinistra di μ significa, in modo equivalente, che $\mu(g \cdot A) = \mu(A)$ per ogni $A \in \mathfrak{B}(\mathbf{G})$ e $g \in \mathbf{G}$, ovvero che $\int_E f(g \cdot x)\, d\mu(x) = \int_E f(x)\, d\mu(x)$ per ogni $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G},\mathbb{C})$ e per ogni $g \in \mathbf{G}$. In questo caso chiamiamo il funzionale $I(f) = \int_E f(x)\, d\mu(x)$ un *integrale di Haar* su $\mathbf{G}$.

Dimostriamo il seguente[24]

Teorema 1.2 *Ogni gruppo topologico localmente compatto ammette una misura di Haar. Essa è unica, a meno di moltiplicazione per una costante positiva.*

Dim. Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico localmente compatto. Indichiamo con $\mathcal{P}$ l'insieme delle funzioni $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G},\mathbb{R}^+)$ non identicamente nulle. Se $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G},\mathbb{C})$ e

[23] Vedi: S.Berberian, *Measure and integration*, Chelsea, New York, 1965; p.227

[24] A.Haar, *Der Maassbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen*, Comp. Math. **34** (1933), 147-169

$g \in \mathbf{G}$, indichiamo con f_g la funzione di $\mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$ definita da $f_g(x) = f(g^{-1} \cdot x)$ per ogni $x \in \mathbf{G}$.

Per dimostrare l'esistenza di una misura di Haar su $\mathbf{G}$, basta costruire un funzionale $I_0 : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ che goda delle proprietà:

$$
(\clubsuit) \qquad
\begin{array}{ll}
(1) & I_0(f) > 0 \quad \forall f \in \mathcal{P}\,, \\
(2) & I_0(f_1 + f_2) = I_0(f_1) + I_0(f_2) \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{P}\,, \\
(3) & I_0(kf) = kI_0(f) \quad \forall k \in \mathbb{R}\,,\ k > 0\,, \quad \forall f \in \mathcal{P}\,, \\
(4) & I_0(f_g) = I_0(f) \quad \forall f \in \mathcal{P}\,.
\end{array}
$$

Si verifica facilmente infatti che, posto $I_0(0) = 0$ e

$$I(f) = I_0([\operatorname{Re} f]^+) - I_0([\operatorname{Re} f]^-) + i \left\{ I_0([\operatorname{Im} f]^+) - I_0([\operatorname{Im} f]^-) \right\}\,,$$

l'applicazione $\mathbb{C}$-lineare:

$$I : \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}) \ni f \longrightarrow I(f) \in \mathbb{C}$$

è allora un integrale di Haar, cui per il Teorema VIII.1.1 risulta associata un'unica misura di Haar su $\mathbf{G}$.

Dividiamo la dimostrazione del Teorema in diversi lemmi.

Lemma 1.3 *Se $f, \phi \in \mathcal{P}$, allora esistono un numero finito di elementi $g_1, \ldots, g_n$ di $\mathbf{G}$ e numeri reali non negativi $k_1, \ldots, k_n$ tali che*

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} k_i\, \phi_{g_i}(x) \quad \forall x \in \mathbf{G}\,.$$

Dim. Sia U la parte interna del supporto di ϕ. Osserviamo che $U \neq \emptyset$ perché $\phi \in \mathcal{P}$. Fissiamo un elemento $h_0 \in U$ e un intorno aperto W di h_0 in U con $\overline{W}$ compatto e contenuto in U. Allora $V = L_{h_0^{-1}}(W)$ è un intorno aperto di e, relativamente compatto in $\mathbf{G}$. Gli aperti $L_g(V)$, al variare di g in $\mathbf{G}$, ricoprono il compatto $K = \operatorname{supp} f$. Possiamo allora fissare un numero finito di elementi $h_1, \ldots, h_n$ di $\mathbf{G}$ tali che $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} L_{h_i}(V)$. Sia c_0 il minimo di $\phi(x)$ sul compatto $\overline{W}$. Poiché $\overline{W}$ è contenuto nella parte interna del supporto di ϕ, il numero c_0 è positivo. Per ogni $i = 1, \ldots, n$, sia $k_i = (\max_{L_{h_i}(\overline{V})} f)/c_0$ e sia $g_i = h_i h_0^{-1}$. Allora

$$f(x) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} k_i \phi_{g_i}(x) \leq \sum_{i=1}^{n} k_i \phi_{g_i}(x) \quad \forall x \in \operatorname{supp} f\,,$$

da cui segue la tesi. □

Siano $f, \phi \in \mathcal{P}$. Definiamo il *rapporto tra f e ϕ* come il numero:

$$(f : \phi) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i \;\middle|\; \exists g_1, \ldots, g_n \in \mathbf{G} \text{ tali che } f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} k_i \phi_{g_i}(x)\ \forall x \in \mathbf{G} \right\}.$$

Vale poi il seguente:

Lemma 1.4 *Se $f, \phi \in \mathcal{P}$, allora* $(f : \phi) \geq \dfrac{\max_{\mathbf{G}} f}{\max_{\mathbf{G}} \phi}$.

Dim. Infatti, se $f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} k_i \phi_{g_i}(x)\ \forall x \in \mathbf{G}$, abbiamo:

$$f(x) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) \max_{\mathbf{G}} \phi\,.$$

Passando agli estremi superiori dei due membri, otteniamo la tesi. □

Nel lemma seguente elenchiamo alcune proprietà del rapporto tra due funzioni positive la cui verifica è immediata:

Lemma 1.5 *Sia $\phi \in \mathcal{P}$. Valgono allora le proprietà:*

$$(\diamondsuit) \qquad \begin{array}{ll} \text{(1)} & (f_g : \phi) = (f : \phi) \quad \forall f \in \mathcal{P},\ \forall g \in \mathbf{G}\,, \\ \text{(2)} & (kf : \phi) = k\,(f : \phi) \quad \forall k \in \mathbb{R} \text{ con } k > 0\,,\ \forall f \in \mathcal{P}\,, \\ \text{(3)} & (f_1 + f_2 : \phi) \leq (f_1 : \phi) + (f_2 : \phi)\,\forall f_1, f_2 \in \mathcal{P}\,, \\ \text{(4)} & f_1, f_2 \in \mathcal{P} \text{ e } f_1 \leq f_2 \Longrightarrow (f_1 : \phi) \leq (f_2 : \phi) \end{array}$$

Abbiamo poi:

Lemma 1.6 *Se $f, \phi, \psi \in \mathcal{P}$, allora*

$$(f : \psi) \leq (f : \phi)\,(\phi : \psi)\,.$$

Dim. Infatti, se $f \leq \sum k_i \phi_{g_i}$ e $\phi \leq \sum \ell_j \psi_{h_j}$, allora $f \leq \sum_{i,j} k_i \ell_j \psi_{g_i h_j}$. □

Corollario 1.7 *Se $f, \phi, \psi \in \mathcal{P}$, allora*

$$\frac{1}{(\psi : f)} \leq \frac{(f : \phi)}{(\psi : \phi)} \leq (f : \psi)\,.$$

È $(f : f) = 1$ per ogni $f \in \mathcal{P}$. Infatti $(f : f) \leq \max_{\mathbf{G}} f / \max_{\mathbf{G}} f = 1$ e da $(f : f) \leq (f : f)(f : f)$ ricaviamo che è anche $1 \leq (f : f)$, da cui l'uguaglianza.

Fissiamo ora una $\psi \in \mathcal{P}$ con $\psi(e) > 0$ e per ogni coppia di funzioni $f, \phi \in \mathcal{P}$ poniamo:

$$A_f(\phi) = \frac{(f : \phi)}{(\psi : \phi)} \in \left[\frac{1}{(\psi : f)}, (f : \psi)\right]\,.$$

Sia

$$X = \prod_{f \in \mathcal{P}} \left[\frac{1}{(\psi : f)}, (f : \psi)\right].$$

Per il teorema di Tychonoff X è uno spazio topologico compatto. Consideriamo l'applicazione

$$A : \mathbf{G} \ni \phi \longrightarrow A(\phi) = (A_f(\phi))_{f \in \mathcal{P}} \in X\,.$$

Per ogni intorno aperto V di e in $\mathbf{G}$, definiamo

$$\mathcal{F}_V = \{A(\phi)\,|\,\phi \in \mathcal{P}\,, \quad \phi(g) = \phi(g^{-1})\ \forall g \in \mathbf{G} \quad \text{e} \quad \operatorname{supp} \phi \subset V\}\,.$$

È $\mathcal{F}_V \neq \emptyset$ per ogni intorno V di e in $\mathbf{G}$. Infatti $W = V \cap \{g^{-1} \mid g \in V\}$ è ancora un intorno di e in $\mathbf{G}$ e, per ogni funzione $\eta \in \mathcal{P}$ con supporto contenuto in W, posto $\phi(g) = \eta(g) + \eta(g^{-1})$, l'elemento $A(\phi)$ appartiene a $\mathcal{F}_V$.

Osserviamo che, se $V_1 \subset V_2$ sono intorni aperti di e in $\mathbf{G}$, allora $\mathcal{F}_{V_1} \subset \mathcal{F}_{V_2}$. Indichiamo con $\overline{\mathcal{F}}_V$ la chiusura di $\mathcal{F}_V$ in X. Poiché X è compatto e l'intersezione di un qualsiasi numero finito di insiemi $\overline{\mathcal{F}}_V$, al variare di V tra gli intorni aperti di e in $\mathbf{G}$ non è vuoto, ne ricaviamo che

$$\mathcal{I} = \bigcap_{V \text{ aperto } \ni e} \overline{\mathcal{F}}_V \neq \emptyset$$

Lemma 1.8 *Un punto $I = (I_f)_{f \in \mathcal{P}}$ di $\mathcal{I}$ definisce un funzionale*

$$I : \mathcal{P} \ni f \longrightarrow I(f) = I_f \in \mathbb{R}$$

che soddisfa le condizioni

$$(\heartsuit) \qquad \begin{array}{ll} \textit{(1)} & I(f) > 0 \quad \forall f \in \mathcal{P}\,, \\ \textit{(2)} & I(f_1 + f_2) \leq I(f_1) + I(f_2) \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{P}\,, \\ \textit{(3)} & I(kf) = kI(f) \quad \forall 0 < k \in \mathbb{R} \quad \forall f \in \mathcal{P}\,, \\ \textit{(4)} & I(f_g) = I(f) \quad \forall f \in \mathcal{P}\,,\ \forall g \in \mathbf{G}\,. \end{array}$$

Dim. La tesi è una conseguenza immediata del Lemma VII.1.5. Infatti le condizioni $(\diamondsuit)$ valgono per ciascuna delle $f \longrightarrow A_f(\phi)$ e quindi per continuità valgono le $(\heartsuit)$ per la $f \longrightarrow I(f)$. $\square$

Per completare la dimostrazione dell'esistenza della misura di Haar, basterà verificare che nella (2) di $(\heartsuit)$ possiamo sostituire l'uguaglianza alla diseguaglianza.

Fissiamo due funzioni $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{P}$, con $\eta_1(g) + \eta_2(g) \leq 1$ per ogni $g \in \mathbf{G}$. Poiché esse sono uniformemente continue, per ogni $\epsilon > 0$ possiamo trovare un intorno V di e in $\mathbf{G}$ tale che, per ogni $g \in \mathbf{G}$ ed $h \in L_g(V)$, risulti

$$|\eta_1(h) - \eta_1(g)| + |\eta_2(h) - \eta_2(g)| < \epsilon.$$

Fissiamo una $\phi \in \mathcal{P}$ con supporto contenuto in V e $\phi(g^{-1}) = \phi(g)$ per ogni $g \in \mathbf{G}$.

Sia $f \in \mathcal{P}$ e siano $g_1, \ldots, g_n \in \mathbf{G}$ e $k_1, \ldots, k_n$ reali positivi tali che $f(x) \leq \sum_{i=1}^n k_i \phi_{g_i}(x)$ per ogni $x \in \mathbf{G}$. Osserviamo che ϕ_{g_i} ha supporto contenuto in $L_{g_i}(V)$ e quindi

$$f(x) \leq {\sum}' k_i \phi_{g_i}(x)$$

ove $\sum'$ significa che la somma è ristretta agli indici i per cui $x \in L_{g_i}(V)$. Poiché $\eta_i(x) \leq \eta_i(g_i) + \epsilon$ se $x \in L_{g_i}(V)$, avremo anche

$$f(x)\eta_i(x) \leq {\sum}' k_i[\eta_i(g_i) + \epsilon]\phi_{g_i}(x)$$

per $i = 1, 2$. Otteniamo perciò

$$(f\eta_1 : \phi) + (f\eta_2 : \phi) \leq \left(\sum_{i=1}^n k_i \right) (1 + 2\epsilon)$$

da cui segue che:

$$(f\eta_1 : \phi) + (f\eta_2 : \phi) \leq (f : \phi)\,(1 + 2\epsilon)$$

per un ϵ arbitrariamente piccolo, purché ϕ abbia supporto in un opportuno intorno V di e in $\mathbf{G}$. Da questa relazione ricaviamo

$$(*) \qquad I(f\eta_1) + I(f\eta_2) \leq I(f)\,.$$

Se $f_1, f_2 \in \mathcal{P}$, fissiamo una $f \in \mathcal{P}$ che sia uguale a 1 in un intorno di $\operatorname{supp}(f_1 + f_2)$ e poniamo

$$\eta_i(x) = \begin{cases} f_i(x)/f(x) & \text{se} \quad f(x) > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \notin \operatorname{supp} f_i \end{cases}$$

per $i = 1, 2$. Allora dalla $(*)$ e dalle $(\heartsuit)$ segue che

$$I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2) \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{P}\,.$$

Ciò completa la dimostrazione dell'esistenza dell'integrale di Haar.

Dimostriamone ora l'unicità, a meno di moltiplicazione per uno scalare.

Sia μ una misura di Haar e indichiamo con $I(f) = \int_{\mathbf{G}} f(x)\, d\mu(x)$ il corrispondente integrale di Haar. Se $f, \phi \in \mathcal{P}$ e $f \leq \sum_{i=1}^n k_i \phi_{g_i}$, integrando ambo i membri otteniamo:

$$I(f) \leq \sum_{i=1}^n k_i I(\phi_{g_i}) = \left(\sum_{i=1}^n k_i \right) I(\phi)\,,$$

da cui ricaviamo che

$$I(f)/I(\phi) \leq (f : \phi)\,.$$

Fissiamo ora una $f \in \mathcal{P}$ e sia $\epsilon > 0$. Per l'uniforme continuità di f, esiste un intorno V di e in $\mathbf{G}$ tale che $|f(x) - f(gx)| < \epsilon$ per ogni $x \in \mathbf{G}$ e $g \in V$. Sia $\phi \in \mathcal{P}$, con $\phi(x) = \phi(x^{-1})$ per ogni $x \in \mathbf{G}$ e supporto contenuto in V. Consideriamo l'integrale $\int_{\mathbf{G}} f(x)\, \phi(x^{-1}g)\, d\mu(x)$. Poiché $\phi(x^{-1}g) = \phi(g^{-1}x)$ si annulla quando x non appartiene a $gV = L_g(V)$, e $f(x) \geq f(g) - \epsilon$ se $x \in gV$, otteniamo:

$$\int_{\mathbf{G}} f(x)\, \phi(x^{-1}g)\, d\mu(x) \geq [f(g) - \epsilon] \int_{\mathbf{G}} \phi(x^{-1}g)\, d\mu(x) \;=\; [f(g) - \epsilon]\; I(\phi)\,.$$

Quindi:

$$f(g) - \epsilon \leq (1/I(\phi)) \int_{\mathbf{G}} f(x)\phi(x^{-1}g)\, d\mu(x)\,.$$

Poiché ϕ è uniformemente continua, per ogni $\delta > 0$ possiamo trovare un intorno W di e in $\mathbf{G}$ tale che $|\phi(x) - \phi(y)| < \delta$ se $y\, x^{-1} \in W$.

Siano $g_1, \ldots, g_n \in \mathbf{G}$ tali che $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^n L_{g_i}(W)$ e sia $\{\psi_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \mathcal{P}$ una partizione dell'unità su $\operatorname{supp} f$ subordinata al ricoprimento $\{L_{g_i}(W)\}_{1 \leq i \leq n}$. Poiché ψ_i ha supporto contenuto in $L_{g_i}(W)$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{G}} f(x)\phi(x^{-1}g)\, d\mu(x) = & \textstyle\sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{G}} f(x)\psi_i(x)\phi(x^{-1}g)\, d\mu(x) \\ & \leq \textstyle\sum_{i=1}^n I(f\psi_i)\; [\phi_{g_i}(g) + \delta]\;. \end{aligned}$$

Posto $k_i = I(f\psi_i)/I(\phi)$, abbiamo $\sum_{i=1}^{n} k_i = I(f)/I(\phi)$ e

$$f(x) \leq \epsilon + \delta \sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{i=1}^{n} k_i \phi_{g_i}(x)\,.$$

Se $\tilde{f} \in \mathcal{P}$ è maggiore o uguale di 1 sul supporto di f, avremo:

$$f(x) \leq \left(\epsilon + \delta \sum_{i=1}^{n} k_i\right) \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^{n} k_i \phi_{g_i}(x)\,.$$

Poiché $\delta > 0$ può essere scelto arbitrariamente piccolo, abbiamo:

$$(*) \qquad (f : \phi) \leq \epsilon(\tilde{f} : \phi) + (I(f)/I(\phi))\,.$$

Sia f_0 un'altra funzione di $\mathcal{P}$. Essendo $(f_0 : \phi) \geq I(f_0)/I(\phi)$, abbiamo (dividendo i due membri di $(*)$ per $(f_0 : \phi)$ e tenendo conto del fatto che $(I(f)/I(\phi))/(f_0 : \phi) \leq (I(f)/I(\phi))/(I(f_0)/I(\phi)) = I(f)/I(f_0)$):

$$I(f)/I(f_0) \leq \frac{(f : \phi)}{(f_0 : \phi)} \leq \epsilon\,\frac{(\tilde{f} : \phi)}{(f_0 : \phi)} + I(f)/I(f_0) \leq \epsilon(\tilde{f} : f_0) + I(f)/I(f_0)\,.$$

Ora, possiamo prendere $\epsilon > 0$ arbitrariamente piccolo purché il supporto di ϕ sia contenuto in un opportuno intorno V di e. Questo dimostra che il rapporto $I(f)/I(f_0)$ è univocamente determinato e quindi l'integrale di Haar è unico a meno di un fattore moltiplicativo. □

§2 Gruppi unimodulari

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico localmente compatto e μ una misura di Haar su $\mathbf{G}$. Fissato un elemento $g \in \mathbf{G}$, consideriamo il funzionale

$$\mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}) \ni f \longrightarrow I_g(f) = \int_{\mathbf{G}} f\left(x\, g^{-1}\right)\, d\mu(x) \in \mathbb{R}\,.$$

Poiché esso è un integrale di Haar, otteniamo:

$$I_g(f) = \lambda(g) \cdot \int_{\mathbf{G}} f\,(x)\; d\mu(x) \;=\; \lambda(g) \cdot I(f)$$

(ove abbiamo indicato con $I(f)$ l'integrale di Haar associato alla misura μ) per una funzione $\lambda : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Osserviamo che

$$\lambda(g_1 g_2) I(f) = I_{g_1 g_2}(f) = \lambda(g_1) I_{g_2}(f) = \lambda(g_1)\lambda(g_2)\, I(f) \qquad \forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}\,,\ \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$$

e quindi $\lambda : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ è un omomorfismo di gruppi. Poiché per $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$ fissata, l'applicazione $\mathbf{G} \ni g \longrightarrow R^*_{g^{-1}} f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$ (ove $R^*_{g^{-1}} f(x) = f\left(x\, g^{-1}\right)$ per ogni $x \in \mathbf{G}$) è continua, l'applicazione λ è continua.

In particolare, se $\mathbf{G}$ è connesso, ci sono due possibilità: o $\lambda(\mathbf{G}) = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, oppure $\lambda(\mathbf{G}) = \{1\}$.

TEOREMA 2.1 *Vale la formula di cambiamento di variabile nell'integrale:*

$$\int_{\mathbf{G}} f(x^{-1})\lambda(x^{-1})\, d\mu(x) \;=\; \int_{\mathbf{G}} f(x)\, d\mu(x) \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{R})\,.$$

DIM. Consideriamo il funzionale $J(f) = \int_{\mathbf{G}} f(x^{-1})\lambda(x^{-1})\, d\mu(x)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} J(L_g^* f) &= \textstyle\int_{\mathbf{G}} f(g\,x^{-1})\lambda(x^{-1})\, d\mu(x) \\ &= \textstyle\int_{\mathbf{G}} f([xg^{-1}]^{-1})\lambda(x^{-1})\, d\mu(x) \\ &= \textstyle\int_{\mathbf{G}} f(y^{-1})\lambda(g^{-1}y^{-1})\, d\mu(y\,g) \\ &= \textstyle\int_{\mathbf{G}} f(y^{-1})[\lambda(g^{-1})\lambda(y^{-1})]\,[\lambda(g)\, d\mu(y)] = J(f) \end{aligned}$$

Quindi $J(f)$ è un multiplo dell'integrale di Haar. Scegliendo delle $f \in \mathcal{P}$ con $f(x) = f(x^{-1})$ e supporti che variano in un sistema fondamentale di intorni di e in $\mathbf{G}$, si verifica facilmente che il rapporto $J(f)/I(f)$ approssima, e quindi è uguale ad 1. □

Il gruppo topologico localmente compatto $\mathbf{G}$ si dice *unimodulare* se $\lambda(\mathbf{G}) = \{1\}$, cioè se la misura di Haar μ su $\mathbf{G}$ è invariante sia a sinistra che a destra:

$$\int_{\mathbf{G}} f(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbf{G}} f\,(g\cdot x)\; d\mu(x) = \int_{\mathbf{G}} f\,(x\cdot g)\; d\mu(x)$$
$$\forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})\,,\; \forall g \in \mathbf{G}\,.$$

TEOREMA 2.2 *Ogni gruppo topologico compatto e localmente compatto è unimodulare.*

DIM. Se $\mathbf{G}$ è compatto e localmente compatto, allora $\lambda(\mathbf{G})$ è un sottogruppo compatto di $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ e quindi è uguale a $\{1\}$. □

In generale, $\mathbf{U} = \lambda^{-1}(1)$ è un sottogruppo normale chiuso di $\mathbf{G}$, e il quoziente $\mathbf{G}/\mathbf{U}$ è isomorfo a un sottogruppo additivo del gruppo additivo $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Se $\mathbf{G}$ è connesso e non è unimodulare, allora $\mathbf{G}/\mathbf{U} \simeq \mathbb{R}$.

§3 MISURE RELATIVAMENTE INVARIANTI SUGLI SPAZI OMOGENEI

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico localmente compatto. Una misura di Radon η su $\mathbf{G}$ si dice *relativamente invariante* se vi è una funzione $\kappa_\eta : \mathbf{G} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tale che

$$\int_{\mathbf{G}} f(g^{-1}x)d\eta(x) \;=\; \kappa_\eta(g) \int_{\mathbf{G}} f(x)d\eta(x) \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})\,,\; \forall g \in \mathbf{G}\,.$$

Osserviamo che la κ_η è necessariamente continua ed è un omomorfismo di $\mathbf{G}$ nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Data $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$, consideriamo la funzione $x \to F(x) = \kappa_\eta^{-1}(x)\, f(x)$. Risulta

$$F(g^{-1}x) = \kappa_\eta^{-1}(g^{-1}x)\, f(g^{-1}x) = \kappa_\eta(g)\, \kappa_\eta^{-1}(x)\, f(g^{-1}x)$$

e quindi il funzionale lineare $f \to I(f) = \int_{\mathbf{G}} \kappa_\eta^{-1}(x)\, f(x)\, d\eta(x)$ soddisfa $I(L_g^* f) = I(f)$ per ogni $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$ ed è dunque un integrale di Haar. Abbiamo quindi ottenuto:

Teorema 3.1 *Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico relativamente compatto e sia μ una sua misura di Haar. Gli integrali di Radon relativamente invarianti su $\mathbf{G}$ sono allora tutti e soli i funzionali della forma:*

$$J(f) = k \int_{\mathbf{G}} f(x)\kappa(x)\, d\mu(x) \qquad f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$$

ove k è un numero reale positivo e $\kappa : \mathbf{G} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ un omomorfismo continuo.

Estendiamo ora la nozione di misura relativamente invariante al caso degli spazi omogenei.

Sia $\mathbf{H}$ un sottogruppo chiuso di un gruppo topologico $\mathbf{G}$, e sia $\mathbf{X} = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ il corrispondente spazio omogeneo. Indichiamo con $\pi : \mathbf{G} \to \mathbf{X}$ la proiezione nel quoziente.

Si dice *misura relativamente invariante su* $\mathbf{X}$ una misura di Radon ν su $\mathbf{X}$ per cui esista una funzione $\kappa_\nu : \mathbf{G} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tale che $\nu(g(A)) = \kappa_\nu(g) \cdot \nu(A)$ per ogni compatto A di $\mathbf{X}$: per il corrispondente integrale di Radon avremo:

$$\int_{\mathbf{X}} f(g^{-1}x)\, d\nu(x) = \kappa_\nu(g) \int_{\mathbf{X}} f(x)\, d\nu(x) \qquad \forall g \in \mathbf{G},\ \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})\,.$$

Poiché $\mathbf{H}$ è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{G}$, esso è a sua volta un gruppo localmente compatto. Su di esso vi è quindi una misura di Haar $\mu_{\mathbf{H}}$.

Possiamo definire un'applicazione $\mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}_c(\mathbf{X}, \mathbb{C})$ mediante *integrazione lungo la fibra*: ad $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$ associamo

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{H}} f(x\,h)\, d\mu_{\mathbf{H}}(h) \quad \text{se } \pi(x) = \xi \in \mathbf{X}\,;$$

il valore dell'integrale a secondo membro non dipende infatti dal particolare rappresentante x di $\xi \in \mathbf{X}$ in $\mathbf{G}$.

Lemma 3.2 *L'integrazione lungo la fibra è un'applicazione surgettiva $\mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}_c(\mathbf{X}, \mathbb{C})$ ed associa a funzioni di $\mathcal{P}(\mathbf{G})$ funzioni di $\mathcal{P}(\mathbf{X})$.*

Dim. Sia $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{X}, \mathbb{C})$. Poiché la proiezione $\pi : \mathbf{G} \to \mathbf{X}$ è aperta, per ogni $\xi \in \operatorname{supp} f$ esiste un aperto U_ξ relativamente compatto in $\mathbf{G}$ tale che $\pi(U_\xi)$ sia un intorno aperto di ξ in $\mathbf{X}$. Poiché $\operatorname{supp} f$ è un compatto, esisteranno un numero finito di punti $\xi_1, \ldots, \xi_n$ tali che $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^n \pi(U_{\xi_i})$. Fissiamo ora una funzione reale non negativa F con supporto compatto in $\mathbf{G}$ e che sia uguale a 1 in un intorno del compatto $\bigcup_{i=1}^n \overline{U}_{\xi_i}$. La funzione $\hat{F}(\xi)$ è continua e strettamente positiva in un intorno di $\operatorname{supp} f$: ne segue che la $\tilde{f}(x) = F(x)\, f(\pi(x))/\hat{F}(\pi(x))$ è ben definita e continua con supporto compatto in $\mathbf{G}$, ed abbiamo $\hat{\tilde{f}} = f$. L'ultima affermazione del lemma è evidente. $\square$

Supponiamo ora vi sia su $\mathbf{X}$ una misura di Radon relativamente invariante ν, e indichiamo con $J(f) = \int_{\mathbf{X}} f(\xi)\, d\nu(\xi)$ il corrispondente integrale sulle $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{X}, \mathbb{C})$. Mediante l'integrazione sulla fibra possiamo ad esso associare un funzionale I' su $\mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$, ponendo $I'(f) = J(\hat{f})$ per ogni $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$. Abbiamo

$$I'(L_g^* f) = J(L_g^* \hat{f}) = \kappa_\nu(g^{-1}) J(\hat{f}) = \kappa_\nu(g^{-1}) I'(f)\,.$$

Quindi, per la discussione sulle misure relativamente invarianti su $\mathbf{G}$, avremo, per una misura di Haar $\mu_{\mathbf{G}}$ su $\mathbf{G}$:

$$(\#)\quad \int_{\mathbf{X}} \left(\int_{\mathbf{H}} f(x\,h)\, d\mu_{\mathbf{H}}(h) \right) d\nu(\pi(x)) \;=\; \int_{\mathbf{G}} f(x)\kappa_{\nu}(x)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x) \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})\,.$$

Indichiamo con $\lambda_{\mathbf{H}}$ e $\lambda_{\mathbf{G}}$ gli omomorfismi, relativi ai gruppi $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$, definiti come all'inizio del §2. Applicando la formula (#) sia ad f che ad $R^*_{h^{-1}} f$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbf{H}}(h) \int_{\mathbf{G}} f(x)\kappa_{\nu}(x)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x) &= \lambda_{\mathbf{H}}(h) \int_{\mathbf{X}} \left(\int_{\mathbf{H}} f(x\,k)\, d\mu_{\mathbf{H}}(k) \right) d\nu(\pi(x)) \\ &= \int_{\mathbf{X}} \left(\int_{\mathbf{H}} f(x\,kh^{-1})\, d\mu_{\mathbf{H}}(k) \right) d\nu(\pi(x)) \\ &= \int_{\mathbf{G}} f(xh^{-1})\kappa_{\nu}(xh^{-1})\kappa_{\nu}(h)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x) \\ &= \kappa_{\nu}(h)\, \lambda_{\mathbf{G}}(h) \int_{\mathbf{G}} f(x)\kappa_{\nu}(x)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x) \\ &\qquad \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})\,, \end{aligned}$$

da cui ricaviamo la relazione:

$$\lambda_{\mathbf{H}}(h) = \kappa_{\nu}(h)\, \lambda_{\mathbf{G}}(h) \;\; \forall h \in \mathbf{H}\,.$$

Da queste considerazioni segue il:

TEOREMA 3.3 *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista una misura di Radon relativamente invariante sullo spazio omogeneo $\mathbf{X} = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ è che vi sia un omomorfismo continuo $\kappa : \mathbf{G} \to \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$ tale che*

$$(\dagger)\qquad \kappa(h)\lambda_{\mathbf{G}}(h) = \lambda_{\mathbf{H}}(h)\,, \qquad \forall h \in \mathbf{H}\,.$$

Le misure di Radon relativamente invarianti su $\mathbf{X}$ sono tutte e sole quelle che soddisfano

$$(\ddagger)\quad \int_{\mathbf{X}} \left(\int_{\mathbf{H}} f(x\,h)\, d\mu_{\mathbf{H}}(h) \right) d\nu(\pi(x)) \;=\; k \int_{\mathbf{G}} f(x)\,\kappa(x)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x) \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$$

per una κ che soddisfa (†) e una costante positiva $k \in \mathbb{R}$.

DIM. Per completare la dimostrazione, occorre dimostrare la sufficienza: a questo scopo basterà mostrare che, data una $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbf{X}, \mathbb{C})$, il secondo membro della (‡) dipende solo da ϕ e non dalla scelta di una $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$ con $\hat{f} = \phi$. Basterà, per la linearità, mostrare che, se $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G}, \mathbb{C})$ e $\hat{f} = 0$, allora $\int_{\mathbf{G}} \kappa(x)\, f(x)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x) = 0$. Da $\hat{f} = 0$ ricaviamo (vedi Teorema VIII.2.1) che anche

$$\int_{\mathbf{H}} f(x\,h^{-1})\, \lambda_{\mathbf{H}}(h^{-1})\, d\mu_{\mathbf{H}}(h) = 0\,.$$

Sia $F \in \mathcal{P}$. Scambiando l'ordine d'integrazione otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbf{G}} \left(\int_{\mathbf{H}} f(x\,h^{-1})\, \lambda_{\mathbf{H}}(h^{-1})\, d\mu_{\mathbf{H}}(h) \right) F(x)\, \kappa(x)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x) \\ &= \int_{\mathbf{H}} \left(\int_{\mathbf{G}} F(x) f(x\,h^{-1}) \kappa(x) d\mu_{\mathbf{G}}(x) \right) \lambda_{\mathbf{H}}(h^{-1})\, d\mu_{\mathbf{H}}(h)\,. \end{aligned}$$

Ponendo $y = xh^{-1}$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbf{H}} \left(\int_{\mathbf{G}} F(yh)f(y)\kappa(y\,h)d\mu_{\mathbf{G}}(yh) \right) \lambda_{\mathbf{H}}(h^{-1})\, d\mu_{\mathbf{H}}(h) \\
&= \int_{\mathbf{H}} \left(\int_{\mathbf{G}} F(yh)f(y)\kappa(y)\kappa(h)\lambda_{\mathbf{G}}(h)d\mu_{\mathbf{G}}(y) \right) \lambda_{\mathbf{H}}(h^{-1})\, d\mu_{\mathbf{H}}(h) \\
&= \int_{\mathbf{H}} \left(\int_{\mathbf{G}} F(yh)f(y)\kappa(y)d\mu_{\mathbf{G}}(y) \right)\, d\mu_{\mathbf{H}}(h) \\
&= \int_{\mathbf{G}} \kappa(x)\, f(x) \left(\int_{\mathbf{H}} F(xh)\, d\mu_{\mathbf{H}}(h) \right)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x)\,.
\end{aligned}$$

Per concludere, è sufficiente scegliere una F tale che $\int_{\mathbf{H}} F(xh)\, d\mu_{\mathbf{H}}(h) = 1$ per ogni $x \in \operatorname{supp} f$. A questo scopo fissiamo una $p \in \mathcal{P}$ uguale a 1 in un intorno U di $\operatorname{supp} f$ e una $\psi \in \mathcal{P}$, uguale a 1 in un intorno di $\operatorname{supp} f$ e con supporto contenuto in U e poniamo

$$F(x) = \begin{cases} \psi(x)p(x)/\int_{\mathbf{H}} p(x\,h)\, d\mu_{\mathbf{H}}(h) & \text{se} \quad x \in U\,, \\ 0 & \text{se} \quad x \notin \operatorname{supp}\psi\,. \end{cases} \qquad \square$$

Applicando il Teorema VIII.3.3, osserviamo che, in particolare, se $\mathbf{H}$ è un sottogruppo normale di $\mathbf{G}$, si può prendere $\kappa(g) = 1$ per ogni $g \in \mathbf{G}$. Ne segue che $\mathbf{U} = \lambda_{\mathbf{G}}^{-1}(1)$ è un gruppo unimodulare, e tutti i suoi sottogruppi normali chiusi sono unimodulari. In particolare $\mathbf{U}$ è il più grande sottogruppo unimodulare di $\mathbf{G}$.

Osserviamo infine che se $\mathbf{H}$ è un sottogruppo chiuso unimodulare di $\mathbf{G}$, allora possiamo scegliere κ uguale a $1/\lambda_{\mathbf{G}}$, e quindi $\mathbf{X} = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ ammette una misura di Radon relativamente invariante.

§4 Misura di Haar nei gruppi di Lie

Ricordiamo che un *gruppo di Lie* è un gruppo topologico $\mathbf{G}$ su cui sia assegnata una struttura differenziabile per cui l'applicazione $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (x, y) \longrightarrow x^{-1}y \in \mathbf{G}$ sia differenziabile.

In un gruppo di Lie $\mathbf{G}$ le traslazioni a sinistra L_g, a destra R_g e l'aggiunzione ad_g sono diffeomorfismi. Indichiamo con $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$ lo spazio vettoriale dei *campi di vettori invarianti a sinistra*, cioè delle sezioni globali $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{G}, T\mathbf{G})$ tali che $L_{g*}(\xi) = \xi$ per ogni $g \in \mathbf{G}$. Il differenziale della traslazione a sinistra definisce un isomorfismo $L_{g*} : T_e\mathbf{G} \longrightarrow T_g\mathbf{G}$ e ci permette di associare ad ogni vettore $X \in T_e\mathbf{G}$ un campo di vettori invariante a sinistra $x \longrightarrow X^*_x = L_{x*}(X)$.

Indichiamo con $\mathfrak{g}$ lo spazio tangente a $\mathbf{G}$ nell'identità e. L'applicazione

$$\mathfrak{g} \ni X \longrightarrow X^* \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$$

è un isomorfismo di $\mathfrak{g}$ con lo spazio dei campi di vettori invarianti a sinistra su $\mathbf{G}$. Possiamo allora definire un prodotto su $\mathfrak{g}$ mediante il commutatore di campi di vettori invarianti a sinistra:

$$[X, Y] \underset{\text{def}}{=\!=} (X^*Y^* - Y^*X^*)_e\,.$$

Con questo prodotto $\mathfrak{g}$ è un'*algebra di Lie reale*, che si dice *associata al gruppo di Lie* $\mathbf{G}$.

L'applicazione $\vartheta : T\mathbf{G} \longrightarrow \mathfrak{g}$ che associa a $v \in T_g\mathbf{G}$ l'elemento $X = \vartheta_g(v)$ tale che $X^*_g = L_{g*}(X) = v$ si dice la *forma di Cartan* su $\mathbf{G}$. Per definizione essa è invariante a sinistra: $L^*_g\vartheta = \vartheta$ per ogni $g \in \mathbf{G}$.

Essa ci permette di associare ad ogni prodotto scalare reale $\mathfrak{b}$ su $\mathfrak{g}$ una *metrica Riemanniana* invariante a sinistra $\mathbf{g}$ su $\mathbf{G}$ mediante:

$$\mathbf{g}(v,w) = \mathfrak{b}(\vartheta(v),\vartheta(w))\,.$$

Chiaramente[25] *la misura associata è una misura di Haar su* $\mathbf{G}$.

Indichiamo con $\mathrm{Ad}(a) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ il differenziale nell'identità dell'automorfismo interno $\mathrm{ad}(a) : \mathbf{G} \ni x \longrightarrow a\,x\,a^{-1} \in \mathbf{G}$. Esso è un automorfismo dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Lemma 4.1 *Se* $\mathbf{G}$ *è un gruppo di Lie, abbiamo:*

$$\lambda_{\mathbf{G}}(a) = |\det \mathrm{Ad}(a)|^{-1} \quad \forall a \in \mathbf{G}\,.$$

Ciò significa che, se $\mu_{\mathbf{G}}$ *è una misura di Haar di* $\mathbf{G}$*:*

$$\int_{\mathbf{G}} f(x\,a^{-1})\,d\mu_{\mathbf{G}}(x) \;=\; \int_{\mathbf{G}} f(x)\,d\mu_{\mathbf{G}}(x\,a) \;=\; (1/|\det \mathrm{Ad}(a)|) \int_{\mathbf{G}} f(x)\,d\mu_{\mathbf{G}}(x) \qquad \forall a \in \mathbf{G},\ \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{G},\mathbb{C})\,.$$

Dim. Abbiamo infatti per la forma di Cartan:

$$R_a^*\vartheta = R_a^* \circ L_{a^{-1}}^*\vartheta = \mathrm{Ad}(a^{-1}) \circ \vartheta\,.$$

Localmente la misura di Haar $d\mu_{\mathbf{G}}$ è proporzionale alla forma $\underbrace{\vartheta \wedge \cdots \wedge \vartheta}_{n \text{ volte}}$ (dove n è la dimensione di $\mathfrak{g}$). Per la definizione del determinante otteniamo:

$$\underbrace{\mathrm{Ad}(a^{-1}) \circ \vartheta \wedge \cdots \wedge \mathrm{Ad}(a^{-1}) \circ \vartheta}_{n \text{ volte}} = \det \mathrm{Ad}(a^{-1})\,\underbrace{\vartheta \wedge \cdots \wedge \vartheta}_{n \text{ volte}}\,.$$

Da questa formula segue la tesi. $\square$

Esempio 4.1 Consideriamo $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ come un aperto dello spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$. Nelle coordinate canoniche, la forma di Cartan di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ è $\vartheta = x^{-1}dx$. Possiamo fissare il prodotto scalare $\mathfrak{b}(X,Y) = \mathrm{tr}\ {}^tX\,Y$ per $X,Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Allora la metrica Riemanniana invariante a sinistra associata è definita da:

$$\mathbf{g}_a(X,Y) = \mathrm{tr}\,(\,{}^t(a^{-1}X)(a^{-1}Y)) = \mathrm{tr}\,(\,{}^tX(a\,{}^ta)^{-1}Y)\,.$$

Utilizzando la metrica Riemanniana possiamo calcolare la misura di Haar. Rispetto alla misura di Lebesgue $dV(x)$ sull'aperto $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, essa è data da $d\mu(x) = |\det x|^{-n}\,dV(x)$.

Per verificare quest'uguaglianza, ricordiamo che, se A, B sono due endomorfismi dello spazio vettoriale V, di dimensione finita n su $\mathbb{K}$, il determinante del loro prodotto tensoriale $A \otimes B$, (l'endomorfismo di $V \otimes V$ tale che $(A \otimes B)(v \otimes w) =$

[25] Se $\mathbf{g}$ è una metrica Riemanniana sulla varietà differenziabile $\mathbf{G}$ di dimensione m, la metrica associata si definisce in coordinate locali $x^1,\ldots,x^m$ mediante $d\mu_{\mathbf{g}} = \sqrt{\det(g_{i,j})}\,d\lambda$, ove λ è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^m$ e la matrice $(g_{i,j})_{1\le i,j\le m}$ è definita da $g_{i,j} = \mathbf{g}\left(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j\right)$.

$A(v) \otimes B(w)$ per ogni $v, w \in V$), è il prodotto delle potenze n-esime dei loro determinanti: $\det(A \otimes B) = (\det A)^n \cdot (\det B)^n$.

Le matrici $E_{i,j} = (\delta_{i,h} \cdot \delta_{j,k})_{1 \leq h,k \leq n}$ formano una base ortonormale per $\mathfrak{b}$. Abbiamo:

$$\operatorname{tr}({}^tE_{i,j}(a\,{}^ta)^{-1}E_{h,k}) = \operatorname{tr}(E_{j,i}E_{h,k}(a\,{}^ta)^{-1}) = \delta_{j,k}[(a\,{}^ta)^{-1}]_{i,h} \qquad \forall 1 \leq i,j,h,k \leq n\,.$$

Quindi, rispetto alle coordinate cartesiane globali su $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, abbiamo $g_{(i,j),(h,k)}(a) = \delta_{j,k}[(a\,{}^ta)^{-1})]_{i,h}$ e quindi la matrice $(g_{(i,j),(h,k)}(a))$ è il prodotto tensoriale $(a\,{}^ta)^{-1} \otimes I_n$. Quindi:

$$\sqrt{\det(g_{(i,j),(h,k)}(a))} = \frac{1}{|\det a|^n}$$

ci dà $d\mu_{\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})}(x) = |\det x|^{-n}\, dV(x)$ ove V è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^{n^2}$.

Osserviamo infine che, identificando $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ al prodotto tensoriale $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$, abbiamo $\operatorname{Ad}(a) \simeq a \otimes a^{-1}$ e quindi $\det \operatorname{Ad}(a) = 1$ per ogni $a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ e quindi $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ è unimodulare.

Esempio 4.2 Sia $\mathbf{T}_+(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle|\, a,b,c \in \mathbb{R} \text{ con } \quad a\,c \neq 0 \right\}$ il gruppo delle matrici reali 2×2 triangolari superiori invertibili. Si verifica allora che

$$\det \operatorname{Ad} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \frac{a}{c}$$

e quindi il gruppo lineare $\mathbf{T}_+(2,\mathbb{R})$ non è unimodulare.

Esempio 4.3 Più in generale, se $n > 1$ e $\mathbf{G}$ è il sottogruppo di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ di tutte le trasformazioni a che mandano in sè il sottospazio vettoriale generato dai primi m vettori della base $e_1, \ldots, e_m$, con $1 \leq m < n$, né $\mathbf{G}$, né $\mathbf{G} \cap \mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ sono unimodulari.

Esempio 4.4 Sia $\mathbf{T}_+(n,\mathbb{R})$ il gruppo delle matrici reali $n \times n$ triangolari superiori. In questo caso abbiamo

$$\det \operatorname{Ad} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}^{n-1}\, a_{22}^{n-3} \cdots a_{nn}^{1-n}$$

e quindi il gruppo lineare $\mathbf{T}^+(n,\mathbb{R})$ non è unimodulare.

Esempio 4.5 Se $\mathbf{G}$ è un gruppo lineare, possiamo supporre[26] che $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$. La forma di Cartan di $\mathbf{G}$ è la restrizione a $\mathbf{G}$ della forma di Cartan $x^{-1}dx$ di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$.

[26] Facendo corrispondere ad ogni matrice $a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ la matrice $\begin{pmatrix} \operatorname{Re} a & -\operatorname{Im} a \\ \operatorname{Im} a & \operatorname{Re} a \end{pmatrix}$ possiamo associare ad ogni gruppo lineare $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ un sottogruppo chiuso $\mathbf{G}'$ di $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(2n,\mathbb{R})$, isomorfo a $\mathbf{G}$ come gruppo topologico.

Se esiste una forma bilineare simmetrica non degenere $\mathfrak{b}$ su $\mathfrak{g}$ tale che

$$\mathfrak{b}(\mathrm{Ad}(a)(X), \mathrm{Ad}(a)(Y)) = \mathfrak{b}(X, Y) \text{ per ogni } X, Y \in \mathfrak{g},$$

allora $\mathbf{G}$ è unimodulare.

Esempio 4.6 Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie sul campo $\Bbbk$, per ogni $X \in \mathfrak{g}$ possiamo definire una derivazione interna $\mathrm{Ad}(X)$ di $\mathfrak{g}$ mediante:

$$\mathrm{Ad}(X) : \mathfrak{g} \ni Y \longrightarrow \mathrm{Ad}(X)(Y) = [X, Y] \in \mathfrak{g}\,.$$

Se $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie del gruppo lineare $\mathbf{G}$, l'endomorfismo $\mathrm{Ad}(X)$ è il differenziale in $e \in \mathbf{G}$ dell'automorfismo $\mathrm{ad}(\exp(X))$. Abbiamo quindi:

Se $\mathbf{G}$ è un gruppo lineare connesso, condizione necessaria e sufficiente affinché sia unimodulare è che

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{Ad}(X)) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}\,.$$

§5 Rappresentazioni dei gruppi topologici

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico. Una *rappresentazione* di $\mathbf{G}$ su uno spazio di Hilbert complesso V è un omomorfismo $\Phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathcal{G}(V)$ di $\mathbf{G}$ nel gruppo $\mathcal{G}(V)$ degli isomorfismi lineari di V in V che sono continui con i loro inversi, tale che l'applicazione $\mathbf{G} \times V \ni (g, v) \longrightarrow \Phi(g)(v) \in V$ sia continua.

Osserviamo che vale il seguente

Lemma 5.1 *Siano $\mathbf{G}$ un gruppo topologico, V uno spazio di Hilbert complesso e $\Phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathcal{G}(V)$ un omomorfismo. Condizione necessaria e sufficiente affinché Φ sia una rappresentazione nel senso precisato sopra è che siano soddisfatte le due condizioni:*

(i) *Per ogni $v \in V$ l'applicazione $\mathbf{G} \ni g \longrightarrow \Phi(g)(v) \in V$ è continua in $g = e$;*
(ii) *Esistono un intorno aperto U di e in $\mathbf{G}$ e una costante C tali che*

$$\|\Phi(g)\| = \sup_{\|v\|=1} \|\Phi(g)(v)\| \leq C \text{ per ogni } g \in U.$$

Dim. Le condizioni (i) ed (ii) sono chiaramente necessarie. Viceversa, la (ii) implica che la Φ è continua in e e quindi, essendo $\mathbf{G}$ e $\mathcal{G}(V)$ gruppi topologici, è continua. Resta da verificare la continuità della $\mathbf{G} \times V \ni (g, v) \longrightarrow \Phi(g)(v) \in V$. Siano $g, g_0 \in \mathbf{G}$ e $v, v_0 \in V$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\|\Phi(g)(v) - \Phi(g_0)(v_0)\| &\leq \|\Phi(g_0)\| \cdot \|\Phi\left(g_0^{-1}g\right)(v) - v_0\| \\
&\leq \|\Phi(g_0)\| \cdot \|\Phi\left(g_0^{-1}g\right)(v - v_0)\| \\
&\qquad + \|\Phi(g_0)\| \cdot \|\Phi\left(g_0^{-1}g\right)(v_0) - v_0\| \\
&\leq \|\Phi(g_0)\| \cdot \|\Phi\left(g_0^{-1}g\right)\| \cdot \|v - v_0\| \\
&\qquad + \|\Phi(g_0)\| \cdot \|\Phi\left(g_0^{-1}g\right)(v_0) - v_0\|\,.
\end{aligned}$$

Sotto le ipotesi (i) ed (ii) i due addendi nelle ultime due righe della diseguaglianza tendono a zero quando $g \longrightarrow g_0$ in $\mathbf{G}$ e $v \longrightarrow v_0$ in V. $\square$

Una rappresentazione Φ di $\mathbf{G}$ su uno spazio di Hilbert V si dice *unitaria* se $\|\Phi(g)\| = 1$ per ogni $g \in \mathbf{G}$.

Se $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, la rappresentazione

$$\mathbf{G} \times \mathbb{C}^n \ni (g, v) \longrightarrow g(v) \in \mathbb{C}^n$$

si dice la *rappresentazione standard.*

ESEMPIO 5.1 Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi complessi in n indeterminate, omogenei di grado k. Otteniamo una rappresentazione di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ su V ponendo:

$$\Phi(g)(p)(x) = p(g^{-1}(x)) \quad \text{per} \quad x = {}^t(x^1, \ldots, x^n)\,.$$

ESEMPIO 5.2 Sia V lo spazio vettoriale complesso dei polinomi omogenei di grado k di $2n$ variabili reali $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Utilizzando le variabili complesse $z_j = x_j + iy_j$, $\bar{z}_j = x_j - iy_j$, poniamo $z = {}^t(z_1, \ldots, z_n)$, $\bar{z} = {}^t(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$ e scriviamo ogni $p \in V$ come un polinomio $p(z, \bar{z})$. Definiamo allora un'azione di $\mathbf{U}(n)$ su V mediante:

$$\Phi(g)(p)(z, \bar{z}) = p(g^{-1}(z), {}^t g(\bar{z}))\,.$$

ESEMPIO 5.3 Sia $\Lambda^k \mathbb{C}^n$ la potenza esterna k-esima di $\mathbb{C}^n$. Vi è allora un'unica azione di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ su $\Lambda^k \mathbb{C}^n$ per cui risulti:

$$\Phi(g)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = g(v_1) \wedge \cdots \wedge g(v_k) \qquad \forall v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{C}^n\,.$$

ESEMPIO 5.4 Consideriamo il gruppo additivo $\mathbf{G} = \mathbb{R}^n$. Sia $L^2(\mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale delle funzioni a valori complessi su $\mathbb{R}^n$ che sono di quadrato sommabile in $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathbb{R}^n \times L^2(\mathbb{R}^n) \ni (v, f) \longrightarrow f(\,\cdot\, + v) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ è una rappresentazione unitaria.

ESEMPIO 5.5 Più in generale, sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico localmente compatto, sia μ una misura di Haar su $\mathbf{G}$. Risulta allora definita una rappresentazione unitaria Φ su $L^2(\mathbf{G}, d\mu)$ mediante $\Phi(g)(f)(x) = f(g\,x)$ per ogni $g, x \in \mathbf{G}$, per ogni $f \in L^2(\mathbf{G}, d\mu)$.

ESEMPIO 5.6 Sia $\mathbf{X} = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ uno spazio omogeneo del gruppo topologico localmente compatto $\mathbf{G}$, con sottogruppo di isotropia chiuso $\mathbf{H}$, e sia ν una misura di Radon relativamente invariante su $\mathbf{X}$. Allora $\Phi : \mathbf{G} \times L^2(\mathbf{X}, \nu) \ni (g, f) \longrightarrow (L_g)_*(f) \in L^2(\mathbf{X}, \nu)$ è una rappresentazione di $\mathbf{G}$. Essa è unitaria se la funzione κ_ν è identicamente uguale a 1.

Sia $\Phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathcal{G}(V)$ una rappresentazione di un gruppo topologico $\mathbf{G}$ su uno spazio di Hilbert complesso V. Un sottospazio W di V si dice *invariante* per Φ se $\Phi(g)(W) \subset W$ per ogni $g \in \mathbf{G}$; in questo caso[27], se W è chiuso in V, otteniamo una *sottorappresentazione* di $\mathbf{G}$ su W e una *rappresentazione quoziente* su V/W nel modo ovvio. La rappresentazione Φ si dice *irriducibile* se non esistono sottospazi invarianti non banali.

[27]Osserviamo che, se W è invariante, anche la sua chiusura $\overline{W}$ in V è invariante.

Due rappresentazioni $\Phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathcal{G}(V)$ e $\Psi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathcal{G}(W)$ si dicono *equivalenti* se esiste un isomorfismo lineare, continuo e con inversa continua, $\phi : V \longrightarrow W$ tale che $\Psi(g) \circ \phi = \phi \circ \Phi(g)$ per ogni $g \in \mathbf{G}$.

Esempio 5.7 Sia k un intero positivo e sia V lo spazio vettoriale dei polinomi complessi delle variabili reali $x_1, \dots, x_n$, omogenei di grado k. Poniamo $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ e definiamo $\Phi : \mathbf{SO}(n) \longrightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ mediante:

$$\Phi(g)(p)(x) = p\left(g^{-1}(x)\right) \qquad \forall g \in \mathbf{SO}(n),\ \forall p \in V\,.$$

Introduciamo l'operatore di Laplace $\Delta = \left(\partial^2/\partial x_1^2\right) + \cdots + \left(\partial^2/\partial x_n^2\right)$ e definiamo

$$A : V \ni p \longrightarrow (x_1^2 + \cdots + x_n^2) \cdot (\Delta(p)) \in V\,.$$

Si verifica che $\Phi(g) \circ A = A \circ \Phi(g)$ per ogni $g \in \mathbf{SO}(n)$. Ne segue che $\ker A$ e $A(V)$ sono due sottospazi invarianti per Φ.

§6 Rappresentazioni dei gruppi lineari

Consideriamo ora il caso in cui il gruppo $\mathbf{G}$ sia un sottogruppo chiuso[28] di un gruppo lineare $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$.

Teorema 6.1 *Ogni rappresentazione di dimensione finita di un gruppo lineare è di classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Dim. Sia $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ un gruppo lineare e sia $\pi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{GL}(N, \mathbb{C})$ una sua rappresentazione lineare di dimensione finita.

Fissiamo un intorno U di e in $\mathbf{GL}(N, \mathbb{C})$ tale che ogni elemento $g \in U$ abbia in U un'unica radice quadrata $g^{1/2} \in U$: a questo scopo è sufficiente fissare un intorno aperto $2V$ di 0 nell'algebra di Lie $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ di $\mathbf{GL}(N, \mathbb{C})$ tale che $X \longrightarrow \exp(X)$ sia un diffeomorfismo di $2V$ su un intorno aperto di e in $\mathbf{GL}(N, \mathbb{C})$ e porre $U = \exp(V)$. Possiamo supporre che U sia una palla aperta di $\mathbb{C}^{n^2}$ contenuta in $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$.

Dimostriamo il teorema nel caso particolare in cui $\mathbf{G}$ sia il gruppo moltiplicativo dei reali positivi. Scegliamo ϵ sufficientemente piccolo in modo che $\pi(e^t) \in U$ per ogni $t \in [-\epsilon, \epsilon]$. Sia $Y \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ tale che $\pi(e^\epsilon) = \exp(\epsilon Y)$. Otteniamo allora, per l'unicità della radice quadrata in U, che $\pi(e^{\epsilon/2^m}) = \exp(\frac{\epsilon}{2^m} Y)$ per ogni intero $m \geq 0$ e quindi che $\exp(e^{\epsilon\ell/2^m}) = \exp(\frac{\epsilon\ell}{2^m} Y)$ per ogni $\ell \in \mathbb{Z}$ ed $m \in \mathbb{N}$. Poiché π è continua, ne segue che $\pi(e^t) = \exp(tY)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Chiaramente la rappresentazione $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \ni e^t \longrightarrow \exp(tY) \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ è differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$, perché composta di applicazioni differenziabili di classe $\mathcal{C}^\infty$:

$$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \xrightarrow{\log(\,\cdot\,)\,Y} \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) \xrightarrow{\exp} \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Il ragionamento che abbiamo svolto nel caso particolare in cui $\mathbf{G} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ ci permette, in generale, di definire un diagramma commutativo:

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\ \Pi\ } & \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) \\ {\scriptstyle \exp}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathbf{G} & \xrightarrow[\ \pi\ ]{} & \mathbf{GL}(N, \mathbb{C}) \end{array}$$

[28] Il teorema seguente vale più in generale per un qualsiasi gruppo di Lie.

in cui l'applicazione Π è lineare. Ne segue che la π è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno di $e = \exp(0)$ (perché exp è un diffeomorfismo in un intorno di 0) e quindi dappertutto. $\square$

Dalla dimostrazione del Teorema VIII.6.1 segue il:

COROLLARIO 6.2 *Se $\Phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ è una rappresentazione di dimensione finita di un gruppo lineare $\mathbf{G}$, allora il suo differenziale nell'origine:*

$$d\Phi_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

è un omomorfismo di algebre di Lie.

Un omomorfismo $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ di un'algebra di Lie reale $\mathfrak{g}$ si dice una *rappresentazione di dimensione finita* di $\mathfrak{g}$.

Dalla dimostrazione del Teorema VIII.6.1 segue ancora il

COROLLARIO 6.3 *Sia $\mathbf{G}$ un gruppo lineare connesso e semplicemente connesso e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Ad ogni rappresentazione di dimensione finita di $\mathfrak{g}$ corrisponde un'unica rappresentazione lineare di $\mathbf{G}$.*

DIM. Basta osservare che in questo caso all'omomorfismo Π di algebre di Lie corrisponde un omomorfismo π di gruppi di Lie che rende $(*)$ commutativo.

§7 OPERATORI DI RADON

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo, sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di funzioni su $\mathbf{G}$. Un'applicazione lineare $T : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}$ è un *operatore (a sinistra) del gruppo* $\mathbf{G}$ se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(i) $\mathfrak{F}$ è $\mathbf{G}$-invariante: cioè $\{x \longrightarrow R_g^* f(x) = f(xg)\} \in \mathfrak{F}$ per ogni $f \in \mathfrak{F}$.

(ii) T commuta con l'azione del gruppo: cioè $R_g^*(T(f)) = T(R_g^* f)$, ovvero $(T(f))(xg) = T_x(f(xg))$.

Osserviamo che se $f \in \mathfrak{F}$ è costante sulle classi laterali sinistre $g\mathbf{H}$ di un sottogruppo $\mathbf{H}$ di $\mathbf{G}$, anche $T(g)$ sarà costante sulle classi laterali sinistre di $\mathbf{G}$: quindi ogni operatore del gruppo $\mathbf{G}$ induce un operatore sulla corrispondente classe di funzioni definita su un qualsiasi spazio omogeneo $\mathbf{G}/\mathbf{H}$.

Per ogni $g \in \mathbf{G}$, la traslazione a destra R_g^* definisce un operatore del gruppo $\mathbf{G}$ su una qualsiasi classe di funzioni complesse $\mathfrak{F}$ su $\mathbf{G}$ che sia $\mathbf{G}$-invariante.

Se poniamo $S_g = L_{g^{-1}}^*$, le S_g (con il prodotto di composizione) formano un gruppo isomorfo a $\mathbf{G}$ e la trasformazione $g \longrightarrow S_g$ è un isomorfismo di gruppi.

Le loro combinazioni lineari a coefficienti complessi

$$(*) \qquad T = \sum_{i=1}^{n} k_i S_{g_i}$$

formano un anello.

Se ν è una misura a valori complessi definita su $\mathbf{G}$, possiamo associare ad essa un operatore

$$(**) \qquad T_\nu f(x) = \int_{\mathbf{G}} f(y^{-1}x)\, d\nu(y)\,.$$

Osserviamo che T_ν è della forma $(*)$ nel caso di una misura a valori complessi con il supporto concentrato in un numero finito di punti.

Se $\mathbf{G}$ è localmente compatto, è particolarmente interessante il caso in cui ν sia una misura complessa di Radon, e allora T_ν si dice un *operatore di Radon*. Se la misura ν ha massa finita, diremo che T_ν è un *operatore di Radon limitato*.

Se f è limitata e uniformemente continua a destra (se cioè per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intorno aperto U di e in $\mathbf{G}$ tale che $|f(xg) - f(x)| < \epsilon$ per ogni $g \in U$ ed $x \in \mathbf{G}$) e ν una misura di Radon limitata, allora

$$T_\nu f(xg) - T_\nu f(x) \;=\; \int_{\mathbf{G}} \big(f(y^{-1}xg) - f(y^{-1}x)\big)\; d\nu(y)$$

e quindi

$$|T_\nu f(xg) - T_\nu f(x)| \le \int_{\mathbf{G}} \big|f(y^{-1}xg) - f(y^{-1}x)\big|\; d\nu(y) \le \epsilon \int_{\mathbf{G}} |d\nu(y)| \quad \forall x \in \mathbf{G}\,,$$

e $T_\nu f$ è anch'essa uniformemente continua a destra.

Se ν_1 e ν_2 sono due misure di Radon complesse di massa finita, abbiamo chiaramente $T_{\nu_1} + T_{\nu_2} = T_{\nu_1+\nu_2}$ e vale inoltre:

$$T_{\nu_1} \circ T_{\nu_2}(f)(x) = \iint_{\mathbf{G}\times\mathbf{G}} f(y_1^{-1}y_2^{-1}x)\, d\nu_1(y_1)\, d\nu_2(y_2)\,.$$

Il secondo membro di quest'uguaglianza è un integrale di Radon, rispetto a una misura di Radon di massa finita ν:

$$T_{\nu_1} \circ T_{\nu_2}(f)(x) = \int_{\mathbf{G}} f(y^{-1}x)\, d\nu(y),$$

per cui risulta: $\nu(\mathbf{G}) = \nu_1(\mathbf{G}) \cdot \nu_2(\mathbf{G})$.

In particolare,

Proposizione 7.1 *Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico localmente compatto. Con il prodotto di composizione gli operatori di Radon limitati formano un anello.*

Sia ora $\mu_{\mathbf{G}}$ la misura di Haar su $\mathbf{G}$. Indichiamo con $L^p(\mathbf{G})$ lo spazio di Banach delle funzioni misurabili di potenza p sommabile su $\mathbf{G}$:

$$L^p(\mathbf{G}) = \left\{ f \text{ è } \mu_{\mathbf{G}}\text{-misurabile e } \int_{\mathbf{G}} |f(x)|^p d\mu_{\mathbf{G}}(x) = \|f\|_p^p < +\infty \right\}$$

Se ν è una misura di Radon complessa di massa totale finita abbiamo:

$$\int_{\mathbf{G}} T_\nu(f)(x) \cdot \phi(x)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x) \;=\; \int_{\mathbf{G}} d\nu(y) \int_{\mathbf{G}} f(y^{-1}x)\, \phi(x)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x)$$

$$\text{e quindi} \quad \left| \int_{\mathbf{G}} T_\nu(f)(x) \cdot \phi(x)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x) \right| \le \left(\int_{\mathbf{G}} |d\nu(y)| \right) \|f\|_p\, \|\phi\|_{p'}$$

$\forall f \in L^p(\mathbf{G})$, $\forall \phi \in L^{p'}(\mathbf{G})$ (ove $1 < p, p' < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

Abbiamo ottenuto:

Teorema 7.2 *L'anello degli operatori di Radon limitati opera sugli spazi $L^p(\mathbf{G})$ per ogni $p \in]1, +\infty[$.*

§8 Prodotto di convoluzione

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico localmente compatto. Allora anche il prodotto diretto $\mathbf{G} \bowtie \mathbf{G}$ è un gruppo topologico localmente compatto. Siano $\mu_{\mathbf{G}}$ e $\mu_{\mathbf{G}\bowtie\mathbf{G}}$ le loro rispettive misure di Haar. Per i corrispondenti integrali di Haar abbiamo:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbf{G}\bowtie\mathbf{G}} F(x,y)\, d\mu_{\mathbf{G}\bowtie\mathbf{G}}(x,y) &= \int_{\mathbf{G}} d\mu_{\mathbf{G}}(y) \int_{\mathbf{G}} F(x,y)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x) \\ &= \int_{\mathbf{G}} d\mu_{\mathbf{G}}(y) \int_{\mathbf{G}} F(y^{-1}x,y)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x)\,.\end{aligned}$$

Quindi: la trasformazione

$$\mathbf{G} \bowtie \mathbf{G} \ni (x,y) \longrightarrow (y^{-1}x,y) \in \mathbf{G} \bowtie \mathbf{G}$$

è un omeomorfismo che lascia invariata la misura di Haar di $\mathbf{G} \bowtie \mathbf{G}$. In particolare, se ϕ, ψ sono due funzioni $\mu_{\mathbf{G}}$-misurabili su $\mathbf{G}$, il loro prodotto tensoriale $\phi \otimes \psi(x,y) = \phi(x)\psi(y)$ è misurabile, e risulta misurabile anche la $\phi(y^{-1}x)\psi(y)$, e la $y \longrightarrow \phi(y^{-1}x)\psi(y)$ è misurabile per quasi tutti gli x di $\mathbf{G}$.

Supponiamo ora che $\psi \in L^1(\mathbf{G})$. Allora $\psi(x)d\mu_{\mathbf{G}}(x)$ definisce una misura di Radon di massa finita su $\mathbf{G}$ e quindi un corrispondente operatore di Radon $\psi*$ del gruppo $\mathbf{G}$. Data $\phi \in L^p(\mathbf{G})$ la funzione di $L^p(\mathbf{G})$:

$$\boxed{\psi * \phi(x) = \int_{\mathbf{G}} \psi(y)\, \phi(y^{-1}x)\, d\mu_{\mathbf{G}}(y) = \int_{\mathbf{G}} \psi(xy)\, \phi(y^{-1})\, d\mu_{\mathbf{G}}(y)}$$

si dice *prodotto di convoluzione* di ψ e ϕ.

Osserviamo che vale la

$$\|\psi * \phi\|_{L^p(\mathbf{G})} \le \|\psi\|_{L^1(\mathbf{G})} \|\phi\|_{L^p(\mathbf{G})}\,.$$

Data una qualsiasi funzione f su $\mathbf{G}$, sia $\check{f}$ la funzione su $\mathbf{G}$ definita da $\check{f}(x) = f(x^{-1})$ per ogni $x \in \mathbf{G}$.

Vale la

Proposizione 8.1 *Se $\check{\phi} \in L^p(\mathbf{G})$ e $\psi \in L^{p'}(\mathbf{G})$, con $1 < p, p' < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, allora $\psi * \phi$ è una funzione continua e*

$$|\psi * \phi(x)| \le \|\psi\|_{L^{p'}(\mathbf{G})} \|\phi\|_{L^p(\mathbf{G})} \quad \forall x \in \mathbf{G}\,.$$

Nel caso di un gruppo unimodulare, l'applicazione $f \longrightarrow \check{f}$ è un'isometria su ciascuno degli spazi $L^p(\mathbf{G})$, per $1 \le p \le +\infty$. Abbiamo:

Teorema 8.2 *Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico unimodulare. Allora il prodotto di convoluzione gode delle proprietà:*

(*i*) *Se $\phi \in L^p(\mathbf{G})$ e $\psi \in L^{p'}(\mathbf{G})$, con $1 < p, p' < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, allora $\psi * \phi$ è una funzione continua e limitata e*

$$\|\psi * \phi\|_{L^\infty(\mathbf{G})} \le \|\psi\|_{L^{p'}(\mathbf{G})} \|\phi\|_{L^p(\mathbf{G})}\,.$$

(*ii*) *Siano p, q, r numeri reali ≥ 1 e tali che $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Allora, se $\phi \in L^p(\mathbf{G})$ e $\psi \in L^q(\mathbf{G})$, il prodotto di convoluzione $\phi * \phi$ è una funzione di $L^r(\mathbf{G})$ e vale la maggiorazione:*

$$\|\psi * \phi\|_{L^r(\mathbf{G})} \leq \|\psi\|_{L^q(\mathbf{G})} \|\phi\|_{L^p(\mathbf{G})} .$$

(*iii*) *Il prodotto di convoluzione gode della proprietà associativa*[29]*:*

$$(\phi_1 * \phi_2) * \phi_3 = \phi_1 * (\phi_2 * \phi_3) := \phi_1 * \phi_2 * \phi_3 .$$

§9 Operatori associati a una rappresentazione

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico localmente compatto ed unimodulare e sia $\mu_{\mathbf{G}}$ una sua misura di Haar. Se Φ è una rappresentazione di $\mathbf{G}$ sullo spazio di Hilbert V, associamo ad ogni $f \in L^1(\mathbf{G})$, con supporto compatto, un operatore lineare $\Phi(f) : V \longrightarrow V$ mediante la formula

$$(\#) \qquad \Phi(f)(v) = \int_{\mathbf{G}} f(x)\Phi(x)(v)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x) \quad \forall v \in V .$$

Se $f \in L^1(\mathbf{G})$ ha supporto compatto, abbiamo

$$\|\Phi(f)(v)\| \leq \sup_{x \in \operatorname{supp} f} \|\Phi(x)\| \cdot \|f\|_{L^1(\mathbf{G})} \cdot \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

e quindi $\Phi(f)$ è un operatore limitato.

Osserviamo che, se $W \subset V$ è un sottospazio chiuso invariante $\Phi(\mathbf{G})$-invariante di V, allora W è anche $\Phi(f)$-invariante.

Se Φ è unitaria, allora $\Phi(f)$ è definito, mediante la formula (#), per tutte le $f \in L^1(\mathbf{G})$. È un operatore limitato su V con:

$$\|\Phi(f)\| \leq \|f\|_{L^1(\mathbf{G})} .$$

Osserviamo ancora che:

Lemma 9.1 *Se Φ è una rappresentazione unitaria di un gruppo topologico localmente compatto e unimodulare $\mathbf{G}$, allora:*

$$[\Phi(f)]^* = \Phi(f^*) \qquad \text{con} \qquad f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}, \quad \text{cioè} \quad f^* = \overline{\check{f}} \,,$$

ed inoltre

$$\Phi(f_1) \circ \Phi(f_2) = \Phi(f_1 * f_2) \quad \forall f_1, f_2 \in L^1(\mathbf{G}) .$$

Dim. Poiché Φ è unitaria, abbiamo $[\Phi(x)]^* = \Phi(x^{-1})$. Tenuto conto del fatto che su un gruppo unimodulare $\int_{\mathbf{G}} h(x^{-1})\, d\mu_{\mathbf{G}}(x) = \int_{\mathbf{G}} h(x)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x)$ per ogni $h \in L^1(\mathbf{G})$ (vedi Teorema VIII.2.1), abbiamo:

$$[\Phi(f)]^*(v) = \int_{\mathbf{G}} \bar{f}(x)\Phi(x^{-1})(v)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x) = \int_{\mathbf{G}} \bar{f}(x^{-1})\Phi(x)(v)\, d\mu_{\mathbf{G}}(x) = \Phi(f^*)(v).$$

[29] Se il gruppo $\mathbf{G}$ non è commutativo, non lo è in generale nemmeno il prodotto di convoluzione.

Risulta poi:

$$\begin{aligned}
\Phi(f_1)\circ\Phi(f_2)(v) &= \int_{\mathbf{G}} f_1(y)\Phi(y)\left(\int_{\mathbf{G}} f_2(x)\Phi(x)(v)\,dx\right)\,dy\\
&= \iint_{\mathbf{G}\times\mathbf{G}} f_1(y)f_2(x)\Phi(yx)(v)\,dy\,dx\\
&= \iint_{\mathbf{G}\times\mathbf{G}} f_1(y)f_2(y^{-1}x)\Phi(x)(v)\,dy\,dx\\
&= \int_{\mathbf{G}}\left(\int_{\mathbf{G}} f_1(y)f_2(y^{-1}x)\,dy\right)\,\Phi(x)(v)\,dx\\
&= \int_{\mathbf{G}} (f_1 * f_2)(x)\Phi(x)(v)\,dx\\
&= \Phi(f_1 * f_2)(v)\,.
\end{aligned}$$

$\square$

CAPITOLO IX

RAPPRESENTAZIONI DEI GRUPPI COMPATTI

§1 Relazioni di ortogonalità di Schur

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo compatto. Indichiamo con dx la misura di Haar di $\mathbf{G}$, normalizzata in modo che risulti $\int_{\mathbf{G}} dx = 1$.

Proposizione 1.1 *Se Φ è una rappresentazione di $\mathbf{G}$ su uno spazio vettoriale V di dimensione finita, allora esiste un prodotto scalare Hermitiano su V che rende Φ unitaria.*

Dim. Fissiamo un qualsiasi prodotto scalare Hermitiano $(\ \ |\ \ )_0$ su V e definiamo un nuovo prodotto scalare su V ponendo

$$(v|w)_{0,\Phi} = \int_{\mathbf{G}} (\Phi(x)(v)\,|\Phi(x)(w))_0 \, dx \quad \forall v, w \in V\,.$$

Il nuovo prodotto scalare $(\ \ |\ \ )_{0,\Phi}$ ha chiaramente le proprietà richieste. $\square$

Corollario 1.2 *Ogni rappresentazione Φ di un gruppo compatto $\mathbf{G}$ su uno spazio vettoriale di dimensione finita V si decompone in una somma diretta di rappresentazioni irriducibili: abbiamo cioè una decomposizione $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ di V in una somma diretta di sottospazi $\Phi(\mathbf{G})$-invarianti irriducibili.*

Dim. Possiamo infatti fissare su V un prodotto Hermitiano che renda la Φ unitaria. Osserviamo allora che se il sottospazio W è $\Phi(\mathbf{G})$-invariante, lo è anche il suo ortogonale $W^{\perp}$. $\square$

Teorema 1.3 (Lemma di Schur) *Siano Φ e Φ' due rappresentazioni lineari irriducibili non banali del gruppo compatto $\mathbf{G}$ sugli spazi vettoriali di dimensione finita V e V' rispettivamente. Supponiamo esista un'applicazione lineare $L : V \longrightarrow V'$ tale che $L \circ \Phi(x) = \Phi'(x) \circ L$ per ogni $x \in \mathbf{G}$. Allora L è o un isomorfismo lineare oppure l'applicazione nulla.*

Dim. Infatti $\ker L$ e $L(V)$ sono sottospazi invarianti di V e di V' rispettivamente, e quindi o $\ker L = \{0\}$ e $L(V) = V'$, oppure $\ker L = V$ e $L(V) = \{0\}$. $\square$

Corollario 1.4 *Sia Φ una rappresentazione irriducibile del gruppo compatto $\mathbf{G}$ sullo spazio vettoriale di dimensione finita V. Allora ogni endomorfismo L di V che commuti con tutte le $\Phi(x)$, al variare di x in $\mathbf{G}$, è un multiplo dell'identità:*

$$\{L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)\,|\, L \circ \Phi(x) = \Phi(x) \circ L\ \forall x \in \mathbf{G}\} = \mathbb{C} \cdot I_V\,.$$

Dim. Sia L un endomorfismo L di V che commuta con tutte le $\Phi(x)$, al variare di x in $\mathbf{G}$, e sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di L. Per il Lemma di Schur $L - \lambda\, I_V = 0$. $\square$

TEOREMA 1.5 (RELAZIONI DI ORTOGONALITÀ DI SCHUR) *Siano Φ, Φ' due rappresentazioni unitarie irriducibili e non equivalenti del gruppo compatto $\mathbf{G}$ sugli spazi vettoriali di dimensione finita V, V', rispettivamente. Allora per ogni $u, v \in V$ e $u', v' \in V'$ le due funzioni $x \longrightarrow (\Phi(x)(u)|v)_V$ e $x \longrightarrow (\Phi'(x)(u')|v')_{V'}$ sono ortogonali in $L^2(\mathbf{G})$:*

$$\int_{\mathbf{G}} (\Phi(x)(u)|v)_V \, \overline{(\Phi'(x)(u')|v')_{V'}} \, dx \, = \, 0 \, . \tag{1}$$

Abbiamo inoltre, per ogni $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$:

$$\int_{\mathbf{G}} (\Phi(x)(u_1)|v_1)_V \, \overline{(\Phi(x)(u_2)|v_2)_V} \, dx \, = \, \frac{(u_1|u_2)_V \, \overline{(v_1|v_2)_V}}{\dim_{\mathbb{C}} V} \, . \tag{2}$$

DIM. Sia $L : V' \longrightarrow V$ una qualsiasi applicazione lineare e definiamo una nuova applicazione lineare $\tilde{L} : V' \longrightarrow V$ mediante:

$$\tilde{L} = \int_{\mathbf{G}} \Phi(x) \circ L \circ \Phi'(x^{-1}) \, dx \, .$$

Chiaramente $\Phi(y) \circ \tilde{L} = \tilde{L} \circ \Phi'(y)$ per ogni $y \in \mathbf{G}$ e quindi, poiché Φ e Φ' non sono equivalenti, $\tilde{L} = 0$ per il Lemma di Schur. Scegliamo ora $L(v') \, = \, (v'|u') \, u$. Allora:

$$\int_{\mathbf{G}} \left(\Phi'(x^{-1})(v')|u'\right)_{V'} \Phi(x)(u) \, dx \, = \, \int_{\mathbf{G}} \overline{(\Phi'(x)(u')|v')}_{V'} \Phi(x)(u) \, dx \, = \, 0$$

e facendo il prodotto scalare in V per v otteniamo (1).

Per ottenere la (2) ripetiamo il ragionamento precedente: partendo da una qualsiasi applicazione lineare $L : V \longrightarrow V$, la $\tilde{L} = \int_{\mathbf{G}} \Phi(x) \circ L \circ \Phi'(x^{-1}) \, dx$ è un multiplo dell'identità: $\tilde{L} = \lambda I_V$. Calcolando la traccia di ambo i membri, abbiamo:

$$\operatorname{tr} \tilde{L} = \lambda \dim_{\mathbb{C}} V = \operatorname{tr} L \, .$$

Da questa uguaglianza ricaviamo che

$$(\tilde{L}(v_2)|v_1)_V \, = \, \frac{\operatorname{tr} L}{\dim_{\mathbb{C}} V} \overline{(v_1|v_2)}_V \, . \tag{\#}$$

Poniamo ora $L(v) = (v|u_2)_V u_1$. Allora $\operatorname{tr} L = (u_1|u_2)_V$ e quindi la (#) dà la (2).□

Sia $\{\Phi^{(\alpha)}\}$ un insieme massimale di rappresentazioni unitarie irriducibili, due a due non equivalenti, del gruppo topologico compatto $\mathbf{G}$. Per ogni indice α sia $n^{(\alpha)}$ il *grado* della rappresentazione $\Phi^{(\alpha)}$, cioè la dimensione dello spazio vettoriale complesso $V^{(\alpha)}$ su cui operano le $\Phi^{(\alpha)}(x)$ ($x \in \mathbf{G}$); per ogni α sia $e_1^{(\alpha)}, \ldots, e_{n^{(\alpha)}}^{(\alpha)}$ una base ortonormale di $V^{(\alpha)}$. Allora le funzioni

$$\phi_{i,j}^{(\alpha)}(x) = \sqrt{\left(n^{(\alpha)}\right)} \, \left(\Phi^{(\alpha)}(x)e_i^{(\alpha)} \middle| \, e_j^{(\alpha)}\right)_{V^{(\alpha)}} \qquad (x \in \mathbf{G}) \, , \; 1 \le i, j \le n^{(\alpha)} \, , \tag{✠}$$

per le relazioni di ortogonalità di Schur, formano un sistema ortonormale di vettori di $L^2(\mathbf{G})$.

Data una rappresentazione unitaria $\Phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ di grado finito di un gruppo compatto $\mathbf{G}$, si dice *coefficiente (matriciale) della rappresentazione* una funzione della forma:

$$\mathbf{G} \ni x \longrightarrow (\Phi(x)u|\, v)_V \in \mathbb{C}\,.$$

Si dice *carattere* della rappresentazione Φ la funzione

$$\mathbf{G} \ni x \longrightarrow \chi_\Phi(x) = \operatorname{tr}\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n_\Phi} (\Phi(x)e_i|\, e_i)_V$$

(dove n_Φ è il grado di Φ ed $e_1, \dots, e_{n_\Phi}$ una base ortonormale di V).

PROPOSIZIONE 1.6 *I caratteri χ_Φ e $\chi_{\Phi'}$ di due rappresentazioni unitarie irriducibili di grado finito di un gruppo compatto $\mathbf{G}$ soddisfano:*

(*i*) $\chi_\Phi(x^{-1}) = \overline{\chi}_\Phi(x)$ *per ogni* $x \in \mathbf{G}$*;*
(*ii*) $\chi_\Phi * \chi_{\Phi'} = 0$ *se* Φ *e* Φ' *non sono equivalenti;*
(*iii*) $\chi_\Phi * \chi_\Phi = n_\Phi^{-1}\chi_\Phi$.

DIM. (*i*) Con le notazioni introdotte in precedenza abbiamo:

$$\begin{aligned}\chi_\Phi(x^{-1}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n_\Phi} \left(\Phi(x^{-1})e_i\middle|\, e_i\right)_V \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n_\Phi} (e_i|\, \Phi(x)e_i)_V \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n_\Phi} \overline{(\Phi(x)e_i|e_i)_V} \\ &= \overline{\chi}_\Phi(x)\,.\end{aligned}$$

Per verificare (*ii*) e (*iii*), osserviamo che

$$\begin{aligned}\chi_\Phi * \chi_{\Phi'}(x) &= \textstyle\int_{\mathbf{G}} \chi_\Phi(xy)\chi_{\Phi'}(y^{-1})dy \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n_\Phi}\sum_{j=1}^{n_{\Phi'}} \int_{\mathbf{G}} (\Phi(xy)(e_i)|e_i)_V \overline{(\Phi'(y)(e'_j)|e'_j)}_{V'} dy \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n_\Phi}\sum_{j=1}^{n_{\Phi'}} \int_{\mathbf{G}} (\Phi(y)(\Phi(x)(e_i))|e_i)_V \overline{(\Phi'(y)(e'_j)|e'_j)}_{V'} dy\,.\end{aligned}$$

Se Φ e Φ' sono irriducibili e non equivalenti, otteniamo la (*ii*) dalle relazioni di ortogonalità di Schur.

Se $\Phi = \Phi'$, otteniamo invece:

$$\begin{aligned}\chi_\Phi * \chi_\Phi(x) &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n_\Phi} \int_{\mathbf{G}} (\Phi(y)(\Phi(x)(e_i))|e_i)_V \overline{(\Phi(y)(e_j)|e_j)}_V dy \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n_\Phi} n_\Phi^{-1}(\Phi(x)(e_i)|e_j)_V (e_i|e_j)_V \\ &= n_\Phi^{-1}\chi_\Phi(x)\,,\end{aligned}$$

e quindi la (*iii*). □

§2 IL TEOREMA DI PETER-WEYL

Dimostriamo in questo paragrafo il teorema di Peter-Weyl, che è di importanza cruciale nella teoria delle rappresentazioni:

TEOREMA 2.1 (DI PETER-WEYL) *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo compatto. Valgono allora:*

(A) *I coefficienti matriciali delle sue rappresentazioni unitarie di grado finito generano un sottospazio vettoriale denso in* $L^2(\mathbf{G})$*.*

(B) *Se* $\{\Phi^{(\alpha)}\}_{\alpha\in A}$ *è una famiglia massimale di rappresentazioni unitarie di grado finito di* $\mathbf{G}$*, due a due non equivalenti, la famiglia*

$$\{\phi^{(\alpha)}_{i,j}\,|\,\alpha\in A\,,\ 1\leq i,j\leq n^{(\alpha)}\}$$

(dove le $\phi^{(\alpha)}_{i,j}$ *sono defininite da (✠)) è una base ortonormale di* $L^2(\mathbf{G})$*.*

(C) *Ogni rappresentazione irriducibile di* $\mathbf{G}$ *ha grado finito.*

(D) *Ogni rappresentazione unitaria di* $\mathbf{G}$ *su uno spazio di Hilbert* V *si decompone nella somma diretta di rappresentazioni irriducibili di grado finito su sottospazi invarianti di* V*.*

(E) *Sia* Φ *una rappresentazione unitaria di un gruppo compatto* $\mathbf{G}$ *sullo spazio di Hilbert* V*. Per ogni rappresentazione unitaria irriducibile* τ *di* $\mathbf{G}$*, sia* E_τ *la proiezione ortogonale di* V *sulla chiusura della somma diretta di tutti i sottospazi invarianti irriducibili di* V *su cui la* Φ *è equivalente a* τ*. Allora*

$$E_\tau = n_\tau \Phi(\bar{\chi}_\tau)\,,$$

ove n_τ *è il grado della rappresentazione* τ *e* χ_τ *il suo carattere.*

Abbiamo

$$E_\tau\circ E_{\tau'}=0\quad \text{se } \tau \text{ e } \tau' \text{ non sono equivalenti}$$

e vale la decomposizione ortogonale

$$v=\sum_\tau E_\tau(v)\,,$$

ove la somma è fatta rispetto a tutte le classi di equivalenza $[\tau]$ *di rappresentazioni unitarie irriducibili di* $\mathbf{G}$*.*

Dim. (A) Sia U la chiusura in $L^2(\mathbf{G})$ dello spazio vettoriale generato dai coefficienti matriciali delle rappresentazioni unitarie irriducibili di $\mathbf{G}$.

Osserviamo che, se $h(x)=(\Phi(x)(v)|u)_W$ è il coefficiente matriciale di una rappresentazione unitaria Φ di grado finito, allora anche

$$\begin{aligned} h^*(x) &= \overline{h(x^{-1})} = (\Phi(x)(u)|v)_W\ , \\ L^*_g h(x) &= h(gx) = \big(\Phi(x)(u)|\Phi(g^{-1})(v)\big)_W\ , \\ R^*_g h(x) &= h(xg) = (\Phi(x)[\Phi(g)(u)]|v)_W \end{aligned}$$

sono coefficienti matriciali della stessa rappresentazione.

Ne segue che U è invariante rispetto alle operazioni $h\longrightarrow h^*$, $h\longrightarrow L^*_g h$ ed $h\longrightarrow R^*_g h$.

Supponiamo per assurdo che $U\neq L^2(\mathbf{G})$. Allora $U^\perp$ è un sottospazio chiuso non banale di $L^2(\mathbf{G})$, anch'esso invariante per le operazioni di aggiunzione e di traslazione sinistra e destra.

Dimostriamo che $U^\perp$ contiene allora una funzione continua non banale. Se $f\in U^\perp$, per ogni intorno aperto ω di e in $\mathbf{G}$ consideriamo la funzione caratteristica χ_ω di ω. Indichiamo con $|\omega|$ la misura di Haar di ω. Allora $\frac{1}{|\omega|}\chi_\omega * f$ è una funzione continua perché convoluzione di due funzioni di $L^2(\mathbf{G})$. Ne segue che f è limite in $L^2(\mathbf{G})$ di una successione di funzioni continue.

Infatti, per ogni $\epsilon > 0$ fissato, esiste un intorno ω di e in $\mathbf{G}$ tale che
$\int_{\mathbf{G}} |f(x) - f(y^{-1}x)|^2\, dx < \epsilon^2$ per ogni $y \in \omega$
(la traslazione a sinistra è una rappresentazione unitaria di $\mathbf{G}$ su $L^2(\mathbf{G})$). Con tali ϵ ed ω abbiamo:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbf{G}} \left(f(x) - \tfrac{1}{|\omega|}\chi_\omega * f(x)\right) \cdot v(x)\, dx\right| &= \left|\int_{\mathbf{G}} \left(f(x) - \tfrac{1}{|\omega|}\left[\int_\omega f(y^{-1}x)\, dy\right]\right) \cdot v(x)\, dx\right| \\ &= \tfrac{1}{|\omega|}\left|\int_\omega dy \left[\int_{\mathbf{G}} \left(f(x) - f(y^{-1}x)\right) \cdot v(x)\, dx\right]\right| \\ &\le \tfrac{1}{|\omega|}\int_\omega dy \int_{\mathbf{G}} \left|f(x) - f(y^{-1}x)\right| \cdot |v(x)|\, dx \\ &\le \tfrac{1}{|\omega|}\int_\omega \|f - L^*_{y^{-1}} f\|_{L^2(\mathbf{G})} \cdot \|v\|_{L^2(\mathbf{G})}\, dy \\ &\le \epsilon \|v\|_{L^2(\mathbf{G})}\end{aligned}$$

Quindi, se tutte le funzioni continue $\frac{1}{|\omega|}\chi_\omega * f$ appartenessero ad U, anche f apparterrebbe ad U. Ciò dimostra che $U^\perp$ contiene una funzione f_1 continua e diversa da 0. Possiamo supporre che $f_1(e) = 1$. Definiamo

$$f_2(x) = \int_{\mathbf{G}} f_1(yxy^{-1})\, dy\,.$$

Questa funzione è ancora continua, appartiene ad $U^\perp$ perché tutte le $x \longrightarrow f(yxy^{-1})$, al variare di y in $\mathbf{G}$, appartengono ad $U^\perp$. Inoltre $f_2(e) = f_1(e) = 1$ e $f_2(gxg^{-1}) = f_2(x)$ per ogni $x, g \in \mathbf{G}$. Poniamo finalmente:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(f_2(x) + f_2^*(x)\right) = \left(f_2(x) + \overline{f_2(x^{-1})}\right)\,.$$

Allora:

$$\begin{cases} F \in U^\perp \text{ ed è continua,} \\ F(gxg^{-1}) = F(x) \quad \forall x, g \in \mathbf{G}\,, \\ F(x) = F^*(x) = \overline{F(x^{-1})}\,, \\ F(e) = 1\,. \end{cases}$$

Poniamo $\kappa(x, y) = F(x^{-1}y)$. Abbiamo (la misura di Haar è normalizzata in modo che $\int_{\mathbf{G}} dx = 1$):

$$\kappa(y, x) = \overline{\kappa(x, y)} \quad \text{e} \quad \iint_{\mathbf{G}\times\mathbf{G}} |\kappa(x, y)|^2 dx\, dy = \int_{\mathbf{G}} |F(x)|^2\, dx < +\infty\,.$$

Quindi l'operatore

$$T\phi(x) = \int_{\mathbf{G}} \kappa(x, y)\phi(y)\, dy$$

è un operatore di Hilbert-Schmidt[30] $T : L^2(\mathbf{G}) \longrightarrow L^2(\mathbf{G})$. Osserviamo che T non è nullo perché $F \neq 0$. Questo operatore ha dunque un autovalore reale non nullo λ

[30] Sia H uno spazio di Hilbert. Se $A : H \longrightarrow H$ è un'applicazione lineare di rango finito, possiamo definire la traccia di A mediante $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{\ell} (A(e_i)|e_i)$ per una qualsiasi base ortonormale $e_1, \dots, e_\ell$ di $A(H)$ (il valore $\operatorname{tr} A$ non dipende dalla scelta della base). Se A ha rango finito, anche la sua aggiunta A^* ha rango finito, la composizione A^*A ha rango finito e $\|A\|_{HS(H)} = (\operatorname{tr} A^*A)^{1/2}$ è una norma sullo spazio vettoriale $\mathcal{F}$ degli endomorfismi lineari di rango finito di H. Si chiamano *operatori di Hilbert Schmidt* su H gli endomorfismi lineari di H che appartengono alla chiusura di $\mathcal{F}$ nello spazio degli endomorfismi rispetto alla norma $\|\cdot\|_{HS(H)}$.

e il corrispondente autospazio $V_\lambda = \{\phi \in L^2(\mathbf{G}) \,|\, T(\phi) = \lambda\phi\}$ ha dimensione finita (la somma dei quadrati degli autovalori di T, ripetuti con la loro molteplicità, è uguale a $\int_{\mathbf{G}} |F(x)|^2 \, dx < +\infty$).

Il sottospazio V_λ è invariante rispetto alla rappresentazione regolare a sinistra $L^*_{g^{-1}}$, che è una rappresentazione unitaria di $\mathbf{G}$; infatti T commuta con $L^*_{g^{-1}}$ per ogni $g \in \mathbf{G}$:

$$\begin{aligned} T(L^*_{g^{-1}}\phi)(x) &= \int_{\mathbf{G}} F(x^{-1}y)\phi(g^{-1}y)\, dy \\ &= \int_{\mathbf{G}} F(x^{-1}gy)\phi(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbf{G}} F(x^{-1}gy)\phi(y)\, dy \\ &= (T\phi)(g^{-1}x) = L^*_{g^{-1}}(T\phi)(x)\,. \end{aligned}$$

Poiché ha dimensione finita, V_λ contiene un sottospazio invariante irriducibile W_λ. Sia $\phi_1, \ldots, \phi_n$ una base ortonormale di W_λ. I suoi coefficienti matriciali sono:

$$\psi_{ij}(x) = (L^*_{x^{-1}}\phi_1|\phi_j)_{L^2(\mathbf{G})} = \int_{\mathbf{G}} \phi_j(x^{-1}y)\phi_i(y)\, dy$$

e per definizione stanno in U. Quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbf{G}} F(x)\overline{\psi_{ii}(x)}\, dx \\ &= \iint_{\mathbf{G}\times\mathbf{G}} F(x)\overline{\phi_i(x^{-1}y)}\phi_i(y)\, dy\, dx \\ &= \iint_{\mathbf{G}\times\mathbf{G}} F(x)\overline{\phi_i(x^{-1}y)}\phi_i(y)\, dx\, dy \\ &= \iint_{\mathbf{G}\times\mathbf{G}} F(yx^{-1})\overline{\phi_i(x)}\phi_i(y)\, dx\, dy \\ &= \int_{\mathbf{G}} \left[\int_{\mathbf{G}} F(x^{-1}y)\phi_i(y)\, dy\right] \overline{\phi_i(x)}\, dx \\ &= \int_{\mathbf{G}} (T\phi_i)(x)\overline{\phi_i(x)}\, dx \\ &= \lambda \int_{\mathbf{G}} |\phi_i(x)|^2 dx \end{aligned}$$

e questo contraddice il fatto che $\lambda \neq 0$ e $W_\lambda \neq \{0\}$.

Questo mostra che $U^\perp = \{0\}$ e quindi $U = L^2(\mathbf{G})$.

Abbiamo chiaramente (A)$\Leftrightarrow$(B). (C) è conseguenza di (D). Dimostriamo quindi che vale (D).

Sia Φ una rappresentazione unitaria di $\mathbf{G}$ su uno spazio di Hilbert V. Per il Lemma di Zorn, possiamo trovare una famiglia massimale di sottospazi invarianti di dimensione finita, due a due ortogonali, di V. Sia U la chiusura della loro somma. Allora $U^\perp$ è un sottospazio invariante chiuso. Per dimostrare che $U = V$, basterà dimostrare per contraddizione che se $U \neq V$, allora $U^\perp$ contiene un sottospazio invariante di dimensione finita.

Sia v un vettore non nullo di $U^\perp$. Per ogni intorno aperto ω di e in $\mathbf{G}$ possiamo considerare

$$v_\omega = \frac{1}{|\omega|}\Phi(\chi_\omega)v = \frac{1}{|\omega|}\int_\omega \Phi(x)(v)\, dx\,.$$

Tutti i v_ω appartengono a $U^\perp$, e poiché v appartiene alla chiusura di $\{v_\omega\}$, esiste un intorno aperto ω di e in $\mathbf{G}$ per cui $v_\omega \neq 0$.

Se h è una combinazione lineare di coefficienti matriciali di rappresentazioni irriducibili di grado finito di $\mathbf{G}$, allora appartiene a un sottospazio di dimensione finita W, invariante per la rappresentazione regolare sinistra, di $L^2(\mathbf{G})$. Sia $h_1, \dots, h_n$ una base di un tale sottospazio $W \subset L^2(\mathbf{G})$. Se g è un qualsiasi elemento di $\mathbf{G}$, abbiamo $L^*_{g^{-1}} h = \sum_{i=1}^n c_i h_i$ per opportuni $c_i \in \mathbb{C}$. Allora:

$$\begin{aligned}\Phi(g)\Phi(h)v &= \Phi(g) \textstyle\int_{\mathbf{G}} h(x)\Phi(x)(v)\, dx \\ &= \textstyle\int_{\mathbf{G}} h(x)\Phi(gx)(v)\, dx \\ &= \textstyle\int_{\mathbf{G}} h(g^{-1}x)\Phi(x)(v)\, dx \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n c_i \int_{\mathbf{G}} h_i(x)\Phi(x)(v)\, dx\,,\end{aligned}$$

e quindi il sottospazio di dimensione finita $\sum_{i=1}^n \mathbb{C}\,\Phi(h_j)(v)$ è un sottospazio $\Phi(\mathbf{G})$-invariante. Se quindi possiamo dimostrare che $\Phi(h)(v) \neq 0$ per qualche combinazione lineare h di coefficienti matriciali, troveremo una contraddizione, che dimostrerà il punto (D).

Per (A), possiamo trovare una combinazione lineare h di coefficienti matriciali tale che

$$\|\chi_\omega - h\|_{L^1(\mathbf{G})} \leq \|\chi_\omega - h\|_{L^2(\mathbf{G})} \leq \frac{1}{2}\|\Phi(\chi_\omega)(v)\|_V \Big/ \|v\|_V \;.$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}\|\Phi(\chi_\omega)(v) - \Phi(h)(v)\|_V &\leq \|\Phi(\chi_\omega - h)(v)\|_V \leq \|\chi_\omega - h\|_{L^1(\mathbf{G})}\|v\|_V \\ &\leq \|\chi_\omega - h\|_{L^2(\mathbf{G})}\|v\|_V \leq \tfrac{1}{2}\|\Phi(\chi_\omega)(v)\|_V\end{aligned}$$

e quindi

$$\|\Phi(h)(v)\|_V \geq \|\Phi(\chi_\omega)(v)\| - \|\Phi(\chi_\omega)(v) - \Phi(h)(v)\|_V \geq \frac{1}{2}\|\Phi(\chi_\omega)(v)\|_V > 0\,.$$

Questo dimostra (D) e quindi anche (C).

Dimostriamo infine il punto (E).

Per le proprietà dei caratteri, posto, per ogni rappresentazione unitaria di grado finito τ,

$$E_\tau = n_\tau \Phi\left(\overline{\chi}_\tau\right)\,,$$

abbiamo:

$$\begin{cases} E^*_\tau = n_\tau \Phi\left(\check{\chi}_\tau\right) = n_\tau \Phi\left(\overline{\chi}_\tau\right) = E_\tau \\ E_\tau E_{\tau'} = n_\tau n_{\tau'} \Phi(\overline{\chi_\tau} * \overline{\chi_{\tau'}}) = 0 \quad \text{se } \tau \text{ e } \tau' \text{ non sono equivalenti} \\ E^2_\tau = n^2_\tau \Phi(\overline{\chi_\tau} * \overline{\chi_\tau}) = n_\tau \Phi\left(\overline{\chi}_\tau\right) = E_\tau\,. \end{cases}$$

Quindi le E_τ sono delle proiezioni ortogonali e due di queste proiezioni che corrispondano a rappresentazioni unitarie irriducibili di grado finito non equivalenti commutano.

Sia U un sottospazio irriducibile di V per cui $\Phi|_U$ sia equivalente a τ. Sia $u_1, \dots, u_n$ una base ortonormale di U e consideriamo i coefficienti matriciali

$$\phi_{i,j}(x) = (\Phi(x)u_i|u_j), \text{ per } 1 \leq i, j \leq n.$$

Allora
$$\chi_\tau(x) = \sum_{i=1}^n \phi_{i,i}(x) \quad \text{e} \quad \Phi(x)(u_j) = \sum_{i=1}^n \phi_{i,j}(x)(u_j)\,.$$
Per le relazioni di ortogonalità di Schur otteniamo:

$$\begin{aligned} E_\tau(u_j) &= n_\tau \int_{\mathbf{G}} \overline{\chi_\tau(x)}\, \Phi(x)(u_j)\, dx \\ &= n_\tau \int_{\mathbf{G}} \sum_{i,k} \overline{\phi_{k,k}(x)}\, \phi_{i,j}(x)(u_i)\, dx \\ &= u_j\,. \end{aligned}$$

Se u è un vettore di un sottospazio irriducibile di tipo τ' non equivalente a τ, allora $E_\tau(u) = E_\tau \circ E_{\tau'}(u) = 0$. Considerando una decomposizione di V in una somma diretta di sottospazi $\Phi(\mathbf{G})$-invarianti irriducibili, si verifica infine facilmente che E_τ è proprio la proiezione sulla somma diretta di quei sottospazi della decomposizione che sono di tipo τ.

La dimostrazione è completa. □

§3 Applicazioni del Teorema di Peter-Weyl

Ricordiamo che la *norma di Hilbert-Schmidt* di un operatore $T : V \longrightarrow V$ definito su uno spazio di Hilbert V è definita da

$$\|T\|_{HS(V)} = \sum_i \|T(e_i)\|_V^2\,,$$

dove $\{e_i\}$ è una qualsiasi base ortonormale di V.

Come conseguenza della parte (B) nell'enunciato del teorema di Peter-Weyl, otteniamo il

Teorema 3.1 (formula di Parceval-Plancherel) *Se $f \in L^2(\mathbf{G})$, allora*

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbf{G})} = \int_{\mathbf{G}} |f(x)|^2\, dx = \sum_\Phi n_\Phi \|\Phi(f)\|^2_{HS(V^{(\Phi)})}\,,$$

ove la sommatoria è estesa a tutte le classi di equivalenza di rappresentazioni unitarie irriducibili Φ (di grado n_Φ, sullo spazio di Hilbert di dimensione finita $V^{(\Phi)}$).

Abbiamo ancora, per la rappresentazione regolare a sinistra:

Teorema 3.2 *Sia τ una rappresentazione unitaria irriducibile del gruppo compatto $\mathbf{G}$. Allora ogni decomposizione di $L^2(\mathbf{G})$ in sottospazi irriducibili per la rappresentazione regolare sinistra di $\mathbf{G}$ contiene esattamente n_τ sottospazi di tipo τ, ciascuno di dimensione n_τ. La somma diretta dei sottospazi di tipo τ di $L^2(\mathbf{G})$ è un sottospazio $L^*(\mathbf{G})$-invariante di dimensione n_τ^2.*

Dim. Sia infatti V^τ lo spazio della rappresentazione τ. Fissiamo una base ortonormale $u_1, \ldots, u_{n_\tau}$ di V^τ. Allora i coefficienti matriciali

$$(\tau(x)(u_i)|u_j) \quad 1 \le i, j \le n_\tau$$

formano una base di un sottospazio $L^*(\mathbf{G})$-invariante di $L^2(\mathbf{G})$, che generano l'immagine della proiezione E_τ per le relazioni di ortogonalità di Schur. □

Corollario 3.3 *Sia Φ una qualsiasi rappresentazione unitaria del gruppo compatto $\mathbf{G}$. Sia τ una rappresentazione unitaria irriducibile di $\mathbf{G}$. Allora il numero di sottospazi irriducibili di tipo τ in una decomposizione di V^Φ in somma diretta di sottospazi $\Phi(\mathbf{G})$-invarianti irriducibili è indipendente dalla scelta della decomposizione.*
Esso si indica con $[\Phi : \tau]$ e si dice la *molteplicità* di τ in Φ.

Se Φ e τ sono due rappresentazioni lineari dello stesso gruppo $\mathbf{G}$, indichiamo con $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\Phi, V^\tau)$ lo spazio vettoriale di tutte le applicazioni lineari $T : V^\Phi \longrightarrow V^\tau$ tali che $\tau(g) \circ T = T \circ \Phi(g)$ per ogni $g \in \mathbf{G}$.

Lemma 3.4 *Siano Φ e τ due rappresentazioni unitarie dello stesso gruppo compatto $\mathbf{G}$ e supponiamo che τ sia irriducibile. Allora*

$$[\Phi : \tau] = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\Phi, V^\tau) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\tau, V^\Phi) .$$

Dim. Per il Lemma di Schur ed il teorema di Peter-Weyl, ogni applicazione lineare in $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\Phi, V^\tau)$ si annulla sul sottospazio $\left(E_\tau(V^\Phi)\right)^\perp$. Decomponiamo il sottospazio $E_\tau(V^\Phi)$ nella somma diretta di sottospazi irriducibili $V^{(\alpha)}$. Ciascuno di essi è equivalente a V^τ (punto (E) del Teorema di Peter-Weyl). Utilizzando il Lemma di Schur, otteniamo che, per ogni α, lo spazio $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V^{(\alpha)}, V^\tau)$ ha dimensione 1 (uguale alla dimensione di $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\tau, V^\tau)$). Da questa osservazione segue che $[\Phi : \tau] = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\Phi, V^\tau)$. L'ultima uguaglianza segue dal fatto che gli elementi di $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\tau, V^\Phi)$ sono gli aggiunti di quelli di $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\Phi, V^\tau)$ e quindi i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione. $\square$

Sia $\mathbf{H}$ un sottogruppo chiuso di $\mathbf{G}$ e sia σ una rappresentazione unitaria di $\mathbf{H}$ su uno spazio di Hilbert W^σ. Chiamiamo *rappresentazione indotta* la rappresentazione

$$\Phi = \mathrm{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\sigma)$$

che opera sul completamento V^Φ in $L^2(\mathbf{G}, W^\sigma)$ dello spazio delle funzioni $f : \mathbf{G} \longrightarrow W^\sigma$ continue, tali che $f(xh) = \sigma(h)^{-1}(f(x))$ per ogni $x \in \mathbf{G}$ ed ogni $h \in \mathbf{H}$, mediante la formula[31]

$$\Phi(g)(f(x)) = f(g^{-1}x) \quad \forall x, g \in \mathbf{G} .$$

Teorema 3.5 (Teorema di reciprocità (Frobenius)) *Sia $\mathbf{H}$ un sottogruppo chiuso di un gruppo compatto $\mathbf{G}$ e sia σ una rappresentazione unitaria irriducibile di $\mathbf{H}$ su uno spazio di Hilbert W^σ. Sia τ una rappresentazione unitaria irriducibile*

[31] Osserviamo che, se $\mathbf{H} = \mathbf{G}$, allora la relazione $f(xy) = \sigma(y^{-1})(f(x))$ per ogni $x, y \in \mathbf{G}$ implica che $f(x) = \sigma(x^{-1})(f(e))$ per ogni $x \in \mathbf{G}$. Otteniamo in questo modo un isomorfismo lineare

$$W^\sigma \ni w \longrightarrow \{x \longrightarrow f_w(x) = \sigma(x^{-1})(w)\} \in V^\Phi$$

che è un'equivalenza di rappresentazioni unitarie. Abbiamo infatti

$$f_{\sigma(g)(w)}(x) = \sigma(x^{-1})(\sigma(g)(w)) = \sigma(x^{-1}g)(w) = f_w(g^{-1}x) = \Phi(g)(f_w)(x) .$$

Quindi: $\mathrm{ind}_{\mathbf{G}}^{\mathbf{G}}(\sigma)$ *è equivalente a σ per ogni rappresentazione unitaria σ di $\mathbf{G}$.*

di $\mathbf{G}$ *su uno spazio di Hilbert* V^τ *e sia* $\Phi = \mathrm{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\sigma)$*, che agisce sullo spazio di Hilbert* V^Φ*. Allora:*

$$[\mathrm{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\sigma) : \tau] = [\tau|_{\mathbf{H}} : \sigma] .$$

Dim. Osserviamo che V^Φ è contenuto in $L^2(\mathbf{G}, W^\sigma)$, e quest'ultimo spazio è la somma diretta di n_σ copie di $L^2(\mathbf{G}) = L^2(\mathbf{G}, \mathbb{C})$. Perciò τ ha molteplicità $n_\sigma n_\tau$ in $L^2(\mathbf{G}, W^\sigma)$, e quindi al più $n_\sigma n_\tau$ in V^Φ. Per il lemma di Schur, l'immagine di ogni elemento di $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\tau, V^\Phi)$ è formata da funzioni continue. In particolare, ha senso considerare il valore in $e \in \mathbf{G}$ di una funzione nell'immagine di un elemento di $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\tau, V^\Phi)$. Poniamo $\varepsilon_e(f) = f(e)$.

Per ogni $v \in V^\tau$, $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\tau, V^\Phi)$, $h \in \mathbf{H}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \sigma(h)(\varepsilon_e(A(v))) &= \sigma(h)[(A(v))(e)] = (A(v))(h^{-1}) \\ &= (\Phi(h)(A(v)))(e) = (A(\tau(h)(v)))(e) = \varepsilon_e(A(\tau(h)(v))) . \end{aligned}$$

Qundi $\varepsilon_e(A) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(V^\tau, W^\sigma)$ ed otteniamo cosí un'applicazione lineare

$$\varepsilon_e : \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\tau, V^\Phi) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(V^\tau, W^\sigma) .$$

Per dimostrare il Teorema, utilizzando il Lemma precedente, basterà dimostrare che quest'applicazione è un isomorfismo.

Per dimostrare che ε_e è iniettiva, supponiamo che per un $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\tau, V^\Phi)$ risulti $A(v)(e) = 0$ per ogni $v \in V^\tau$. Posto $v = \tau(x^{-1})(v')$ per un qualsiasi $v' \in V^\tau$ e $x \in \mathbf{G}$, abbiamo:

$$0 = (A(v))(e) = (A(\tau(x^{-1})(v')))(e) = (\Phi(x^{-1})(A(v')))(e) = (A(v'))(x) .$$

Questo dimostra che $A(v') = 0$ e quindi, per l'arbitrarietà di v', che $A = 0$.

Rimane da dimostrare che ε_e è surgettiva. Fissiamo $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(V^\tau, W^\sigma)$. Definiamo allora

$$(A(v))(x) = B(\tau(x^{-1})(v)) \quad \forall v \in V^\tau,\ \forall x \in \mathbf{G} .$$

Poiché per ogni $x \in \mathbf{G}$ ed $h \in \mathbf{H}$:

$$\begin{aligned} (A(v))(xh) = B(\tau(h^{-1}) \circ \tau(x^{-1})(v)) &= \sigma(h^{-1}) \left(B(\tau(x^{-1})(v))\right) \\ &= \sigma(h^{-1}) \left((A(v)) (x) \right., \end{aligned}$$

abbiamo $A(v) \in V^\Phi$. In effetti $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V^\tau, V^\Phi)$ perché

$$(\Phi(x_0)(A(v)))(x) = (A(v))(x_0^{-1}x) = B(\tau(x-1)(\tau(x_0)(v)) = A(\tau(x_0)(v))(x) ,$$

da cui $\Phi(x_0) \circ A = A \circ \tau(x_0)$. Infine, $\varepsilon_e(A) = B$ perché

$$A(v)(e) = B(\tau(e)(v)) = B(v) .$$

Questo dimostra che ε_e è surgettiva e completa quindi la dimostrazione del teorema.
□

§4 Gruppi di Lie compatti

Un *gruppo di Lie* è un gruppo topologico $\mathbf{G}$ su cui è assegnata una struttura di varietà differenziabile di classe[32] $\mathcal{C}^\infty$ paracompatta tale che

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (x, y) \to x^{-1}y \in \mathbf{G}$$

sia differenziabile.

Teorema 4.1 *Un gruppo di Lie compatto* $\mathbf{G}$ *ammette una rappresentazione unitaria fedele di grado finito* $\Phi : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$.

Dim. Per (A) nel Teorema di Peter-Weyl, per ogni $x \in \mathbf{G} \setminus \{e\}$, esiste una rappresentazione unitaria irriducibile τ_x tale che $\tau_x(x) \neq I_{V_x^\tau}$. Fissiamo $x_1 \neq e$ in $\mathbf{G}$ e consideriamo il sottogruppo $\mathbf{G}_1 = \ker \tau_{x_1}$: esso è un sottogruppo di Lie di $\mathbf{G}$ di dimensione strettamente minore di quella di $\mathbf{G}$. Se $\mathbf{G}_1$ ha dimensione positiva, scegliamo $x_2 \in (\mathbf{G}_1)_e \setminus \{e\}$ e consideriamo la rappresentazione unitaria $\tau_{x_1} \oplus \tau_{x_2}$. Il suo nucleo è un sottogruppo di Lie di dimensione minore di quella di $\mathbf{G}_1$. Procedendo per ricorrenza, otteniamo una rappresentazione unitaria $\Phi_0 : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}(n_0, \mathbb{C})$ il cui nucleo ha dimensione zero. Poiché $\mathbf{G}$ è compatto, $\ker \Phi_0$ è finito. La

$$\Phi_0 \oplus \bigoplus_{x \in \ker \Phi_0} \tau_x$$

è allora la rappresentazione unitaria cercata. $\square$

---

[32] La struttura differenziabile è in effetti di classe $\mathcal{C}^\omega$ (cioè analitica reale).

CAPITOLO X

CRITERI DI CARTAN E ALGEBRE DI LIE SEMISEMPLICI

§1 La decomposizione di Wedderburn

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Ricordiamo che un endomorfismo $\mathbb{K}$-lineare A di V si dice *semisemplice* (o *completamente riducibile*) se ogni sottospazio A-invariante di V ammette un complemento A-invariante. Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, gli endomorfismi semisemplici sono tutti e soli quelli diagonalizzabili.

Ricordiamo i seguenti risultati:

Lemma 1.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché un endomorfismo A di V sia semisemplice è che il suo polinomio minimo μ_A sia prodotto di fattori primi semplici distinti.*

Lemma 1.2 *Il solo endomorfismo che sia al tempo stesso nilpotente e semisemplice è l'endomorfismo nullo.*

Lemma 1.3 *Sia $\tilde{\mathbb{K}}$ un'estensione algebrica di $\mathbb{K}$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su $\mathbb{K}$ e $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$. Sia $\tilde{V} = \tilde{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} V$ e $\tilde{A}$ l'endomorfismo di $\tilde{V}$ corrispondente ad A. Allora A è semisemplice se e soltanto se $\tilde{A}$ è semisemplice.*

Lemma 1.4 *Se $S_1, S_2 \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ sono semisemplici* e $[S_1, S_2] = 0$, *allora $S_1 + S_2$ è semisemplice.*

Da essi possiamo ricavare il Teorema di Wedderburn:

Teorema 1.5 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero. Allora ogni endomorfismo $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ si decompone in modo unico nella forma:*

$$A = S_A + N_A \tag{1.1}$$

con

$$\begin{cases} S_A & \textit{semisemplice}\,, \\ N_A & \textit{nilpotente}\,, \\ [S_A, A] = [N_A, A] = [S_A, N_A] = 0\,. \end{cases} \tag{1.2}$$

Inoltre $S_A, N_A \in \mathbb{K}[A]$ e possiamo esprimere S_A ed N_A come polinomi di A privi di termine costante.

Dim. Dimostriamo innanzi tutto l'esistenza di una decomposizione (1.1) che soddisfa (1.2). Sia $\mu_A = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$ la decomposizione del polinomio minimo di A

in potenze di polinomi primi distinti. Se $k_1 = \cdots = k_m = 1$, A è semisemplice e otteniamo la decomposizione desiderata con $S_A = A$, $N_A = 0$. Supponiamo quindi $k_i > 1$ per qualche i e consideriamo l'ideale $\mathfrak{n}$ di $\mathbb{K}[A]$ generato da $f(A) = p_1(A) \circ \cdots \circ p_m(A)$. Dimostriamo per ricorrenza che è possibile determinare A_k $(1 \leq k \leq n)$ tali che

$$\begin{cases} A_k \in \mathbb{K}[A]\,, \\ A_k = A + N_k \quad \text{con} \quad N_k \in \mathfrak{n}^k\,, f(A_k) \in \mathfrak{n}^k\,. \end{cases} \tag{1.3}$$

Per $k = 1$ è sufficiente porre $A_1 = A$. Supponiamo ora di aver già costruito A_k per qualche $k \geq 1$. Cerchiamo di teterminare A_{k+1} nella forma $A_{k+1} = A_k + T$ con $T \in \mathfrak{n}^k$. Dalla formula di Taylor ricaviamo:

$$f(A_{k+1}) = f(A_k + T) = f(A_k) + f'(A_k) \circ T + T_1 \tag{1.4}$$

con $T_1 \in \mathfrak{n}^{k+1}$. Poiché f è prodotto di fattori primi semplici, f ed f' sono primi tra loro. Poiché il polinomio minimo di A_k è divisibile per f, ne segue che $f'(A_k)$ è invertibile. Possiamo scegliere quindi

$$T = -[f'(A_k)]^{-1} \circ f(A_k) \in \mathfrak{n}^k.$$

Abbiamo

$$\begin{cases} A_{k+1} = A_k + T = A + (N_k + T) \quad \text{con} \quad N_{k+1} = N_k + T \in \mathfrak{n}\,, \\ f(A_{k+1}) = T_1 \in \mathfrak{n}^{k+1}\,. \end{cases}$$

Per $k = n$ abbiamo $f(A_n) = 0$ e quindi $S_A = A_n$ è semisemplice e otteniamo la decomposizione desiderata ponendo $N_A = -N_n \in \mathfrak{n}$.

Per dimostrare che $S_A = p'(A)$ e $N_A = p''(A)$ per polinomi $p', p'' \in \mathbb{K}[x]$ privi di termine costante, osserviamo innanzi tutto che questo è ovvio nel caso in cui A non sia invertibile: il sottospazio $\ker A$ è S_A ed N_A-invariante. Poiché la restrizione di N_A a $\ker A$ è nilpotente, vi è allora almeno un elemento $v \in \ker A \setminus \{0\}$ tale che $A(v) = N_A(v) = S_A(v) = 0$ e quindi qualsiasi espressione di S_A e di N_A come polinomio di A non può contenere termine costante. Se A è invertibile, per il teorema di Hamilton-Cayley l'identità si può scrivere come un polinomio senza termine costante di A, onde per ogni polinomio $p \in \mathbb{K}[x]$ possiamo trovare un polinomio $q \in \mathbb{K}[x]$ privo di termine costante tale che $p(A) = q(A)$.

Dimostriamo ora l'unicità. Se $A = S + N$ è un'altra decomposizione con S semisemplice e N nilpotente che commutano con A, allora $[S, S_A] = 0$ ed $[N, N_A] = 0$ perché $S_A, N_A \in \mathbb{K}[A]$. Quindi $S - S_A$ e $N_A - N$ sono rispettivamente semisemplice e nilpotente e quindi dall'uguaglianza $S - S_A = N_A - N$ segue che $S = S_A$ e $N = N_A$ in quanto $S - S_A = 0$ perché al tempo stesso semisemplice e nilpotente.

Teorema 1.6 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero. Sia $A \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ un endomorfismo lineare di V e sia $A = S_A + N_A$ la sua decomposizione di Wedderburn, con S_A semisemplice e N_A nilpotente. Allora $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)}(S_A)$ e $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)}(N_A)$ sono rispettivamente la componente semisemplice e la componente nilpotente della decomposizione di Wedderburn di $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)}(A)$.*

§2 Il criterio di risolubilità di Cartan

Lemma 2.1 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero. Siano $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2$ due sottospazi vettoriali di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ e sia*

$$\mathcal{M} = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V) \,|\, \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)}(X)(\mathcal{W}_2) \subset \mathcal{W}_1\}\,.$$

Se $X \in \mathcal{M}$ e $\mathrm{tr}_V(XY) = 0$ per ogni $Y \in \mathcal{M}$, allora X è nilpotente.

Dim. Sia $X = S_X + N_X$ la decomposizione di Wedderburn di X. Possiamo supporre nella dimostrazione che $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso. Esiste allora una base $e_1, ..., e_n$ di V in cui S_X si rappresenta mediante una matrice diagonale

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,.$$

Vogliamo dimostrare che $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. A tale scopo indichiamo con E il $\mathbb{Q}$-sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}$ generato da $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Per dimostrare che $E = \{0\}$ dimostriamo che il suo duale $E^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathbb{Q})$ è $\{0\}$. Fissiamo $f \in E^*$.

Sia Y l'endomorfismo diagonale di V corrispondente alla matrice diagonale

$$\mathrm{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))\,.$$

Sia $r \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio con $r(0) = 0$, $r(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i) - f(\lambda_j)$ per ogni $1 \leq i, j \leq n$.

Abbiamo $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)}(Y) = r(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)}(S_X))$. Poiché $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)}(S_X)$ è la componente semisemplice di $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)}(X)$, esso è un polinomio di $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)}(X)$ privo di termine costante: dunque $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)}(Y)$ è un polinomio di $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)}(X)$ privo di termine costante. Perciò abbiamo $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)}(Y)(\mathcal{W}_2) \subset \mathcal{W}_1$ e dunque $Y \in \mathcal{M}$. In particolare

$$\mathrm{tr}_V(XY) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\lambda_i = 0\,.$$

Applicando f a $\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\lambda_i \in E$, otteniamo $\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)^2 = 0$, onde $f = 0$. Quindi $E^* = 0$, $E = 0$ e la tesi è dimostrata.

La traccia soddisfa:

Lemma 2.2 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Allora*

$$\mathrm{tr}_V([X,Y]Z) = \mathrm{tr}_V(X[Y,Z]) \qquad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)\,. \tag{2.1}$$

Dim. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_V([X,Y]Z) &= \mathrm{tr}_V(XYZ) - \mathrm{tr}_V(YXZ)\\ &= \mathrm{tr}_V(YZX - ZYX)\\ &= \mathrm{tr}_V([Y,Z]X)\\ &= \mathrm{tr}_V(X[Y,Z])\,,\\ &\qquad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)\,.\end{aligned}$$

Otteniamo quindi il criterio di risolubilità di Cartan:

TEOREMA 2.3 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero. Condizione necessaria e sufficiente affinché una sottoalgebra di Lie $\mathfrak{g}$ di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ sia risolubile è che*

$$\operatorname{tr}_V(XY) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}^{(1)},\ \forall Y \in \mathfrak{g}\,. \tag{2.2}$$

DIM. Possiamo supporre che il campo $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso. La necessità segue allora dal fatto che, in un'opportuna base $e_1, \ldots, e_n$ di V gli elementi di $\mathfrak{g}$ si possono rappresentare con matrici di $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ e quelli di $\mathfrak{g}^{(1)}$ con matrici di $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$.

Supponiamo viceversa che valga la (2.2). Applichiamo il Lemma 2.1 con $\mathcal{W}_1 = \mathfrak{g}^{(1)}$ e $\mathcal{W}_2 = \mathfrak{g}$. Sia quindi

$$\mathcal{M} = \{X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V) \mid [X, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}^{(1)}\}\,.$$

Se $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $Z \in \mathcal{M}$ abbiamo:

$$\operatorname{tr}_V([X, Y]Z) = \operatorname{tr}_V(X[Y, Z]) = 0$$

per la (2.2) perché $[Y, Z] \in \mathfrak{g}^{(1)}$ per definizione di $\mathcal{M}$ e $X \in \mathfrak{g}$. Poiché i commutatori $[X, Y]$, al variare di X e Y in $\mathfrak{g}$, generano $\mathfrak{g}^{(1)}$, otteniamo $\operatorname{tr}_V(AZ) = 0$ per ogni $A \in \mathfrak{g}^{(1)}$ e $Z \in \mathcal{M}$. Per il Lemma 2.1, ogni elemento di $\mathfrak{g}^{(1)}$ è nilpotente; quindi $\mathfrak{g}^{(1)}$ è nilpotente per il teorema di Engel e da ciò segue che $\mathfrak{g}$ è risolubile.

TEOREMA 2.4 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathfrak{g}$ sia risolubile è che valga la:*

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(X)\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}^{(1)},\ \forall Y \in \mathfrak{g}\,. \tag{2.3}$$

DIM. La necessità è ovvia. Dimostriamo il viceversa. Se vale la (2.3), allora $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ è risolubile per il teorema precedente. Poiché il nucleo $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ della rappresentazione aggiunta è risolubile in quanto abeliano, ne segue che $\mathfrak{g}$ è risolubile.

§3 LA FORMA DI KILLING

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su un campo $\mathbb{K}$. Un ideale $\mathfrak{a}$ di $\mathfrak{g}$ si dice *caratteristico* se $D(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$ per ogni derivazione $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$.

LEMMA 3.1 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su $\mathbb{K}$ e sia $\mathfrak{a}$ un ideale caratteristico di $\mathfrak{g}$. Allora ogni ideale (risp. ideale caratteristico) di $\mathfrak{a}$ è un ideale (risp. ideale caratteristico) di $\mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sono ideali caratteristici di $\mathfrak{g}$, anche $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ e $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ sono ideali caratteristici di $\mathfrak{g}$.*

OSSERVAZIONE Gli ideali $\mathfrak{D}^m\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{C}^m\mathfrak{g}$ sono caratteristici per ogni intero non negativo $\mathfrak{m}$.

Una forma bilinerare simmetrica $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$ sull'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ si dice *invariante* se:

$$\beta([X, Y], Z) = \beta(X, [Y, Z]) \qquad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}\,, \tag{3.1}$$

completamente invariante se:

$$\beta(D(X), Y) + \beta(X, D(Y)) = 0 \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g},\ \forall D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})\,. \tag{3.2}$$

Lemma 3.2 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su $\mathbb{K}$ e sia β una forma bilineare simmetrica invariante su $\mathfrak{g}$. Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di $\mathfrak{g}$ e poniamo*

$$\mathfrak{a}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, \beta(X,Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{a}\}\,.$$

Allora:

(1) *$\mathfrak{a}^{\perp}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$;*
(2) *se β è completamente invariante e $\mathfrak{a}$ è caratteristico, anche $\mathfrak{a}^{\perp}$ è caratteristico;*
(3) *se β è non degenere, allora $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ è abeliano.*

Lemma 3.3 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ una rappresentazione lineare di dimensione finita. Allora*

$$\beta_{\rho}(X,Y) = \mathrm{tr}_V(\rho(X)\rho(Y)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \tag{3.3}$$

è una forma bilineare simmetrica invariante su $\mathfrak{g}$.

Lemma 3.4 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e sia $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ una rappresentazione lineare di dimensione finita di $\mathfrak{g}$. Allora:*

$$\beta_{\rho}(X,Y) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g},\ \forall Y \in \mathrm{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{g})\,. \tag{3.4}$$

Dim. Consideriamo una bandiera di sottospazi $\rho(\mathfrak{g})$-invarianti di V:

$$V_0 = \{0\} \underset{\neq}{\subset} V_1 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} V_m = V$$

tali che i $\mathfrak{g}$-moduli V_i/V_{i-1} siano irriducibili per ogni $i = 1, \ldots, m$. Scegliamo una base $e_1, \ldots, e_n$ tale che per ogni $i = 1, ..., m$ vi sia un intero positivo $n_i \leq n$ tale che $e_1, \ldots, e_{n_i}$ sia una base di V_i. Gli elementi di $\rho(\mathfrak{g})$ si rappresentano in questa base come matrici triangolari superiori a blocchi e quelli di $\rho(\mathrm{nil}(\mathfrak{g}))$ hanno blocchi nulli sulla diagonale principale. Quindi gli endomorfismi $\rho(X) \circ \rho(Y)$ con $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathrm{nil}(\mathfrak{g})$ sono matrici triangolari superiori a blocchi con blocchi nulli sulla diagonale principale e quindi hanno traccia nulla.

Definizione Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. La forma bilineare simmetrica invariante:

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X,Y) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \tag{3.5}$$

si dice *forma di Killing* di $\mathfrak{g}$.

Teorema 3.5 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e sia $\mathfrak{a}$ un ideale di $\mathfrak{g}$. Allora*

$$\kappa_{\mathfrak{a}}(X,Y) = \kappa_{\mathfrak{g}}(X,Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{a}\,. \tag{3.6}$$

TEOREMA 3.6 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. La sua forma di Killing $\mathfrak{k}_{\mathfrak{g}}$ è completamene invariante.*

DIM. Se $\mathfrak{g}$ non ha derivazioni esterne, non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi che $\mathfrak{g}$ ammetta derivazioni esterne. Sia D una derivazione esterna di $\mathfrak{g}$. Allora $\tilde{g} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}\, D$ è un'algebra di Lie che contiene $\mathfrak{g}$ come un ideale di codimensione uno. La tesi segue allora dal fatto che $\kappa_{\tilde{\mathfrak{g}}}|_{\mathfrak{g}} = \kappa_{\mathfrak{g}}$ per il teorema precedente.

TEOREMA 3.7 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. Il suo radicale* $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ *è l'ortogonale di $\mathfrak{g}^{(1)}$ per la forma di Killing.*

DIM. Siano $X, Y \in \mathfrak{g}$, $Z \in \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$. Allora $[Y, Z] \in \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$. Quindi

$$\kappa_{\mathfrak{g}}([X, Y], Z) = \kappa_{\mathfrak{g}}(X, [Y, Z]) = 0\,.$$

Dunque, se $\mathfrak{r}$ è l'ortogonale di $\mathfrak{g}^{(1)}$ per la forma di Killing, abbiamo $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{r}$. D'altra parte, per il criterio di risolubilità di Cartan, $\mathfrak{r}$ è un ideale risolubile e quindi $\mathfrak{r} \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ e i due insiemi sono uguali.

In particolare, otteniamo:

TEOREMA 3.8 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero. Il suo radicale* $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ *e il suo radicale caratteristico* $\mathrm{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ *sono ideali caratteristici.*

Poiché un ideale di un ideale caratteristico di $\mathfrak{g}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$, abbiamo:

LEMMA 3.9 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero. Allora $\mathfrak{g}$ è semisemplice se e soltanto se non contiene ideali abeliani $\neq \{0\}$.*

DIM. Infatti, $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ se e soltanto se contiene un ideale abeliano diverso da $\{0\}$.

Possiamo quindi enunciare il CRITERIO DI SEMISEMPLICITÀ DI CARTAN:

TEOREMA 3.10 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathfrak{g}$ sia semisemplice è che la sua forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ sia non degenere.*

DIM. Osserviamo che $\mathfrak{g}^{\perp}$ è un ideale risolubile per il criterio di risolubilità di Cartan. Quindi, se $\mathfrak{g}$ è semisemplice, deve essere $\mathfrak{g}^{\perp} = \{0\}$ e perciò $\kappa_{\mathfrak{g}}$ non degenere.

Supponiamo viceversa che $\mathfrak{g}^{\perp} = \{0\}$ e sia $\mathfrak{a}$ un ideale abeliano di $\mathfrak{g}$. Se $X \in \mathfrak{a}$, $Y \in \mathfrak{g}$, allora $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a}$ e quindi $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Y))^2\,(\mathfrak{g}) \subset [X, \mathfrak{a}] = \{0\}$ ci dice che $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)$ è nilpotente. Dunque, se $X \in \mathfrak{a}$, abbiamo $\kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = 0$ per ogni $Y \in \mathfrak{g}$ e dunque $X = 0$ per l'ipotesi che $\kappa_{\mathfrak{g}}$ fosse non degenere. Ciò dimostra che $\mathfrak{a} = \{0\}$ per ogni ideale abeliano di $\mathfrak{g}$, cioè che $\mathfrak{g}$ è semisemplice.

§4 ALCUNE PROPRIETÀ DELLE ALGEBRE DI LIE SEMISEMPLICI

Supporremo sempre in questo paragrafo che $\mathbb{K}$ sia un campo di caratteristica zero e che le algebre di Lie considerate siano di dimensione finita su $\mathbb{K}$.

TEOREMA 4.1 *Tutte le derivazioni di un'algebra di Lie semisemplice $\mathfrak{g}$ sono interne. Ogni ideale di un'algebra di Lie semisemplice è semisemplice e caratteristico.*

DIM. Poiché $\kappa_{\mathfrak{g}}$ è non degenere su $\mathfrak{g}$, se $\mathfrak{a}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$, allora $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ è un ideale abeliano. Poiché $\mathfrak{g}$ è semisemplice, esso deve essere $\{0\}$. Quindi la restrizione di

$\kappa_{\mathfrak{g}}$ ad $\mathfrak{a}$, che coincide con $\kappa_{\mathfrak{a}}$, è non degenere e $\mathfrak{a}$ è semisemplice per il criterio di Cartan.

Poiché $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie semisemplice, l'applicazione $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ è un monomorfismo ed induce quindi un isomorfismo di $\mathfrak{g}$ sull'algebra $\mathrm{int}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ delle derivazioni interne di $\mathfrak{g}$. Questa è dunque un ideale semisemplice di $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$. Indichiamo con $\tilde{\kappa}$ la forma di Kiling di $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$. Essa è non degenere su $\mathrm{int}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ ed abbiamo quindi la decomposizione in somma diretta di ideali:

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}) = \mathrm{int}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}) \oplus \mathrm{int}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})^{\perp} .$$

Da

$$[\mathrm{int}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}), \mathrm{int}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})^{\perp}] = \{0\}$$

ricaviamo che $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(D(X)) = [D, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)] = 0$ per ogni $D \in \mathrm{int}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})^{\perp}$ ed $X \in \mathfrak{g}$. Ma $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ è un monomorfismo e perciò da $D(X) = 0$ per ogni X in $\mathfrak{g}$ deduciamo che $D = 0$. La dimostrazione è completa.

Teorema 4.2 *Se $\mathfrak{g}$ è semisemplice, allora $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}$ e per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di $\mathfrak{g}$ si ha $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{a}$.*

Dim. Infatti l'ortogonale di $\mathfrak{g}^{(1)}$ rispetto alla forma di Killing è un ideale abeliano e quindi zero. L'ultima osservazione segue dal fatto che tutti gli ideali di $\mathfrak{g}$ sono semisemplici.

Teorema 4.3 *Ogni algebra di Lie semisemplice $\mathfrak{g}$ si decompone in modo unico come somma diretta di ideali semplici.*

Dim. (i) *Esistenza della decomposizione.* Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di $\mathfrak{g}$. Allora $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ è un ideale abeliano di $\mathfrak{g}$: quindi è $\{0\}$ ed abbiamo la decomposizione:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$$

in somma diretta di ideali. Inoltre $\kappa_{\mathfrak{a}} = (\kappa_{\mathfrak{g}})|_{\mathfrak{a}}$ è non degenere su $\mathfrak{a}$ e quindi $\mathfrak{a}$ (e analogamente $\mathfrak{a}^{\perp}$) è semisemplice per il criterio di Cartan.

Da queste considerazioni segue l'esistenza della decomposizione: se $\mathfrak{g}$ è semplice, non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti scegliamo un ideale proprio $\mathfrak{a}_1$ di $\mathfrak{g}$ di dimensione minima. Chiaramente $\mathfrak{a}_1$ è semplice perché, essendo caratteristico, ogni suo ideale proprio sarebbe un ideale proprio di $\mathfrak{g}$ di dimensione inferiore a quella di $\mathfrak{a}_1$. Se anche $\mathfrak{a}_1^{\perp}$ è semplice abbiamo finito. Altrimenti scegliamo un ideale non nullo $\mathfrak{a}_2$ di dimensione minima in $\mathfrak{a}_1^{\perp}$. Se $(\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2)^{\perp}$ è semplice o $\{0\}$ abbiamo finito. Altrimenti ripetiamo il ragionamento svolto sopra, definendo $\mathfrak{a}_3$ come l'ideale non nullo di dimensione minima di $(\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2)^{\perp}$. Iterando questo procedimento, poiché $\mathfrak{g}$ ha dimensione finita otteniamo la decomposizione di $\mathfrak{g}$ in somma diretta di ideali semplici:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_m . \tag{4.1}$$

(ii) *Unicità* Sia (4.1) una decomposizione di $\mathfrak{g}$ in somma diretta di ideali semplici. Se $\mathfrak{a}$ è un ideale semplice di $\mathfrak{g}$, abbiamo:

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}] \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{a}_m, \mathfrak{a}]$$

da cui segue che tutti tranne uno degli ideali a secondo membro sono uguali a zero, ed uno di essi, diciamo $[\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}]$, è uguale ad $\mathfrak{a}$. Abbiamo quindi $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}_j$ perché sia $\mathfrak{a}$ che $\mathfrak{a}_j$ sono semplici e questo dimostra che gli ideali nella decomposizione (4.1) sono tutti e soli gli ideali semplici di $\mathfrak{g}$. Ciò prova l'unicità.

Teorema 4.4 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice e sia $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ una sua rappresentazione lineare di dimensione finita fedele, tale cioè che* $\ker\rho = \{0\}$. *Allora la forma bilineare invariante β_ρ è non degenere su $\mathfrak{g}$.*

Dim. Consideriamo in $\mathfrak{g}$ l'ideale

$$\mathfrak{a} = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, \beta_\rho(X,Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Per il criterio di risolubilità di Cartan, $\rho(\mathfrak{a})$, essendo ortogonale a $\mathfrak{D}\rho(\mathfrak{g}) = \rho(\mathfrak{g}^{(1)})$, è risolubile. Poiché abbiamo supposto che ρ è fedele, questo implica che $\mathfrak{a}$ è risolubile, e quindi $\{0\}$ perché $\mathfrak{g}$ è semisemplice.

§5 L'elemento di Casimir di una rappresentazione

Anche in questo paragrafo supporremo che $\mathbb{K}$ sia un campo di caratteristica zero e tutte le algebre di Lie considerate si intendono di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$.

Teorema 5.1 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e sia $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ una rappresentazione lineare di dimensione finita di $\mathfrak{g}$. Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di $\mathfrak{g}$ su cui la forma bilineare simmetrica invariante β_ρ sia non degenere. Fissiamo una base $X_1, \ldots, X_m$ di $\mathfrak{a}$ e sia $Y_1, \ldots, Y_m$ la base di $\mathfrak{a}$ tale che*

$$\beta_\rho(X_i, Y_j) = \delta_{i,j} \quad \forall 1 \le i,j \le m. \tag{5.1}$$

Allora l'endomorfismo $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\rho, \mathfrak{a})$ di V definito da:

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{m} \rho(X_i) \circ \rho(Y_i) \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \tag{5.2}$$

commuta con tutti gli elementi di $\rho(\mathfrak{g})$ ed è indipendente dalla scelta della base $X_1, \ldots, X_m$.

Dim. Fissiamo un elemento Z di $\mathfrak{g}$ e scriviamo:

$$[Z, X_i] = a_i^j X_j, \quad [Z, Y_i] = b_i^j Y_j, \qquad \text{con} \quad a_i^j, b_i^j \in \mathbb{K} \quad \text{per} \quad 1 \le i,j \le m. \tag{5.3}$$

I coefficienti a_i^j e b_i^j si possono determinare mediante:

$$a_i^j = \beta_\rho([Z, X_i], Y_j) = -\beta_\rho(X_i, [Z, Y_j]) = -b_j^i \qquad 1 \le i,j \le m. \tag{5.4}$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{c}, \rho(Z)] &= \textstyle\sum_{i=1}^m \left(\rho(X_i) \circ \rho(Y_i) \circ \rho(Z) - \rho(Z) \circ \rho(X_i) \circ \rho(Y_i)\right) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^m \left(\rho(X_i) \circ [\rho(Y_i), \rho(Z)] + [\rho(X_i), \rho(Z)] \circ \rho(Y_i)\right) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^m \left(\rho(X_i) \circ \rho([Y_i, Z]) - \rho([X_i, Z]) \circ \rho(Y_i)\right) \\
&= \textstyle\sum_{i,j=1}^m \left(-b_i^j \rho(X_i) \circ \rho(Y_j) - a_i^j \rho(X_j) \circ \rho(Y_i)\right) \\
&= -\textstyle\sum_{i,j=1}^m \left(b_i^j \rho(X_i) \circ \rho(Y_j) + a_j^i \rho(X_i) \circ \rho(Y_j)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Questo dimostra che $\mathbf{c}$ appartiene al centralizzatore di $\rho(\mathfrak{g})$ in $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$.

L'invarianza dell'elemento $\mathbf{c}$ rispetto alla scelta della base $X_1, \ldots, X_m$ è una semplice verifica.

L'elemento $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\rho, \mathfrak{a})$ si dice *elemento di Casimir* della rappresentazione ρ su $\mathfrak{a}$.

TEOREMA 5.2 *Sia $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ una rappresentazione lineare di dimensione finita dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, sia $\mathfrak{a}$ un ideale di $\mathfrak{g}$ su cui β_ρ è non degenere e sia $\mathfrak{c}$ il corrispondente elemento di Casimir di ρ su $\mathfrak{a}$. Allora*

$$\operatorname{tr}_V(\mathbf{c}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{a})\,. \tag{5.5}$$

Se ρ è irriducibile, allora $\mathbf{c}$ è invertibile. Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, allora

$$\mathbf{c} = \left(\frac{\dim_{\mathbb{K}}\mathfrak{a}}{\dim_{\mathbb{K}}V}\right) \cdot \mathrm{Id}_V\,. \tag{5.6}$$

DIM. Infatti, con le notazioni del lemma precedente, abbiamo:

$$\operatorname{tr}_V(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^m \operatorname{tr}_V(\rho(X_i) \circ \rho(Y_i)) = \sum_{i=1}^m \beta_\rho(X_i, Y_i) = m\,,$$

ove $m = \dim_{\mathbb{K}}\mathfrak{a}$. Se ρ è irriducibile, per il lemma di Schur $\mathbf{c}$ è invertibile e, se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, $\mathbf{c}$ è un multiplo dell'identità.

Supponiamo ora che $\mathfrak{g}$ sia semisemplice e sia $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ una sua rappresentazione lineare di dimensione finita. Il nucleo di ρ è un ideale di $\mathfrak{g}$ ed ammette quindi un complementare $\mathfrak{a} = (\ker\rho)^\perp$ (ortogonale rispetto alla forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$), su cui la β_ρ è non degenere. La β_ρ è non degenere su $\mathfrak{a}$ per il Teorema 4.4. Porremo

$$\mathbf{c}_\rho = \mathbf{c}(\rho, \mathfrak{a}) \tag{5.7}$$

e chiameremo questo endomorfismo di V l'*elemento di Casimir* della rappresentazione ρ.

§6 IL TEOREMA DI WEYL

Al solito supponiamo che il campo $\mathbb{K}$ abbia caratteristica zero e che tutte le algebre di Lie (su $\mathbb{K}$) considerate abbiano dimensione finita.

LEMMA 6.1 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice. Se $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ è una rappresentazione di dimensione finita di $\mathfrak{g}$, allora $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(V)$.*

DIM. Poiché $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, otteniamo

$$\rho(\mathfrak{g}) = [\rho(\mathfrak{g}), \rho(\mathfrak{g})] \subset [\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V), \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)] = \mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(V)\,.$$

Dimostriamo ora il TEOREMA DI WEYL:

TEOREMA 6.2 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice. Allora ogni rappresentazione lineare $\mathfrak{g} : \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ di dimensione finita è completamente riducibile.*

DIM. Se $\dim_{\mathbb{K}}(V) \leq 1$, la tesi è banalmente vera. Supporremo quindi nel seguito che $n = \dim_{\mathbb{K}}V > 1$.

(1) Consideriamo dapprima il caso in cui V contenga un sottospazio $\mathfrak{g}$-invariante W di codimensione uno in V. Ragioniamo per ricorrenza su $n = \dim_{\mathbb{K}} V$.

(1a) Mostriamo che possiamo ricondurci al caso in cui W sia un $\mathfrak{g}$-modulo irriducibile.

Se $\{0\} \neq U \underset{\neq}{\subset} W$ è un sottospazio $\mathfrak{g}$-invariante, possiamo considerare la successione esatta di $\mathfrak{g}$-moduli:

$$0 \longrightarrow W/U \longrightarrow V/U \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow 0\,.$$

Poiché $\dim_{\mathbb{K}}(V/U) < \dim_{\mathbb{K}} V$, per l'ipotesi induttiva esiste un sottospazio di dimensione uno $\mathfrak{g}$-invariante W_1/U di V/U tale che

$$V/U = W/U \oplus W_1/U\,.$$

Allora la

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow W_1 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

è una successione esatta di $\mathfrak{g}$-moduli. Poiché $\dim_{\mathbb{K}} W_1 < \dim_{\mathbb{K}} V$, e U ha codimensione uno in W_1, per l'ipotesi induttiva W_1 contiene una retta $\mathfrak{g}$-invariante L tale che $W_1 = U \oplus L$. Da questa ricaviamo che $V = W \oplus L$ e quindi abbiamo ottenuto un complemento $\mathfrak{g}$-invariante di W in V.

(1b) Supponiamo quindi che W sia un sottospazio di codimensione uno di V e un $\mathfrak{g}$-modulo irriducibile. Sia $\mathbf{c}_\rho$ l'elelemento di Casimir della rappresentazione ρ. Poiché $\mathbf{c}_\rho$ commuta con gli elementi di $\rho(\mathfrak{g})$, e $\rho(\mathfrak{g})(V) \subset W$ in quanto le rappresentazioni uno-dimensionali di un'algebra di Lie semisemplice sono banali per il Lemma 6.1, abbiamo $\mathbf{c}_\rho(W) \subset W$ e $\ker \mathbf{c}_\rho$ è un sotto-$\mathfrak{g}$-modulo di V. Inoltre $\mathbf{c}_\rho$ è invertibile su W e nullo su V/W. Quindi $\ker \mathbf{c}_\rho$ è una retta $\mathfrak{g}$-invariante di V tale che $V = W \oplus \ker \mathbf{c}_\rho$.

(2) Consideriamo ora il caso generale.

Se V è un $\mathfrak{g}$-modulo irriducibile, non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo che vi sia un sotto-$\mathfrak{g}$-modulo W con $\{0\} \neq W \underset{\neq}{\subset} V$. Consideriamo la rappresentazione Ψ indotta da ρ su $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Sia $\mathcal{V}$ il sottospazio di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ che consiste delle applicazioni lineari $\alpha : V \longrightarrow W$ la cui restrizione a W sia un multiplo dell'identità su W:

$$\alpha(w) = k_\alpha \cdot w \quad \forall w \in W\,.$$

Se $X \in \mathfrak{g}$, $w \in W$ e $\alpha \in \mathcal{V}$, abbiamo:

$$\Psi(X)(\alpha)(w) = \rho(X)(\alpha(w)) - \alpha(\rho(X)(w)) = 0\,.$$

Sia $\mathcal{W}$ il sottospazio delle α di $\mathcal{V}$ che si annullano su W. Anch'esso è un sottospazio $\Psi(\mathfrak{g})$-invariante; inoltre $\Psi(\mathfrak{g})(\mathcal{V}) \subset \mathcal{W}$ e $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ ha dimensione uno. Per la parte (1) della dimostrazione, esiste una retta $\Psi(\mathfrak{g})$-invariante $\mathcal{L}$ tale che $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{L}$. Fissiamo un generatore α_0 di $\mathcal{L}$. Abbiamo

$$\rho(X) \circ \alpha_0 - \alpha_0 \circ \rho(X) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

perché tutte le rappresentazioni uno-dimensionali di $\mathfrak{g}$ sono nulle. Quindi $\ker \alpha_0$ è un sotto-$\mathfrak{g}$-modulo di V e $V = W \oplus \ker \alpha_0$.

La dimostrazione è completa.

§7 Algebre di Lie spezzabili

Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica zero.

Un'algebra di Lie lineare $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ si dice *spezzabile* se per ogni elemento X di $\mathfrak{g}$ la sua componente semisemplice S_X e la sua componente nilpotente N_X nella decomposizione di Wedderburn sono anch'esse elementi di $\mathfrak{g}$.

Lemma 7.1 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su $\mathbb{K}$. Allora l'algebra $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ delle sue derivazioni è spezzabile.*

Dim. Possiamo supporre che $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso. Sia D una derivazione di $\mathfrak{g}$ e siano S ed N rispettivamente la sua componente semisemplice e la sua componente nilpotente nella decomposizione di Wedderburn. Se $\lambda \in \mathbb{K}$, indichiamo con $\mathfrak{g}^{\lambda}$ il sottospazio $\cup_{m \geq 0} \ker(D-\lambda)^m$. Si verifica allora che $[\mathfrak{g}^{\lambda_1}, \mathfrak{g}^{\lambda_2}] \subset \mathfrak{g}^{\lambda_1+\lambda_2}$: ciò deriva dall'identità:

$$
\begin{aligned}
&(D-(\lambda_1+\lambda_2))^n\,([X,Y]) = \textstyle\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} [(D-\lambda_1)^m(X), (D-\lambda_2)^{n-m}(Y)] \\
&\qquad \forall n = 0,1,2,\ldots, \quad X, Y \in \mathfrak{g}
\end{aligned}
$$

che si dimostra facilmente per induzione su n. Ne segue che

$$
S([X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}]) = (\lambda_1+\lambda_2)[X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}] \qquad \forall X_{\lambda_1} \in \mathfrak{g}^{\lambda_1},\ X_{\lambda_2} \in \mathfrak{g}^{\lambda_2}
$$

e da questa formula segue facilmente che S, e quindi $N = D - S$, è una derivazione di $\mathfrak{g}$.

In particolare, data un'algebra di Lie semisemplice $\mathfrak{g}$, poiché tutte le derivazioni di $\mathfrak{g}$ sono interne, potremo associare ad ogni suo elemento X gli elementi S_X ed N_X tali che

$$
\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(S_X) + \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(N_X)
$$

sia la decomposizione di Wedderburn della derivazione $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ di $\mathfrak{g}$. Chiameremo S_X ed N_X le componenti *semisemplice* e *nilpotente*, rispettivamente, di X in $\mathfrak{g}$.

Teorema 7.2 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e sia $\mathfrak{g}$ una sottoalgebra di Lie semisemplice di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$. Allora $\mathfrak{g}$ contiene le componenti semisemplice e nilpotente di ogni suo elemento.*

Dim. Possiamo supporre che $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso. Per ogni sottospazio lineare W di V indichiamo con $\mathfrak{a}_W$ la sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ formata dagli endomorfismi lineari X tali che $X(W) \subset W$ e $\mathrm{tr}_W(X) = 0$. Poiché $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)}$, abbiamo in particolare $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}_W$ per ogni sotto-$\mathfrak{g}$-modulo W di V. Sia allora $\tilde{g}$ l'intersezione del normalizzatore di $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ con le algebre di Lie $\mathfrak{a}_W$ al variare di W tra i sotto-$\mathfrak{g}$-moduli di V. Sia $X \in \mathfrak{g}$ e siano S_X ed N_X le componenti semisemplice e nilpotente della sua decomposizione di Wedderburn. Poiché S_X ed N_X sono polinomi di X privi di termine costante, abbiamo $S_X, N_X \in \tilde{\mathfrak{g}}$.

Mostriamo che $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$. Osserviamo che $\mathfrak{g}$ è un ideale semisemplice di $\tilde{\mathfrak{g}}$ e quindi, detto $\mathfrak{g}^{\perp}$ l'ortogonale di $\mathfrak{g}$ in $\tilde{\mathfrak{g}}$ rispetto alla forma di Killing di $\tilde{\mathfrak{g}}$, abbiamo la decomposizione di $\tilde{\mathfrak{g}}$ in somma diretta di ideali: $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{\perp}$. Sia W un sotto-$\mathfrak{g}$-modulo irriducibile di V. Per il Lemma di Schur, la restrizione di un qualsiasi elemento A di $\mathfrak{g}^{\perp}$ è un multiplo dell'identità su W. Poiché A ha traccia nulla su W, ne segue che $A = 0$. Poiché V è somma diretta di $\mathfrak{g}$-moduli semplici, da questa osservazione deduciamo che $\mathfrak{g}^{\perp} = \{0\}$ e quindi $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$.

Teorema 7.3 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$. Sia $X \in \mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(V)$. Allora $X = S_X + N_X$ è la sua decomposizione di Wedderburn se e soltanto se $\mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(V)}(S_X)$ e $\mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(V)}(N_X)$ sono le componenti semisemplice e nilpotente nella decomposizione di Wedderburn di $\mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(V)}(X)$.*

Dim. Osserviamo che, se $X = S_X + N_X$ è la decomposizione di Wedderburn di X, allora $\mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(V)}(S_X)$ e $\mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(V)}(N_X)$ sono rispettivamente semisemplice e nilpotente. La tesi segue dall'unicità della decomposizione di Wedderburn. (Nota che $\mathrm{tr}_V(S_X) = \mathrm{tr}_V(X) - \mathrm{tr}_V(N_X) = 0$ e quindi $S_X \in \mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(V)$).

Vale il seguente:

Teorema 7.4 *Sia $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ una rappresentazione lineare di dimensione finita di un'algebra di Lie semisemplice. Allora $\rho(X) = \rho(S_X) + \rho(N_X)$ è, per ogni $X \in \mathfrak{g}$, la decomposizione di Wedderburn dell'endomorfismo $\rho(X)$ di V.*

Dim. Possiamo ricondurci al caso in cui $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso. Fissiamo $X \in \mathfrak{g}$ e sia $\mathfrak{g} = \oplus_{\lambda \in \mathbb{K}} \mathfrak{g}^\lambda$ la decomposizione spettrale di $\mathfrak{g}$ rispetto all'endomorfismo $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$. Se $Y \in \mathfrak{g}^\lambda$ abbiamo:

$$[\rho(S_X), \rho(Y)] = \rho([X, Y]) = \lambda \rho(Y)$$

e quindi otteniamo la decomposizione

$$\rho(\mathfrak{g}) = \oplus_{\lambda \in \mathbb{K}} \rho(\mathfrak{g})^\lambda = \oplus_{\lambda \in \mathbb{K}} \rho(\mathfrak{g}^\lambda)\,.$$

Chiaramente $\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(S_X))$ e $\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(N_X))$ sono le componenti semisemplice e nilpotente di $\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(X))$. Poiché $\rho(\mathfrak{g})$ è semisemplice, abbiamo $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}_{\mathbb{K}}(V)$. Ne segue che $\rho(S_X)$ e $\rho(N_X)$ sono la componente semisemplice e nilpotente di $\rho(X)$ per il Teorema 7.3.

CAPITOLO XI

SISTEMI DI RADICI DELLE ALGEBRE DI LIE SEMISEMPLICI

§1 Potenze tensoriali, simmetriche e alternate di una rappresentazione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo $\mathbb{K}$. Indichiamo con $T(V)$ la sua algebra tensoriale e con $T^m(V)$ il sottospazio vettoriale di $T(V)$ formato dai tensori omogenei di grado m: abbiamo la decomposizione $T(V) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} T^m(V)$.

Sia $\mathcal{I}$ l'ideale bilatero di $T(V)$ generato dai tensori della forma $v \otimes w - w \otimes v$ al variare di v, w in V. $\mathcal{I}$ è un ideale omogeneo e quindi l'algebra quoziente $S(V) = T(V)/\mathcal{I}$ è un'algebra graduata:

$$S(V) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} S^m(V)\,. \tag{1.1}$$

L'algebra $S(V)$ si dice *algebra simmetrica* di V; gli elementi di $S^m(V)$ si dicono *tensori simmetrici* omogenei di grado m.

Sia $\mathcal{J}$ l'ideale bilatero di $T(V)$ generato dai tensori della forma $v \otimes v$, al variare di v in V. Esso è un ideale graduato di $T(V)$ e quindi l'*algebra esterna* $\Lambda(V) = T(V)/\mathcal{J}$ di V, è un'algebra graduata:

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{m=0}^{n} \Lambda^m(V)\,. \tag{1.2}$$

Essa è un'algebra di dimensione finita 2^n.

Osserviamo che, in modo naturale, $T^0(V) \simeq S^0(V) \simeq \Lambda^0(V) \simeq \mathbb{K}$ e $T^1(V) \simeq S^1(V) \simeq \Lambda^1(V) \simeq \mathbb{V}$.

Abbiamo:

Lemma 1.1 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e sia $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ una sua rappresentazione lineare di dimensione finita. Allora esiste un'unica rappresentazione lineare $T(\rho)$ di $\mathfrak{g}$ su $T(V)$ che goda delle seguenti proprietà:*

$$\begin{cases} (i)\; T(\rho)(X) \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(T(V)) & \forall X \in \mathfrak{g}\,, \\ (ii)\; T(\rho)(X)(k) = 0 & \forall X \in \mathfrak{g},\ \forall k \in \mathbb{K} \simeq T^0(V)\,, \\ (iii) T(\rho)(X)(v) = \rho(X)(v) & \forall X \in \mathfrak{g},\ \forall v \in V \simeq T^1(V)\,. \end{cases} \tag{1.3}$$

Abbiamo inoltre:

$$\begin{aligned} &T(\rho)(\mathfrak{g})(T^m(V)) \subset T^m(V) \quad \forall m \in \mathbb{N}\,, \\ &T(\rho)(\mathfrak{g})(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}\,, \quad T(\rho)(\mathfrak{g})(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

In particolare, per ogni $m \in \mathbb{N}$ la ρ induce rappresentazioni lineari di dimensione finita

$$\begin{aligned} T^m(\rho) &: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(T^m(V))\,, \\ S^m(\rho) &: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(S^m(V))\,, \\ \Lambda^m(\rho) &: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\Lambda^m(V))\,. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Esempio Se scegliamo una base $e_1, ..., e_n$ di V, vi è un unico isomorfismo naturale dell'algebra $S(V)$ con l'algebra $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ dei polinomi in n indeterminate, che fa corrispondere agli elementi della base i monomi $x_1, ..., x_n$ rispettivamente.

§2 Rappresentazioni lineari di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$

Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamene chiuso di caratteristica 0. Consideriamo l'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{K}$ con traccia nulla. Consideriamo la base standard di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Le regole di commutazione si esprimono nella base standard mediante:

$$[X, Y] = H\,, \quad [H, X] = 2X\,, \quad [H, Y] = -2Y\,. \tag{2.2}$$

Abbiamo quindi, nella base standard:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})}(X) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})}(Y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})}(X) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.3}$$

e quindi la forma di Killing ha, come matrice associata nella base X, Y, H la

$$[\kappa_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})}] \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Per il criterio di Cartan $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ è semisemplice ed è ovviamente semplice perché ha dimensione 3.

A *Pesi e vettori massimali di una rappresentazione*

Sia V un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-modulo di dimensione finita. H definisce un elemento semisemplice di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ e quindi, avendo supposto $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, abbiamo una decomposizione di V in somma diretta:

$$V = \oplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V_\lambda\,, \qquad \text{con} \quad V_\lambda = \{v \in V \mid H \cdot v = \lambda v\}\,. \tag{2.5}$$

I $\lambda \in \mathbb{K}$ tali che $V_\lambda \neq \{0\}$ si dicono *pesi* della rappresentazione V e il V_λ corrispondente *spazio di peso* o *autospazio* di V corrispondente a λ. La dimensione di V_λ si dice la *molteplicità* del peso λ della rappresentazione V.

Dalle formule di commutazione (2.2) otteniamo:

$$\begin{cases} H \cdot (X \cdot v) = X \cdot (H \cdot v) + [H, X] \cdot v = X \cdot (H \cdot v) + 2X \cdot v \,, \\ H \cdot (Y \cdot v) = Y \cdot (H \cdot v) + [H, Y] \cdot v = Y \cdot (H \cdot v) - 2Y \cdot v \,, \\ \quad \forall v \in V \,. \end{cases} \tag{2.6}$$

Vale perciò:

Lemma 2.1 *Sia V un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-modulo di dimensione finita. Allora*

$$X \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda+2} \,, \quad Y \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda-2} \,. \tag{2.7}$$

In particolare, se $V \neq \{0\}$, vi è un $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $V_\lambda \neq \{0\}$ e $V_{\lambda+2} = \{0\}$. Un tale λ si dice *peso massimale* della rappresentazione V e ogni $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ un *vettore massimale* di V.

B *Classificazione delle rappresentazioni irriducibili di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$*

Sia V (con $0 < \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$) un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-modulo irriducibile, sia λ un peso massimale e $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ un vettore massimale. Definiamo:

$$\begin{cases} w_{-1} = 0 \,, \\ w_0 = v \,, \\ w_j = \frac{1}{j} Y \cdot w_{j-1} = \frac{1}{j!} Y^j \cdot v \qquad \text{per} \quad j \geq 1 \,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Lemma 2.2 *Con le ipotesi e le notazioni itrodotte sopra abbiamo:*

$$\begin{cases} \quad i) \qquad H \cdot w_j = (\lambda - 2j) w_j \,, \\ \quad ii) \quad X \cdot w_i = (\lambda - j + 1) w_{j-1} \\ \quad iii) \qquad Y \cdot w_i = (j+1) w_{j+1} \\ \quad \forall j \in \mathbb{N} \,. \end{cases} \tag{2.9}$$

Dim. *iii*) segue dalla definizione e *i*) dal Lemma 2.1. Dimostriamo la *ii*) per induzione. Essa è vera per j=0. Supponiamo $i \geq 0$ e la *ii*) valida per $0 \leq j \leq i$. Allora

$$\begin{aligned} (i+1) X \cdot w_{i+1} &= X \cdot Y \cdot w_i \\ &= H w_i + Y \cdot X \cdot w_i \\ &= (\lambda - 2i) w_i + (\lambda - i + 1) Y \cdot w_{i-1} \\ &= \left((i+1)\lambda - 2i - i^2 + i \right) w_i \\ &= (i+1)(\lambda - i) w_i \,. \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione.

Poiché V ha dimensione finita, vi è un più piccolo intero non negativo m tale che $w_m \neq 0$ e $w_j = 0$ per $j > m$. Il sottospazio W generato da $w_0, w_1, \ldots, w_m$ è un sotto-$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$-modulo di V e quindi coincide con V perché V è irriducibile. Esso ha dimensione $(m+1)$ in quanto i w_j, essendo autovettori corrispondenti a differenti autovalori di $H\cdot$, sono linearmente indipendenti. Dalla *ii*) otteniamo, per $j = m + 1$:

$$0 = X \cdot w_{m+1} = (\lambda - m)w_m$$

e quindi $\lambda = m$ perché $w_m \neq 0$. Quindi il peso massimale λ è un intero non negativo m e gli autovalori di H sono:

$$\{m - 2j \,|\, 0 \leq j \leq m\}\,.$$

Otteniamo quindi:

TEOREMA 2.3 *Le rappresentazioni irriducibili di* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ *di dimensione positiva sono isomorfe alle rappresentazioni* $S^m(\mathbb{K}^2)$*: in particolare ogni rappresentazione irriducibile di* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ *è completamente determinata, a meno di equivalenza, dalla sua dimensione e per ogni intero* $m \geq 0$ *vi è, a meno di equivalenza, una e una sola rappresentazione irriducibile di dimensione* m*.*

C *Rappresentazioni di dimensione finita di* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$

TEOREMA 2.4 *Sia* V *un* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$*-modulo di dimensione finita. Allora i pesi di* V *formano un sottoinsieme di* $\mathbb{Z}$*, simmetrico rispetto a* 0*.* V *si decompone nella somma diretta di* $\dim_{\mathbb{K}}V_0 + \dim_{\mathbb{K}}V_1$ *sotto-*$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$*-moduli irriducibili.*

ESEMPIO 1 Consideriamo $T^2(\mathbb{K}^2)$. Scelta la base canonica $\{e_i \otimes e_j \,|\, 1 \leq i, j \leq 2\}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} T^2(H)(e_1 \otimes e_1) &= 2e_1 \otimes e_1\,,\\ T^2(H)(e_1 \otimes e_2) &= 0\,,\\ T^2(H)(e_2 \otimes e_1) &= 0\,,\\ T^2(H)(e_2 \otimes e_2) &= -2e_2 \otimes e_2\,; \end{aligned}$$

e quindi otteniamo $T^2(\mathbb{K}^2) \simeq S^0(\mathbb{K}^2) \oplus S^2(\mathbb{K}^2)$.

ESEMPIO 2 $S^2(\mathbb{K}^2) \otimes S^2(\mathbb{K}^2) \simeq S^0(\mathbb{K}^2) \oplus S^2(\mathbb{K}^2) \oplus S^4(\mathbb{K}^2)$.

I pesi dell'$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-modulo $S^2(\mathbb{K}^2) \otimes S^2(\mathbb{K}^2)$ sono le somme di tutte le coppie dei pesi della rappresentazione $S^2(\mathbb{K}^2)$: otteniamo quindi ± 4 con molteplicità 1, ± 2 con molteplicità 2, 0 con molteplicità 3: avremo quindi una decomposizione nella somma diretta dei tre moduli irriducibili di pesi massimali rispettivamente 4, 2 e 0.

ESEMPIO 3 $\Lambda^2(S^5(\mathbb{K}^2)) \simeq S^0(\mathbb{K}^2) \oplus S^4(\mathbb{K}^2) \oplus S^8(\mathbb{K}^2)$.

I pesi del $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$-modulo $\Lambda^2(S^5(\mathbb{K}^2))$ sono le somme di tutte le coppie di pesi distinti di $S^5(\mathbb{K}^2)$: otteniamo quindi ± 8 con molteplicità 1, ± 4 e ± 2 con molteplicità 2 e 0 con molteplicità 3. Quindi $\Lambda^2(S^5(\mathbb{K}^2))$ si decompone nella somma diretta di tre moduli irriducibili, di pesi massimali rispettivamente 0, 4 e 8.

§3 SOTTOALGEBRE TORALI

In questo paragrafo $\mathfrak{g}$ indica un'algebra di Lie semisemplice, di dimensione positiva finita su un campo algebricamente chiuso $\mathbb{K}$ di caratteristica 0.

Sia $\mathcal{S}$ l'insieme degli elementi semisemplici di $\mathfrak{g}$. Osserviamo che $\mathcal{S}$ non è vuoto per il teorema di Engel.

Chiamiamo *torale* una qualsiasi sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ contenuta in $\mathcal{S}$.

LEMMA 3.1 *Ogni sottoalgebra torale di* $\mathfrak{g}$ *è abeliana.*

DIM. Sia $\mathfrak{a} \subset \mathcal{S}$ una sottoalgebra torale di $\mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{a}$ non fosse torale, vi sarebbe un $X \in \mathfrak{a}$ tale che $[X, \mathfrak{a}] \neq \{0\}$. Quindi $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(X)$ dovrebbe avere un autovalore

$\lambda \neq 0$ e vi sarebbe perciò $Y \in \mathfrak{a}$ tale che $[X, Y] = \lambda Y \neq 0$. Poiché $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y)$ è semisemplice, e Y è un autovettore di $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y)$ corrispondente all'autovalore 0, possiamo trovare una base $X_1, ..., X_\ell$ di $\mathfrak{a}$ formata da autovettori di $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y)$ con $X_1 = Y$. Sia $[Y, X_i] = \lambda_i X_i$. Esprimiamo X come combinazione lineare di elementi della base $\{X_i\}$: da $X = \sum_{i=1}^{\ell} \xi^i X_i$ ricaviamo:

$$0 \neq -\lambda Y = [Y, X] = \sum_{i \geq 2} \lambda_i \xi^i X_i \,,$$

e quindi una contraddizione perché $Y = X_1$ e $X_2, ..., X_\ell$ sono linearmente indipendenti.

Lemma 3.2 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e sia $\mathfrak{a}$ una sottoalgebra di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ formata da endomorfismi semisemplici. Per ogni $\alpha \in \mathfrak{a}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{a}, \mathbb{K})$ poniamo:*

$$V^\alpha = \{v \in V \mid A(v) = \alpha(A)v \quad \forall A \in \mathfrak{a}\}\,.$$

Allora $V = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{a}^*} V^\alpha$.

Dim. Ragioniamo per induzione su $\ell = \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{a}$. Se $\ell = 0$ non c'è nulla da dimostrare e se $\ell = 1$ la tesi si riduce al fatto che un endomorfismo semisemplice è diagonalizzabile in quanto $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso.

Supponiamo ora che $n > 1$ e la tesi sia vera per algebre di endomorfismi semisemplci di dimensione $< n$. Poiché $\mathfrak{a}$ è abeliana, un iperpiano $\mathfrak{b}$ di $\mathfrak{a}$ è una sottoalgebra abeliana di endomorfismi semisemplici di V. Avremo quindi $V = \bigoplus W^\beta$ con $W^\beta = \{v \in V \mid B(v) = \beta(B)v \quad \forall B \in \mathfrak{b}\}$. Fissiamo $A \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}$. Poiché $[A, \mathfrak{b}] = \{0\}$, i sottospazi W^β sono A-invarianti. Poiché A è semisemplice, abbiamo $W^\beta = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} \left(W^\beta\right)^\lambda$ per ogni $\beta \in \mathfrak{b}^*$. L'applicazione $\mathfrak{a}^* \ni \alpha \longrightarrow (\alpha|_{\mathfrak{b}}, \alpha(A)) \in \mathfrak{b}^* \oplus \mathbb{K}$ è bigettiva ed abbiamo $V^\alpha = \left(W^{\alpha|_{\mathfrak{b}}}\right)^{\alpha(A)}$, da cui la tesi.

Fissiamo ora una sottoalgebra torale massimale $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{g}$. Per ogni $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ poniamo

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X \quad \forall H \in \mathfrak{h}\}\,. \tag{3.1}$$

Gli $\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$ tali che $\mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\}$ si dicono *radici* di $\mathfrak{g}$ rispetto ad $\mathfrak{h}$, o della coppia $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Indicheremo con $\mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, o con $\mathcal{R}$ quando ciò non ingeneri confusione, il *sistema delle radici* della coppia $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Per i Lemmi 3.1 e 3.2 abbiamo una decomposizione di $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}} \mathfrak{g}^\alpha\,. \tag{3.2}$$

Osserviamo che $\mathfrak{g}^0$ è il *centralizzatore* di $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$. Poiché ovviamente $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^\alpha] = \mathfrak{g}^\alpha$ se $\alpha \in \mathcal{R}$, se ne conclude che $\mathfrak{g}^0$ è anche il *normalizzatore* di $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$.

Teorema 3.3 *Sia $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra torale massimale di $\mathfrak{g}$. allora*

(*i*) $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ *per ogni $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$;*
(*ii*) *Se $\alpha \in \mathcal{R}$, ogni elemento X di $\mathfrak{g}^\alpha$ è nilpotente;*
(*iii*) *i sottospazi $\mathfrak{g}^\alpha$, per $\alpha \in \mathcal{R}$, sono totalmente isotropi rispetto alla forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$;*

(*iv*) *se* $\alpha, \beta \in \mathfrak{a}^*$ *e* $\alpha + \beta \neq 0$, *i sottospazi* $\mathfrak{g}^\alpha$ *e* $\mathfrak{g}^\beta$ *sono ortogonali per la forma di Killing* $\kappa_\mathfrak{g}$*;*
(*v*) *per ogni* $\alpha \in \mathcal{R}$ *la forma di Killing è non degenere su* $\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$ *e definisce un accoppiamento di dualità tra* $\mathfrak{g}^\alpha$ *e* $\mathfrak{g}^{-\alpha}$*;*
(*vi*) *la forma di Killing* $\kappa_\mathfrak{g}$ *è non degenere su* $\mathfrak{g}^0$*.*

Lemma 3.4 *Sia* V *uno spazio vettoriale di dimensione finita* n *su* $\mathbb{K}$ *e siano* A, N *endomorfismi di* V *tali che* $[A, N] = 0$ *ed* N *è nilpotente. Allora* $\operatorname{tr}_V(AN) = 0$*.*
Dim. Infatti $(AN)^m = A^m N^m$ per ogni intero non negativo m e quindi anche AN è nilpotente.

Teorema 3.5 *Ogni algebra torale massimale di* $\mathfrak{g}$ *coincide col suo normalizzatore in* $\mathfrak{g}$*.*
Dim. Sia $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra torale massimale di $\mathfrak{g}$. Dobbiamo dimostrare che $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$.

Sia $X \in \mathfrak{g}^0$ e siano $S_X, N_X \in \mathfrak{g}$ la componente semisemplice e nilpotente di X. Poiché $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(S_X)$ e $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(N_X)$ sono polinomi senza termine costante di $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(X)$, abbiamo $S_X, N_X \in \mathfrak{g}^0$. Inoltre, poiché la somma di endomorfismi semisemplici che commutano tra loro è ancora un endomorfismo semisemplice, $\mathfrak{h}$ contiene tutti gli elementi semisemplici di $\mathfrak{g}^0$. Per il Lemma 3.4, $\kappa_\mathfrak{g}(HN) = 0$ per ogni elemento nilpotente N di $\mathfrak{g}^0$. Quindi, per il punto (*vi*) del Teorema 3.3, $\kappa_\mathfrak{g}$ è non degenere su $\mathfrak{h}$ ed abbiamo una decomposizione ortogonale $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h} \oplus \left(\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{g}^0\right)$, in cui il secondo addendo diretto è o $\{0\}$ o un sottospazio di dimensione positiva su cui la forma di Killing è non degenere. Ma quest'ultima possibilità è da scartare perché per il Teorema di Engel $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}\left(\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{g}^0\right)$ è un'algebra di Lie nilpotente di endomorfismi di $\mathfrak{g}$.

Una sottoalgebra $\mathfrak{c}$ di una sottoalgebra di Lie $\mathfrak{a}$ che sia nilpotente e coincida col suo normalizzatore si dice una *sottoalgebra di Cartan* di $\mathfrak{a}$.

Quindi il Teorema 3.5 si può riformulare:

Teorema 3.6 *Ogni sottoalgebra torale massimale di un'algebra di Lie semisemplice* $\mathfrak{g}$*, di dimensione finita su un un campo* $\mathbb{K}$*, algebricamente chiuso e di caratteristica zero, è una sottoalgebra di Cartan.*
Osservazione È vero viceversa che tutte le sottoalgebre di Cartan di un'algebra di Lie semisemplice sono torali massimali; l'enunciato rimane vero anche senza l'ipotesi che $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso.

Abbiamo quindi ottenuto:

Teorema 3.7 *Sia* $\mathfrak{g}$ *un'algebra di Lie semisemplice, di dimensione finita su un un campo* $\mathbb{K}$*, algebricamente chiuso e di caratteristica zero, e sia* $\mathfrak{h}$ *una sottoalgebra torale massimale di* $\mathfrak{g}$*. Sia* $\mathcal{R}$ *il sistema di radici della coppia* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$*. Abbiamo allora la decomposizione:*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}} \mathfrak{g}^\alpha \,. \tag{3.3}$$

Poiché $\kappa_{\mathfrak{g}}$ è non degenere su $\mathfrak{h}$, per ogni elemento $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ vi è uno e un solo elemento T_α in $\mathfrak{h}$ tale che

$$\alpha(H) = \kappa_{\mathfrak{g}}(H, T_\alpha) \qquad \forall \alpha \in \mathfrak{h}^*, \quad \forall H \in \mathfrak{h}\,. \tag{3.4}$$

§4 Alcune proprietà del sistema delle radici

Teorema 4.1 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice, di dimensione finita su un un campo $\mathbb{K}$, algebricamente chiuso e di caratteristica zero, e sia $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra torale massimale di $\mathfrak{g}$. Sia $\mathcal{R}$ il sistema di radici della coppia $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Allora*

(a) *$\mathcal{R}$ genera $\mathfrak{h}^*$;*
(b) *$\alpha \in \mathcal{R} \Longrightarrow -\alpha \in \mathcal{R}$;*
(c) *se $\alpha \in \mathcal{R}$ e $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, allora*

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = \kappa_{\mathfrak{g}}(X_\alpha, X_{-\alpha})\, T_\alpha \tag{4.1}$$

e quindi $\quad [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = \mathbb{K} \cdot T_\alpha$;

(d) *$\alpha(T_\alpha) = \kappa_{\mathfrak{g}}(T_\alpha, T_\alpha) \neq 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$;*
(e) *sia $\alpha \in \mathcal{R}$. Poniamo*

$$H_\alpha = \frac{2T_\alpha}{\kappa_{\mathfrak{g}}(T_\alpha, T_\alpha)}\,. \tag{4.2}$$

Fissato $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha \setminus \{0\}$, possiamo trovare $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ tale che:

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha, \quad [H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha, \quad [H_\alpha, X_{-\alpha}] = -2X_{-\alpha}\,. \tag{4.3}$$

Il sottospazio $\mathfrak{s}_\alpha$ generato da $X_\alpha, X_{-\alpha}, H_\alpha$ è una sottoalgebra semplice di $\mathfrak{g}$, isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$.

Dim.

(a) Se $\mathcal{R}$ non generasse $\mathfrak{h}^*$, potremmo trovare $H \in \mathfrak{h}$ tale che $\alpha(H) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$. Da $[H, \mathfrak{h}] = 0$ e $[H, \mathfrak{g}^\alpha] = 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$ seguirebbe allora che $H \in Z(\mathfrak{g})$, e questo di dà una contraddizione in quanto $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$ perché $\mathfrak{g}$ è semisemplice.

(b) è conseguenza del punto (iv) del Teorema 3.3.

(c) Se $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ e $H \in \mathfrak{h}$, abbiamo:

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(H, [X_\alpha, X_{-\alpha}]) = \kappa_{\mathfrak{g}}([X, X_\alpha], X_{-\alpha}) = \alpha(H)\kappa_{\mathfrak{g}}(X_\alpha, X_{-\alpha})\,.$$

Poiché $[X_\alpha, X_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}$, $\alpha(H) = \kappa_{\mathfrak{g}}(H, T_\alpha)$, il punto (c) segue dal fatto che $\kappa_{\mathfrak{g}}$ è non degenere su $\mathfrak{h}$.

(d) Supponiamo per assurdo che $\kappa(T_\alpha, T_\alpha) = \alpha(T_\alpha) = 0$ per qualche $\alpha \in \mathcal{R}$. Siano $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ e $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ tali che $\kappa_{\mathfrak{g}}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$. Allora per (c) il sottospazio vettoriale $\mathfrak{r}$ di $\mathfrak{g}$ generato da $X_\alpha, X_{-\alpha}, T_\alpha$ è una sottoalgebra risolubile di $\mathfrak{g}$ e $\mathbb{K} \cdot T_\alpha = \mathfrak{r}^{(1)}$. Per il teorema di Lie $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(T_\alpha)$ sarebbe allora un endomorfismo nilpotente di $\mathfrak{g}$. Ma, essendo al tempo stesso semisemplice, dovremmo avere $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(T_\alpha) = 0$, che ci dà una contraddizione.

La verifica di (e) è a questo punto immediata.

Teorema 4.2 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice, di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero e algebricamente chiuso. Sia $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra torale massimale di $\mathfrak{g}$ ed $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ il corrispondente sistema di radici. Allora:*

(1) $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}^{\alpha} = 1$ *per ogni* $\alpha \in \mathcal{R}$*;*
(2) *se* $\alpha \in \mathcal{R}$*, allora* $\pm\alpha$ *sono i soli multipli di* α *contenuti in* $\mathcal{R}$*;*
(3) *se* $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$*, allora* $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ e $\beta - \beta(H_\alpha)\alpha \in \mathcal{R}$*;*
(4) *se* $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \mathcal{R}$*, allora* $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$*;*
(5) *siano* $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$*, con* $\beta \neq \pm\alpha$ *e siano* r, q *i più grandi interi positivi tali che* $\beta - r\alpha \in \mathcal{R}$*,* $\beta + q\alpha \in \mathcal{R}$*. Allora* $\mathcal{R}$ *contiene tutte le radici* $\beta + h\alpha$ *con* $-r \leq h \leq q$ e $\beta(H_\alpha) = r - q$*;*
(6) $\mathfrak{g}$ *è generata dai sottospazi* $\mathfrak{g}^{\alpha}$ *con* $\alpha \in \mathcal{R}$*.*

Dim. Sia $\alpha \in \mathcal{R}$ e sia $\mathfrak{s}_\alpha$ la sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ del punto (e) del Teorema 4.1. Consideriamo il sotto-$\mathfrak{s}_\alpha$-modulo di $\mathfrak{g}$:

$$M = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}} \mathfrak{g}^{k\alpha}.$$

I pesi di M sono 0 e i numeri $k\alpha(H_\alpha) = 2k$ con $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ per cui $\mathfrak{g}^{k\alpha} \neq \{0\}$. Poiché i pesi delle rappresentazioni finite di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ sono interi, otteniamo che $2k \in \mathbb{Z}$ se $\mathfrak{g}^{k\alpha} \neq \{0\}$. Inoltre $\mathfrak{s}_\alpha$ opera banalmente sull'iperpiano $\ker\alpha$ di $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{s}_\alpha$ è un sotto $\mathfrak{s}_\alpha$-modulo irriducibile di M, di peso massimale 2. Quindi i pesi pari dell'$\mathfrak{s}_\alpha$-modulo M sono 0 e 2; in particolare $h\alpha \notin \mathcal{R}$ se $h \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$. Chiaramente da questo segue che nemmeno α/h puo‘ appartenere a $\mathcal{R}$ se h è un intero non nullo diverso da ± 1. In conclusione $M = \ker\alpha \oplus \mathfrak{s}_\alpha$ e da questo otteniamo (1) e (2).

Fissiamo ora $\beta \in \mathcal{R}$ non proporzionale ad α. Consideriamo l'*α-stringa* per β: essa è l'$\mathfrak{s}_\alpha$-modulo:

$$M_\beta = \bigoplus_{h \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{\beta + h\alpha}.$$

I pesi di M_β sono $\{\beta(H_\alpha) + 2h \,|\, h \in \mathbb{Z},\ \mathfrak{g}^{\beta+h\alpha} \neq \{0\}\} \subset \mathbb{Z}$. Poiché $\beta + h\alpha \neq 0$ per ogni $h \in \mathbb{Z}$, tutti i pesi di M_β hanno molteplicità uno e quindi M_β è irriducibile. Otteniamo perciò $M_\beta = \bigoplus_{h=-r}^{q} \mathfrak{g}^{\beta+h\alpha}$ con $\mathfrak{g}^{\beta+h\alpha} \neq \{0\}$ per ogni intero h con $-r \leq h \leq q$. Inoltre

$$\begin{cases} \beta(H_\alpha) - 2r = -m \\ \beta(H_\alpha) + 2q = m \end{cases}$$

per qualche intero non negativo m, e quindi

$$\beta(H_\alpha) = r - q \in \mathbb{Z}. \tag{4.4}$$

Infine, poiché $-r \leq -r + q \leq q$, otteniamo che

$$\beta - \beta(H_\alpha)\alpha \in \mathcal{R}. \tag{4.5}$$

Abbiamo così dimostrato (3), (4) e (5).

La (6) segue dal fatto che $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = \mathbb{K} \cdot T_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, e le T_α, al variare di α in $\mathcal{R}$, generano $\mathfrak{h}$.

§5 Proprietà di razionalità del sistema delle radici

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice, di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso di caratteristica zero. Fissiamo una sua sottoalgebra torale massimale $\mathfrak{h}$ e indichiamo con $\mathcal{R}$ il corrispondente sistema di radici. Per ogni $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ sia T_α l'elemento di $\mathfrak{h}$ tale che

$$\alpha(H) = \kappa_{\mathfrak{g}}(H, T_\alpha) \quad \forall H \in \mathfrak{h}\,.$$

Possiamo allora definire una forma bilineare simmetrica su $\mathfrak{h}^*$ ponendo

$$(\alpha|\beta) = \kappa_{\mathfrak{g}}(T_\alpha, T_\beta) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*\,. \tag{5.1}$$

Poiché $\mathcal{R}$ genera $\mathfrak{h}^*$, possiamo fissare una base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ di $\mathfrak{h}^*$ contenuta in $\mathcal{R}$.

Lemma 5.1 *Ogni $\alpha \in \mathcal{R}$ è una combinazione lineare a coefficienti razionali degli elementi della base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \subset \mathcal{R}$.*

Dim. Sia $\alpha = \sum_{i=1}^{\ell} a^i \alpha_i$, con $a^i \in \mathbb{K}$. Abbiamo per ogni $i = 1, ..., \ell$:

$$(\alpha|\alpha_i) = \sum_{j=1}^{\ell} a^j (\alpha_j|\alpha_i)$$

e quindi

$$\frac{2(\alpha|\alpha_i)}{(\alpha_i|\alpha_i)} = \sum_{j=1}^{\ell} a^j \frac{2(\alpha_j|\alpha_i)}{(\alpha_i|\alpha_i)}\,, \quad i = 1, \ldots, \ell$$

cioè:

$$\mathbb{Z} \ni \alpha(H_{\alpha_i}) = \sum_{j=1}^{\ell} a^j \alpha_j(H_{\alpha_i})\,, \quad i = 1, \ldots, \ell\,.$$

Questo è un sistema lineare, nelle incognite $a^1, \ldots, a^\ell$, a coefficienti interi. Poiché $\kappa_{\mathfrak{g}}$ è non degenere su $\mathfrak{h}$, la forma bilineare simmetrica $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ è non degenere su $\mathfrak{h}^*$ e quindi anche la matrice a coefficienti interi $(\alpha_j(H_{\alpha_i}))_{1\le i,j\le \ell}$ è non degenere. Il sistema lineare ha perciò un'unica soluzione razionale $a^1, \ldots, a^\ell$.

Sia $E_{\mathbb{Q}}$ il sottospazio $\mathbb{Q}$-lineare di $\mathfrak{h}^*$ generato da $\mathcal{R}$. Per il Lemma 5.1, la dimensione di $E_{\mathbb{Q}}$ su $\mathbb{Q}$ è uguale alla dimensione di $\mathfrak{h}^*$ su $\mathbb{K}$. Poniamo $E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}$.

Lemma 5.2 *La forma bilineare simmetrica*

$$E_{\mathbb{Q}} \times E_{\mathbb{Q}} \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{Q} \tag{5.2}$$

si prolunga a un prodotto scalare su E.

Dim. Scegliamo una base di $\mathfrak{g}$ i cui elementi siano o in $\mathfrak{h}$ oppure in $\mathfrak{g}^\alpha$ per $\alpha \in \mathcal{R}$. Ogni T_ξ, per $\xi \in \mathfrak{h}^*$, si scrive in tale base in forma diagonale. Abbiamo perciò:

$$(\xi, \eta) = \kappa_{\mathfrak{g}}(T_\xi, T_\eta) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \alpha(T_\xi)\alpha(T_\eta)\,. \tag{5.3}$$

In particolare, se $\beta \in \mathcal{R}$:

$$(\beta|\beta) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} (\alpha|\beta)^2\,. \tag{5.4}$$

Abbiamo

$$\frac{4}{(\beta|\beta)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} (\alpha(H_\beta))^2 \in \mathbb{Z}$$

e quindi otteniamo che $(\beta|\beta)$ è, per ogni $\beta \in \mathcal{R}$, un numero razionale positivo. Poiché $2(\alpha|\beta)/(\beta|\beta) \in \mathbb{Z}$, concludiamo che $(\alpha|\beta) \in \mathbb{Q}$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, e quindi $(\xi|\eta) \in \mathbb{Q}$ per ogni $\xi, \eta \in E_{\mathbb{Q}}$. Poiché $(\alpha|\xi) \in \mathbb{Q}$ per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$ e $\xi \in E_{\mathbb{Q}}$,

$$(\xi|\xi) = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} (\alpha|\xi)^2 \quad \text{è razionale} > 0 \quad \forall \xi \in E_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}\,.$$

Essendo $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ definita positiva, essa si estende a un prodotto scalare su E.

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel

Teorema 5.3 *Siano $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathcal{R}$, E, $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ definiti come sopra. Allora E è uno spazio Euclideo e:*

(R1) $\mathcal{R} \subset E \setminus \{0\}$ *è un sistema di generatori di E;*

(R2) *per ogni $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, $s_\alpha(\beta) = \beta - \dfrac{2(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha \in \mathcal{R}$;*

(R3) *per ogni $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, $\dfrac{2(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z}$;*

(R4) $\alpha \in \mathcal{R} \Longrightarrow 2\alpha \notin \mathcal{R}$.

Le proprietà (R1), (R2), (R3) caratterizzano i *sistemi di radici* in E. Quando vale anche la (R4) il sistema di radici si dice *ridotto*. Per la classificazione delle algebre di Lie semisemplici (di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso di caratteristica 0), classificheremo prima tutti i sistemi di radici di uno spazio Euclideo E e mostreremo poi che ad ogni tale sistema corrisponde effettivamente un'algebra di Lie semisemplice.

CAPITOLO XII

SISTEMI ASTRATTI DI RADICI

§1 Definizioni principali

Sia E uno spazio vettoriale reale, di dimensione finita $\ell \geq 1$. Sia $\alpha \in E$. Chiamiamo *riflessione* di vettore α una trasformazione lineare di E che lascia fissi i punti di un iperpiano di E e trasforma α in $-\alpha$.

Una riflessione σ di vettore α determina univocamente una forma lineare $\alpha^\vee \in E^* \setminus \{0\}$ tale che

$$\sigma(\beta) = \beta - \alpha^\vee(\beta)\alpha\,, \quad \forall \beta \in E\,, \qquad \alpha^\vee(\alpha) = 2\,. \tag{1.1}$$

Se σ è una riflessione, abbiamo $\sigma^2 = e$, ove e indica l'identità di $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(E)$.

Lemma 1.1 *Sia $\mathcal{R}$ un sistema finito di generatori di E e sia $\alpha \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Allora vi è al più una riflessione σ di vettore α tale che $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.*

Dim. Supponiamo che s e σ siano due riflessioni, di vettore $\alpha \in \mathcal{R}$, tali che $s(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$. Consideriamo la composizione $\tau = s \circ \sigma$. Abbiamo $\tau(\alpha) = \alpha$ e la τ definisce, per passaggio al quoziente, l'identità su $E/\mathbb{R} \cdot \alpha$. Il suo polinomio minimo è quindi una potenza di $(x-1)$: $\mu_\tau = (x-1)^k$ per un intero positivo k. D'altra parte la τ agisce come una permutazione sugli elementi di $\mathcal{R}$ e quindi potremo trovare un intero positivo h tale che $\tau^h(\beta) = \beta$ per ogni $\beta \in \mathcal{R}$. Poiché $\mathcal{R}$ è un sistema di generatori di E, ne deduciamo che $\tau^h = e$ e dunque il polinomio minimo di τ divide $x^k - 1$. Il massimo comun denominatore dei polinomi $(x-1)^k$ e $x^h - 1$ è $x - 1$; quindi $\mu_\tau(x) = x - 1$ e $\tau = e$. Otteniamo perciò $s = \sigma^{-1} = \sigma$, e quindi la tesi.

Definizione Un sottoinsieme $\mathcal{R}$ di E si dice un *sistema di radici* in E se:

(R1) $\mathcal{R}$ è finito, $0 \notin \mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}$ genera E;

(R2) per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$ esiste un funzionale $\alpha^\vee \in E^*$ tale che $\alpha^\vee(\alpha) = 2$ e la riflessione

$$s_\alpha(\xi) = \xi - \alpha^\vee(\xi)\alpha \quad \forall \xi \in E \tag{1.2}$$

trasforma $\mathcal{R}$ in sé;

(R3) per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$, è $\alpha^\vee(\mathcal{R}) \subset \mathbb{Z}$.

Osserviamo che la (R3) è ben posta, in quanto, per il Lemma 1.1, la s_α in (R2), e quindi la $\alpha^\vee$, è univocamente determinata.

Gli elementi α di $\mathcal{R}$ si dicono *radici* e la dimensione di E il *rango* del sistema di radici $\mathcal{R}$.

Dato un sistema di radici $\mathcal{R}$, indichiamo con $\mathbf{A}(\mathcal{R})$ il gruppo delle trasformazioni lineari di E che lasciano $\mathcal{R}$ invariante e con $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ il sottogruppo di $\mathbf{A}(\mathcal{R})$ generato dalle riflessioni s_α di (R2), per $\alpha \in \mathcal{R}$. Il gruppo $\mathbf{A}(\mathcal{R})$ si dice il *gruppo degli automorfismi* di $\mathcal{R}$ e $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ il suo *gruppo di Weyl*.

Osserviamo che $\mathbf{A}(\mathcal{R})$ e $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ sono gruppi finiti.

Ricordiamo il seguente:

LEMMA 1.2 *Sia $\mathbf{G}$ un gruppo finito di trasformazioni lineari dello spazio vettoriale di dimensione finita E su $\mathbb{R}$. Possiamo allora definire su E un prodotto scalare $\mathbf{G}$-invariante, tale cioè che gli elementi di $\mathbf{G}$ siano trasformazioni ortogonali di E rispetto a tale prodotto scalare.*

DIM. Sia $g : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ un qualsiasi prodotto scalare su E. Definiamo allora

$$(\xi|\eta) = \sum_{a \in \mathbf{G}} g(a(\xi), a(\eta)) \qquad \forall \xi, \eta \in E\,. \tag{1.3}$$

Chiaramente $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ è un prodotto scalare $\mathbf{G}$-invariante su E.

Utilizzando il lemma 1.2, considereremo fissato nel seguito un prodotto scalare $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-invariante su E. In particolare potremo identificare E con il suo duale E^*. Essendo le s_α simmetrie ortogonali, avremo:

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\|\alpha\|^2} \qquad \forall \alpha \in \mathcal{R}\,. \tag{1.4}$$

TEOREMA 1.3 *Sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici in E, su cui pensiamo fissato un prodotto scalare $\mathbf{A}(\mathcal{R})$-invariante. Allora:*

(i) $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ *è un sottogruppo normale di* $\mathbf{A}(\mathcal{R})$*;*
(ii) $\mathcal{R}^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \mathcal{R}\}$ *è un sistema di radici in E;*
(iii) $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$ *per ogni* $\alpha \in \mathcal{R}$*;*
(iv) $\mathbf{W}(\mathcal{R}^\vee) = \mathbf{W}(\mathcal{R})$ *e* $\mathbf{A}(\mathcal{R}^\vee) = \mathbf{A}(\mathcal{R})$.

DIM. *(i)* Sia $\alpha \in \mathcal{R}$ e sia $\sigma \in \mathbf{A}(\mathcal{R})$. Allora $\sigma \circ s_\alpha \circ \sigma^{-1}$ è una riflessione che trasforma $\mathcal{R}$ in sé, di vettore $\sigma(\alpha)$. Otteniamo:

$$\sigma \circ s_\alpha \circ \sigma^{-1} = s_{\sigma(\alpha)} \qquad \forall \alpha \in \mathcal{R}\,, \quad \forall \sigma \in \mathbf{A}(\mathcal{R})\,. \tag{1.5}$$

Poiché le s_α, per $\alpha \in \mathcal{R}$, generano $\mathbf{W}(\mathcal{R})$, ne segue che $\sigma\mathbf{W}(\mathcal{R})\sigma^{-1} \subset \mathbf{W}(\mathcal{R})$ per ogni $\sigma \in \mathbf{A}(\mathcal{R})$ e quindi $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ è un sottogruppo normale di $\mathbf{A}(\mathcal{R})$.

(ii),*(iii)* Chiaramente $\mathcal{R}^\vee$ è finito, contenuto in $E \setminus \{0\}$ e genera E. Se $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ abbiamo:

$$s_\alpha(\beta^\vee) = \frac{2 s_\alpha(\beta)}{\|\beta\|^2} = \frac{2 s_\alpha(\beta)}{\|s_\alpha(\beta)\|^2} = (s_\alpha(\beta))^\vee\,,$$

perché s_α è un'isometria. Quindi $\mathcal{R}^\vee$ soddisfa (R2) e $\mathbf{W}(\mathcal{R}^\vee) = \mathbf{W}(\mathcal{R})$; poiché $s_\alpha = s_{\alpha^\vee}$, si ha chiaramente $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$; quindi anche (R3) è verificata ed $\mathcal{R}^\vee$ è un sistema di radici.

(iv) Poiché abbiamo scelto un prodotto scalare $\mathbf{A}(\mathcal{R})$-invariante, gli $a \in \mathbf{A}(\mathcal{R})$ sono isometrie. Quindi $a(\beta^\vee) = (a(\beta))^\vee$ per ogni $\beta \in \mathcal{R}$. Questo dimostra che $\mathbf{A}(\mathcal{R}) \subset \mathbf{A}(\mathcal{R}^\vee)$. Ma, essendo $\mathcal{R}^{\vee\vee} = \mathcal{R}$, vale anche l'inclusione opposta e quindi i due gruppi coincidono.

OSSERVAZIONE Se fissiamo su E un prodotto scalare che sia soltanto $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-invariante, il punto *(iv)* può non essere più verificato: il teorema ci dice comunque che i gruppi $\mathbf{A}(\mathcal{R})$ e $\mathbf{A}(\mathcal{R}^\vee)$ sono canonicamente isomorfi.

Il sistema di radici $\mathcal{R}^\vee$ si dice *inverso* o *duale* di $\mathcal{R}$.

Fissato un sistema di radici $\mathcal{R}$, porremo

$$\langle \alpha, \beta \rangle = (\alpha|\beta^\vee) = \frac{(\alpha|\beta)}{\|\beta\|^2} \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}\,. \tag{1.6}$$

Otteniamo

$$\begin{cases} \langle \alpha, \alpha \rangle = 2 \qquad \forall \alpha \in \mathcal{R}\,, \\ \langle -\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, -\beta \rangle = -\langle \alpha, \beta \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}\,, \\ \langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R} \\ \text{se } \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \quad \langle \alpha, \beta \rangle = 0 \Leftrightarrow (\alpha|\beta) = 0 \Leftrightarrow s_\alpha \circ s_\beta = s_\beta \circ s_\alpha\,. \end{cases} \tag{1.7}$$

§2 Relazioni tra coppie di radici

Sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici in E, su cui è fissato un prodotto scalare $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-invariante.

Se $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ abbiamo:

$$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \widehat{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.1}$$

Quindi $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle$ può assumere solo i valori $0, 1, 2, 3, 4$. Elenchiamo nel seguito le diverse possibilità:

Tabella 1

1)	$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = 0$	$\widehat{\alpha\beta} = \pi/2$		$s_\alpha \circ s_\beta$ ha ordine 2
2)	$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = 1$	$\widehat{\alpha\beta} = \pi/3$	$\|\alpha\| = \|\beta\|$	$s_\alpha \circ s_\beta$ ha ordine 3
3)	$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = -1$	$\widehat{\alpha\beta} = 2\pi/3$	$\|\alpha\| = \|\beta\|$	$s_\alpha \circ s_\beta$ ha ordine 3
4)	$\langle \alpha, \beta \rangle = 1$ $\langle \beta, \alpha \rangle = 2$	$\widehat{\alpha\beta} = \pi/4$	$\sqrt{2}\|\alpha\| = \|\beta\|$	$s_\alpha \circ s_\beta$ ha ordine 4
5)	$\langle \alpha, \beta \rangle = -1$ $\langle \beta, \alpha \rangle = -2$	$\widehat{\alpha\beta} = 3\pi/4$	$\sqrt{2}\|\alpha\| = \|\beta\|$	$s_\alpha \circ s_\beta$ ha ordine 4
6)	$\langle \alpha, \beta \rangle = 1$ $\langle \beta, \alpha \rangle = 3$	$\widehat{\alpha\beta} = \pi/6$	$\sqrt{3}\|\alpha\| = \|\beta\|$	$s_\alpha \circ s_\beta$ ha ordine 6
7)	$\langle \alpha, \beta \rangle = -1$ $\langle \beta, \alpha \rangle = -3$	$\widehat{\alpha\beta} = 5\pi/6$	$\sqrt{3}\|\alpha\| = \|\beta\|$	$s_\alpha \circ s_\beta$ ha ordine 6
8)	$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = 2$	$\widehat{\alpha\beta} = 0$	$\alpha = \beta$	$s_\alpha \circ s_\beta = e$
9)	$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = -2$	$\widehat{\alpha\beta} = \pi$	$\alpha = -\beta$	$s_\alpha \circ s_\beta = e$
10)	$\langle \alpha, \beta \rangle = 1$ $\langle \beta, \alpha \rangle = 4$	$\widehat{\alpha\beta} = 0$	$2\alpha = \beta$	$s_\alpha \circ s_\beta = e$
11)	$\langle \alpha, \beta \rangle = -1$ $\langle \beta, \alpha \rangle = -4$	$\widehat{\alpha\beta} = \pi$	$2\alpha = -\beta$	$s_\alpha \circ s_\beta = e$

In particolare abbiamo:

Teorema 2.1 *Sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici in E.*

(*i*) *Se due radici di $\mathcal{R}$ sono proporzionali, il loro fattore di proporzionalità non può essere che uno dei numeri $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$.*

(*ii*) *Se α, β sono due radici non proporzionali e $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$, allora $\langle \alpha, \beta \rangle \in \{0, 1, -1\}$.*

Teorema 2.2 *Sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici in E. Siano α, β due radici di $\mathcal{R}$ con $\alpha \neq \pm\beta$.*

(*i*) *Se $(\alpha|\beta) > 0$, allora $\alpha - \beta \in \mathcal{R}$;*

(*i*) *Se $(\alpha|\beta) < 0$, allora $\alpha + \beta \in \mathcal{R}$.*

Dim. (*i*) Possiamo supporre $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$. Allora, se α e β non sono proporzionali, $\langle\alpha, \beta\rangle = 1$ e quindi $\alpha - \beta = s_\beta(\alpha) \in \mathcal{R}$. Se α e β sono proporzionali, allora $\beta = 2\alpha$ e $\beta - \alpha = \alpha \in \mathcal{R}$.

(*ii*) segue da (*i*) sostituendo $-\beta$ a β.

Corollario 2.3 *Se $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ e $\alpha - \beta \notin \mathcal{R}$, $\alpha + \beta \notin \mathcal{R}$, allora $(\alpha|\beta) = 0$.*

Due radici α, β che soddisfino le condizioni del Corollario 2.3, si dicono *fortemente ortogonali.*

Proposizione 2.4 *Sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici in E. Siano $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ due radici non proporzionali. Allora:*

(*i*) *$\{j \in \mathbb{Z} \,|\, \beta + j\alpha \in \mathcal{R}\}$ è un intervallo $[-r, q]$ di $\mathbb{Z}$ contenente 0;*

(*ii*) *sia $S = \{\beta + j\alpha | -r \leq j \leq q\,,\ j \in \mathbb{Z}\}$. Allora $s_\alpha(S) = S$ e $s_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - r\alpha$;*

(*iii*) *$\langle\beta, \alpha\rangle = r - q$.*

Dim. Siano r, q i più grandi interi non negativi tali che $\beta - r\alpha, \beta + q\alpha \in \mathcal{R}$. Se la (*i*) fosse falsa, potremmo trovare interi m_1, m_2 con $-r \leq m_1 < m_2 \leq q$ tali che $\beta + m_1\alpha, \beta + m_2\alpha \in \mathcal{R}$, ma $\beta + (m_1 + 1)\alpha \notin \mathcal{R}$, $\beta + (m_2 - 1)\alpha \notin \mathcal{R}$. Per il Teorema 2.2, avremmo:

$$\begin{cases} (\beta + m_1\alpha|\alpha) \geq 0\,, \\ (\beta + m_2\alpha|\alpha) \leq 0\,. \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro troviamo

$$(m_1 - m_2)\|\alpha\|^2 \geq 0$$

e quindi una contraddizione perché $(m_1 - m_2) < 0$, $\|\alpha\| > 0$. Questo dimostra (*i*).

(*ii*),(*iii*) Chiaramente $s_\alpha(S) \subset S$ e vale l'uguaglianza perché S è finito. Abbiamo

$$s_\alpha(\beta + j\alpha) = \beta - (\langle\beta, \alpha\rangle + 2j)\alpha \qquad \forall j \in \mathbb{Z}$$

e quindi $j \longrightarrow -(\langle\beta, \alpha\rangle + 2j)$ è una bigezione decrescente dell'intervallo $\{j \in \mathbb{Z} \,|\, -r \leq j \leq q\}$. Otteniamo perciò

$$s_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - (\langle\beta, \alpha\rangle + 2q)\alpha = \beta - r\alpha$$

da cui $\langle\beta, \alpha\rangle = r - q$.

Proposizione 2.5 *Siano $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ due radici non proporzionali. Allora l'α-stringa per β:*

$$\{\beta + j\alpha \in \mathcal{R} \,|\, j \in \mathbb{Z}\}$$

contiene al più 4 elementi.

Dim. Con le notazioni della proposizione precedente: sia $\gamma = \beta - r\alpha$ e consideriamo la α-stringa per γ. Abbiamo $\langle \gamma, \alpha \rangle = -(r+q)$. Poiché $|\langle \gamma, \alpha \rangle| \in \{0,1,2,3\}$ per la Tabella 1, otteniamo la tesi.

Teorema 2.6 *Se $\mathcal{R}$ è un sistema di radici in E, anche*

$$\mathcal{R}' = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid 2\alpha \notin \mathcal{R}\} \tag{2.2}$$

è un sistema di radici in E.

Dim. È chiaro che $\mathcal{R}'$ soddisfa la (R1) e la (R3). La (R2) segue dal fatto che le s_α sono isometrie, e che per ogni radice $\alpha \in \mathcal{R}$ il sistema $\mathcal{R}'$ contiene soltanto i vettori di $\mathcal{R}$ proporzionali ad α di lunghezza massima.

Un sistema di radici $\mathcal{R}$ che soddisfi la proprietà:

(R4) $\alpha \in \mathcal{R} \Longrightarrow 2\alpha \notin \mathcal{R}$

si dice *ridotto*.

Teorema 2.7 *Sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici in E e sia Φ un qualsiasi sottoinsieme di $\mathcal{R}$. Sia $\mathcal{E}'$ il sottospazio vettoriale di E generato da Φ. Allora $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap E'$ è un sistema di radici in E'.*

Dim. La verifica è immediata: per costruzione $\mathcal{R}' \subset E' \setminus \{0\}$ è un sistema di generatori di $\mathcal{E}'$; le restrizioni ad E' delle simmetrie s_α di $\mathcal{R}$, al variare di α in $\mathcal{R}'$, sono riflessioni di $\mathcal{R}'$ e chiaramente $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ quando $\alpha, \beta \in \mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$.

§3 Basi e camere di Weyl di un sistema di radici

Sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici in E. Un sottoinsieme $\mathcal{B}$ di $\mathcal{R}$ si dice una *base* di $\mathcal{R}$ se:

(B1) $\mathcal{B}$ è una base di E;
(B2) se $\beta = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} b^\alpha \alpha \in \mathcal{R}$, allora $b^\alpha \in \mathbb{Z}$ e i coefficienti b^α sono o tutti ≥ 0 o tutti ≤ 0.

Fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{R}$ poniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^+(\mathcal{B}) &= \{\textstyle\sum_{\alpha \in \mathcal{B}} b^\alpha \alpha \in \mathcal{R} \mid b^\alpha \in \mathbb{N}\}, \\ \mathcal{R}^-(\mathcal{B}) &= \{\textstyle\sum_{\alpha \in \mathcal{B}} b^\alpha \alpha \in \mathcal{R} \mid -b^\alpha \in \mathbb{N}\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Per le (B1) e (B2) abbiamo:

$$\mathcal{R}^+(\mathcal{B}) \cup \mathcal{R}^-(\mathcal{B}) = \mathcal{R}, \qquad \mathcal{R}^+(\mathcal{B}) \cap \mathcal{R}^-(\mathcal{B}) = \emptyset. \tag{3.2}$$

Le radici di $\mathcal{R}^+(\mathcal{B})$ (risp. $\mathcal{R}^-(\mathcal{B})$) si dicono *positive* (risp. *negative*) rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Fissata una base $\mathcal{B}$, introduciamo un ordinamento parziale sulle radici: se $\beta = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} b^\alpha \alpha$ e $\gamma = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} c^\alpha \alpha$ sono radici distinte, diciamo che $\beta \underset{\mathcal{B}}{<} \gamma$ se $b^\alpha \leq c^\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathcal{B}$.

Lemma 3.1 *Sia $\mathcal{B}$ una base del sistema di radici $\mathcal{R}$ in E. Se $\alpha \neq \beta \in \mathcal{B}$, allora $(\alpha|\beta) \leq 0$.*

Dim. Per la proprietà (B2), $\beta - \alpha \notin \mathbb{R}$ e quindi $(\alpha|\beta) \leq 0$.

Fissato il sistema di radici $\mathcal{R}$ in E, chiamiamo *regolare* un elemento ξ di E tale che $(\xi|\alpha) \neq 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$. Gli elementi regolari formano un aperto denso (aperto di Zariski) di E.

Fissato un elemento regolare ξ di E, poniamo

$$\mathcal{R}^+(\xi) = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid (\alpha|\xi) > 0\}, \quad \mathcal{R}^-(\xi) = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid (\alpha|\xi) < 0\}. \tag{3.3}$$

Abbiamo ovviamente:

$$\mathcal{R}^+(\xi) \cup \mathcal{R}^-(\xi) = \mathcal{R}, \qquad \mathcal{R}^+(\xi) \cap \mathcal{R}^-(\xi) = \emptyset. \tag{3.4}$$

Una radice $\alpha \in \mathcal{R}^+(\xi)$ si dice ξ-decomponibile se esistono $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R}^+(\xi)$ tali che $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$; altrimenti si dice ξ-semplice. Indichiamo con $\mathcal{B}(\xi)$ l'insieme delle radici ξ-semplici di $\mathcal{R}^+(\xi)$.

Teorema 3.2 *Sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici in E e sia ξ un elemento regolare di E rispetto ad $\mathcal{R}$. Allora $\mathcal{B}(\xi)$ è una base di $\mathcal{R}$. Viceversa, ogni base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{R}$ è della forma $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\xi)$ per un elemento ξ di E regolare rispetto ad $\mathcal{R}$.*

Dim. Sia $\xi \in E$ un elemento regolare. Se $\mathcal{B}(\xi)$ non fosse una base, potremmo fissare $\beta \in \mathcal{R}^+(\xi) \setminus \{\sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\xi)} a^\alpha \alpha \mid a^\alpha \in \mathbb{Z},\, a^\alpha \geq 0\}$ con $(\beta|\xi)$ minimo. Poiché β non è ξ-semplice, avremo $\beta = \beta_1 + \beta_2$ con $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{R}^+(\xi)$. Allora

$$(\beta|\xi) = (\beta_1|\xi) + (\beta_2|\xi)$$

con $0 < (\beta_1|\xi) < (\beta|\xi)$, $0 < (\beta_2|\xi) < (\beta|\xi)$. Per la scelta di β, sia β_1 che β_2 sono combinazioni lineari a coefficienti interi non negativi di elementi di $\mathcal{B}(\xi)$; quindi lo è anche β e questo di dà una contraddizione: dunque $\mathcal{B}(\xi)$ soddisfa (B2) ed è un sistema di generatori.

Resta da dimostrare che $\mathcal{B}(\xi)$ è linearmente indipendente. Osserviamo innanzi tutto che $(\alpha|\beta) \leq 0$ se $\alpha \neq \beta \in \mathcal{B}(\xi)$. Infatti, se fosse $(\alpha|\beta) > 0$, allora $\alpha - \beta$ e $\beta - \alpha$ sarebbero radici. Uno dei due, diciamo $\alpha - \beta$, apparterrà allora a $\mathcal{R}^+(\xi)$ e quindi $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ non sarebbe semplice. Sia ora $\mathcal{B}(\xi) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i = 0$. Allora

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i^+ \alpha_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i^- \alpha_i \qquad \text{ove} \quad \lambda_i^+ = \max\{\lambda_i, 0\},\ \lambda_i^- = \max\{-\lambda_i, 0\}.$$

Allora

$$\|\sum_{i=1}^r \lambda_i^+ \alpha_i\|^2 = \sum_{i,j=1}^r \lambda_i^+ \lambda_j^- (\alpha_i|\alpha_j) \leq 0$$

mostra che $\sum_{i=1}^r \lambda_i^+ \alpha_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i^- \alpha_i = 0$. Quindi

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i^+ (\alpha_i|\xi) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^- (\alpha_i|\xi) = 0$$

implica che $\lambda_i^+ = \lambda_i^- = \lambda_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, r$ e quindi $\mathcal{B}(\xi)$ è anche linearmente indipendente.

Viceversa, data una base $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ di $\mathcal{R}$, è sempre possibile trovare un elemento regolare ξ tale che $(\xi|\alpha_i) > 0$ per $i = 1, \ldots, \ell$. Allora $\mathcal{R}^+(\mathcal{B}) = \mathcal{R}^+(\xi)$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\xi)$.

Indichiamo con $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ le componenti connesse dell'aperto $E \setminus \cup_{\alpha\in\mathcal{R}}\alpha^\perp$ degli elementi regolari di E rispetto ad $\mathcal{R}$. Gli elementi C di $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ si dicono *camere di Weyl* di $\mathcal{R}$. Per il teorema appena dimostrato, le camere di Weyl sono in corrispondenza biunivoca con le basi di $\mathcal{R}$.

Se $C \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ e $\xi \in C$, porremo

$$\mathcal{B}(C) = \mathcal{B}(\xi)\,, \qquad \mathcal{R}^+(C) = \mathcal{R}^+(\xi)\,, \quad \mathcal{R}^-(\mathcal{C}) = \mathcal{R}^-(\xi)\,. \tag{3.5}$$

Osserviamo che valgono le relazioni:

$$\begin{cases} \mathcal{R}^+(C) = \{\alpha\in\mathcal{R} \mid (\alpha|\xi) > 0 \quad \forall\xi\in C\}\,; \\ C = \{\xi\in E \mid (\xi|\alpha) > 0\ \forall\alpha\in\mathcal{R}^+(C)\} = \{\xi\in E \mid (\xi|\alpha) > 0\ \forall\alpha\in\mathcal{B}(C)\}\,. \end{cases} \tag{3.6}$$

Lemma 3.3 *Sia $\mathcal{B}$ una base del sistema di radici $\mathcal{R}$. Se $\beta\in\mathcal{R}^+(\mathcal{B})$ non è semplice, allora esiste $\alpha\in\mathcal{B}$ tale che $(\alpha|\beta) > 0$; in particolare esiste $\alpha\in\mathcal{B}$ tale che $\beta-\alpha\in\mathcal{R}^+(\mathcal{B})$.*

Dim. Sia $\mathcal{B} = \{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\}$ e supponiamo sia $(\beta|\alpha_i) \le 0$ per ogni $i = 1,\dots,\ell$. Abbiamo $\beta = \sum_{i=1}^\ell b^i\alpha_i$ con $b^i\in\mathbb{Z}$, $b^i \ge 0$ per ogni i. Allora

$$0 < \|\beta\|^2 = \sum_{i=1}^{\ell} b^i(\beta|\alpha_i)$$

ci dà una contraddizione, perché ogni addendo del secondo membro è ≤ 0.

Fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{R}$, chiamiamo *altezza* di una radice $\beta = \sum_{\alpha\in\mathcal{B}} b^\alpha\alpha$ il numero naturale positivo

$$\mathrm{ht}_{\mathcal{B}}(\beta) = \sum_{\alpha\in\mathcal{B}} |b^\alpha|\,. \tag{3.7}$$

Lemma 3.4 *Sia $\mathcal{B}$ una base del sistema di radici $\mathcal{R}$, e sia $\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$ il corrispondente sistema di radici positive. Sia $\beta\in\mathcal{R}^+$ e sia $m = \mathrm{ht}_{\mathcal{B}}(\beta)$. Allora esiste una m-upla $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ di elementi di $\mathcal{B}$ (non necessariamente distinti) tale che*

$$\beta = \sum_{h=1}^{m}\alpha_h \quad \text{e, per ogni } 1\le j\le m \quad \sum_{h=1}^{j}\alpha_h \in \mathcal{R}^+\,. \tag{3.8}$$

Dim. Si applica l'induzione rispetto all'altezza della radice β e il Lemma precedente.

Lemma 3.5 *Sia $\mathcal{B}$ una base del sistema di radici $\mathcal{R}$ e sia $\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$ il corrispondente sistema di radici positive. Allora per ogni $\alpha\in\mathcal{B}$ abbiamo:*

$$s_\alpha(\mathcal{R}^+) = \big(\mathcal{R}^+ \setminus \{\alpha\}\big) \cup \{-\alpha\}\,. \tag{3.9}$$

Dim. Se $\beta\in\mathcal{R}^+\setminus\{\alpha\}$, allora

$$\beta = b^\alpha\alpha + \sum_{\gamma\in\mathcal{B}\setminus\{\alpha} b^\gamma\gamma \quad \text{con} \quad b^\gamma > 0 \quad \text{per qualche } \gamma\in\mathcal{B}\setminus\{\alpha\}.$$

Allora

$$s_\alpha(\beta) = -\left(b^\alpha + \sum_{\gamma\in\mathcal{B}\setminus\{\alpha\}} b^\gamma\langle\gamma,\alpha\rangle\right) + \sum_{\gamma\in\mathcal{B}\setminus\{\alpha\}} b^\gamma\gamma\,.$$

Poiché $b^\gamma > 0$ per qualche $\gamma \in \mathcal{B}\setminus\{\alpha\}$, abbiamo allora $s_\alpha(\beta) \in \mathcal{R}^+$.

Corollario 3.6 *Sia $\mathcal{B}$ una base del sistema di radici $\mathcal{R}$ e sia $\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$ il corrispondente sistema di radici positive. Poniamo $\delta = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+}\alpha$. Se $\beta\in\mathcal{B}$, allora $s_\beta(\delta) = \delta - \beta$.*

Lemma 3.7 *Sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici ridotto in E. Ogni radice di $\mathcal{R}$ appartiene a una base di $\mathcal{R}$.*

Dim. Sia $\alpha \in \mathcal{R}$. Possiamo allora trovare un elemento regolare ξ tale che $0 < (\alpha|\xi) < |(\beta|\xi)|$ per ogni $\beta \in \mathcal{R}\setminus\{\pm\alpha\}$. Chiaramente $\alpha\in\mathcal{B}(\xi)$.

§4 Gruppo di Weyl e camere di Weyl

Consideriamo fissati in questo paragrafo lo spazio vettoriale E, un sistema di radici ridotto $\mathcal{R}$ in E e un prodotto scalare $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-invariante su E.

Lemma 4.1 *Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathcal{R}$ e sia $(\alpha_1,...,\alpha_t)$ una t-upla di elementi di $\mathcal{B}$. Se $s_{\alpha_1}\circ\cdots\circ s_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t)\in\mathcal{R}^-(\mathcal{B})$, allora esiste un indice k, con $1\le k<t$, tale che*

$$s_{\alpha_1}\circ\cdots\circ s_{\alpha_{t-1}}\circ s_{\alpha_t} = s_{\alpha_1}\circ\cdots s_{\alpha_{k-1}}\circ s_{\alpha_{k+1}}\circ\cdots\circ s_{\alpha_{t-1}}\,.$$

Dim. Scriviamo per semplicità $s_{\alpha_i} = s_i$, $\sigma = s_1\circ\cdots\circ s_t$, e poniamo:

$$\beta_i = s_{i+1}\circ\cdots\circ s_{t-1}(\alpha_t)\,,\quad \text{se}\quad 0\le i\le t-2\,,\quad \beta_{t-1}=\alpha_t\,.$$

Per ipotesi $\beta_0\in\mathcal{R}^-(\mathcal{B})$, mentre $\beta_{t-1}\in\mathcal{R}^+(\mathcal{B})$. Vi sarà quindi un più piccolo indice k, con $1\le k\le t-1$, tale che $\beta_k\in\mathcal{R}^+(\mathcal{B})$. Abbiamo $\beta_{k-1} = s_k(\beta_k)$. Poiché s_k permuta tutti gli elementi di $\mathcal{R}^+(\mathcal{B})$ diversi da α_k, ne segue che $\beta_k = \alpha_k$ e $\beta_{k-1} = -\alpha_k$. Se $k = t-1$, abbiamo $\alpha_{t-1} = \alpha_t$ e quindi $\sigma = s_1\circ\cdots\circ s_{t-2}$. Se $k < t-1$, allora:

$$\alpha_k = s_{k+1}\circ\cdots\circ s_{t-1}(\alpha_t)$$

e dunque

$$s_k = s_{\alpha_k} = (s_{k+1}\circ\cdots s_{t-1})\circ s_t\circ(s_{t-1}\circ\cdots s_{k+1})\,.$$

Sostituendo, otteniamo:

$$\begin{aligned}\sigma &= s_1\circ\cdots s_{k-1}\circ(s_{k+1}\circ\cdots s_{t-1})\circ s_t\circ(s_{t-1}\circ\cdots\circ s_{k+1})\circ s_{k+1}\circ\cdots s_t\\ &= s_1\circ\cdots s_{k-1}\circ s_{k+1}\circ\cdots\circ s_{t-1}\,.\end{aligned}$$

Corollario 4.2 *Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathcal{R}$ e sia $\sigma\in\mathbf{W}(\mathcal{R})$ un elemento esprimibile come prodotto di simmetrie s_α con $\alpha\in\mathcal{B}$. Se*

$$\sigma = s_{\alpha_1}\circ\cdots\circ s_{\alpha_t}\qquad \textit{con}\quad \alpha_i\in\mathcal{B}\quad \textit{e}\quad t\quad \textit{minimo}$$

allora $\sigma(\alpha_t)\in\mathcal{R}^-(\mathcal{B})$.

Teorema 4.3 *Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathcal{R}$.*

(1) *Per ogni elemento regolare γ di E esiste un elemento $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ tale che $(\sigma(\alpha)|\gamma) > 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{B}$.*
(2) *Se $\mathcal{B}'$ è un'altra base di $\mathcal{R}$, esiste un elemento $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ tale che $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$.*
(3) *Per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$ esiste $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ tale che $\sigma(\alpha) \in \mathcal{B}$.*
(4) *Le riflessioni s_α, con $\alpha \in \mathcal{B}$, generano $W(\mathcal{R})$.*
(5) *Se $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ e $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$, allora σ è l'identità.*

Dim. Sia $\mathbf{W}'$ il sottogruppo di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ generato dalle riflessioni rispetto agli elementi della base $\mathcal{B}$. Dimostreremo innanzi tutto che (1), (2) e (3) valgono con $\mathbf{W}'$ al posto di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$; dimostreremo poi (4) e (5).

(1) Sia $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\mathcal{R}^+(\mathcal{B})} \alpha$ e scegliamo $\sigma \in \mathbf{W}'$ tale che

$$(\sigma(\gamma)|\delta) = \max_{\tau\in\mathbf{W}'} (\tau(\gamma)|\delta)\,.$$

Abbiamo allora, per ogni $\alpha \in \mathcal{B}$:

$$(\sigma(\gamma)|\delta) \geq (s_\alpha \circ \sigma(\gamma)|\delta) = (\sigma(\gamma)|s_\alpha(\delta)) = (\sigma(\gamma)|\delta) - (\sigma(\gamma)|\alpha)$$

e quindi $(\sigma(\gamma)|\alpha) \geq 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{B}$. Poiché γ è un elemento regolare, vale la maggiorazione stretta. Poiché σ è un'isometria, $(\sigma(\gamma)|\alpha) = (\sigma^{-1}(\alpha)|\gamma)$ ed otteniamo la tesi.

(2) Sia $\mathcal{B}'$ un'altra base di $\mathcal{R}$. Allora $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(\gamma)$ per un elemento regolare γ di E. Utilizzando il punto (1), esiste $\sigma \in \mathbf{W}'$ tale che $(\sigma(\alpha)|\gamma) > 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{B}$. Ma questo implica che $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(\gamma) = \mathcal{B}'$.

(3) Sia $\alpha \in \mathcal{R}$. Possiamo fissare un elemento regolare γ tale che

$$0 < (\alpha|\gamma) < |(\beta|\gamma)| \quad \forall \beta \in \mathcal{R} \setminus \{\pm\alpha\}\,.$$

Basterà a questo scopo fissare γ in una palla di centro α la cui chiusura non contenga altri elementi di $\mathcal{R} \cup \{0\}$. Chiaramente α è una radice γ-semplice ed appartiene quindi a $\mathcal{B}(\gamma)$. Per il punto (2) possiamo trovare $\sigma \in \mathbf{W}'$ tale che $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(\gamma)$ e quindi $\sigma^{-1}(\alpha) \in \mathcal{B}$.

(4) Sia $\alpha \in \mathcal{R}$. Per il punto (3) possiamo trovare $\sigma \in \mathcal{W}'$ e $\beta \in \mathcal{B}$ tale che $\sigma(\beta) = \alpha$. Allora $s_\alpha = \sigma \circ s_\beta \circ \sigma^{-1} \in \mathbf{W}'$. Quindi $\mathbf{W}'$ contiene tutte le riflessioni di $\mathcal{R}$ e quindi coincide con il suo gruppo di Weyl $\mathbf{W}(\mathcal{R})$.

(5) Sia $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ tale che $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$. Se σ non fosse l'identità, potremmo scriverla come prodotto di un numero minimo t di riflessioni rispetto ai vettori della base $\mathcal{B}$:

$$\sigma = s_{\alpha_1} \circ \cdots \circ s_{\alpha_t}$$

con $t \geq 1$ e $\alpha_i \in \mathcal{B}$. Ma, per il Corollario 4.2, avremmo $\sigma(\alpha_t) \in \mathcal{R}^-(\mathcal{B})$, e quindi una contraddizione.

Da questo teorema si ricava:

Teorema 4.4 *Il gruppo di Weyl $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ opera in modo semplicemente transitivo sull'insieme $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ delle camere di Weyl di $\mathcal{R}$.*

Dim. Per la corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle camere di Weyl e l' insieme delle basi di $\mathcal{R}$, la (2) del Teorema 4.3 ci dice che $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ opera in modo transitivo sulle camere di Weyl e la (5) che la sola trasformazione di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ che fissi una qualsiasi camera di Weyl è l'identità.

Lemma 4.5 *Sia $C_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ una camera di Weyl e sia $\bar{C}_0$ la sua chiusura. Allora $\bar{C}_0$ è un dominio fondamentale di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$: ciò significa che per ogni $\xi \in E$, l'orbita $\mathbf{W}(\mathcal{R}) \cdot \xi$ interseca $\bar{C}_0$ in uno e un solo punto.*

Dim. Osserviamo che $\{\bar{C} \,|\, C \in \mathcal{C}(\mathcal{R})\}$ è un ricoprimento di E. Quindi ogni $\xi \in E$ appartiene alla chiusura di una camera di Weyl di $\mathcal{R}$. Fissiamo un elemento $\xi \in E \setminus \{0\}$. Esso appartiene alla chiusura di una camera di Weyl C_ξ. Poiché $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ opera in modo semplicemente transitivo su $\mathcal{C}(\mathcal{R})$, vi è un unico $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ tale che $\sigma(C_\xi) = C_0$. Risulterà allora anche $\bar{C}_0 = \overline{\sigma(C_\xi)} = \sigma(\bar{C}_\xi)$ e quindi $\sigma(\xi) \in \bar{C}_0$.

Per concludere la dimostrazione, basterà verificare che, se $\xi, \eta \in \bar{C}_0$ ed esiste $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ tale che $\sigma(\xi) = \eta$, allora $\xi = \eta$. Ragioniamo per ricorrenza sul minimo numero t di riflessioni rispetto a vettori della base $\mathcal{B}(C_0)$ in cui si può decomporre σ. Se $t = 0$, allora σ è l'identità e $\xi = \eta$. Supponiamo che $t > 0$ e che due elementi di $\bar{C}_0$ trasformati l'uno nell'altro dal prodotto di meno di t riflessioni rispetto a vettori di $\mathcal{B}(C_0)$ coincidano. Sia $\sigma = s_{\alpha_1} \circ \cdots s_{\alpha_t}$ con $\alpha_i \in \mathcal{B}(C_0)$ e t minimo. Per il Corollario 4.2, $\sigma(\alpha_t) \in \mathcal{R}^-(C_0)$ e quindi:

$$0 > (\eta|\sigma(\alpha_t)) = (\sigma^{-1}(\eta)|\alpha_t) = (\xi|\alpha_t) = 0\,.$$

Quindi $s_{\alpha_t}(\xi) = \xi$ perché ξ e α_t sono ortogonali ed $\eta = s_{\alpha_1} \circ \cdots s_{\alpha_{t-1}}(\xi)$ implica che $\xi = \eta$ per l'ipotesi induttiva.

Lemma 4.6 *Sia $C \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$. Allora $\overline{C} \subset \mathcal{R}^+(C)$.*

Dim. Sia $\alpha \in \overline{C} \cap \mathcal{R}$ e sia $\alpha = \sum_{\beta \in \mathcal{B}(C)} a^\beta \beta$. Abbiamo $(\alpha|\beta) \geq 0$ per ogni $\beta \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ e

$$0 < \|\alpha\|^2 \sum_{\beta \in \mathcal{B}(C)} a^\beta (\alpha|\beta)\,,$$

da cui ricaviamo che $a^\beta > 0$ per qualche $\beta \in \mathcal{B}(C)$ e quindi $\alpha \in \mathcal{R}^+(C)$.

§5 Sistemi di radici irriducibili

Osserviamo in primo luogo che vale il seguente:

Lemma 5.1 *Ogni rappresentazione lineare di un gruppo finito è completamente riducibile.*

Dim. Sia $\mathbf{G}$ un gruppo finito, E uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $\rho : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ una rappresentazione lineare. Possiamo fissare su E un prodotto scalare $\rho(\mathbf{G})$-invariante. Allora, per ogni sottospazio $\rho(\mathbf{G})$-invariante W di E, anche $W^\perp$ è $\rho(\mathbf{G})$-invariante. Da questa osservazione la tesi segue facilmente per induzione sulla dimensione di E.

Lemma 5.2 *Sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici in uno spazio vettoriale reale E. Se $E_1 \neq \{0\}$ è un sottospazio $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-invariante di E, allora $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \cap E_1$ è un sistema di radici in E_1. Esiste un sottospazio $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-invariante E_2 di E tale che $E = E_1 \oplus E_2$ e*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \qquad \textit{con} \quad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \cap E_1,\ \mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \cap E_2\,. \tag{5.1}$$

DIM. Possiamo limitarci a considerare il caso $E_1 \neq E$. Fissiamo su E un prodotto scalare $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-invariante e sia $E_2 = E_1^{\perp}$. Allora $E = E_1 \oplus E_2$ ed ogni radice α di $\mathcal{R}$ si decompone in modo unico in una somma:

$$\alpha = \xi + \eta \qquad \text{con} \quad \xi \in E_1, \quad \eta \in E_2 \, .$$

Poiché $\|\alpha\|^2 = (\alpha|\xi) + (\alpha|\eta) > 0$, sarà o $(\alpha|\xi) > 0$ oppure $(\alpha|\eta) > 0$. Supponiamo per fissare le idee che sia $(\alpha|\xi) > 0$. Allora:

$$s_\alpha(\xi) = (1 - \langle \xi, \alpha \rangle) \, \xi - \langle \xi \alpha \rangle \eta \in E_1 \, .$$

Poiché $\langle \xi, \alpha \rangle \neq 0$, questa relazione implica che $\eta = 0$ e $\alpha = \xi \in E_1$. Quindi

$$\mathcal{R} = (\mathcal{R} \cap E_1) \cup (\mathcal{R} \cap E_2)$$

e da questa è facile ricavare che $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \cap E_1$ e $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \cap E_2$ sono sistemi di radici in E_1 ed E_2 rispettivamente.

TEOREMA 5.3 *Sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici in uno spazio vettoriale reale E, su cui pensiamo fissato un prodotto scalare $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-invariante.*

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) *esiste una partizione*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2, \quad \textit{con} \quad \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset, \; \mathcal{R}_1 \neq \emptyset, \; \mathcal{R}_2 \neq \emptyset$$

tale che

$$(\alpha|\beta) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}_1, \; \forall \beta \in \mathcal{R}_2 \, .$$

(2) *Esiste un sottospazio $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-invariante E_1 di E con $\{0\} \neq E_1 \neq E$.*

DIM. (1)⇒(2). Siano E_1 ed E_2 i sottospazi di E generati da $\mathcal{R}_1$ e da $\mathcal{R}_2$ rispettivamente. Chiaramente essi sono sottospazi $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-invaranti di $\mathcal{R}$, diversi da $\{0\}$ e da E.

(2)⇒(1). È una conseguenza del Lemma 5.2.

Un sistema di radici $\mathcal{R}$ per cui valgano le condizioni equivalenti del Teorema 5.3 si dice *riducibile*. Chiamiamo *irriducibile* un sistema di radici $\mathcal{R}$ che non sia riducibile.

LEMMA 5.4 *Siano E_1, ..., E_m sottospazi vettoriali di dimensione finita dello spazio vettoriale reale E tali che $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$ e sia, per ogni i, $\mathcal{R}_i$ un sistema di radici in E_i. Allora $\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{R}_i$ è un sistema di radici in E.*

DIM. Se α è una radice di $\mathcal{R}_i$ ed $s_\alpha^{(i)}$ la corrispondente riflessione in E_i, estendiamo $s_\alpha^{(i)}$ a una riflessione s_α in E ponendo:

$$s_\alpha(\xi) = \begin{cases} s_\alpha^{(i)}(\xi) & \text{se} \quad \xi \in E_i \, , \\ \xi & \text{se} \quad \xi \in E_j, \; j \neq i \, . \end{cases}$$

Si verifica che $\mathcal{R}$ è un sistema di radici in E, con riflessioni s_α. dei sistemi di radici $\mathcal{R}_i$ $(1 \leq i \leq m)$.

LEMMA 5.5 *Sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici irriducibile in E. Sia α una qualsiasi radice di $\mathcal{R}$. allora $\{\sigma(\alpha) \,|\, \sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})\}$ è un sistema di generatori di E.*

DIM. Infatti il sottospazio vettoriale di E generato da $\{\sigma(\alpha) \,|\, \sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})\}$ è $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-invariante e $\neq \{0\}$. Esso deve quindi coincidere con E.

TEOREMA 5.6 *Sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici in E. Allora $\mathcal{R}$ si decompone in modo unico nella somma diretta di sistemi di radici irriducibili in sottospazi di E.*

DIM. Sia $E = \bigoplus_{i=1}^{m}$ una decomposizione di E in somma diretta di sottospazi $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-irriducibili. Per i risultati precedenti $\mathcal{R}_i = \mathcal{R} \cap E_i$ è, per ogni $i = 1, \ldots, m$ un sistema di radici irriducibile in E_i ed $\mathcal{R}$ è la somma diretta dei sistemi di radici $\mathcal{R}_i$. Resta da verificare che la decomposizione è unica. Ma questo è conseguenza del Lemma 5.5, perché ogni sottospazio E_i è uno dei sottospazi generati da $\{\sigma(\alpha) \,|\, \sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})\}$ per qualche $\alpha \in \mathcal{R}$.

Questo risultato riduce il problema della classificazione dei sistemi di radici a quello della classificazione dei sistemi di radici irriducibili.

§6 PROPRIETÀ DEI SISTEMI DI RADICI IRRIDUCIBILI

In questo paragrafo indicheremo con E uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e con $\mathcal{R}$ un sistema di radici irriducibile in E. Su E penseremo fissato un prodotto scalare $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-invariante.

LEMMA 6.1 *Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathcal{R}$. Se $\mathcal{R}$ ha rango ≥ 2, allora per ogni $\alpha \in \mathcal{B}$ esiste $\beta \in \mathcal{B}$ tale che $(\alpha|\beta) < 0$.*

DIM. Supponiamo per assurdo che $\alpha \in \mathcal{B}$ sia ortogonale a tutti gli altri elementi β di $\mathcal{B}$. Allora $E_1 = \mathbb{R}\alpha$ e il sottospazio generato E_2 da $\mathcal{B} \setminus \{\alpha\}$ sono mutuamente ortogonali ed invarianti rispetto ad s_β per ogni $\beta \in \mathcal{B}$. Poiché le riflessioni rispetto ai vettori di $\mathcal{B}$ generano $\mathbf{W}(\mathcal{R})$, ne concludiamo che E_1 ed E_2 sono sottospazi $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-invarianti, contraddicendo l'irriducibilità di $\mathcal{R}$.

LEMMA 6.2 *Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathcal{R}$. Allora esiste un unico elemento $\tilde{\alpha}$ di $\mathcal{R}$ tale che*

$$\alpha \underset{\mathcal{B}}{<} \tilde{\alpha} \qquad \forall \alpha \in \mathcal{R} \setminus \{\tilde{\alpha}\} \tag{6.1}$$

e inoltre

$$\tilde{\alpha} = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} k^\beta \beta \qquad \text{con} \quad k^\beta > 0 \quad \forall \beta \in \mathcal{B}\,. \tag{6.2}$$

DIM. Sia $\tilde{\alpha}$ massimale in $\mathcal{R}$ rispetto all'ordinamento parziale $\underset{\mathcal{B}}{<}$. Chiaramente $\tilde{\alpha} \in \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$. Sia (6.2) l'espressione di $\tilde{\alpha}$ come combinazione lineare di elementi della base. Poniamo

$$\mathcal{B}_1 = \{\alpha \in \mathcal{B} \,|\, k^\alpha > 0\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \{\alpha \in \mathcal{B} \,|\, k^\alpha = 0\}\,.$$

Chiaramente $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ (unione disgiunta) e $\mathcal{B}_1 \neq \emptyset$. Supponiamo per assurdo che anche $\mathcal{B}_2 \neq \emptyset$. Poiché $\tilde{\alpha} - \alpha \notin \mathcal{R}$ se $\alpha \in \mathcal{B}_2$, abbiamo $(\tilde{\alpha}|\alpha) \leq 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{B}_2$. D'altra parte, poiché $\mathcal{R}$ è irriducibile, per il Lemma 6.1, esisteranno $\alpha \in \mathcal{B}_1$ e $\beta \in \mathcal{B}_2$ tali che $(\alpha|\beta) < 0$. Quindi

$$(\tilde{\alpha}|\beta) = \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_1} k^\gamma (\gamma|\beta) < 0$$

implica che $\tilde{\alpha} + \beta \in \mathcal{R}$, contraddicendo la massimalità di $\tilde{\alpha}$.

Per la massimalità di $\tilde{\alpha}$ abbiamo quindi $(\tilde{\alpha}|\alpha) \geq 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$ e quindi $\tilde{\alpha}$ appartiene alla chiusura della camera di Weyl C corrispondente a $\mathcal{B}$.

Dimostriamo l'unicità di $\tilde{\alpha}$. Se γ fosse un altro elemento massimale di $\mathcal{R}$ rispetto a $\underset{\mathcal{B}}{<}$, avremmo

$$(\tilde{\alpha}|\gamma) = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k^{\alpha}(\alpha|\gamma) > 0$$

e dunque $\eta = \tilde{\alpha} - \gamma \in \mathcal{R}$. Se $\eta \in \mathcal{R}^+$, da $\tilde{\alpha} = \gamma + \eta$ avremmo $\gamma \underset{\mathcal{B}}{<} \tilde{\alpha}$, contraddicendo la massimalità di γ, se $\eta \in \mathcal{R}^-(\mathcal{B})$, da $\gamma = \tilde{\alpha} + (-\eta)$ avremmo $\tilde{\alpha} \underset{\mathcal{B}}{<} \gamma$, contraddicendo la massimalità di $\tilde{\alpha}$. La dimostrazione è completa.

Lemma 6.3 *Sia $\tilde{\alpha}$ una radice massimale di $\mathcal{R}$ rispetto a una base $\mathcal{B}$. Allora $\|\tilde{\alpha}\| \geq \|\alpha\|$ per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$.*

Dim. Sia $\alpha \in \mathcal{R}$. A meno di sostituirla con $\sigma(\alpha)$ per qualche $\alpha \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ possiamo supporre che $\alpha \in \overline{C}$, ove C è la camera di Weyl corrispondente a $\mathcal{B}$. Poiché $\tilde{\alpha} - \alpha \underset{\mathcal{B}}{>} 0$, abbiamo contemporaneamente:

$$(\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha} - \alpha) \geq 0 \quad \text{e} \quad (\alpha|\tilde{\alpha} - \alpha) \geq 0\,,$$

da cui sommando membro a membro si ricava $|\tilde{\alpha}\|^2 \geq \|\alpha\|^2$.

Lemma 6.4 *Supponiamo $\mathcal{R}$ ridotto. Allora l'insieme $\{\|\alpha\| \,|\, \alpha \in \mathcal{R}\}$ contiene al più due elementi.*

Dim. Siano α, β due elementi di $\mathcal{R}$. Possiamo supporre che $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$. Poiché $\{\sigma(\alpha) \,|\, \sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})\}$ genera E, possiamo supporre $(\alpha|\beta) > 0$. Allora $\|\beta\|/\|\alpha\| \in \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$. Sia γ un terzo elemento di $\mathcal{R}$. Possiamo supporre che $\|\beta\| \leq \|\gamma\|$. Allora i tre numeri $\|\beta\|/\|\alpha\|$, $\|\gamma\|/\|\alpha\|$, $\|\gamma\|/\|\beta\|$ devono tutti e tre appartenere all'insieme $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$. Ma questo non è possibile se $\|\alpha\| < \|\beta\| < \|\gamma\|$.

CAPITOLO XIII

CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI DI RADICI

In questo capitolo classificheremo i sistemi di radici astratti. A ciascuno di essi assoceremo un diagramma di Dynkin. Troveremo prima condizioni *necessarie* affinché un dato diagramma di Dynkin sia il diagramma di Dynkin di un sistema di radici e mostreremo in seguito che queste condizioni sono anche *sufficienti.*

§1 Grafi

Si dice *grafo (combinatorio)* una coppia $\Gamma = (V, L)$ in cui V è un insieme ed L una famiglia di sottoinsiemi di V, composti ciascuno da due elementi. Gli elementi di V sono i *vertici* e quelli di L i *lati* di Γ.

Dato un grafo $\Gamma = (V, L)$ e un sottoinsieme W di V, indichiamo con L_W la famiglia degli elementi di L che sono contenuti in W: il grafo $\Gamma|_W = (W, L_W)$ si dice il *sottografo* di Γ generato da W.

Un *cammino* in $\Gamma = (V, L)$ è una sequenza finita $c = (\alpha_j)_{0\leq j\leq n}$ di elementi di V tali che $\{\alpha_{j-1}, \alpha_j\} \in L$ per ogni $j = 1, \ldots, n$. In numero n si dice *lunghezza* del cammino. Un cammino $c = (\alpha_j)_{0\leq j\leq n}$ si dice *aperto* se $\alpha_0 \neq \alpha_n$ e *chiuso* se $\alpha_0 = \alpha_n$. I cammini di lunghezza zero sono esempi di cammini chiusi. Un cammino aperto $c = (\alpha_j)_{0\leq j\leq n}$ ha sempre lunghezza $n \geq 1$ e si dice *semplice* quando $\alpha_i \neq \alpha_j$ per ogni $0 \leq i < j \leq n$. Un cammino chiuso $c = (\alpha_j)_{0\leq j\leq n}$ si dice semplice se o ha lunghezza zero, oppure se ha lunghezza positiva e $c' = (\alpha_j)_{o\leq j\leq n-1}$ è un cammino semplice aperto. Un cammino semplice chiuso di lunghezza positiva ha lunghezza ≥ 3 e si dice un *ciclo* di Γ.

Due vertici $\alpha, \beta \in V$ si dicono *legati* se $\{\alpha, \beta\} \in L$, connessi se esiste un cammino $c = (\alpha_j)_{0\leq j\leq n}$ tale che $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_n = \beta$. Diciamo in questo caso che c connette α a β.

La relazione di essere connessi è una relazione di equivalenza tra i vertici V di un grafo $\Gamma = (V, L)$; le classi di equivalenza si dicono le *componenti connesse del grafo.* Un sottoinsieme W di V si dice *totalmente sconnesso* se $L_W = \emptyset$, e si dice *connesso* se due qualsiasi dei suoi vertici sono connessi da un cammino in $\Gamma|_W$.

Un vertice α di un grafo $\Gamma = (V, L)$ si dice:

isolato se $\alpha \notin \cup L$;
estremo se appartiene al più ad un elemento di L;
interno se appartiene ad almeno due elementi di L;
di ramificazione se appartiene ad almeno tre elementi di L.

Chiaramente un punto isolato è un estremo; un punto di ramificazione è anche interno e un punto interno non è un estremo di Γ.

Un grafo si dice una *foresta* se non contiene cicli; un *albero* se è una foresta connessa.

Teorema 1.1 *(i) Ogni foresta finita e non vuota contiene un estremo. (ii) I vertici di una famiglia non vuota si possono ripartire in due insiemi totalmente sconnessi.*

Dim. (i) Sia $\Gamma = (V, L)$ una foresta non vuota. Se Γ contiene un punto isolato, allora questo è un estremo. Possiamo quindi supporre che Γ non contenga punti isolati. Fissiamo allora in Γ un cammino semplice aperto $c = (\alpha_j)_{0 \leq j \leq n}$ massimale. Dico che α_n è un estremo di Γ. Infatti, se così non fosse, ptremmo trovare un $\beta \in V$ con $\beta \neq \alpha_{n-1}$ tale che $\{\alpha_n, \beta\} \in L$. Ma non può essere $\beta \neq \alpha_i$ per $i = 0, \ldots, n-2$ perché allora il cammino semplice aperto $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ ottenuto ponendo $\alpha_{n+1} = \beta$ avrebbe lunghezza $n+1$ maggiore di quella di c, né $\beta = \alpha_i$ per qualche $0 \leq i < n-1$ perché altrimenti Γ conterrebbe il ciclo: $(\alpha_i = \beta, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n, \beta)$. Quindi α_n è un estremo e la (i) è dimostrata.

Possiamo dimostrare la (ii) per induzione sul numero m di elementi di V. Fissato un estremo α di Γ, e posto $W = V \setminus \{\alpha\}$, per l'ipotesi induttiva applicata alla foresta $\Gamma|_W$ potremmo ripartire W in due sottoinsiemi totalmente sconnessi W_1 e W_2. A meno di scambiare gli indici, possiamo supporre che $\{\alpha, \beta\} \notin L$ per ogni $\beta \in W_1$. Allora $V_1 = W_1 \cup \{\alpha\}$ e $V_2 = W_2$ è una partizione di V in due insiemi totalmente sconnessi.

Un grafo $\Gamma = (V, L)$ si dice una *catena* se è finito ed esiste un cammino semplice aperto $(\alpha_j)_{0 \leq j \leq n}$ tale che $V = \{\alpha_j \mid 0 \leq j \leq n\}$.

Lemma 1.2 *Un albero $\Gamma = (V, L)$ è una catena se e soltanto se non contiene punti di ramificazione.*

Dim. Supponiamo che Γ sia una catena e sia $c = (\alpha_j)_{0 \leq j \leq n}$ un cammino semplice aperto massimale in Γ. I vertici α_0 e α_n sono estremi; se ci fosse quindi un punto di ramificazione esso sarebbe un α_r con $0 < r < n$. Sia $0 < j < n$ tale che $j \neq r \pm 1$ e $\{\alpha_r, \alpha_j\} \in L$. A meno di cambiare l'ordine nel cammino c possiamo supporre $0 \leq j < j+1 < r$. Allora $(\alpha_r, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_r)$ sarebbe un ciclo in Γ.

Viceversa, supponiamo che Γ sia un albero privo di punti di ramificazione e sia $(\alpha_j)_{0 \leq j \leq n}$ una catena aperta massimale in Γ. Se $V \neq \{\alpha_j \mid 0 \leq j \leq n\}$, esisterebbe un $\beta \in V$ non appartenente alla catena, ma tale che $\{\beta, \alpha_j\} \in L$. Dovrebbe essere $\beta \neq \alpha_0, \alpha_n$ perché questi sono estremi. Allora α_j sarebbe un punto di ramificazione di Γ, perché $\{\alpha_j, \alpha_{j-1}\}, \{\alpha_j, \alpha_{j+1}\}, \{\alpha_j, \beta\} \in L$.

§2 Matrici di Cartan

Sia E uno spazio vettoriale reale di dimensione $\ell \geq 1$ e sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici in E. Su E consideriamo fissato un prodotto scalare $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-invariante.

Fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{R}$, associamo a $\mathcal{R}$ la matrice $\ell \times \ell$:

$$M_{\mathcal{R}} = (\langle \alpha, \beta \rangle)_{\alpha, \beta \in \mathcal{B}} \tag{2.1}$$

Essa si dice la *matrice di Cartan* di $\mathcal{R}$.

Osserviamo che, se $\mathcal{B}'$ è un'altra base di $\mathcal{R}$, allora $\mathcal{B}' = \sigma(\mathcal{B})$ per un elemento σ del gruppo di Weyl $\mathbf{W}(\mathcal{R})$. Poiché $\langle \sigma(\alpha), \sigma(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$, in quanto σ è un'isometria di E, la matrice di Cartan non dipende dalla particolare scelta della base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{R}$.

La matrice di Cartan caratterizza completamente un sistema di radici ridotto:

Teorema 2.1 *Siano $\mathcal{R}$ un sistema di radici ridotto in E, $\mathcal{R}'$ un sistema di radici ridotto in E'. Supponiamo che $\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{R}} E' = \ell$ e siano $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ una base* *di $\mathcal{R}$ e $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_\ell\}$ una base di $\mathcal{R}'$. Se $\langle \alpha'_i, \alpha'_j \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ per ogni $1 \le i, j \le \ell$, e $\phi : E \longrightarrow E'$ è l'isomorfismo lineare tale che $\phi(\alpha_i) = \alpha'_i$ per $i = 1, \dots, \ell$, allora $\phi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$ e $\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$.*

Dim. Il teorema segue dal fatto che il gruppo di Weyl di un sistema di radici è generato dalle riflessioni rispetto ai vettori di una base e che ogni radice di un sistema di radici ridotto è immagine, mediante il gruppo di Weyl, di una radice della base.

§3 Diagrammi di Dynkin

Sia E uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $\ell \ge 1$ e sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici in E. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{R}$ e un prodotto scalare $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-invariante in E.

Associamo ad $\mathcal{R}$ un diagramma nel modo seguente:

gli elementi della base $\mathcal{B}$ sono i vertici del diagramma;
congiungiamo due radici distinte α, β di $\mathcal{B}$ con $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \widehat{\alpha\beta}$ lati;
se due vertici $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ sono connessi da lati, e $\|\alpha\| < \|\beta\|$ aggiungiamo una freccia che indica la radice più corta α.

Osserviamo che due radici di $\mathcal{B}$ possono essere connesse al più da tre lati: quelle non connesse da alcun lato sono ortogonali; quelle connesse da un solo lato hanno la stessa lunghezza; quelle connesse da due lati hanno lunghezze il cui rapporto è $\sqrt{2}$, quelle connesse da tre lati hanno lunghezze il cui rapporto è $\sqrt{3}$. Dal diagramma di Dynkin possiamo ricavare la matrice di Cartan e quindi i sistemi di radici ridotti sono completamente determinati (a meno di isomorfismi) dai loro diagrammi di Dynkin. Chiaramente il diagramma di Dynkin non dipende dalla particolare scelta della base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{R}$.

Indicheremo nel seguito con $\Delta(\mathcal{R})$ il diagramma di Dynkin del sistema di radici ridotto $\mathcal{R}$. Indicheremo ancora con $\Gamma(\mathcal{R})$ il *grafo* associato al diagramma di Dynkin: fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{R}$, il grafo $\Gamma(\mathcal{R})$ ha come insime di vertici $\mathcal{B}$ e i lati sono

$$L(\mathcal{R}) = \{\{\alpha, \beta\} \subset \mathcal{B} \,|\, \alpha \neq \beta \quad \text{e} \quad (\alpha|\beta) \neq 0\}\,.$$

Il numero di lati in $\Delta(\mathcal{R})$ che congiungono due radici $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ legate in $\Gamma(\mathcal{R})$ si dice anche la *molteplicità* di $\{\alpha, \beta\} \in L(\mathcal{R})$.

Nel seguito considereremo fissato lo spazio Euclideo E, un sistema di radici $\mathcal{R}$ in E e una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{R}$; il prodotto scalare in E è $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-invariante.

Lemma 3.1 *Sia $\mathcal{B}'$ un sottoinsieme di $\mathcal{B}$, sia E' il sottospazio vettoriale di E generato da $\mathcal{B}'$ ed $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap E'$. Allora $\mathcal{R}'$ è un sistema di radici in E', $\mathcal{B}'$ è una base di $\mathcal{R}'$ e il diagramma di Dynkin $\Delta(\mathcal{R}')$ di $\mathcal{R}'$ si ottiene da $\Delta(\mathcal{R})$ cancellando i vertici di $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$ e i lati che escono da essi.*

Dim. Basta osservare che $s_\alpha(\mathcal{R}') \subset \mathcal{R}'$ se $\alpha \in \mathcal{R}'$.

Lemma 3.2 *Se $\mathcal{R}$ ha rango ℓ, allora il numero di lati del grafo $\Gamma(\mathcal{R})$ è strettamente minore di ℓ.*

Dim. Sia $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$. Poiché i vettori della base $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti,

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|} \neq 0\,.$$

Qundi abbiamo:

$$0 < \|\gamma\|^2 = \ell + \sum_{1 \le i < j \le \ell} \frac{2(\alpha_i|\alpha_j)}{\|\alpha_i\|\,\|\alpha_j\|}\,.$$

Abbiamo

$$(\alpha_i|\alpha_j) \le 0 \quad \text{per ogni } 1 \le i < j \le \ell$$

e

$$\frac{4(\alpha|\beta)^2}{\|\alpha\|^2\|\beta\|^2} \in \{1,2,3\}, \qquad \text{se } \{\alpha_i,\alpha_j\} \in L(\mathcal{R}).$$

Quindi $\dfrac{2(\alpha_i|\alpha_j)}{\|\alpha_i\|\,\|\alpha_j\|} \le -1$ se $\{\alpha_i,\alpha_j\} \in L(\mathcal{R})$. Da questa osservazione segue la tesi.

Lemma 3.3 *Il grafo $\Gamma(\mathcal{R})$ associato ad un sistema di radici non contiene cicli.*

Dim. Per il Lemma 3.1, un ciclo di $\Gamma(\mathcal{R})$ sarebbe il grafo associato ad un sistema di radici. Ciò non è possibile per il Lemma 3.2.

Lemma 3.4 *In nessun vertice del diagramma di Dynkin $\Delta(\mathcal{R})$ di un sistema di radici $\mathcal{R}$ concorrono più di tre lati.*

Dim. Sia $\alpha \in \mathcal{B}$ e siano $\beta_1,\dots,\beta_k$ le radici di $\mathcal{B}$ connesse ad α, in $\Delta(\mathcal{R})$, da almeno un lato. Utilizzando il Lemma 3.1, possiamo supporre che $\mathcal{B} = \{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_k\}$. Per il Lemma 3.3, $\{\beta_i,\beta_j\} \notin L(\mathcal{R})$ se $1 \le i < j \le k$. Quindi $\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\dots,\dfrac{\beta_k}{\|\beta_k\|}$ è un sistema ortonormale in E. Completiamolo ad una base ortonormale di E con l'aggiunta di un vettore β_0. Allora $(\alpha|\beta_0) \ne 0$ e

$$\alpha = \frac{1}{2}\sum_{h=0}^{k} \langle \alpha,\beta_h\rangle \beta_h\,.$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned} 2 = \langle \alpha,\alpha\rangle &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{h=0}^{k} \langle \alpha,\beta_h\rangle\langle \beta_h,\alpha\rangle \\ &> \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{h=1}^{k} \langle \alpha,\beta_h\rangle\langle \beta_h,\alpha\rangle \end{aligned}$$

onde

$$\sum_{h=1}^{k} \langle \alpha,\beta_h\rangle\langle \beta_h,\alpha\rangle < 4\,.$$

Poiché il primo membro di questa uguaglianza è il numero dei lati del diagramma di Dynkin che escono da α, otteniamo la tesi.

Lemma 3.5 *Sia $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ un cammino semplice aperto in $\Gamma(\mathcal{R})$. Allora:*

(*i*) $\hat{\alpha} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \in \mathcal{R}$;

(*ii*) $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{\alpha_1,\dots,\alpha_k\} \cup \{\hat{\alpha}\}$ *è la base di un sistema di radici* $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$;

(*iii*) *Il diagramma di Dynkin $\Delta(\mathcal{R}')$ si ottiene da $\Delta(\mathcal{R})$ sostituendo ai vertici $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ e ai lati che li uniscono l'unico vertice $\hat{\alpha}$, e facendo convergere in $\hat{\alpha}$ tutti i lati che congiungevano uno dei vertici α_i $(1 \le i \le k)$ con i vertici in $\mathcal{B} \setminus \{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$.*

Dim. (*i*) Se $\beta_i = \sum_{h=1}^{i} \alpha_i$, per $i = 1, \ldots, k$, abbiamo:

$$(\beta_i|\alpha_{i+1}) = (\alpha_i|\alpha_{i+1}) < 0 \quad \forall 1 \leq i \leq k-1\,.$$

Quindi per ricorrenza $\beta_i \in \mathcal{R}$ per ogni $i = 1, \ldots, k$ e in particolare $\hat{\alpha} = \beta_k \in \mathcal{R}$.

(*ii*) Sia E' il sottospazio vettoriale di E generato da $\mathcal{B}'$. Allora $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap E'$ è un sistema di radici in E'. Chiaramente $\mathcal{B}'$ è un sistema di radici semplici in $\mathcal{R}^+(\mathcal{B}) \cap \mathcal{R}'$ e quindi una base in $\mathcal{R}'$.

(*iii*) Poiché $\Gamma(\mathcal{R})$ non contiene cicli, ogni radice in $\mathcal{B} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ è legata ad al più una delle radici $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Quindi

$$\langle \hat{\alpha}, \beta \rangle \langle \beta, \hat{\alpha} \rangle = \max_{1 \leq i \leq k} \langle \alpha_i, \beta \rangle \langle \beta, \alpha_i \rangle \qquad \forall \beta \in \mathcal{B} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}\,,$$

da cui segue (*iii*).

Otteniamo perciò:

Lemma 3.6 *Sia $\Delta(\mathcal{R})$ il diagramma di Dynkin di un sistema di radici $\mathcal{R}$ ridotto e irriducibile. Si hanno allora le seguenti alternative:*

(1) *Il grafo $\Gamma(\mathcal{R})$ possiede un solo punto di ramificazione; allora due radici di $\mathcal{B}$ sono connesse da al più un lato in $\Delta(\mathcal{R})$.*
(2) *Il grafo $\Gamma(\mathcal{R})$ è una catena e $\Delta(\mathcal{R})$ contiene al più una coppia di vertici legati da più di un lato.*

Dim. (1) Ragioniamo per ricorrenza sul rango ℓ di $\mathcal{R}$. Supponiamo che le radici in $\mathcal{B}$ siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ e che α_1 sia un punto di ramificazione di $\Gamma(\mathcal{R})$ legato alle radici $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Se $\ell = 4$, non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, poiché $\Gamma(\mathcal{R})$ è connesso, possiamo supporre che $\{\alpha_4, \alpha_5\} \in L(\mathcal{R})$. Il lato $\{\alpha_4, \alpha_5\}$ ha molteplicità 1 in $\Delta(\mathcal{R})$, perché altrimenti nel diagramma di Dynkin del sistema di radici generato da $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ dalla radice $\alpha_1 + \alpha_4$ uscirebbero più di tre lati.

Consideriamo ora il sistema di radici $\mathcal{R}'$ con base $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4{+}\alpha_5, \alpha_6, \ldots, \alpha_\ell\}$. Per l'ipotesi induttiva $\Gamma(\mathcal{R}')$ ha il solo punto di diramazione α_1 e per ogni coppia di radici legate $\beta, \beta' \in \mathcal{B}'$ è $\langle \beta, \beta' \rangle = -1$. Ma questo implica che anche tutte le coppie di radici legate di $\Gamma(\mathcal{R})$ sono collegate da una sola linea nel diagramma di Dynkin $\Delta(\mathcal{R})$. Resta da dimostrare che α_4 e α_5 non sono punti di diramazione di $\Gamma(\mathcal{R})$. Se α_4 fosse di diramazione, a meno di cambiare gli indici potremmo supporre che $\{\alpha_4, \alpha_6\} \in L(\mathcal{R})$. Ma nel diagramma ottenuto identificando a un punto i vertici α_1 e α_4 avremmo allora quattro lati che escono da $\alpha_1 + \alpha_4$, e questo ci darebbe una contraddizione. Analogamente si esclude la possibilità che α_5 sia di diramazione, considerando il diagramma ottenuto identificando a un vertice i vertici $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5$: nel vertice $\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5$ convergerebbero almeno quattro lati.

(2) Se $\Gamma(\mathcal{R})$ non contiene punti di diramazione, allora è una catena. Sia $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ un cammino semplice aperto massimale in $\Gamma(\mathcal{R})$. Possiamo ragionare per ricorrenza su ℓ. Il caso $\ell \leq 2$ è ovvio. Poiché non più di tre lati del diagramma di Dynkin possono uscire da uno stesso vertice, ci sarà un indice i, con $1 \leq i < \ell$, tale che α_1 e α_{i+1} sono legati da un solo lato in $\Delta(\mathcal{R})$. Applichiamo allora l'ipotesi induttiva al diagramma $\Delta(\mathcal{R}')$ del sottosistema di radici $\mathcal{R}'$ con base $\mathcal{B}' = \{\alpha_i + \alpha_{i+1}\} \cup \{\alpha_j \,|\, 1 \leq j \leq \ell, \quad j \neq i, i+1\}$.

LEMMA 3.7 *Se $\Gamma(\mathcal{R})$ è una catena, allora possono darsi i casi seguenti:*

(1) *ogni lato di $\Gamma(\mathcal{R})$ ha molteplicità 1 in $\Delta(\mathcal{R})$ (tipo A_ℓ);*
(2) *c'è un solo lato di $\Gamma(\mathcal{R})$ di molteplicità 2 in $\Delta(\mathcal{R})$, cui appartiene uno degli estremi (tipi B_ℓ e C_ℓ);*
(3) *$\mathcal{R}$ ha rango quattro, un solo lato di molteplicità 2 e i vertici che gli appartengono non sono estremi (tipo F_4);*
(4) *$\mathcal{R}$ ha rango 2 e il lato in $\Gamma(\mathcal{R})$ ha molteplicità 3 in $\Delta(\mathcal{R})$ (tipo G_2).*

DIM. Se $\Gamma(\mathcal{R})$ ha un lato di molteplicità 3 in $\Delta(\mathcal{R})$, allora ha necessariamente rango due e un solo lato per il Lemma 3.4.

Supponiamo quindi che vi sia in $\Gamma(\mathcal{R})$ un lato di molteplicità due in $\Delta(\mathcal{R})$. Abbiamo già dimostrato che vi è al più un lato di $\Gamma(\mathcal{R})$ di molteplicità maggiore di uno in $\Delta(\mathcal{R})$. Una catena aperta massimale in $\Gamma(\mathcal{R})$ sarà quindi della forma:

$$(\alpha_1, \dots \alpha_p, \beta_q, \dots \beta_1)$$

con

$$\begin{cases} \langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle = \langle \alpha_{i+1}, \alpha_i \rangle = -1 & \text{se} \quad 1 \le i < p\,, \\ \langle \beta_i, \beta_{i+1} \rangle = \langle \beta_{i+1}, \beta_i \rangle = -1 & \text{se} \quad 1 \le i < q\,, \\ \langle \alpha_p, \beta_q \rangle = -1, \quad \langle \beta_q, \alpha_p \rangle = -2\,, & \\ \langle \alpha_i, \alpha_j = \langle \alpha_i, \beta_h \rangle = \langle \beta_h, \beta_k \rangle = 0 & \text{altrimenti}\,, \\ \|\beta_i\| = \sqrt{2}\|\alpha_j\| & \text{se} \quad 1 \le i \le q,\ 1 \le j \le p\,. \end{cases}$$

Consideriamo i due vettori

$$\xi = \sum_{h=1}^{p} h\alpha_h \quad \text{e} \quad \eta = \sum_{h=1}^{q} h\beta_h\,.$$

Possiamo supporre per semplicità che $\|\alpha_i\| = 1$ per ogni $1 \le i \le p$ e $\|\beta_i\| = \sqrt{2}$ per $1 \le i \le q$. Allora:

$$\begin{cases} \|\xi\|^2 = \sum_{h=1}^{p} h^2 - \sum_{h=1}^{p-1} h(h+1) = \dfrac{p(p+1)}{2} \\ \|\eta\|^2 = 2\sum_{h=1}^{q} h^2 - 2\sum_{h=1}^{q-1} h(h+1) = q(q+1)\,. \end{cases}$$

Otteniamo poi

$$(\xi|\eta) = pq(\alpha_q|\beta_q) = -pq\,.$$

Per la diseguaglianza di Cauchy, tenuto conto del fatto che ξ ed η non sono proporzionali, risulta:

$$2p^2q^2 < p(p+1)q(q+1), \quad \text{ovvero} \quad (p-1)(q-1) < 2\,.$$

Avremo allora le seguenti possibilità:

$p = 1$, q arbitrario (tipo B_ℓ),
$q = 1$, p arbitrario (tipo C_ℓ),
$p = 2$, $q = 2$ (tipo F_4).

Il Lemma è dimostrato.

Lemma 3.8 *Supponiamo che $\Gamma(\mathcal{R})$ sia connesso e contenga un punto di diramazione. Allora ogni lato di $\Gamma(\mathcal{R})$ ha molteplicità 1 in $\Delta(\mathcal{R})$ e possono darsi i seguenti casi:*

(1) *Il punto di diramazione è legato a due estremi di $\Gamma(\mathcal{R})$ (tipo D_ℓ);*
(2) *il rango di $\mathcal{R}$ è o 6, o 7 o 8 e il punto di diramazione è connesso a uno degli estremi da un cammino semplice di lunghezza 2 e ad un altro estremo da un cammino semplice di lunghezza 1 (casi E_6, E_7, E_8).*

Dim. Sia ψ il punto di diramazione e siano

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \psi),\ (\beta_1, \ldots, \beta_q, \psi),\ (\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \psi)\,,$$

con $r \leq q \leq p$, i cammini semplici che lo connettono agli estremi di $\Gamma(\mathcal{R})$. Consideriamo i vettori:

$$\xi = \sum_{h=1}^{p} h\alpha_h, \quad \eta = \sum_{h=1}^{q} h\beta_h, \quad \theta = \sum_{h=1}^{r} h\gamma_h\,.$$

Essi sono due a due ortogonali e inoltre ξ, η, θ, ψ sono linearmente indipendenti in E. Poiché tutti i vettori della base $\mathcal{B}$ hanno la stessa lunghezza per il Lemma 3.6, possiamo senz'altro supporre che $\|\mu\| = 1$ per ogni $\mu \in \mathcal{B}$. Abbiamo allora:

$$\|\xi\|^2 = \frac{p(p+1)}{2}, \quad \|\eta\|^2 = \frac{q(q+1)}{2}, \quad \|\theta\|^2 = \frac{r(r+1)}{2}\,.$$

Inoltre:

$$\begin{cases} (\psi|\xi) = p(\psi|\alpha_p) = -\dfrac{p}{2}\,, \\ (\psi|\eta) = q(\psi|\beta_q) = -\dfrac{q}{2}\,, \\ (\psi|\theta) = r(\psi|\gamma_r) = -\dfrac{r}{2}\,. \end{cases}$$

Dalla diseguaglianza:

$$\cos^2 \widehat{\xi\psi} + \cos^2 \widehat{\eta\psi}^2 + \cos^2 \widehat{\theta\psi} < 1$$

ricaviamo allora che

$$\frac{p^2/4}{p(p+1)/2} + \frac{q^2/4}{q(q+1)/2} + \frac{r^2/4}{r(r+1)/2} < 1\,,$$

da cui ricaviamo:

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} > 1\,.$$

Poiché $1 \leq r \leq q \leq p$, otteniamo che $r = 1$. Le soluzioni della diseguaglianza

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{1}{2}$$

sono allora

$q = 1$ e $p \geq 1$ arbitrario (tipo D_ℓ);
$q = 2$ e $p = 2, 3, 4$ (tipi E_6, E_7, E_8).

§4 Costruzione dei sistemi di radici ridotti irriducibili

In questo paragrafo dimostriamo l'esistenza di sistemi dei radici di tipo A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ, D_ℓ, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 descritti nel paragrafo precedente.

Tipo A_ℓ

$$\alpha_1 — \alpha_2 — \alpha_3 - \cdots - \alpha_{\ell-1} — \alpha_\ell$$

Matrice di Cartan:

$$A_\ell = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{R}^{\ell+1}$ fissiamo la base canonica $e_0, e_1 \dots, e_\ell$ e, posto $e = e_0+e_1+\ldots+e_n$ definiamo $E = e^\perp$. Poniamo

$$(4.1) \qquad \mathcal{R} = \{\alpha \in \mathbb{Z}^{\ell+1} \mid \alpha \in E, \ \|\alpha\|^2 = 2\} .$$

Allora

$$(4.2) \qquad \mathcal{R} = \{e_i - e_j \mid 0 \leq i \neq j \leq \ell\} .$$

Dimostreremo che $\mathcal{R}$ è un sistema di radici di rango ℓ e che una base di $\mathcal{R}$ è costituita dalle radici:

$$(4.3) \qquad \alpha_1 = e_1 - e_0, \ \alpha_2 = e_2 - e_1, \ \dots, \ \alpha_\ell = e_\ell - e_{\ell-1} .$$

Osserviamo che

$$(4.4) \qquad \langle \alpha, \beta \rangle \in \{1, 0, -1\} \qquad \forall \alpha \neq \beta \in \mathcal{R}$$

e che per ogni $0 \leq i \neq j \leq \ell$:

$$(4.5) \qquad s_{e_i - e_j}(e_h) = \begin{cases} e_h & \text{se} \quad h \neq i, j , \\ e_j & \text{se} \quad h = i , \\ e_i & \text{se} \quad h = j . \end{cases}$$

Quindi $s_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$. Da queste osservazioni segue che $\mathcal{R}$ è un sistema di radici e che il suo gruppo di Weyl $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ è isomorfo al gruppo $\mathfrak{S}_{\ell+1}$ delle permutazioni dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^{\ell+1}$.

La cardinalità di $\mathcal{R}$ è $\ell(\ell+1)$. Il fatto che $\mathcal{B}$ sia una base di $\mathcal{R}$ segue dal fatto che, se $0 \leq i \neq j \leq \ell$, abbiamo:

$$(4.6) \qquad e_i - e_j = \begin{cases} \sum_{h=j+1}^{i} \alpha_h & \text{se} \quad i > j , \\ -\sum_{h=i+1}^{j} \alpha_h & \text{se} \quad i < j . \end{cases}$$

La più grande radice rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$e_\ell - e_0 = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \,. \tag{4.7}$$

Chiaramente il diagramma di Dynkin di $\mathcal{R}$ è una catena di lunghezza $\ell - 1$, con lati tutti di molteplicità 1 e quindi di tipo A_ℓ.

Il gruppo quoziente $\mathbf{A}(\mathcal{R})/\mathbf{W}(\mathcal{R})$ è isomorfo al gruppo degli automorfismi del diagramma di Dynkin: esso consiste quindi dell'identità e della trasformazione $\alpha_i \to \alpha_{\ell-i+1}$. Quindi $\mathbf{A}(\mathcal{R})/\mathbf{W}(\mathcal{R}) \simeq \mathbb{Z}_2$ ed abbiamo

$$\mathbf{A}(\mathcal{R}) \simeq \begin{cases} \mathfrak{S}_2 & \text{se} \quad \ell = 1\,, \\ \mathfrak{S}_{\ell+1} \ltimes \mathbb{Z}_2 & \text{se} \quad \ell \geq 2\,, \end{cases} \tag{4.8}$$

Tipo B_ℓ

$$\alpha_1 — \alpha_2 — \alpha_3 - \cdots - \alpha_{\ell-2} — \alpha_{\ell-1} => \alpha_\ell$$

Matrice di Cartan:

$$B_\ell = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

In $E = \mathbb{R}^\ell$, $\ell \geq 2$, con base canonica $e_1, \dots, e_\ell$, consideriamo

$$\mathcal{R} = \left\{ \alpha \in \mathbb{Z}^\ell \mid \|\alpha\|^2 \in \{1, 2\} \right\} . \tag{4.9}$$

Abbiamo:

$$\mathcal{R} = \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq \ell\} . \tag{4.10}$$

Quindi $\mathcal{R}$ contiene $2\ell + 4\dfrac{\ell(\ell-1)}{2} = 2\ell^2$ radici. Chiaramente $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}$ genera $\mathbb{R}^\ell$. Inoltre

$$\langle \alpha, \beta \rangle \in \{0, \pm 1, \pm 2\} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R} . \tag{4.11}$$

Abbiamo poi

$$s_{e_i}(e_h) = \begin{cases} e_h & \text{se} \quad h \neq i\,, \\ -e_i & \text{se} \quad h = i\,; \end{cases}$$

$$s_{e_i - e_j}(e_h) = \begin{cases} e_h & \text{se} \quad h \neq i, j\,, \\ e_j & \text{se} \quad h = i\,, \\ e_i & \text{se} \quad h = j\,; \end{cases} \tag{4.12}$$

$$s_{e_i + e_j}(e_h) = \begin{cases} e_h & \text{se} \quad h \neq i, j\,, \\ -e_j & \text{se} \quad h = i\,, \\ -e_i & \text{se} \quad h = j\,; \end{cases}$$

Quindi $s_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$ e quindi $\mathcal{R}$ è un sistema di radici. Poniamo

$$\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = e_2 - e_3,\ \dots,\ \alpha_{\ell-1} = e_{\ell-1} - e_\ell,\ \alpha_\ell = e_\ell\,. \tag{4.13}$$

Allora $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ è una base di $\mathcal{R}$. Infatti $\xi = (\ell, \ell-1, \dots, 1)$ è un elemento regolare di $\mathbb{R}^\ell$ per $\mathcal{R}$ e:

$$\mathcal{R}^+(\xi) = \{e_i \,|\, 1 \leq 1 \leq \ell\} \cup \{e_i - e_j \,|\, 1 \leq i < j \leq \ell\} \cup \{e_i + e_j \,|\, 1 \leq i < j \leq \ell\}\,. \tag{4.14}$$

Abbiamo $\mathcal{R}^+(\xi) = \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$. Infatti:

$$e_j = \sum_{h=j}^{\ell} \alpha_h\,, \quad \forall 1 \leq i \leq \ell\,, \tag{4.15}$$

$$e_i - e_j = \sum_{h=i}^{j-1} \alpha_h \quad \forall 1 \leq i < j \leq \ell\,, \tag{4.16}$$

$$e_i + e_j = \sum_{h=i}^{j-1} \alpha_h + 2\sum_{h=j}^{\ell} \alpha_h\,, \quad \forall 1 \leq i < j \leq \ell\,. \tag{4.17}$$

La più grande radice rispetto alla base $\mathcal{R}$ è

$$e_1 + e_2 = \alpha_1 + 2\sum_{h=2}^{\ell} \alpha_h\,. \tag{4.18}$$

Il gruppo di Weil di $\mathcal{R}$ è il prodotto semidiretto del sottogruppo normale generato dagli s_{e_i}, isomorfo a $\mathbb{Z}_2^\ell$, e del gruppo $\mathfrak{S}_\ell$ delle permutazioni degli elementi della base canonica. L'unico automorfismo del diagramma di Dynkin è l'identità ed abbiamo quindi:

$$\mathbf{A}(\mathcal{R}) = \mathbf{W}(\mathcal{R}) = \mathbb{Z}_2^\ell \ltimes \mathfrak{S}_\ell\,. \tag{4.19}$$

Tipo C_ℓ

$$\alpha_1 — \alpha_2 — \alpha_3 - \cdots - \alpha_{\ell-2} — \alpha_{\ell-1} <= \alpha_\ell$$

Matrice di Cartan:

$$C_\ell = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Otteniamo i sistemi di tipo C_ℓ come inversi dei sistemi di tipo B_ℓ. Quindi, con $E = \mathbb{R}^\ell$ abbiamo:

$$\mathcal{R} = \{\pm 2e_i \,|\, 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \,|\, 1 \leq i < j \leq \ell\}\,. \tag{4.20}$$

Quindi $\mathcal{R}$ contiene $2\ell^2$ radici e

$$\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = e_2 - e_3,\ \ldots,\ \alpha_{\ell-1} = e_{\ell-1} - e_\ell,\ \alpha_\ell = 2e_\ell \tag{4.21}$$

sono gli elementi di una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{R}$. Le radici di $\mathcal{R}^+(\mathcal{B})$ sono quelle della forma $2e_i$, per $1 \leq i \leq \ell$, e le $e_i \pm e_j$ per $1 \leq i < j \leq \ell$. Abbiamo:

$$2e_i = 2\sum_{h=j}^{\ell-1} \alpha_h + \alpha_\ell\,, \quad \forall 1 \leq i \leq \ell\,, \tag{4.22}$$

$$e_i - e_j = \sum_{h=i}^{j-1} \alpha_h\,, \quad \forall 1 \leq i < j \leq \ell\,, \tag{4.23}$$

$$e_i + e_j = \sum_{h=1}^{j-1} \alpha_h + 2\sum_{h=j}^{\ell-1} \alpha_h + \alpha_\ell\,, \quad \forall 1 \leq i < j \leq \ell\,. \tag{4.24}$$

La radice massimale è

$$2e_1 = 2\sum_{h=1}^{\ell-1} \alpha_h + \alpha_\ell\,. \tag{4.25}$$

Abbiamo ancora

$$\mathbf{A}(\mathcal{R}) \simeq \mathbb{Z}_2^\ell \ltimes \mathfrak{S}_\ell\,. \tag{4.26}$$

Osserviamo che per $\ell = 2$ i sistemi C_2 e B_2 sono isomorfi: possiamo quindi limitarci a considerare i sistemi di tipo C_ℓ per $\ell \geq 3$.

Tipo D_ℓ

$$\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{\ell-3} - \alpha_{\ell-2} \begin{array}{l} \diagup\ \alpha_{\ell-1} \\ \diagdown\ \alpha_\ell \end{array}$$

Matrice di Cartan:

$$D_\ell = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché un grafo con un punto di ramificazione ha almento quattro vertici, deve essere $\ell \geq 4$.

Sia $E = \mathbb{R}^\ell$, con base canonica $e_1, \ldots, e_\ell$ e poniamo

$$\mathcal{R} = \{\alpha \in \mathbb{Z}^\ell \mid \|\alpha\|^2 = 2\} = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq \ell\}\,. \tag{4.27}$$

Quindi $\mathcal{R}$ contiene $2\ell(\ell-1)$ radici. La verifica del fatto che $\mathcal{R}$ sia un sistema di radici è immediata:

è chiaro che $\mathcal{R}$ genera $\mathbb{R}^\ell$; abbiamo poi

$$\langle \alpha, \beta \rangle \in \{0, \pm 1\} \qquad \forall \alpha \neq \beta \in \mathcal{R} \tag{4.28}$$

ed inoltre da

$$\begin{gathered} s_{e_i - e_j}(e_h) = \begin{cases} e_h & \text{se} \quad h \neq i, j\,, \\ e_j & \text{se} \quad h = i\,, \\ e_i & \text{se} \quad h = j\,; \end{cases} \\ s_{e_i + e_j}(e_h) = \begin{cases} e_h & \text{se} \quad h \neq i, j\,, \\ -e_j & \text{se} \quad h = i\,, \\ -e_i & \text{se} \quad h = j\,; \end{cases} \end{gathered} \tag{4.29}$$

segue che $s_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$. Il vettore $\xi = (\ell-1, \ell-2, \ldots, 2, 1, 0)$ è regolare e $|(\xi|\alpha)| \geq 1$ per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$. Abbiamo $\mathcal{R}^+(\xi) = \{e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq \ell\}$. La base $\mathcal{B}$ relativa alla camera di Weyl che contiene ξ è costituita dagli $\alpha \in \mathcal{R}$ per cui $(\xi|\alpha) = 1$, cioè dai vettori:

$$\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = e_2 - e_3,\ \ldots,\ \alpha_{\ell-1} = e_{\ell-1} - e_\ell,\ \alpha_\ell = e_{\ell-1} + e_\ell\,. \tag{4.30}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} e_i - e_j &= \textstyle\sum_{h=i}^{j-1} \alpha_h && \text{se} \quad 1 \leq i < j \leq \ell\,, \\ e_i + e_j &= \textstyle\sum_{h=i}^{j-1} \alpha_h + 2\sum_{h=j}^{\ell-2} \alpha_h + \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell && \text{se} \quad 1 \leq i < j \leq \ell - 2\,, \\ e_i + e_{\ell-1} &= \textstyle\sum_{h=i}^{\ell} \alpha_h && \text{se} \quad 1 \leq i < \ell - 1\,, \\ e_i + e_\ell &= \textstyle\sum_{h=i}^{\ell} \alpha_h && \text{se} \quad 1 \leq i \leq \ell - 2\,, \\ e_{\ell-1} + e_\ell &= \alpha_\ell \end{aligned} \tag{4.31}$$

Osserviamo che $\alpha_{\ell-2}$ è l'unico punto di diramazione e quindi il diagramma di Dynkin di $\mathcal{R}$ è effettivamente di tipo D_ℓ.

Per ogni $1 \leq i < j \leq \ell$ poniamo:

$$\sigma_{i,j} = s_{e_i - e_j} \circ s_{e_i + e_j}\,.$$

Abbiamo:

$$\sigma_{i,j}(e_h) = \begin{cases} e_h & \text{se} \quad h \neq i, j\,, \\ -e_i & \text{se} \quad h = i\,, \\ -e_j & \text{se} \quad h = j\,. \end{cases} \tag{4.32}$$

Queste trasformazioni generano un sottogruppo normale di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$, isomorfo a $\mathbb{Z}_2^{\ell-1}$, mentre le $s_{e_i-e_j}$ generano un sottogruppo isomorfo a $\mathfrak{S}_\ell$. Abbiamo quindi

$$\mathbf{W}(\mathcal{R}) \simeq \mathbb{Z}_2^{\ell-1} \ltimes \mathfrak{S}_\ell\,. \tag{4.33}$$

Se $\ell \geq 5$, il gruppo di automorfismi del diagramma di Dynkin si riduce all'identità e quindi

$$\mathbf{A}(\mathcal{R}) = \mathbf{W}(\mathcal{R}) \simeq \mathbb{Z}_2^{\ell-1} \ltimes \mathfrak{S}_\ell \quad \text{se} \quad \ell \geq 5\,. \tag{4.34}$$

Nel caso $\ell = 4$, le permutazioni dei vertici $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ sono isomorfismi del diagramma di Dynkin e quindi, nel caso $\ell = 4$, otteniamo

$$\mathbf{A}(\mathcal{R}_{D_4}) \simeq \left(\mathbb{Z}_2^{\ell-1} \ltimes \mathfrak{S}_\ell\right) \ltimes \mathfrak{S}_3\,. \tag{4.35}$$

Tipo E_8

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\alpha_1 & — & \alpha_3 & — & \alpha_4 & — & \alpha_5 & — & \alpha_6 & — & \alpha_7 & — & \alpha_8 \\
 & & & & | & & & & & & & & \\
 & & & & \alpha_2 & & & & & & & &
\end{array}$$

Matrice di Cartan:

$$E_8 = \begin{pmatrix}
2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}$$

Sia $E = \mathbb{R}^8$, con base canonica $e_1, \ldots, e_8$. Consideriamo il sottogruppo additivo Λ di $\mathbb{R}^8$ definito da:

$$\alpha \in \Lambda \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \sum_{h=1}^8 k_i e_i, \\ 2k_i \in \mathbb{Z} \quad \forall 1 \leq i \leq 8, \\ k_i - k_j \in \mathbb{Z} \quad \forall 1 \leq i < j \leq 8, \\ \sum_{i=1}^8 k_i \in 2\mathbb{Z}\,. \end{cases} \tag{4.36}$$

Sia

$$\mathcal{R} = \{\alpha \in \Lambda \mid \|\alpha\|^2 = 2\}\,. \tag{4.37}$$

$\mathcal{R}$ contiene tutti i vettori della forma $\pm e_i \pm e_j$ con $1 \leq i < j \leq 8$ e quindi genera $\mathbb{R}^8$. Scriviamo un elemento α di $\mathcal{R}$ nella forma:

$$\alpha = \sum_{h=1}^8 \frac{t_h}{2} e_h$$

con $t_1, \dots, t_8 \in \mathbb{Z}$. Poiché $t_i - t_j \in 2\mathbb{Z}$ per ogni $i, j = 1, \dots, 8$, i coefficienti t_h sono o tutti pari o tutti dispari. Nel caso siano tutti pari, scriviamo $t_h = 2r_h$ con $r_h \in \mathbb{Z}$ per $h = 1, \dots, 8$ e dalla condizione che $\sum r_h^2 = 2$ deduciamo che α è della forma $\pm e_i \pm e_j$ con $1 \leq i < j \leq 8$. Se i t_h sono tutti dispari, poniamo $t_h = 2r_h + 1$ con $r_h \in \mathbb{Z}$ per ogni $h = 1, \dots, 8$. Dalla $\sum (2r_h + 1)^2 = 8$, deduciamo che gli r_h devono essere tutti uguali o a 0 o a -1, cioè i t_h sono tutti uguali a ± 1 ed otteniamo quindi:

$$\alpha = \sum \epsilon_i e_i \qquad \text{con} \qquad \epsilon_i \in \{1, -1\} \quad \text{per ogni} \quad i = 1, \dots, 8 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{8} \epsilon_i \in 4\mathbb{Z}\,.$$

Posto $\epsilon_i = (-1)^{k_i}$, la condizione $\sum_{i=1}^{8} \epsilon_i \in 4\mathbb{Z}$ equivale a $\sum_{h=1}^{8} k_i \in 2\mathbb{Z}$.

Gli elementi di $\mathcal{R}$ sono quindi:

$$\text{(4.38)} \qquad \begin{cases} \pm e_i \pm e_j & \text{per} \quad 1 \leq i < j \leq 8\,, \\ \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{8} (-1)^{k_h} e_h & \text{con} \quad k_h \in \{0, 1\},\ \sum_{h=1}^{8} k_h \in 2\mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Quindi il numero di elementi di $\mathcal{R}$ è

$$\binom{8}{2} \cdot 4 + 2^7 = 28 \cdot 4 + 128 = 240\,.$$

Se $\alpha = \sum a_h e_h, \beta = \sum b_h e_h$ appartengono a $\mathcal{R}$, e $\alpha \neq \pm\beta$, abbiamo

$$\text{(4.39)} \qquad \langle \alpha, \beta \rangle = 2(\alpha|\beta) = 2 \sum a_h b_h \in \{0, \pm 1\}\,,$$

come si verifica facilmente utilizzando le (4.38).

Se $\alpha = \sum a_h e_h, \beta = \sum b_h e_h$ appartengono a $\mathcal{R}$, abbiamo:

$$\text{(4.40)} \qquad s_\alpha(\beta) = \sum_{h=1}^{8} \left(b_h - \left(\sum_{i=1}^{8} a_i b_i \right) a_h \right) e_h$$

ed esaminando le varie possibilità in (4.38) si ricava che $s_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$. Consideriamo il vettore $\xi = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 23) \in \mathbb{R}^8$. Esso è regolare perché:

$$\begin{cases} (\xi| \pm e_i \pm e_j) = \pm(i-1) \pm (j-1) \neq 0 \quad \text{per} \quad 1 \leq 1 < j \leq 8 \\ (\xi| \pm e_i \pm e_8) = \pm(i-1) \pm 23 \neq 0 \quad \text{per} \quad 1 \leq i \leq 7 \\ (\xi| \pm e_8 + \sum_{h=1}^{7} \epsilon_h e_h = 23 + \sum \epsilon_h (h-1) \end{cases}$$

e

$$\left| \sum \epsilon_h (h-1) \right| \leq \left| \sum_{h=1}^{6} h \right| \leq 21\,.$$

Chiaramente $|(\xi|\alpha)| \geq 1 \qquad \forall \alpha = \mathcal{R}$ e $(\xi|\alpha) = 1$ per le radici:

$$\text{(4.41)} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_8) - \frac{1}{2}(e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7), \\ \alpha_2 = e_1 + e_2, \\ \alpha_3 = e_2 - e_1, \\ \alpha_4 = e_3 - e_2, \\ \alpha_5 = e_4 - e_3, \\ \alpha_6 = e_5 - e_4, \\ \alpha_7 = e_6 - e_5, \\ \alpha_8 = e_7 - e_6\,. \end{cases}$$

Esse formano quindi una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{R}$.

La radice α_4 è legata alle radici α_2, α_3 e α_5 ed è dunque il vertice di diramazione di $\Gamma(\mathcal{R})$. Si verifica facilmente che il diagramma di Dynkin è di tipo E_8.

Chiaramente $(\xi|\alpha)$ per $\alpha \in \mathcal{R}$ ha un massimo per $\alpha = e_7 + e_8$, che risulta quindi il vettore di peso massimo:

$$e_7 + e_8 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8 \,. \tag{4.42}$$

Il gruppo di Weil $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ coincide con il gruppo $\mathbf{A}(\mathcal{R})$ degli automorfismi di $\mathcal{R}$ e ha ordine $2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Tipo E_7

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\alpha_1 & — & \alpha_3 & — & \alpha_4 & — & \alpha_5 & — & \alpha_6 & — & \alpha_7 \\
 & & & & | & & & & & & \\
 & & & & \alpha_2 & & & & & &
\end{array}$$

La matrice di Cartan è:

$$E_7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo $\mathbb{R}^8$, in cui è fissato un sistema di radici $\tilde{\mathcal{R}}$ di tipo E_8, con base $\alpha_1, \dots, \alpha_8$ descritta da (4.41).

Consideriamo il sottospazio E generato da $\alpha_1, \dots, \alpha_7$. Questa è la base di un sistema di radici $\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}} \cap E$ di tipo E_7. I suoi elementi sono

$$\begin{cases} \pm e_i \pm e_j \qquad \text{per} \quad 1 \leq i < j \leq 6, \\ \pm(e_7 - e_8), \\ \pm\frac{1}{2}\left(e_7 - e_8 + \sum_{h=1}^6 \epsilon_h e_h\right) \quad \text{con} \quad \epsilon_h \in \{\pm 1\}, \quad \sum_{h=1}^6 \epsilon_h \notin 2\mathbb{Z} \,. \end{cases} \tag{4.43}$$

Il numero di radici in E è $2 + \binom{6}{2} \cdot 4 + 2^6 = 126$.

Il gruppo di Weyl coincide con il gruppo degli automorfismi e ha ordine $2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

Tipo E_6

$$\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_1 & — & \alpha_3 & — & \alpha_4 & — & \alpha_5 & — & \alpha_6 \\
 & & & & | & & & & \\
 & & & & \alpha_2 & & & &
\end{array}$$

Matrice di Cartan:

$$E_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo $\mathbb{R}^8$, in cui è fissato un sistema di radici $\tilde{\mathcal{R}}$ di tipo E_8, con base $\alpha_1, \ldots, \alpha_8$ descritta da (4.41).

Consideriamo il sottospazio E generato da $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$. Questa è la base di un sistema di radici $\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}} \cap E$ di tipo E_6. I suoi elementi sono

$$(4.44)\qquad \begin{cases} \pm e_i \pm e_j \qquad \text{per} \quad 1 \leq i < j \leq 5, \\ \pm\frac{1}{2}\left(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{h=1}^{5} \epsilon_h e_h\right) \quad \text{con} \quad \epsilon_h \in \{\pm 1\}, \quad \sum_{h=1}^{5} \epsilon_h \in 2\mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Il numero di radici è $\binom{5}{2} \cdot 4 + 2^5 = 72$.

Il gruppo di Weyl $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ ha ordine $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$ e il quoziente $\mathbf{A}(\mathcal{R})/\mathbf{W}(\mathcal{R})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

Tipo F_4

$$\alpha_1 — \alpha_2 => \alpha_3 — \alpha_4$$

Matrice di Cartan:

$$F_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ la base canonica e_1, e_2, e_3, e_4 e poniamo $e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Il sottogruppo additivo Λ di $\mathbb{R}^4$ generato da $e_1, e_2, e_3, e_4, \frac{1}{2}e$ si caratterizza come l'insieme dei vettori $\alpha = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 + k_4e_4$ di $\mathbb{R}^4$ tali che:

$$(4.45)\qquad \begin{cases} 2k_i \in \mathbb{Z} \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ k_i - k_j \in \mathbb{Z} \quad \text{per} \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Sia

$$(4.46)\qquad \mathcal{R} = \{\alpha \in \Lambda \mid \|\alpha\| = 1\} \cup \{\alpha \in \Lambda \mid \|\alpha\|^2 = 2\}\,.$$

Allora $\mathcal{R}$ consiste dei vettori:

$$(4.47)\qquad \begin{cases} \pm e_i \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ \pm e_i \pm e_j \text{per} \quad 1 \leq i < j \leq 4, \\ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4). \end{cases}$$

Si verifica che $\mathcal{R}$ è un sistema di radici e che

$$(4.48)\qquad \alpha_1 = e_2 - e_3,\ \alpha_2 = e_3 - e_4,\ \alpha_3 = e_4,\ \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$$

è una base di $\mathcal{R}$.

Poiché la matrice di Cartan di $\mathcal{R}$ è la F_4 data sopra, questo è un sistema di tipo F_4. Poiché le radici di lunghezza massima formano un sistema di tipo D_4, otteniamo

$$(4.49)\qquad \mathbf{A}(\mathcal{R}) = \mathbf{W}(\mathcal{R}) \simeq \left(\mathbb{Z}_2^3 \ltimes \mathfrak{S}_4\right) \ltimes \mathfrak{S}_3\,.$$

Tipo G_2

$$\alpha_1 \equiv> \alpha_2$$

Matrice di Cartan:

$$G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ l'iperpiano E ortogonale a $e = e_1 + e_2 + e_3$. Sia

$$\mathcal{R} = \{\alpha \in \mathbb{Z}^3 \,|\, (\alpha|e) = 0,\ \|\alpha\|^2 \in \{2, 6\}\,\}\,. \tag{4.50}$$

Gli elementi di $\mathcal{R}$ sono della forma $k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3$ con $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$, $k_1+k_2+k_3 = 0$ e $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \in \{2, 6\}$. Otteniamo quindi i 12 elementi:
(4.51)

$$\begin{cases} \pm(e_1 - e_2),\ \pm(e_1 - e_3),\ \pm(e_2 - e_3) \quad \text{di lunghezza } \sqrt{2} \\ \pm(2e_1 - e_2 - e_3),\ \pm(2e_2 - 1_1 - e_3),\ \pm(2e_3 - e_1 - e_2) \quad \text{di lunghezza } \sqrt{6}. \end{cases}$$

Si verifica direttamente che $\langle \alpha, \beta \in \{\pm 1, \pm 3\}$ se $\alpha \neq \beta \in \mathcal{R}$ e che $s_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$. Quindi $\mathcal{R}$ è un sistema di radici. Una sua base è

$$\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = e_2 + e_3 - 2e_1\,. \tag{4.52}$$

Il gruppo di Weyl coincide con il gruppo degli automorfismi di $\mathcal{R}$ ed è isomorfo al gruppo diedrale di ordine 12, definito dai generatori a, b e dalla relazione $(ab)^6 = 1$.

§5 Sistemi di radici non ridotti

Fissiamo uno spazio vettoriale reale E, su cui consideriamo fissato un prodotto scalare $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$. Considereremo in E sistemi di radici per $\mathcal{R}$ il cui gruppo di Weyl sia un gruppo di trasformazioni ortogonali rispetto al prodotto scalare assegnato. Ricordiamo che, se $\mathcal{R} \subset E$ è un sistema di radici, due radici proporzionali di $\mathcal{R}$ possono avere, come fattore di proporzionalità, solo uno dei numeri ± 1, ± 2, $\pm\frac{1}{2}$. Una radice $\alpha \in \mathcal{R}$ tale che $\alpha/2 \notin \mathcal{R}$ si dice *indivisibile.*

Teorema 5.1 *Sia $\mathcal{R} \subset E$ un sistema di radici irriducibile, non ridotto, di rango ≥ 2.*

- (i) *L'insieme $\mathcal{R}' = \{\alpha \in \mathcal{R} \,|\, \alpha/2 \notin \mathcal{R}\}$ è un sistema di radici irriducibile e ridotto di E e $\mathbf{W}(\mathcal{R}') = \mathbf{W}(\mathcal{R})$.*
- (ii) *Sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$ l'insieme delle radici di lunghezza minima λ in $\mathcal{R}$. Allora due qualsiasi radici non proporzionali di $\mathcal{A}$ sono ortogonali.*
- (iii) *Sia $\mathcal{D}$ l'insieme delle radici di $\mathcal{R}$ di lunghezza $\lambda\sqrt{2}$. Allora $\mathcal{D} \neq \emptyset$ ed abbiamo:*

$$\mathcal{R}' = \mathcal{A} \cup \mathcal{D} \qquad ed \qquad \mathcal{R} = \mathcal{A} \cup \mathcal{D} \cup 2\mathcal{A}\,. \tag{5.1}$$

Dim.
(i) $\mathcal{R}' \subset E \setminus \{0\}$ contiene un multiplo di ciascuna radice di $\mathcal{R}$ e quindi genera E. Inoltre $s_\alpha(\mathcal{R}') = \mathcal{R}'$ per ogni $\alpha \in \mathcal{R}$ e quindi è chiaro che le proprietà (R1), (R2) ed (R3) che definiscono i sistemi di radici sono soddisfatte.

(ii), (iii) Poiché $\mathcal{R}$ non è ridotto, contiene almeno una radice α tale che 2α sia ancora una radice. Poiché $\mathcal{R}$ è irriducibile e di rango ≥ 2, vi è almeno una radice

$\beta \in \mathcal{R}$ tale che $\langle \beta, \alpha \rangle > 0$. Abbiamo $\frac{1}{2}\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \beta, 2\alpha \rangle \in \mathbb{Z}$. L'unica possibilità è quindi che $\langle \beta, \alpha \rangle >= 2$, e dunque $\|\beta\| = \|\alpha\|\sqrt{2}$. Poiché $\mathcal{R}'$ è ridotto e irriducibile le possibili lunghezze di elementi di $\mathcal{R}'$ possono essere solo λ e $\lambda\sqrt{2}$, ove λ è la minima lunghezza di un elemento di $\mathcal{R}$.

Il gruppo di Weyl $\mathbf{W}(\mathcal{R}')$ opera transitivamente sulle radici di lunghezza minima λ e quindi: per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$ anche 2α è una radice ed otteniamo perciò le decomposizioni: $\mathcal{R}' = \mathcal{A} \cup \mathcal{D}$ e $\mathcal{R} = \mathcal{A} \cup \mathcal{D} \cup 2\mathcal{A}$.

Viceversa, abbiamo:

Teorema 5.2 *Sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici ridotto e irriducibile. Supponiamo che $\{\|\alpha\| \,|\, \alpha \in \mathcal{R}\} = \{\lambda, \lambda\sqrt{2}\}$. Sia $\mathcal{A} = \{\alpha \in \mathcal{R} \,|\, \|\alpha\| = \lambda\}$. Se due qualsiasi elementi di $\mathcal{A}$ sono tra loro ortogonali, allora $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup 2\mathcal{A}$ è ancora un sistema di radici, non ridotto, di cui $\mathcal{R}$ è il sistema di radici indivisibili.*

CAPITOLO XIV

COSTRUZIONE DELLE ALGEBRE DI LIE SEMISEMPLICI

§1 Algebra inviluppante universale

Sia $\mathfrak{A}$ un'algebra associativa su un campo $\mathbb{K}$. Lo spazio vettoriale $\mathfrak{A}$, con il commutatore definito da

$$[a,b] = ab - ba \qquad \forall a,b \in \mathfrak{A} \tag{1.1}$$

è un'algebra di Lie su $\mathbb{K}$.

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie ed $\mathfrak{A}$ un'algebra associativa sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Chiamiamo *rappresentazione* di $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{A}$ un omomorfismo di algebre di Lie:

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{A} \tag{1.2}$$

per la struttura di algebra di Lie di $\mathfrak{A}$ definita dalla (1.1). Ciò significa che

$$\rho([X,Y]) = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}\,. \tag{1.3}$$

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su $\mathbb{K}$. Chiamiamo *algebra inviluppante universale* di $\mathfrak{g}$ il dato di un'algebra associativa unitaria $\mathfrak{A}$ su $\mathbb{K}$ e di una rappresentazione $u : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{A}$ tale che

- (i) $u(\mathfrak{g})$ genera $\mathfrak{A}$ come $\mathbb{K}$-algebra associativa unitaria;
- (ii) per ogni rappresentazione $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{B}$ di $\mathfrak{g}$ in un'algebra associativa unitaria $\mathfrak{B}$ su $\mathbb{K}$ esiste un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre associative unitarie $\tilde{\rho} : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, "\tilde{\rho}"] & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "u"] \arrow[r, equal] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\rho"'] \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Osserviamo che, per la condizione (i), l'estensione $\tilde{\rho}$ di ρ è unica.

Teorema 1.1 *Ogni algebra di Lie ammette un'algebra inviluppante universale, unica a meno di isomorfismi.*

Dim. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie sul campo $\mathbb{K}$. Indichiamo con $T(\mathfrak{g}) = \oplus_{m=0}^{\infty} T^m(\mathfrak{g})$ l'algebra tensortiale del $\mathbb{K}$ spazio vettoriale $\mathfrak{g}$. Sia $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{B}$ una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ in una $\mathbb{K}$-algebra associativa unitaria $\mathfrak{B}$. Per la proprietà universale del prodotto tensoriale, la ρ si estende a un unico morfismo di algebre associative unitarie

$$T(\rho) : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{B}\,. \tag{1.5}$$

Poiché ρ è una rappresentazione, il nucleo di $T(\rho)$ contiene l'ideale bilatero $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ generato dagli elementi della forma

$$X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y], \qquad \text{per} \quad X, Y \in \mathfrak{g}\,. \tag{1.6}$$

Il quoziente

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \frac{T(\mathfrak{g})}{\mathcal{I}(\mathfrak{g})} \tag{1.7}$$

è un'algebra associativa unitaria e per passaggio al quoziente otteniamo una rappresentazione $u : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ definita dal diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "u"'] & T(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \arrow[r, equal] & \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

ove la ι è l'inclusione associata all'isomorfismo $\mathfrak{g} \simeq T^1(\mathfrak{g})$ e la π è la proiezione nel quoziente. Osserviamo che $\mathcal{I}(\mathfrak{g}) \cap u(\mathfrak{g}) = \{0\}$, quindi $u : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ è iniettiva e $u(\mathfrak{g})$ genera $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ perché $T^1(\mathfrak{g})$ genera $T(\mathfrak{g})$ come algebra associativa unitaria. In particolare $u : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ verifica la condizione (i).

Poiché $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ è contenuto nel nucleo di $T(\rho)$, otteniamo un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\tilde{\rho}"] & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "u"] \arrow[r, "\iota"'] & T(\mathfrak{g}) \arrow[u, "T(\rho)"'] \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

che definisce la $\tilde{\rho}$. Quindi $u : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ soddisfa anche (ii) ed è un'algebra inviluppante universale di $\mathfrak{g}$.

Dimostriamo ora l'unicità. Se $u' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{A}$ è un'algebra inviluppante universale di $\mathfrak{g}$, otteniamo estensioni $\tilde{u} : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ e $\tilde{u}' : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{A}$ di $u : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ e $u' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{A}$. Osserviamo che $u' = \tilde{u}' \circ u : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{A}$ e $u = \tilde{u} \circ u' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ sono rappresentazioni e la prima si estende all'identità su $\mathfrak{A}$, la seconda all'identità su $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$: quindi $\tilde{u}' \circ \tilde{u}$ e $\tilde{u} \circ \tilde{u}'$ sono rispettivamente l'identità su $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ e dunque $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ sono isomorfi.

Quindi, a meno di isomorfismi, l'algebra $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ costruita nella dimostrazione del Teorema 1.1 è l'*algebra inviluppante universale* di $\mathfrak{g}$. Essendo il quoziente dell' algebra graduata $T(\mathfrak{g})$ rispetto all'ideale bilatero $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$, l'algebra inviluppante universale è dotata di una *filtrazione canonica*

$$\mathfrak{U}^{(0)}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{U}^{(1)}(\mathfrak{g}) \subset \cdots \subset \mathfrak{U}^{(m)}(\mathfrak{g}) \subset \cdots \tag{1.10}$$

ove

$$\mathfrak{U}^{(m)}(\mathfrak{g}) = \pi(T^m(\mathfrak{g}))\,. \tag{1.11}$$

Ricordiamo che vale il

TEOREMA 1.2 (POINCARÉ-BIRCHOFF-WITT) *Sia* $\mathfrak{g}$ *un'algebra di Lie su* $\mathbb{K}$ *e sia* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *la sua algebra inviluppante universale, su cui si considera la filtrazione canonica. Allora il graduato associato all'algebra filtrata* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$*:*

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g})) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{U}^{(m)}(\mathfrak{g})}{\mathfrak{U}^{(m-1)}(\mathfrak{g})} \tag{1.12}$$

è isomorfo all'algebra simmetrica di $\mathfrak{g}$*.*

In particolare, se $\{X_i\}_{i\in I}$ *è una base di* $\mathfrak{g}$ *come spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ *e fissiamo su* I *un ordinamento totale* $<$*, gli elementi*

$$\pi(X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_m}) \qquad \text{con} \qquad i_1 \leq \cdots \leq i_m \tag{1.13}$$

formano una base di $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *come spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$*.*
Per la dimostrazione, vedi Bourbaki: *Groupes et algèbres de Lie* I, §2, n. 7.

Una conseguenza del Teorema 1.2 è la seguente:

PROPOSIZIONE 1.3 *Sia* $\mathfrak{g}$ *un'algebra di Lie su* $\mathbb{K}$ *e sia* $u : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *la sua algebra inviluppante universale. Sia* $\mathfrak{a}$ *una sottoalgebra di Lie di* $\mathfrak{g}$ *e sia* $u_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{a} :\longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ *la sua algebra inviluppante universale.*

(*i*) *Vi è un monomorfismo canonico di algebre associative unitarie:* $\hat{\iota} : \mathfrak{U}(\mathfrak{a}) \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *che rende il diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a} & \xrightarrow{\iota} & \mathfrak{g} \\ {\scriptstyle u_{\mathfrak{a}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle u} \\ \mathfrak{U}(\mathfrak{a}) & \xrightarrow[\hat{\iota}]{} & \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \end{array} \tag{1.14}$$

commutativo ($\iota : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *è l'inculsione).*

(*ii*) *Se* $\mathfrak{a}$ *è un ideale di* $\mathfrak{g}$ *e* $u_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}} : \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ *la sua algebra inviluppante universale, vi è un unico epimorfismo canonico di* $\mathbb{K}$*-algebre associative unitarie* $\hat{\pi} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ *che renda commutativo il diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \\ {\scriptstyle u}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle u_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}} \\ \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow[\hat{\pi}]{} & \mathfrak{U}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}). \end{array} \tag{1.15}$$

Il suo nucleo è l'ideale bilatero di $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *generato da* $u(\mathfrak{a})$*.*

(*iii*) *Se* $\mathfrak{g} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{g}_i$ *è una somma diretta di ideali* $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}$*,* $i \in I$*, allora:*

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \simeq \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_i)\,. \tag{1.16}$$

DIM. (*i*) L'incusione $\iota : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{g}$ si estende a un'inclusione $T(\iota) : T(\mathfrak{a}) \longrightarrow T(\mathfrak{g})$ tra le algebre tensoriali. Basta allora osservare che $\mathcal{I}(\mathfrak{g}) \cap T(\iota)(T(\mathfrak{a})) = T(\iota)(\mathcal{I}(\mathfrak{a}))$.

(*ii*) L'epimorfismo lineare $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ induce un epimorfismo $T(\pi) : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow T(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$. Poiché l'immagine inversa di $\mathcal{I}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ in $T(\mathfrak{g})$ contiene $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$, chiaramente otteniamo un epimorfismo $\hat{\pi} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ che rende il diagramma (1.15) commutativo. Utilizzando il Teorema 1.2, si dimostra facilmente che il nucleo è l'ideale bilatero generato da $u(\mathfrak{a})$ in $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

(*iii*) Si verifica che anche questa è una facile conseguenza del Teorema 1.2.

PROPOSIZIONE 1.4 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su $\mathbb{K}$ e sia $u : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ la sua algebra inviluppante universale. Se $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ è un sistema di generatori di $\mathfrak{g}$ come algebra di Lie, allora $\mathfrak{g}$ è isomorfa alla sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ generata da $u(\Gamma)$.*

Se $\mathfrak{A}$ è una $\mathbb{K}$-algebra associativa unitaria, chiamiamo *rappresentazione lineare* di $\mathfrak{A}$ il dato di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ e di un omomomorfismo di algebre associative unitarie $\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Sia ora $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su $\mathbb{K}$ e sia ρ una rappresentazione lineare di $\mathfrak{g}$ su uno spazio vettoriale V. Essa si prolunga in modo unico a una rappresentazione lineare $\tilde{\rho}$ di $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ su V, che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{u} & \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \\ {\scriptstyle\rho}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\tilde{\rho}} \\ \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V) & = & \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)\,. \end{array} \tag{1.17}$$

§2 ALGEBRE DI LIE LIBERE

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Chiamiamo *algebra di Lie libera* di V il dato di un'algebra di Lie $\mathfrak{a}$ su $\mathbb{K}$ e di un monomorfismo $\mathbb{K}$-lineare

$$\iota : V \longrightarrow \mathfrak{a} \tag{2.1}$$

tale che:

> Per ogni algebra di Lie $\mathfrak{g}$ su $\mathbb{K}$ ed ogni applicazione $\mathbb{K}$-lineare $\phi : V \longrightarrow \mathfrak{g}$ esiste un unico omomorfismo di algebre di Lie $\tilde{\phi} : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{g}$ che renda commutativo il diagramma:
>
> $$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{g} \\ {\scriptstyle\iota}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\tilde{\phi}} \\ \mathfrak{a} & = & \mathfrak{a}. \end{array} \tag{2.2}$$

TEOREMA 2.1 *Per ogni spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ esiste, unica a meno di isomorfismi, un'algebra di Lie libera su V. La sua algebra inviluppante universale è isomorfa a $T(V)$.*

DIM. Sia $T(V)$ l'algebra tensoriale di V. Consideriamo su $T(V)$ la struttura di algebra di Lie definita da (1.1) e sia $\mathfrak{L}(V)$ la sottoalgebra di Lie di $T(V)$ generata da $V \simeq T^1(V)$.

Sia $\mathfrak{g}$ una qualsiasi algebra di Lie su $\mathbb{K}$ e $\phi : V \to \mathfrak{g}$ un'applicazione $\mathbb{K}$-lineare. Essa si estende a un omomorfismo di algebre:

$$T(\phi) : T(V) \to T(\mathfrak{g})$$

che dà, per passaggio al quoziente, un'applicazione:

$$\pi \circ T(\phi) : T(V) \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g}),$$

ove $u : \mathfrak{g} \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ è l'algebra inviluppante universale di $\mathfrak{g}$ e $\pi : T(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ la proiezione canonica. Identifichiamo $\mathfrak{g}$ a $u(\mathfrak{g})$, utilizzando la Proposizione 1.4.

Definiamo $\tilde{\phi}$ come la restrizione di $\pi \circ T(\phi)$ a $\mathfrak{L}(V)$. L'immagine di $\tilde{\phi}$ è contenuta in $\mathfrak{g}$ ed è un omomorfismo di algebre di Lie che rende commutativo il diagramma (2.2) (con $\mathfrak{a} = \mathfrak{L}(V)$). L'unicità di $\tilde{\phi}$ segue dal fatto che V genera $\mathfrak{L}(V)$ come algebra di Lie.

L'unicità, a meno di isomorfismi, dell'algebra di Lie libera di V segue dalla proprietà universale espressa dal diagramma commutativo (2.2). Se $\iota_{\mathfrak{a}} : V \to \mathfrak{a}$ è un'algebra di Lie libera di V, otteniamo diagrammi commutativi:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota_{\mathfrak{a}}"'] & \mathfrak{L}(V) \\ \mathfrak{a} \arrow[r, equal] & \mathfrak{a} \arrow[u, "\tilde{\iota}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota_{\mathfrak{a}}"'] & \mathfrak{L}(V) \arrow[d, "\tilde{\iota}_{\mathfrak{a}}"] \\ \mathfrak{a} \arrow[r, equal] & \mathfrak{a} \end{tikzcd}$$

e $\tilde{\iota} \circ \tilde{\iota}_{\mathfrak{a}} = id_{\mathfrak{L}(V)}$, $\tilde{\iota}_{\mathfrak{a}} \circ \tilde{\iota} = id_{\mathfrak{a}}$ perché estendono rispettivamente $\iota = \tilde{\iota} \circ \iota_{\mathfrak{a}}$ e $\iota_{\mathfrak{a}} = \tilde{\iota}_{\mathfrak{a}} \circ \iota$.

Sia ora $\mathfrak{A}$ un'algebra associativa unitaria e sia $\rho : \mathfrak{L}(V) \to \mathfrak{A}$ una rappresentazione di $\mathfrak{L}(V)$. Identifichiamo V a $\iota(V) \subset \mathfrak{L}(V)$. La restrizione $\rho|V : V \to \mathfrak{A}$ si estende in modo unico a un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre unitarie:

$$T(\rho|V) : T(V) \to \mathfrak{A}\,.$$

La restrizione di $T(\rho|V)$ a $\mathfrak{L}(V) \subset T(V)$ coincide con ρ perché V genera $\mathfrak{L}(V)$ come sottoalgebra di Lie di $T(V)$.

Sia ora $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su $\mathbb{K}$ e sia $\{X_i\}_{i\in I}$ un sistema di generatori di $\mathfrak{g}$ come algebra di Lie. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{g}$ generato da $\{X_i\}_{i\in I}$. L'inclusione $V \hookrightarrow \mathfrak{g}$ definisce un unico epimorfismo:

$$\pi : \mathfrak{L}(V) \to \mathfrak{g}\,. \tag{2.3}$$

Indichiamo con $\mathcal{J}(V,\mathfrak{g})$ il nucleo di π. L'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è allora isomorfa al quoziente $\mathfrak{L}(V)/\mathcal{J}(V,\mathfrak{g})$. Osserviamo ancora che l'algebra inviluppante universale di $\mathfrak{g}$ è isomorfa al quoziente di $T(V)$ rispetto al suo ideale bilatero generato da $\mathcal{J}(V,\mathfrak{g})$.

Viceversa, dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ e un ideale $\mathcal{I}$ di $\mathfrak{L}(V)$, l'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{L}(V)/\mathcal{I}$ risulta univocamente determinata da una base $(X_i)_{i\in I}$ di V e da un sistema di generatori $(Z_j)_{j\in J}$ di $\mathcal{I}$. I generatori Z_j si possono a loro volta scrivere come *polinomi di Lie* $P_j(...X_i...)$ nei vettori X_i della base assegnata di V. Diremo allora che l'albebra di Lie $\mathfrak{g}$ è definita dai *generatori* $(X_i)_{i\in I}$ e dalle *relazioni*

$$P_j(...X_i...) = 0 \quad \text{per} \quad j \in J\,. \tag{2.4}$$

§3 Una costruzione preliminare

Sia $\mathcal{R}$ un sistema di radici nello spazio vettoriale reale E, di dimensione finita $\ell \geq 1$. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{R}$, e sia $(n_{\alpha,\beta})$, con $n_{\alpha,\beta} = \langle \alpha, \beta \rangle$, la matrice di Cartan di $\mathcal{R}$. Fissato un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero, sia B lo spazio vettoriale libero su $\mathbb{K}$ con base $\mathcal{B}$. Sia $T(B)$ l'algebra tensoriale di B. Per ogni $\alpha \in \mathcal{B}$ definiamo degli endomorfismi $\mathbb{K}$-lineari x_α, h_α, y_α di $T(B)$ ponendo:

$$x_\alpha(1) = \alpha, \qquad x_\alpha(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = \alpha \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n \quad \forall \alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathcal{B}\,, \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} h_\alpha(1) = 0\,, \\ h_\alpha(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = \left(\sum_{i=1}^n n_{\alpha_i,\alpha}\right) \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n \\ \qquad \forall \alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathcal{B}\,, \end{cases} \tag{3.2}$$

e definiamo y_α per ricorrenza ponendo

$$\begin{cases} y_\alpha(1) = 0\,, \\ y_\alpha(\beta) = 0 \quad \forall \beta \in \mathcal{B}\,, \\ y_\alpha(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = (x_{\alpha_1} \circ y_\alpha - \delta_{\alpha,\alpha_1})(\alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) \\ \qquad \forall \alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathcal{B}\,, \quad n \geq 2\,. \end{cases} \tag{3.3}$$

Lemma 3.1 *Per ogni $\alpha \in \mathcal{B}$, l'endomorfismo x_α ha grado 1, l'endomorfismo h_α ha grado 0, l'endomorfismo y_α ha grado -1. Valgono le relazioni:*

(1) $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$ *per ogni* $\alpha \in \mathcal{B}$*;*
(2) $[h_\alpha, x_\beta] = n_{\beta,\alpha} x_\beta$ *per ogni* $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$*;*
(3) $[h_\alpha, y_\beta] = -n_{\beta,\alpha} y_\beta$ *per ogni* $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$*;*
(4) $[h_\alpha, h_\beta] = 0$ *per ogni* $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$*;*
(5) $[x_\alpha, y_\beta] = 0$ *per ogni* $\alpha \neq \beta \in \mathcal{B}$*.*

Dim. Il fatto che x_α abbia grado 1 e h_α grado 0 segue immediatamente dalla definizione. La relazione $y_\alpha(T^m(B)) \subset T^{m-1}(B)$ si verifica ancora facilmente per induzione su m. La (4) è ovvia dalla definizione.

Osserviamo che:

$$(x_\alpha \circ y_\beta - y_\beta \circ x_\alpha)(1) = y_\beta(\alpha) = 0$$

se $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$; se γ è un'altra radice in $\mathcal{B}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} (x_\alpha \circ y_\beta - y_\beta \circ x_\alpha)(\gamma) &= -y_\beta \circ x_\alpha(\gamma) \\ &= -y_\beta(\alpha \otimes \gamma) \\ &= -(x_\alpha \circ y_\beta - \delta_{\beta,\alpha} h_\alpha)(\gamma) \\ &= \delta_{\beta,\alpha} n_{\gamma,\alpha} \gamma \end{aligned}$$

e quindi la (1) e la (5) valgono per la restrizione di $[x_\alpha, y_\beta]$ a $T^0(B) \oplus T^1(B)$. Abbiamo poi, per ogni $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} y_\beta \circ x_\alpha(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) &= y_\beta(\alpha \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) \\ &= (x_\alpha \circ y_\beta - \delta_{\alpha,\beta})(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) \end{aligned}$$

e quindi:

$$[x_\alpha, y_\beta](\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = \delta_{\alpha,\beta} h_\beta(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n)$$

dimostra (1) e (5).

Verifichiamo la (2). Siano $\alpha, \beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{B}$. Allora:

$$[h_\alpha, x_\beta](1) = h_\alpha \circ x_\beta(1) = n_{\beta,\alpha}\beta = n_{\beta,\alpha}x_\beta(1)\,,$$

$$\begin{aligned}[h_\alpha, x_\beta](\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) &= h_\alpha(\beta \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) - (\textstyle\sum_{i=1}^n n_{\alpha_i,\alpha})\, \beta \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n \\ &= n_{\beta,\alpha}x_\beta(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n)\,.\end{aligned}$$

Per dimostrare la (3), consideriamo per $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}0 &= [h_\alpha, [x_\beta, y_\gamma]] \\ &= [n_{\beta,\alpha}x_\beta, y_\gamma] + [x_\beta, [h_\alpha, y_\gamma]] \\ &= [x_\beta, n_{\gamma,\alpha}y_\gamma + [h_\alpha, y_\gamma]]\,.\end{aligned}$$

Osserviamo che $([h_\alpha, y_\gamma] + n_{\gamma,\alpha}y_\gamma)(t) = 0$ se $t \in T^0(B) \oplus T^1(B)$. Abbiamo poi, se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}([h_\alpha, y_\gamma] + n_{\gamma,\alpha}y_\gamma)(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) &= ([h_\alpha, y_\gamma] + n_{\gamma,\alpha}y_\gamma) \circ x_{\alpha_1}(\alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) \\ &= x_{\alpha_1} \circ ([h_\alpha, y_\gamma] + n_{\gamma,\alpha}y_\gamma)(\alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_n)\end{aligned}$$

da cui si dimostra per ricorrenza su n che

$$([h_\alpha, y_\gamma] + n_{\gamma,\alpha}y_\gamma)(T^n(B)) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi vale la (3).

Lemma 3.2 *Gli endomorfismi $\{x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{B}\}$ sono linearmente indipendenti.*

Dim. Gli x_α, per $\alpha \in \mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti perché gli $x_\alpha(1) = \alpha$ sono linearmente indipendenti. Gli h_α, $\alpha \in \mathcal{B}$, sono linearmente indipendenti perché le loro restrizioni a B sono definite da:

$$h_\alpha(\beta) = n_{\beta,\alpha}\beta\,, \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{B}$$

e la matrice di Cartan è invertibile.

Consideriamo una combinazione lineare nulla degli y_α:

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k_\alpha y_\alpha = 0\,.$$

Abbiamo allora

$$0 = [x_\beta, \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k_\alpha y_\alpha] = k_\beta h_\beta$$

e quindi $k_\beta = 0$ per ogni $\beta \in \mathcal{B}$.

La tesi segue infine dal fatto che gli x_α, h_α, y_α hanno rispettivamente gradi 1, 0 e -1.

Sia ora $\mathfrak{a}$ l'algebra di Lie definita dai generatori H_α, X_α, Y_α ($\alpha \in \mathcal{B}$) e dalle relazioni:

$$(3.4) \qquad \begin{cases} [H_\alpha, H_\beta] = 0 \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{B}\,; \\ [H_\alpha, X_\beta] = n_{\beta,\alpha}X_\beta \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{B}\,; \\ [H_\alpha, Y_\beta] = -n_{\beta,\alpha}Y_\beta \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{B}\,; \\ [X_\alpha, Y_\beta] = \delta_{\alpha,\beta}H_\beta \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{B}\,. \end{cases}$$

Indichiamo con $\mathfrak{R}$ l'ideale delle relazioni.

Lemma 3.3 *Vi è un'unica rappresentazione*

$$\rho : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(T(B)) \tag{3.5}$$

definita da

$$\begin{cases} \rho(X_\alpha) = x_\alpha\,, \\ \rho(Y_\alpha) = y_\alpha\,, \\ \rho(H_\alpha) = h_\alpha\,, \\ \textit{per ogni } \alpha \in \mathcal{B}\,. \end{cases} \tag{3.6}$$

In particolare gli elementi $\{X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{B}\}$ *sono linearmente indipendenti in* $\mathfrak{a}$.

Lemma 3.4 *Esiste un unico isomorfismo involutivo* $\theta : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}$ *tale che*

$$\begin{cases} \theta(X_\alpha) = Y_\alpha \\ \theta(Y_\alpha) = X_\alpha \\ \theta(H_\alpha) = -H_\alpha \\ \quad \forall \alpha \in \mathcal{B}\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

Sia $Q \subset \mathbb{R}^\ell$ lo $\mathbb{Z}$-modulo libero generato da $\mathcal{B}$. Possiamo definire su $\mathfrak{a}$ una Q-graduazione, in cui gli elementi X_α, Y_α e H_α abbiano rispettivamente gradi α, $-\alpha$ e 0. Poiché gli elementi di $\mathfrak{R}$ sono omogenei, l'ideale $\mathcal{I}_{\mathfrak{a}}$ generato da $\mathcal{R}$ è omogeneo e quindi $\mathfrak{a}$ è un'algebra di Lie Q-omogenea:

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{q \in Q} \alpha^q\,. \tag{3.8}$$

Lemma 3.5 *Sia* $Z \in \mathfrak{a}$. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* $Z \in \mathfrak{a}^q$, $q \in Q$, *è che*

$$[H_\alpha, Z] = \langle q, \alpha \rangle Z \qquad \forall \alpha \in \mathcal{B}\,. \tag{3.9}$$

Dim. Poniamo per ogni $q \in Q$:

$$\mathfrak{a}^{(q)} = \{Z \in \mathfrak{a} \,|\, [H_\alpha, Z] = \langle q, \alpha \rangle Z \qquad \forall \alpha \in \mathcal{B}\,.$$

Chiaramente $\mathfrak{a}^{(q)} \cap \mathfrak{a}^{(q')} = \{0\}$ se $q \neq q'$. Basterà quindi verificare che $\mathfrak{a}^q \subset \mathfrak{a}^{(q)}$ per ogni $q \in Q$. Ora, per ogni $\alpha \in \mathcal{B}$, l'endomorfismo di $\mathfrak{a}$ definito come moltiplicazione per $\langle q, \alpha \rangle$ su $\mathfrak{a}^q$, per ogni $q \in Q$, è una derivazione di grado zero di $\mathfrak{a}$ che coincide con la derivazione interna $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(H_\alpha)$. Poiché per ogni $q \neq 0$ è $\langle q, \alpha \rangle \neq 0$ per qualche $\alpha \in \mathcal{B}$, otteniamo la tesi.

Poniamo

$$\begin{cases} Q^+ = \left\{\sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k^\alpha \alpha \,|\, k_\alpha \in \mathbb{N},\ \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k^\alpha > 0 \right\}\,, \\ Q^- = \left\{\sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k^\alpha \alpha \,|\, -k_\alpha \in \mathbb{N},\ \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k^\alpha < 0 \right\}\,. \end{cases} \tag{3.10}$$

Poiché $Q^+ + Q^+ \subset Q^+$ e $Q^- + Q^- \subset Q^-$, i sottospazi

$$\mathfrak{a}^+ = \bigoplus_{q\in Q^+} \mathfrak{a}^q \qquad \text{e} \qquad \mathfrak{a}^- = \bigoplus_{q\in Q^-} \mathfrak{a}^q \tag{3.11}$$

sono sottoalgebre di $\mathfrak{a}$.

Proposizione 3.6

(1) $\mathfrak{a}^+$ *è la sottoalgebra di* $\mathfrak{a}$ *generata da* $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{B}}$*;*
(2) $\mathfrak{a}^-$ *è la sottoalgebra di* $\mathfrak{a}$ *generata da* $(Y_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{B}}$*;*
(3) $(H_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{B}}$ *è una base di* $\mathfrak{a}^0$*;*
(4) $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^+ \oplus \mathfrak{a}^0 \oplus \mathfrak{a}^-$.

Dim. Sia $\tilde{\mathfrak{a}}^+$ (risp. $\tilde{\mathfrak{a}}^-$) la sottoalgebra di $\mathfrak{a}$ generata da $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{B}}$ (risp. $(Y_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{B}}$). Indichiamo poi con $\mathfrak{h}$ il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{a}$ generato da $(H_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{B}}$. Esso è una sottoalgebra abeliana di $\mathfrak{a}$.

Osserviamo che $\tilde{\mathfrak{a}}^\pm$ sono sottoalgebre Q-graduate, con $\tilde{\mathfrak{a}}^+ \subset \mathfrak{a}^+$, $\tilde{\mathfrak{a}}^- \subset \mathfrak{a}^-$. Inoltre abbiamo:

$$\begin{cases} [\mathfrak{h}, \tilde{\mathfrak{a}}^+] \subset \tilde{\mathfrak{a}}^+ \,, \\ [\mathfrak{h}, \tilde{\mathfrak{a}}^-] \subset \tilde{\mathfrak{a}}^- \,, \\ [Y_\alpha, \tilde{\mathfrak{a}}^+] \subset \mathfrak{h} + \tilde{\mathfrak{a}}^+ \,, \\ [Y_\alpha, \tilde{\mathfrak{a}}^-] \subset \mathfrak{h} + \tilde{\mathfrak{a}}^- \,, \\ \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathcal{B} \,. \end{cases}$$

Posto $\tilde{\mathfrak{a}} = \tilde{\mathfrak{a}}^+ + \mathfrak{h} + \tilde{\mathfrak{a}}^-$, la $\tilde{\mathfrak{a}}$ è stabile per $\mathrm{ad}(X_\alpha)$, $\mathrm{ad}(H_\alpha)$, $\mathrm{ad}(Y_\alpha)$ per ogni $\alpha \in \mathcal{B}$. Quindi è una sottoalgebra di $\mathfrak{a}$, che contiene un sistema di generatori di $\mathfrak{a}$ e quindi coincide con $\mathfrak{a}$. Otteniamo quindi $\mathfrak{a}^+ = \tilde{\mathfrak{a}}^+$, $\mathfrak{a}^- = \tilde{\mathfrak{a}}^-$, $\mathfrak{a}^0 = \mathfrak{h}$.

Proposizione 3.7 *Siano* V_+ *e* V_- *i sottospazi vettoriali di* $\mathfrak{a}$ *generati da* $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{B}}$ *e* $(Y_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{B}}$ *rispettivamente. Allora* $\mathfrak{a}_+$ *e* $\mathfrak{a}_-$ *sono le algebre di Lie libere degli spazi vettoriali* V_+, V_- *rispettivamente.*

Dim. Ricordiamo che B è lo spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con base $\mathcal{B}$. Sia $\mathfrak{L}(B) \subset T(B)$ l'algebra di Lie libera di B. Definiamo l'applicazione lineare $\phi : B \longrightarrow \mathfrak{a}^+$ ponendo $\phi(\alpha) = X_\alpha$. Essa si estende a un morfismo di algebre di Lie $\tilde{\phi} : \mathfrak{L}(B) \longrightarrow \mathfrak{a}^+$. Utilizziamo la rappresentazione ρ di $\mathfrak{a}$ su $T(B)$. La composizione $\rho \circ \tilde{\phi}$ è una rappresentazione di $\mathfrak{a}^+$ su $T(B)$ e $\rho\circ\tilde{\phi}(X_\alpha)$ coincide con la moltiplicazione a sinistra per α. Quindi $\rho \circ \tilde{\phi}$ è iniettiva e perciò $\tilde{\phi}$ è iniettiva. È un isomorfismo perché $\{\phi(\alpha) = X_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{B}\}$ genera $\mathfrak{a}^+$.

Utilizzando l' involuzione θ, si dimostra che lo stesso vale per $\mathfrak{a}^-$.

§4 Costruzione dell'algebra di Lie semisemplice

Utilizziamo le notazioni del paragrafo precedente.

Per ogni coppia di elementi distinti $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ definiamo:

$$\begin{cases} X_{\alpha,\beta} = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(X_\alpha))^{1-n_{\beta,\alpha}}\,(X_\beta)\,, \\ Y_{\alpha,\beta} = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha))^{1-n_{\beta,\alpha}}\,(Y_\beta)\,, \\ \quad \alpha, \beta \in \mathcal{B}, \quad \alpha \neq \beta \,. \end{cases} \tag{4.1}$$

Lemma 4.1 *Per ogni* $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$*, con* $\alpha \neq \beta$*, abbiamo:*

$$[\mathfrak{a}^+, Y_{\alpha,\beta}] = 0 \qquad [\mathfrak{a}^-, X_{\alpha,\beta}] = 0 \,. \tag{4.2}$$

DIM. Per verificare la prima uguaglianza, è sufficiente verificare che $[X_\gamma, Y_{\alpha,\beta}] = 0$ per ogni $\gamma \in \mathcal{B}$. Consideriamo i tre casi possibili:
(i) $\gamma \neq \alpha, \beta$.

In questo caso $[X_\gamma, Y_\alpha] = [X_\gamma, Y_\beta] = 0$ e da questa segue immediatamente che $[X_\gamma, Y_{\alpha,beta}] = 0$.
(ii) $\gamma = \beta$.

In questo caso $[X_\gamma, Y_\alpha] = 0$ e quindi:

$$\begin{aligned}[X_\beta, Y_{\alpha,\beta}] &= (\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha))^{1-n_{\beta,\alpha}}([X_\beta, Y_\alpha]) \\ &= (\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha))^{1-n_{\beta,\alpha}}(H_\alpha) \\ &= n_{\alpha,\beta}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha))^{-n_{\beta,\alpha}}(Y_\alpha).\end{aligned}$$

Se $n_{\beta,\alpha} \neq 0$, allora $[X_\beta, Y_{\alpha,\beta}] = 0$ perché $[Y_\alpha, Y_\alpha] = 0$; se $n_{\beta,\alpha} = 0$, anche $n_{\alpha,\beta} = 0$ e dunque $[X_\beta, Y_{\alpha,\beta}] = 0$.
(iii) $\gamma = \alpha$.

Abbiamo:

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(X_\alpha) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^{1-n_{\beta,\alpha}}(Y_\beta) = [\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(X_\alpha), \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^{1-n_{\beta,\alpha}}](Y_\beta)$$

perché $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\beta) = [X_\alpha, Y_\beta] = 0$. Utilizziamo ora l'uguaglianza:

$$\begin{aligned}&[\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(X_\alpha), \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^{1-n_{\beta,\alpha}}] \\ &\quad= \textstyle\sum_{h=0}^{-n_{\beta,\alpha}} \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^h \circ [\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(X_\alpha), \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)] \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^{-n_{\beta,\alpha}-h} \\ &\quad= \textstyle\sum_{h=0}^{-n_{\beta,\alpha}} \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^h \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(H_\alpha) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^{-n_{\beta,\alpha}-h}\end{aligned}$$

Tenuto conto del fatto che:

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(H_\alpha) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^k &= \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^k \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(H_\alpha) \\ &\quad+ \textstyle\sum_{h=0}^{k-1} \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^h \circ [\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(H_\alpha), \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)] \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^{k-h-1} \\ &= \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^k \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(H_\alpha) - 2\textstyle\sum_{h=0}^{k-1} \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^h \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^{k-h} \\ &= \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^k \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(H_\alpha) - 2k \cdot \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^k,\end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}&[\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(X_\alpha), \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^{1-n_{\beta,\alpha}}] \\ &\quad= \textstyle\sum_{h=0}^{-n_{\beta,\alpha}} \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^h \big(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^{-n_{\beta,\alpha}-h}\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(H_\alpha) + 2(n_{\beta,\alpha}+h)\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^{-n_{\beta,\alpha}-h}\big) \\ &\quad= (1-n_{\beta,\alpha})\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^{-n_{\beta,\alpha}}\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(H_\alpha) \\ &\qquad+2\left(n_{\beta,\alpha}(1+n_{\beta,\alpha}) + \frac{-n_{\beta,\alpha}(1+n_{\beta,\alpha})}{2}\right)\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^{-n_{\beta,\alpha}} \\ &\quad= (1-n_{\beta,\alpha})\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(Y_\alpha)^{-n_{\beta,\alpha}}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(H_\alpha) + n_{\beta,\alpha}Id_{\mathfrak{a}}).\end{aligned}$$

Poiché $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(H_\alpha) + n_{\beta,\alpha}Id_{\mathfrak{a}})(Y_\beta) = 0$, otteniamo $[X_\alpha, Y_{\alpha,\beta}] = 0$.

Ciò dimostra la prima uguaglianza. La seconda si ottiene utilizzando l' involuzione θ:

$$[Y_\gamma, X_{\alpha,\beta}] = [\theta(X_\gamma), \theta(Y_{\alpha,\beta})] = \theta([X_\gamma, Y_{\alpha,\beta}]) = 0.$$

LEMMA 4.2 *L'ideale $\mathfrak{n}_+$ di $\mathfrak{a}_+$ generato da $(X_{\alpha,\beta})_{\alpha\neq\beta\in\mathcal{B}}$ è un ideale di $\mathfrak{a}$.*

Analogamente l'ideale $\mathfrak{n}_-$ *di* $\mathfrak{a}_-$ *generato da* $(Y_{\alpha,\beta})_{\alpha\neq\beta\in\mathcal{B}}$ *è un ideale di* $\mathfrak{a}$.

DIM. Sia $\mathfrak{n}'_+$ il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{a}$ generato da $(X_{\alpha,\beta})_{\alpha\neq\beta\in\mathcal{B}}$. Poiché gli $X_{\alpha,\beta}$ sono elementi Q-omogenei, $[\mathfrak{h},\mathfrak{n}'_+]\subset\mathfrak{n}'_+$. Sia $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ l'algebra inviluppante universale di $\mathfrak{a}$ e sia ρ la rappresentazione di $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ su $\mathfrak{a}$ indotta dalla rappresentazione aggiunta. Allora l'ideale di $\mathfrak{a}$ generato da $\mathfrak{n}'_+$ è $\rho(\mathfrak{U}(\mathfrak{a}))(\mathfrak{n}'_+)$. Dalla decomposizione $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_+\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{a}_-$, per il Teorema di Poincaré-Birchoff-Witt abbiamo:

$$\rho(\mathfrak{U}(\mathfrak{a}))(\mathfrak{n}'_+)=\rho(\mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+))\rho(\mathfrak{U}(\mathfrak{h}))\rho(\mathfrak{U}(\mathfrak{a}_-))(\mathfrak{n}-_+)=\rho(\mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+))(n'_+)=\mathfrak{n}_+$$

e questo dimostra la prima asserzione del lemma. La seconda si ricava dalla prima utilizzando l'isomorfismo θ e il fatto che $\theta(\mathfrak{n}_+)=\mathfrak{n}_-$.

Poniamo

$$\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{n}_-\,. \tag{4.3}$$

Otteniamo così un ideale di $\mathfrak{a}$, che è Q-graduato, perché ammette un sistema di generatori omogenei. Quindi anche l'algebra quoziente:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}/\,\mathfrak{n} \tag{4.4}$$

è Q-graduata:

$$\mathfrak{g}=\bigoplus_{q\in Q}\mathfrak{g}^q\,. \tag{4.5}$$

Inoltre, poiché $\mathfrak{a}^q=\{0\}$ se $q\notin Q^+\cup Q^-\cup\{0\}$, anche $\mathfrak{g}^q=\{0\}$ se $q\notin Q^+\cup Q^-\cup\{0\}$.

Tenuto conto della definizione di $\mathfrak{a}$ e dell'ideale $\mathfrak{n}$, l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ su $\mathbb{K}$ è definita dai *generatori* $(X_\alpha,H_\alpha,Y_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{B}}$ e dalle *relazioni*:

$$\begin{cases}[H_\alpha,H_\beta]=0 & \forall\alpha,\beta\in\mathcal{B}\,,\\ [H_\alpha,X_\beta]=n_{\beta,\alpha}X_\beta & \forall\alpha,\beta\in\mathcal{B}\,,\\ [H_\alpha,Y_\beta]=-n_{\beta,\alpha}Y_\beta & \forall\alpha,\beta\in\mathcal{B}\,,\\ [X_\alpha,Y_\alpha]=H_\alpha & \forall\alpha\in\mathcal{B}\,,\\ [X_\alpha,Y_\beta]=0 & \forall\alpha\neq\beta\in\mathcal{B}\,,\\ \left(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)\right)^{1-n_{\beta,\alpha}}(X_\beta)=0 & \forall\alpha\neq\beta\in\mathcal{B}\,,\\ \left(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Y_\alpha)\right)^{1-n_{\beta,\alpha}}(Y_\beta)=0 & \forall\alpha\neq\beta\in\mathcal{B}\,.\end{cases} \tag{4.6}$$

Poiché $\mathfrak{a}^0\cap\mathfrak{n}=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{n}=\{0\}$, la proiezione di $frakh=\mathfrak{a}^0$ in $\mathfrak{g}$ è un isomorfismo: indicheremo ancora con $\mathfrak{h}$ la sua immagine: essa è una sottoalgebra abeliana che coincide con il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{g}$ generato da $(H_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{B}}$. Poiché $\mathfrak{n}$ è θ-invariante, l'ismomorfismo θ definisce per passaggio al quoaziente un isomorfismo di $\mathfrak{g}$, che indicheremo ancora con θ.

LEMMA 4.3 *Per ogni* $\alpha\in\mathcal{B}$, *gli endomorfismi* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)$ *e* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Y_\alpha)$ *per* $\alpha\in\mathcal{B}$ *sono localmente nilpotenti.*[33]

---

[33]Un endomorfismo T di uno spazio vettoriale V si dice localmente nilpotente se per ogni $v\in V\setminus\{0\}$ esiste un intero positivo $m(v)$ tale che $T^{m(v)}(v)=0$. Chiaramente un endomorfismo nilpotente è anche localmente nilpotente e i due concetti coincidono se V ha dimensione finita.

Dim. Sia $\alpha \in \mathcal{B}$ e sia $\mathfrak{b}$ il sottoinsieme di $\mathfrak{g}$ formato dagli elementi $Z \in \mathfrak{g}$ tali che $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)^p(Z) = 0$ per qualche $p \in \mathbb{N}$. Poiché $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)$ è una derivazione di $\mathfrak{g}$, il sottoinsieme $\mathfrak{b}$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$. Ma $X_\beta, H_\beta, Y_\beta \in \mathfrak{b}$ per ogni $\beta \in \mathcal{B}$ e quindi $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}$.

Lemma 4.4 *Siano $q, q' \in Q$ e supponiamo che $\sigma(q) = q'$ per qualche $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$. Allora esiste un automorfismo ψ di $\mathfrak{g}$ tale che $\psi(\mathfrak{g}^q) = \mathfrak{g}^{q'}$.*

Dim. Poiché $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ è generato dalle riflessioni rispetto agli elementi di una base, possiamo limitarci a considerare il caso in cui $\sigma = s_\alpha$ per una radice $\alpha \in \mathcal{B}$. Definiamo

$$\psi_\alpha = e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)} \circ e^{-\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Y_\alpha)} \circ e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)} . \tag{4.7}$$

Per il lemma precedente, ψ_α è ben definita ed è un automorfismo di $\mathfrak{g}$. Per ogni $\beta \in \mathcal{B}$ abbiamo:

$$e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)}(H_\beta) = H_\beta - n_{\alpha,\beta} X_\alpha .$$

Otteniamo perciò:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(H_\beta) &= e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)} \circ e^{-\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Y_\alpha)}(H_\beta - n_{\alpha,\beta} X_\alpha) \\ &= e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)}(H_\beta - n_{\alpha,\beta} Y_\alpha - n_{\alpha,\beta}(X_\alpha + H_\alpha - Y_\alpha)) \\ &= e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha)}(H_\beta - n_{\alpha,\beta} H_\alpha - n_{\alpha,\beta} X_\alpha) \\ &= H_\beta - n_{\alpha,\beta} X_\alpha + 2n_{\alpha,\beta} X_\alpha - n_{\alpha,\beta} X_\alpha \\ &= H_\beta - n_{\alpha,\beta} H_\alpha . \end{aligned}$$

Quindi:

$$[H_\beta, \psi_\alpha^{-1}(Z)] = \psi_\alpha^{-1}([\psi_\alpha(H_\beta), Z]) = \langle s_\alpha(q), \beta \rangle \psi_\alpha^{-1}(Z) \quad \forall Z \in \mathfrak{g}^q , \quad \forall \beta \in \mathcal{B} .$$

Ciò dimostra che $\psi_\alpha^{-1}(\mathfrak{g}^q) \subset \mathfrak{g}^{s_\alpha(q)}$. Applicando nuovamente ψ_α^{-1} si ottiene l' inclusione opposta e quindi l'uguaglianza.

Lemma 4.5 *Supponiamo che $q \in Q$ non sia multiplo di un elemento di $\mathcal{R}$. Allora esiste $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ tale che $\sigma(q) = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k^\alpha \alpha$ con i coefficienti $k^\alpha \in \mathbb{Z}$ non tutti dello stesso segno.*

Dim. Per ipotesi, l'iperpiano $q^\perp$ è distinto dagli iperpiani $\gamma^\perp$ per $\gamma \in \mathcal{R}$. Possiamo quindi trovare un elemento regolare $\xi \in E$ tale che $(\xi|q) = 0$. Sia C_ξ la camera di Weyl che contiene ξ. Poiché $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ opera transitivamente sulle camere di Weyl, esiste $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ tale che $\sigma(C_\xi) = C(\mathcal{B})$. Abbiamo quindi $(\sigma(\xi)|\alpha) > 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{B}$. Sia $\sigma(q) = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k^\alpha \alpha$. Abbiamo:

$$0 = (\xi|q) = (\sigma(\xi)|\sigma(q)) = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} k^\alpha (\sigma(\xi)|\alpha) .$$

Poiché $(\sigma(\xi)|\alpha) > 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{B}$ e i coefficienti k^α non sono tutti nulli, ne segue che essi non possono avere tutti lo stesso segno.

Lemma 4.6 *Sia $q \in Q$. Allora:*

(1) *se $0 \neq q \notin \mathcal{R}$, allora $\mathfrak{g}^q = \{0\}$;*
(2) *se $q \in \mathcal{R}$, allora $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}^q = 1$.*

Dim. Se q non è multiplo di un elemento di $\mathcal{R}$, allora esiste $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ tale che $\sigma(q) \notin Q^+ \cup Q^-$. Poiché $\mathfrak{a}^{\sigma(q)} = \{0\}$, ne segue che $\mathfrak{g}^{\sigma(q)}$ e quindi $\mathfrak{g}^q$ sono uguali a $\{0\}$.

Se $\alpha \in \mathcal{B}$ ed m un intero positivo, abbiamo $\mathfrak{a}^{m\alpha} = \{0\}$ e quindi $\mathfrak{g}^{m\alpha} = \{0\}$. Ciò segue dal fatto che $\mathfrak{a}_+$ è l'algebra di Lie libera con generatori $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{B}}$. Non può essere $\mathfrak{g}^\alpha = \{0\}$ perché questo vorrebbe dire che $X_\alpha \in \mathfrak{n}_+$ Ciò non è possibile in quanto $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$ e $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} = \{0\}$. Quindi $\dim_{\mathbb{K}}\mathfrak{g}^\alpha = \dim_{\mathbb{K}}\mathfrak{a}^\alpha = 1$ per ogni $\alpha \in \mathcal{B}$. La tesi segue quindi dal fatto che ogni elemento γ di $\mathcal{R}$ è immagine di un elemento di $\mathcal{B}$ mediante una trasformazione σ di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$.

Abbiamo quindi il

Teorema 4.7 *$\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie semisemplice su $\mathbb{K}$; $\mathfrak{h}$ è una sua algebra torale massimale (una sua algebra di Cartan) e $\mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathcal{R}$.*

Dim. Per il lemma precedente, $\mathfrak{g}$ ha dimensione finita, uguale alla somma delle cardinalità di $\mathcal{R}$ e di $\mathcal{B}$.

Sia $\mathfrak{t}$ un ideale abeliano di $\mathfrak{g}$. Poiché $[\mathfrak{t}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{t}$, l'ideale $\mathfrak{t}$ è Q-graduato. Quindi

$$\mathfrak{t} = (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\gamma\in\mathcal{R}} \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}^\gamma .$$

Per ogni $\alpha \in \mathcal{B}$, $\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha} \oplus \mathbb{K} \cdot H_\alpha$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$. Utilizzando gli automorfismi di $\mathfrak{g}$ corrispondenti agli elementi del gruppo di Weyl, otteniamo che ogni $\mathfrak{g}^\gamma$, $\gamma \in \mathcal{R}$, è contenuto in una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$. Da questo segue che $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}^\gamma = \{0\}$ per ogni $\gamma \in \mathcal{R}$. Quindi $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$. Ma per ogni $H \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ esiste un $\alpha \in \mathcal{B}$ tale che $[H, X_\alpha] = \alpha(H)X_\alpha \neq 0$. Ciò dimostra che $\mathfrak{t} = \{0\}$: quindi $\{0\}$ è l'unico ideale abeliano di $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}$ è semisemplice.

Le stesse considerazioni ci dicono che $\mathfrak{h}$ è torale massimale in $\mathfrak{g}$ ed abbiamo $\mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ per la costruzione precedente.

Osservazione L'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è *semplice* se e soltanto se il grafo $\Gamma(\mathcal{R})$ corrispondente al diagramma di Dynkin del suo sistema di radici $\mathcal{R}$ è connesso. Infatti, se $\mathfrak{g}$ non fosse semplice, $\mathcal{R}$ si spezzerebbe nell'unione $\mathcal{R}' \cup \mathcal{R}''$ di due sottoinsiemi non vuoti di radici mutuamente ortogonali. Viceversa, dato un tale spezzamento, $\mathfrak{g}$ risulterebbe uguale alla somma diretta dei due ideali semisemplici $\mathfrak{g}'$ e $\mathfrak{g}''$ corrispondenti ai sistemi di radici $\mathcal{R}'$ e $\mathcal{R}''$ rispettivamente.

CAPITOLO XV

SOTTOALGEBRE DI CARTAN E DI BOREL

§1 Elementi regolari e algebre di Cartan

Si aV uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Sia $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ un endomorfismo lineare di V. Scriviamo il suo polinomio caratteristico nella forma:

$$p_A(x) = \det(x - A) = \sum_{h=0}^{n} a_h(A) x^h \,. \tag{1.1}$$

Ricordiamo che

$$a_h(A) = (-1)^{n-h} \mathrm{tr}(\wedge^{n-h} A) \tag{1.2}$$

e quindi, per ogni $0 \leq h \leq n$, l'applicazione

$$a_h : \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \ni A \longrightarrow a_h(A) \in \mathbb{K} \tag{1.3}$$

è polinomiale ed omogenea di grado $n - h$.

Indichiamo con $\nu(A)$ il più piccolo intero non negativo h tale che $a_h(A) \neq 0$. Il numero $\nu(A)$ è la dimensione del sottospazio vettoriale

$$V^0(A) = \bigcup_{h=0}^{\infty} \ker A^h \,. \tag{1.4}$$

Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ porremo ancora:

$$V^\lambda(A) = \bigcup_{h=0}^{\infty} \ker(\lambda - A)^h \,. \tag{1.5}$$

Supporremo nel seguito che il campo $\mathbb{K}$ abbia caratteristica 0.

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita $n \geq 1$ su $\mathbb{K}$. Per ogni elemento $X \in \mathfrak{g}$ useremo le notazioni semplificate: $p_X(x) = p_{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)}$, $a_h(X) = a_h(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X))$, $\nu(X) = \nu(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X))$, $\mathfrak{g}^0(X) = \mathfrak{g}^0(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X))$.

Se $\mathfrak{L}$ è un sottoinsieme di $\mathfrak{g}$, indicheremo ancora con

$$\mathfrak{g}^0(\mathfrak{L}) = \bigcap_{X \in \mathfrak{L}} \mathfrak{g}^0(X) \tag{1.6}$$

e, più in generale, se $\alpha : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathbb{K}$ è una qualsiasi applicazione, porremo:

$$\mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{L}) = \bigcap_{X\in\mathfrak{L}} \mathfrak{g}^{\alpha(X)}\left((\lambda - \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X))\right). \tag{1.7}$$

L'intero positivo $\ell = \min\{\nu(X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$ si dice il *rango* dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e si indica con $\mathrm{rk}(\mathfrak{g})$. Gli elementi X di $\mathfrak{g}$ tali che $\nu(X) = \ell = \mathrm{rk}(\mathfrak{g})$ si dicono *regolari* in $\mathfrak{g}$.

Poiché l'insieme degli elementi regolari in $\mathfrak{g}$ è l'insime degli $X \in \mathfrak{g}$ tali che $a_\ell(X) \neq 0$, gli elementi regolari in X formano in $\mathfrak{g}$ un aperto di Zariski, e quindi un aperto denso per la topologia Euclidea dello spazio vettoriale $\mathfrak{g}$, nel caso $\mathbb{K}$ sia $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Lemma 1.1 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su $\mathbb{K}$ e sia $\mathfrak{a}$ una sua sottoalgebra di Lie. Se $\mathfrak{a}$ contiene un elemento A regolare in $\mathfrak{g}$, allora tale elemento A è anche regolare in $\mathfrak{a}$.*

Dim. Per ogni $X \in \mathfrak{a}$, indichiamo con X' l'endomorfismo $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}(X)$ di $\mathfrak{a}$ e con X'' l'endomorfismo di $V = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ ottenuto da $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ per passaggio al quoziente. Abbiamo allora: $p_X(x) = p_{X'}(x) \cdot p_{X''}(x)$ e quindi $\nu(X) = \nu(X') + \nu(X'')$. Se ℓ' è il rango di $\mathfrak{a}$ ed ℓ'' il minimo dei $\nu(X'')$ al variare di X in $\mathfrak{a}$, abbiamo $\nu(X') = \ell'$ e $\nu(X'') = \ell''$ per X in un aperto di Zariski non vuoto di $\mathfrak{a}$. Inoltre, per la definizione del rango ℓ di $\mathfrak{g}$, abbiamo $\ell' + \ell'' \geq \ell$. Se $A \in \mathfrak{a}$ è regolare in $\mathfrak{g}$, allora da $\nu(A') \geq \ell'$, $\nu(A'') \geq \ell''$ e $\nu(A) = \nu(A') + \nu(A'') = \ell$, otteniamo che $\nu(A') = \ell'$, $\nu(A'') = \ell''$ e in particolare A è regolare il $\mathfrak{a}$.

Teorema 1.2 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita $n \geq 1$ su $\mathbb{K}$, di rango ℓ.*

Se $H \in \mathfrak{g}$ è un qualsiasi elemento regolare in $\mathfrak{g}$, allora $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(H)$ è una sottoalgebra nilpotente massimale di $\mathfrak{g}$, di dimensione ℓ, e coincide con il proprio normalizzatore in $\mathfrak{g}$.

Viceversa, sia $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra nilpotente di $\mathfrak{g}$ che coincide con il proprio normalizzatore in $\mathfrak{g}$. Allora esiste un elemento H di $\mathfrak{h}$ regolare in $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(H) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$.

Dim. Sia $H \in \mathfrak{g}$ regolare in $\mathfrak{g}$. Alora $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(H)$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$. Per il Lemma 1.1, H è regolare in $\mathfrak{h}$. Poiché $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(H)$ è nilpotente, ne segue che $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(X)$ è nilpotente per ogni $X \in \mathfrak{h}$. Quindi $\mathfrak{h}$ è nilpotente per il Teorema di Engel. Abbiamo $\dim \mathfrak{h} = \ell = \mathrm{rk}(\mathfrak{g})$ perché H è regolare.

Sia ora Y un elemento del normalizzatore di $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$. Abbiamo in particolare $[H, Y] \in \mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(H)$ e quindi $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H)^m(Y) = 0$ per $m \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande: quindi $Y \in \mathfrak{h}$ e dunque $\mathfrak{h}$ coincide con il proprio normalizzatore.

Per dimostrare che $\mathfrak{h}$ è massimale, possiamo ricondurci al caso in cui $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso. Consideriamo la la decomposizione spettrale di $\mathfrak{g}$ rispetto ad $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{h=1}^{m} \mathfrak{g}^{\lambda_h}(H) \tag{1.8}$$

ove $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ sono gli autovalori non nulli di $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$. Osserviamo che se $\mathfrak{a}$ è una qualsiasi sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ contenente $\mathfrak{h}$, essa è $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-invariante e quindi

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{h=1}^{m} \left(\mathfrak{g}^{\lambda_h}(H) \cap \mathfrak{a}\right).$$

Poiché $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ è invertibile su $\mathfrak{g}^{\lambda_h}(H)$, ne segue che, se $\mathfrak{a}$ è nilpotente, allora $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}$ e quindi $\mathfrak{h}$ è massimale nilpotente.

Supponiamo ora che $\mathfrak{h}$ sia una sottoalgebra nilpotente di $\mathfrak{g}$ che coincide con il proprio normalizzatore:

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}\,.$$

Poiché $\mathfrak{h}$ è nilpotente, $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ contiene il normalizzatore di $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$.

Dimostriamo ora l'inclusione opposta. Consideriamo la rappresentazione di $\mathfrak{h}$ su $W = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$ indotta per passaggio al quoziente dalla rappresentazione aggiunta. Se fosse $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \neq \mathfrak{h}$, per il Teorema di Engel potremmo trovare $X \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \setminus \mathfrak{h}$ tale che $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Ma un tale X apparterebbe allora al normalizzatore di $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$, contro l'ipotesi che $\mathfrak{h}$ coincida con il suo normalizzatore in $\mathfrak{g}$.

Abbiamo quindi $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Per concludere la dimostrazione, possiamo ricondurci al caso in cui $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso. Abbiamo allora una decomposizione:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \mathfrak{g}^{\alpha_j}(\mathfrak{h}) \tag{1.9}$$

con $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$. Basterà quindi scegliere un elemento $H \in \mathfrak{h}$ con $\alpha_j(H) \neq 0$ per $j = 1, \ldots, m$ per ottenere $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}^0(H)$.

Una sottoalgebra $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{g}$ che sia nilpotente e coincida con il proprio normalizzatore in $\mathfrak{g}$ si dice un'*algebra di Cartan* di $\mathfrak{g}$.

Il Teorema 1.2 ci dice quindi:

TEOREMA 1.3 *Ogni albegra di Lie $\mathbb{K}$ di dimensione finita n su $\mathbb{K}$ ammette sottoalgebre di Cartan.*

Ogni sottoalgebra di Cartan di $\mathfrak{g}$ è della forma $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(H)$ per un elemento H regolare in $\mathfrak{g}$.

Tutte le algebre di Cartan di $\mathfrak{g}$ hanno la stessa dimensione, uguale al rango di $\mathfrak{g}$.

OSSERVAZIONE

Se $\mathfrak{g}$ è nilpotente, allora $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ è l'unica sottoalgebra di Cartan di $\mathfrak{g}$.

Abbiamo dimostrato in precedenza che, se $\mathfrak{g}$ è semisemplice, allora le sue sottoalgebre di Cartan sono abeliane e coincidono con le *sottoalgebre torali massimali* di $\mathfrak{g}$.

§2 Coniugazione delle sottoalgebre di Cartan di un'algebra di Lie risolubile

Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica zero. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e sia $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ una rappresentazione lineare di dimensione finita di $\mathfrak{g}$. Chiameremo un elemento H di $\mathfrak{g}$ *regolare* per la rappresentazione ρ se

$$\dim_{\mathbb{K}} V^0(\rho(H)) = \min\{\dim_{\mathbb{K}}(V^0(\rho(X)) \mid X \in \mathfrak{g}\}\,. \tag{2.1}$$

Dimostriamo il *Lemma di Fitting* per algebre di Lie nilpotenti:

LEMMA 2.1 *Sia $\mathfrak{h}$ un'algebra di Lie nilpotente, di dimensione finita su $\mathbb{K}$. Sia V un $\mathfrak{h}$-modulo di dimensione finita. Posto*

$$V'(\mathfrak{h}) = \bigcap_{h=0}^{\infty} \mathfrak{h}^h(V)\,, \tag{2.2}$$

abbiamo la decomposizione di V:

$$V = V^0(\mathfrak{h}) \oplus V'(\mathfrak{h}) \tag{2.3}$$

in somma diretta di sotto-$\mathfrak{h}$-moduli.

DIM. Fissiamo un elemento H di $\mathfrak{h}$, regolare per la rappresentazione V. Abbiamo

$$V'(\mathfrak{h}) \supset V'(H) = \cap_{h=0}^{\infty} H^h(V)\,,$$

$$V^0(\mathfrak{h}) \subset V^0(H) = \cup_{h=0}^{\infty} \ker H^h\,,$$

$$V^0(\mathfrak{h}) \cap V'(\mathfrak{h}) = \{0\}\,.$$

Basta quindi dimostrare che $V^0(\mathfrak{h}) = V^0(H)$ per avere anche $V'(\mathfrak{h}) = V'(H)$ ed ottenere quindi il Lemma di Fitting per un'algebra di Lie nilpotente dal lemma di Fitting per un singolo endomorfismo.

Sia X un qualsiasi elemento di $\mathfrak{h}$. Abbiamo allora per ogni intero positivo m:

$$H^m \cdot X = \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(H)^{m-h}(X) \cdot H^{m-h}\,.$$

Poiché $\mathfrak{h}$ è nilpotente, otteniamo che $X \cdot V^0(H) \subset V^0(H)$ per ogni $X \in \mathfrak{h}$. Quindi $V^0(H)$ è un sotto-$\mathfrak{h}$-modulo di V. Gli elementi regolari della rappresentazione V sono anche elementi regolari della sottorappresentazione $V^0(H)$. Quindi, poiché l'elemento regolare H è nilpotente su $V^0(H)$, tutti gli $X \in \mathfrak{h}$ definiscono endomorfismi nilpotenti di $V^0(H)$ ed otteniamo perciò $V^0(\mathfrak{h}) = V^0(H)$. Ciò completa la dimostrazione del lemma. Osserviamo che abbiamo ottenuto anche $V'(\mathfrak{h}) = V'(H)$ se $H \in \mathfrak{h}$ è un elemento regolare della rappresentazione V.

LEMMA 2.2 *Sia $\mathfrak{h}$ un'algebra di Lie nilpotente, di dimensione finita su $\mathbb{K}$. Siano V, W due $\mathfrak{h}$-moduli di dimensione finita e sia $\phi : V \longrightarrow W$ un epimorfismo di $\mathfrak{h}$-moduli. Allora*

$$\phi(V^0(\mathfrak{h})) = W^0(\mathfrak{h})\,. \tag{2.4}$$

DIM. Osserviamo che $\phi(V^0(\mathfrak{h})) \subset W^0(\mathfrak{h})$, $\phi(V'(\mathfrak{h})) \subset W'(\mathfrak{h})$ e quindi, se ϕ è surgettiva, devono valere le uguaglianze: $\phi(V^0(\mathfrak{h})) = W^0(\mathfrak{h})$, $\phi(V'(\mathfrak{h})) = W'(\mathfrak{h})$.

LEMMA 2.3 *Sia $\mathfrak{h}$ un'algebra di Lie nilpotente, di dimensione finita sulcampo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero. Sia V un $\mathfrak{h}$-modulo tale che $V^0(\mathfrak{h}) = \{0\}$. Se $\phi : \mathfrak{h} \longrightarrow V$ è una derivazione di $\mathfrak{h}$ in V, cioè se*

$$\phi([H_1, H_2]) = H_1 \cdot \phi(H_2) - H_2 \cdot \phi(H_1) \qquad \forall H_1, H_2 \in \mathfrak{h}\,,$$

allora esiste un $v \in V$ tale che

$$\phi(H) = H \cdot v \qquad \forall H \in \mathfrak{h}\,.$$

Dim. Consideriamo lo spazio vettoriale $W = V \oplus \mathbb{K}$ e poniamo

$$(*) \qquad H \cdot (v,k) = (H \cdot v - k\phi(H), 0) \qquad \forall (v,k) \in W\,.$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}
[H_1, H_2] \cdot (v,k) &= ([H_1,H_2] \cdot v - k\phi([H_1,H_2]), 0) \\
&= (H_1 \cdot H_2 \cdot v - kH_1 \cdot \phi(H_2), 0) \\
&\quad -(H_2 \cdot H_1 \cdot v - kH_2 \cdot \phi(H_1), 0) \\
&= H_1 \cdot (H_2 \cdot v - k\phi(H_2), 0) \\
&\quad -H_2 \cdot (H_1 - k\phi(H_1), 0) \\
&= H_1 \cdot H_2 \cdot (v,k) - H_2 \cdot H_1 \cdot (v,k) \\
&\forall H_1, H_2 \in \mathfrak{h}, \quad \forall (v,k) \in W\,.
\end{aligned}$$

Quindi la $(*)$ definisce su W una struttura di $\mathfrak{h}$-modulo. La proiezione naturale $\pi : W \ni (v,k) \longrightarrow k \in \mathbb{K}$ è un epimorfismo di $\mathfrak{h}$-moduli, di W sull'$\mathfrak{h}$-modulo banale $\mathbb{K}$. Quindi $\pi(W^0(\mathfrak{h})) = \mathbb{K} = \mathbb{K}^0(\mathfrak{h})$. Poiché $V \oplus \{0\}$ è un sotto-$\mathfrak{h}$-modulo di W isomorfo a V e $V^0(\mathfrak{h}) = \{0\}$, abbiamo che $W^0(\mathfrak{h})$ ha dimensione 1 ed è generato da un vettore della forma $(v,1)$. Esso è isomorfo all'$\mathfrak{h}$-modulo banale $\mathbb{K}$ e quindi:

$$H \cdot (v,1) = (H \cdot v - \phi(H), 0) = (0,0) \qquad \forall H \in \mathfrak{h}\,,$$

cioè $\phi(H) = H \cdot v$ per ogni $H \in \mathfrak{h}$.

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero. Consideriamo la sua serie centrale discendente $\{\mathfrak{C}^h(\mathfrak{g})\}$, ove

$$(2.5) \qquad \begin{cases} \mathfrak{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \\ \mathfrak{C}^h(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{C}^{h-1}(\mathfrak{g})] \qquad \text{se} \quad h > 0\,, \end{cases}$$

e poniamo

$$(2.6) \qquad \mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g}) = \cap_{h=0}^\infty \mathfrak{C}^h(\mathfrak{g})\,.$$

Osserviamo che $\mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g})$ è $\{0\}$ quando $\mathfrak{g}$ è nilpotente ed è in un ideale nipotente di $\mathfrak{g}$ se $\mathfrak{g}$ è risolubile: infatti in questo caso $\mathfrak{C}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ è un ideale nilpotente di $\mathfrak{g}$ che contiene $\mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g})$.

Se quindi $\mathfrak{g}$ è risolubile, per ogni $X \in \mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g})$ possiamo definire l'automorfismo di $\mathfrak{g}$:

$$(2.7) \qquad a(X) = \exp(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(X)) = \sum_{h=0}^\infty \frac{1}{h!} (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(X))^h\,.$$

Il sottogruppo $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$ di $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ generato dagli $a(X)$ al variare di X in $\mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g})$ si dice il *gruppo degli automorfismi speciali* di $\mathfrak{g}$.

Teorema 2.4 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie risolubile, di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero. Se $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$ sono due sottoalgebre di Cartan di $\mathfrak{g}$, allora esiste un automorfismo speciale $a \in \mathbf{S}(\mathfrak{g})$ tale che*

$$(2.8) \qquad a(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'\,.$$

DIM. Ragioniamo per induzione sulla dimensione n di $\mathfrak{g}$. Se $n \leq 1$, allora $\mathfrak{g}$ è nilpotente e quindi ogni sottoalgebra di Cartan di $\mathfrak{g}$ è uguale a $\mathfrak{g}$ e non c'è nulla da dimostrare.

Supponiamo ora che $n > 1$ e che il teorema sia vero per algebre risolubili di dimensione $< n$.

Siano $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$ due sottoalgebre di Cartan di $\mathfrak{g}$. Fissiamo un ideale abeliano di $\mathfrak{g}$, di dimensione minima tra tutti gli ideali abeliani $\neq \{0\}$ contenuti in $\mathfrak{g}$. Sia $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ la proiezione nel quoziente. Allora $\pi(\mathfrak{h})$ e $\pi(\mathfrak{h}')$ sono sottoalgebre di Cartan di $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Poiché $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ è un'algebra risolubile di dimensione $< n$ su $\mathbb{K}$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva. Tenuto conto del fatto che $\mathfrak{C}^{\infty}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = \pi(\mathfrak{C}^{\infty}(\mathfrak{g}))$, gli automorfismi speciali di $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ si ottengono per passaggio al quoziente dagli automorfismi speciali di $\mathfrak{g}$: esiste quindi un automorfismo speciale a_0 di $\mathfrak{g}$ tale che

$$a_0(\mathfrak{h} + \mathfrak{a}) = a_0(\mathfrak{h}) + \mathfrak{a} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{a} .$$

A meno di sostituire ad $\mathfrak{h}$ la sottoalgebra di Cartan $a_0(\mathfrak{h})$, potremo supporre nel seguito della dimostrazione che

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{a} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{a} .$$

Se $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h} + \mathfrak{a} \neq \mathfrak{g}$, allora $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}'$ sono sottoalgebre di Cartan di un'algebra risolubile $\mathfrak{g}'$ di dimensione $< n$ su $\mathbb{K}$. Osservando che $\mathfrak{C}^{\infty}(\mathfrak{g}') \subset \mathfrak{C}^{\infty}(\mathfrak{g})$, otteniamo in questo caso la tesi per l'ipotesi induttiva.

Supponiamo perciò nel seguito che

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{a} .$$

Poiché $\mathfrak{a}$ è minimale, avremo o $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = 0$, oppure $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$. Nel primo caso $\mathfrak{a}$ è contenuta nel centro di $\mathfrak{g}$ e quindi in ogni sottoalgebra di Cartan di $\mathfrak{g}$: abbiamo allora $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' = \mathfrak{g}$ e la tesi è dimostrata. Consideriamo dunque il caso in cui

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a} .$$

Poiché $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \{0\}$, essendo $\mathfrak{a}$ abeliana, questa relazione equivale a:

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{a}]$$

e dunque $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$. Analogamente è $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}' = \{0\}$ e quindi

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{a} .$$

In particolare, possiamo definire un'applicazione $\phi : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{a}$ associando ad ogni elemento $H \in \mathfrak{h}$ l'unico elemento $\phi(H) \in \mathfrak{a}$ tale che $H - \phi(H) \in \mathfrak{h}'$. Osserviamo che, se $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$,

$$[H_1, H_2] - [H_1, \phi(H_2)] - [\phi(H_1), H_2] = [H_1 - \phi(H_1), H_2 - \phi(H_2)] \in \mathfrak{h}' .$$

Quindi

$$\phi([H_1, H_2]) = [H_1, \phi(H_2)] + [\phi(H_1), H_2] \qquad \forall H_1, H_2 \in \mathfrak{h} ,$$

e $\phi : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{a}$ è una derivazione. Poiché $\mathfrak{a}^0(\mathfrak{h}) = \{0\}$, essa è interna: esiste cioé un elemento $A \in \mathfrak{a}$ tale che $\phi(H) = [A, H]$ per ogni $H \in \mathfrak{h}$, cioè:

$$H - [A, H] \in \mathfrak{h}' \qquad \forall H \in \mathfrak{h}\,.$$

Chiaramente $A \in \mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g})$ e

$$a(-A)(X) = X - [A, X] \qquad \forall X \in \mathfrak{g}$$

in quanto $(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(A))^2 = 0$. Quindi $\mathfrak{h}' = a(-A)(\mathfrak{h})$ per un automorfismo speciale $a(-A) \in \mathbf{S}(\mathfrak{g})$. La dimostrazione è completa.

§3 Automorfismi elementari

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie, di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Se $X \in \mathfrak{g}$ è un elemento nilpotente di $\mathfrak{g}$, tale cioè che $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(X)$ sia un endomorfismo nilpotente di $\mathfrak{g}$, allora solo un nunero finito di termini della serie

$$e(X) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \left(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(X)\right)^h \tag{3.1}$$

è diverso da zero. La $e(X)$ è quindi ben definita ed è un automorfismo dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Gli elementi del sottogruppo $\mathbf{E}(\mathfrak{g})$ di $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ generato dagli automorfismi $e(X)$ al variare di X tra gli elementi nilpotenti di $\mathfrak{g}$ si dice il *gurppo degli automorfismi elementari* di $\mathfrak{g}$.

Poiché, se $a \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ e X è un elemento nilpotente di $\mathfrak{g}$, abbiamo:

$$a \circ e(X) \circ a^{-1} = e(a(X))\,, \tag{3.2}$$

gli automorfismi elementari formano un sottogruppo normale di $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Osserviamo che, se $\mathfrak{g}$ è risolubile, allora $\mathbf{S}(\mathfrak{g}) \subset \mathbf{E}(\mathfrak{g})$.

§4 Sottoalgebre di Borel

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Si dice *sottoalgebra di Borel* di $\mathfrak{g}$ una sottoalgebra risolubile massimale di $\mathfrak{g}$.

Osserviamo che ogni sottoalgebra di Borel di $\mathfrak{g}$ contiene il radicale di $\mathfrak{g}$, e quindi le sottoalgebre di Borel di $\mathfrak{g}$ sono in corrispondenza biunivoca con quelle dell'algebra semisemplice $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$.

Lemma 4.1 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e sia $\mathfrak{b}$ una sua sottoalgebra di Borel. Allora $\mathfrak{b}$ coincide con il suo normalizzatore in $\mathfrak{g}$.*

Dim. Infatti il normalizzatore di $\mathfrak{b}$ è una sottoalgebra risolubile di $\mathfrak{b}$ che contiene $\mathfrak{b}$, e quindi coincide con $\mathfrak{b}$ perché $\mathfrak{b}$ è massimale.

Supponiamo ora che $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso, di caratteristica zero. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice, di dimensione finita n su $\mathbb{K}$. Sia $\mathfrak{h}$ una sua sottoalgebra di Cartan, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ il sistema di radici corrispondente. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{R}$ e consideriamo il sistema delle radici positive $\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$.

Lemma 4.2 *Con le notazioni introdotte sopra:*

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \mathfrak{g}^\alpha \tag{4.1}$$

è una sottoalgebra di Borel di $\mathfrak{g}$.

Dim. Chiaramente $\mathfrak{b}$ è risolubile. Se non fosse massimale, poiché $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$, la sottoalgebra $\mathfrak{b}$ conterrebbe uno dei sottospazi $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ con $\alpha \in \mathcal{R}^+$ e quindi una sottoalgebra isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$. Ma, contenendo una sottoalgebra semisemplice, non potrebbe essere risolubile.

Proposizione 4.3 *Sia* $\mathfrak{g}$ *un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo* $\mathbb{K}$, *che supponiamo di caratteristica zero ed algebricamente chiuso.Sia* $\mathfrak{b}$ *una sottoalgebra di Borel di* $\mathfrak{g}$. *Allora* $\mathfrak{b}$ *contiene un'algebra di Cartan di* $\mathfrak{g}$.

Dim. Sia $\mathfrak{b}$ una sottoalgebra di Borel di $\mathfrak{g}$. Per ogni X di $\mathfrak{b}$, indichiamo con X' l'endomorfismo lineare di $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ definito da $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$ per passaggio al quoziente. Per il Teorema di Lie, gli endomorfismi X' possono essere simultaneamente triangolarizzati: esistono quindi dei funzionali lineari $\gamma_1, ..., \gamma_m \in \mathfrak{b}^*$ tali che, in una base opportuna di $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$, ogni X' sia rappresentato da una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(X) & * & * & \cdots & * \\ 0 & \gamma_2(X) & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \gamma_3(X) & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_m(X) \end{pmatrix}.$$

Ogni $\gamma_i(X)$ è autovalore di X'. Se fosse, per qualche i con $1 \leq i \leq m$, $\gamma_i(X) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{b}$, allora esisterebbe per il Teorema di Lie un $Y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{b}$ tale che $[Y, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{b}$. Ma ciò non è possibile perché allora $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} \oplus \mathbb{K} \cdot Y$ sarebbe una sottoalgebra risolubile di $\mathfrak{g}$ che contiene propriamente $\mathfrak{b}$ e ciò contraddice la massimalità di $\mathfrak{b}$. Quindi $\mathfrak{b} \setminus \cup_{h=1}^m \ker \gamma_h$ è un aperto di Zariski non vuoto di $\mathfrak{b}$. Esso contiene perciò un elemento H regolare in $\mathfrak{b}$: esso è anche regolare in $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^0(H)$ è una sottoalgebra di Cartan contenuta in $\mathfrak{b}$.

Lemma 4.4 *Sia* $\mathcal{R}$ *un sistema astratto di radici ridotto nello spazio Euclideo* E *e sia* $\mathcal{S}$ *un sottoinsieme di* $\mathcal{R}$ *che gode delle proprietà:*

(1) *Se* $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ e $\alpha + \beta \in \mathcal{R}$, *allora* $\alpha + \beta \in \mathcal{S}$;
(2) *Se* $\alpha \in \mathcal{S}$, *allora* $-\alpha \notin \mathcal{S}$.

Allora esiste una base $\mathcal{B}$ *di* $\mathcal{R}$ *tale che* $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}^+(\mathcal{B})$.

Dim. Ragioniamo per induzione sulla dimensione di E. Il caso in cui E abbia dimensione 1 è banale.

Possiamo allora supporre che $\mathcal{S}$ generi E: altrimenti consideriamo il sistema di radici $\mathcal{R}'$ che si ottiene intersecando $\mathcal{R}$ con il sottospazio E' di E generato da $\mathcal{S}$. Possiamo allora, per l'ipotesi induttiva, trovare un elemento regolare ξ' di E' tale che $(\xi|\alpha) > 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{S}$ e basterà quindi scegliere un elemento regolare ξ di E sufficientemente vicino a ξ' per avere $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}^+(\xi)$.

Mostriamo che nessuna somma $\alpha_1 + ... + \alpha_m$ di elementi di $\mathcal{S}$ è nulla. Ragioniamo per induzione su m. Il caso $m = 1$ è banale. Supponiamo quindi $m > 1$ e l'enunciato vero per una somma qualsiasi di meno di m elementi di $\mathcal{S}$. Se $\alpha_1 + ... + \alpha_m = 0$, allora $(\alpha_1|\alpha_2 + ... + \alpha_m) = -\|\alpha_2 + ... + \alpha_m\|^2 < 0$ e quindi esiste un indice j, con $2 \leq j \leq m$, tale che $(\alpha_1|\alpha_j) < 0$. Ma questo implica che $\alpha_1 + \alpha_j \in \mathcal{R}$ e dunque $\alpha_1 + \alpha_j \in \mathcal{S}$ perché somma di radici di $\mathcal{S}$. Dalla

$$(\alpha_1 + \alpha_j) + \alpha_2 + ... + \alpha_{j-1} + \alpha_{j+1} + ... + \alpha_m = 0$$

otteniamo una somma di $m-1$ radici di $\mathcal{S}$ uguale a zero, e quindi una contraddizione.

Mostriamo ora che esiste un elemento $\gamma \in E \setminus \{0\}$ tale che $(\gamma|\alpha) \geq 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{S}$. Se così non fosse, potremmo trovare una successione $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ tale che $\beta_\nu = \sum_{h=0}^{\nu} \alpha_\nu$ sia un elemento di $\mathcal{S}$ per ogni $\nu \in \mathcal{S}$. Infatti, se $\alpha_0, ..., \alpha_\nu$ sono stati già costruiti in modo che $\beta_\nu \in \mathcal{S}$, abbiamo $\beta_\nu \neq 0$ e quindi esisterebbe un $\alpha_{\nu+1} \in \mathcal{S}$ tale che $(\beta_\nu|\alpha_{\nu+1}) < 0$. Ma questa condizione implica che $\beta_{\nu+1} = \beta_\nu + \alpha_{\nu+1} \in \mathcal{R}$ e quindi $\beta_{\nu+1} \in \mathcal{S}$ per la proprietà (1). Ma $\mathcal{S}$ contiene un numero finito di elementi e dunque dovrebbe essere $\beta_i = \beta_j$ per due indici $0 \leq i < j$ e ciò di dà una contraddizione perché $\beta_j - \beta_i$ sarebbe una somma nulla di elementi di $\mathcal{S}$.

Fissiamo quindi $\gamma \in E \setminus \{0\}$ con $(\gamma|\alpha) \geq 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{S}$. Consideriamo $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cap \gamma^\perp$ e $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap \gamma^\perp$. Per l'ipotesi induttiva sulla dimensione, esiste un $\gamma' \in \gamma^\perp$ tale che $(\gamma'|\alpha) > 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{S} \cap \gamma^\perp$. Allora $\xi = \gamma + \epsilon\gamma'$ è, per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, un elemento non nullo di E tale che $(\xi|\alpha) > 0$ per ogni $\alpha \in \mathcal{S}$. Basterà quindi scegliere un η regolare sufficientemente vicino a ξ per ottenere $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}^+(\eta)$.

Proposizione 4.5 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice sul campo $\mathbb{K}$, di caratteristica zero ed algebricamente chiuso. Sia $\mathfrak{b}$ una sottoalgebra di Borel di $\mathfrak{g}$ ed $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di Cartan di $\mathfrak{g}$ contenuta in $\mathfrak{b}$. Allora per un sistema di radici positive $\mathcal{R}^+$ di $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, vale la (4.1).*

Dim. Poiché $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$, la sottoalgebra $\mathfrak{b}$ è somma diretta di $\mathfrak{h}$ e di sottospazi $\mathfrak{g}^\alpha$ per α in un sottoinsieme $\mathcal{S}$ di $\mathcal{R}$. Poiché $\mathfrak{b}$ è risolubile, se $\alpha \in \mathcal{S}$, allora $-\alpha \notin \mathcal{S}$; inoltre, poiché $\mathfrak{b}$ è una sottoalgebra, se $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ e $\alpha + \beta \in \mathcal{R}$, allora $\alpha + \beta \in \mathcal{S}$. Sotto queste condizioni $\mathcal{S}$ è contenuto in un sottoinsieme di radici positive $\mathcal{R}^+$ di $\mathcal{R}$: quindi $\mathfrak{b}$ è contenuta in una sottoalgebra risolubile della forma (4.1) e quindi, essendo massimale, coincide con essa.

Da questa proposizione otteniamo:

Proposizione 4.6 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice sul campo $\mathbb{K}$, algebricamente chiuso e di caratteristica zero. Sia $\ell = \mathrm{rk}(\mathfrak{g})$ e sia $2n$ la cardinalità di un sistema di radici $\mathcal{R}$ di $\mathfrak{g}$ rispetto a una sua sottoalgebra di Cartan $\mathfrak{h}$. Allora $\mathfrak{g}$ ha dimensione $2n + \ell$ ed inoltre:*

(1) *Ogni sottoalgebra di Borel $\mathfrak{b}$ di $\mathfrak{g}$ ha dimensione $n + \ell$;*
(2) *per ogni algebra di Borel $\mathfrak{b}$ di $\mathfrak{g}$, il suo derivato $\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ è un ideale nilpotente di $\mathfrak{b}$ di dimensione n;*
(3) *per ogni sottoalgebra di Borel $\mathfrak{b}$ di $\mathfrak{g}$, la sottoalgebra $\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ è ortogonale a $\mathfrak{b}$ rispetto alla forma di Killing di $\mathfrak{g}$.*

Proposizione 4.7 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie, di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso. Siano $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b}'$ due sottoalgebre di Borel di $\mathfrak{g}$. Allora $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ contiene una sottoalgebra di Cartan di $\mathfrak{g}$.*

Dim. Supponiamo che $\mathfrak{g}$ sia semisemplice.

Sia $\ell = \mathrm{rk}(\mathfrak{g})$ e, posto $\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ $\mathfrak{n}' = [\mathfrak{b}', \mathfrak{b}']$, sia $n = \dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{n}'$. Osserviamo quindi che $\dim \mathfrak{b} = \dim \mathfrak{b}' = n + \ell$ e $\dim \mathfrak{g} = 2n + \ell$.

Poniamo $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ e dimostriamo che

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}\,. \tag{4.2}$$

Per la formula di intersezione di Grassmann abbiamo:

$$\dim \mathfrak{a} \geq \dim \mathfrak{b} + \dim \mathfrak{b}' - \dim \mathfrak{g} = 2(n+\ell) - (2n+\ell) = \ell\,.$$

Gli elementi di $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n}$ sono nilpotenti e appartengono a $\mathfrak{b}'$; essi appartengono perciò a $\mathfrak{n}'$ e quindi:

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n} \subset \mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}'\,.$$

D'altra parte, $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}^{\perp}$ e $\mathfrak{n}' \subset {\mathfrak{n}'}^{\perp}$, ove gli ortogonali sono calcolati utilizzando la forma di Killing, che è non degenere su $\mathfrak{g}$. Abbiamo perciò:

$$\mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}' \subset \mathfrak{b}^{\perp} \cap {\mathfrak{b}'}^{\perp} = (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}')^{\perp}\,.$$

Per la formula di intersezione di Grassmann:

$$\dim(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}') = 2(n+\ell) - \dim \mathfrak{a}$$

e quindi

$$\dim(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}')^{\perp} = (2n+\ell) - ((2(n+\ell) - \dim \mathfrak{a}) = \dim \mathfrak{a} - \ell\,.$$

Otteniamo perciò:

$$\dim(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n}) \leq \dim \mathfrak{a} - \ell\,.$$

Utilizzando ancora la formula di intersezione di Grassmann otteniamo:

$$\dim(\mathfrak{a} + \mathfrak{n}) = \dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{n} - \dim(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n}) \geq \dim \mathfrak{a} + n - (\dim \mathfrak{a} - \ell) = n + \ell\,.$$

Poiché $\mathfrak{a} + \mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}$ e $\dim(\mathfrak{a} + \mathfrak{n}) \geq \dim \mathfrak{b}$, ne segue che $\mathfrak{a} + \mathfrak{n} = \mathfrak{b}$.

Fissiamo ora un elemento H di $\mathfrak{b}$ regolare in $\mathfrak{g}$. Possiamo allora scrivere $H = A + Z$ con $A \in \mathfrak{a}$, $Z \in \mathfrak{n}$. Poiché $\mathfrak{b}$ è risolubile, e Z è nilpotente, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ e $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(A)$ hanno allora lo stesso polinomio caratteristico e quindi $A \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ è un elemento regolare in $\mathfrak{g}$. L'algebra di Cartan $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(A)$ è allora contenuta sia in $\mathfrak{b}$ che $\mathfrak{b}'$.

Ciò completa la dimostrazione nel caso di una $\mathfrak{g}$ semisemplice. Nel caso generale, consideriamo il radicale $\mathfrak{r}$ di $\mathfrak{g}$ e sia $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ la proiezione nel quoziente. Allora $\pi(\mathfrak{b})$ e $\pi(\mathfrak{b}')$ sono sottoalgebre di Borel di $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ e per la prima parte della dimostrazione esiste un'algebra di Cartan $\hat{\mathfrak{h}} \subset \pi(\mathfrak{b}) \cap \pi(\mathfrak{b}')$. Basterà allora considerare la sottoalgebra $\pi^{-1}(\hat{\mathfrak{h}}) \supset \mathfrak{r}$ e scegliere in essa un elemento H tale che $\pi(H)$ sia regolare in $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ e $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ ristretto a $\mathfrak{r}$ abbia nucleo di dimensione minima: allora H è regolare in $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^0(H)$ è una sottoalgebra di Cartan contenuta in $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$.

Teorema 4.8 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$, di caratteristica zero e algebricamente chiuso. Il gruppo $\mathbf{E}(\mathfrak{g})$ agisce transitivamente sulle algebre di Borel di $\mathfrak{g}$.*

Dim. Poiché tutte le algebre di Borel di $\mathfrak{g}$ contengono il radicale $\mathfrak{r}$ di $\mathfrak{g}$ ed esso è trasformato in sé da ogni elemento di $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, possiamo limitarci a considerare il caso in cui $\mathfrak{g}$ sia semisemplice.

Siano $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b}'$ due sottoalgebre di Borel di $\mathfrak{g}$. Fissiamo un'algebra di Cartan $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{g}$ contenuta in $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}'$. Sia $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ il sistema di radici di $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$. Allora, per due camere di Weyl $C, C' \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ risulta:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{R}^+(C)} \mathfrak{g}^{\alpha}, \qquad \mathfrak{b}' = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{R}^+(C')} \mathfrak{g}^{\alpha}.$$

L'elemento $\sigma \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ che trasforma C in C' corrisponde a un automorfismo $a_\sigma \in \mathbf{E}(\mathfrak{g})$ che lascia fissa $\mathfrak{h}$ e trasforma $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{b}'$.

§5 Coniugazione delle algebre di Cartan

Teorema 5.1 *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$, algebricamente chiuso e di caratteristica zero. Allora il gruppo $\mathbf{E}(\mathfrak{g})$ degli automorfismi elementari di $\mathfrak{g}$ agisce transitivamente sulle sottoalgebre di Cartan di $\mathfrak{g}$.*

Dim. Siano $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}'$ due sottoalgebre di Cartan di $\mathfrak{g}$. Possiamo allora costruire due sottoalgebre di Borel $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b}'$ di $\mathfrak{g}$ che contengano rispettivamente $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}'$. Sia $\mathfrak{h}''$ una sottoalgebra di Cartan di $\mathfrak{g}$ contenuta in $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}'$. Poiché $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}''$ sono sottoalgebre di Cartan dell'algebra risolubile $\mathfrak{b}$, esiste un automorfismo speciale a di $\mathbf{S}(\mathfrak{b})$ tale che $a(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}''$. Analogamente, esiste un automorfismo speciale a' di $\mathbf{S}(\mathfrak{b}')$ tale che $a'(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}''$. Poiché $\mathbf{S}(\mathfrak{b})$ e $\mathbf{S}(\mathfrak{b}')$ sono sottogruppi di $\mathbf{E}(\mathfrak{g})$, abbiamo

$$b = a^{-1} \circ a' \in \mathbf{E}(\mathfrak{g}) \qquad \text{e} \qquad b(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}.$$

Osservazione Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ non algebricamente chiuso, due sottoalgebre di Cartan di $\mathfrak{g}$ possono non essere coniugate. Consideriamo ad esempio l'algebra di Lie reale $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Le due matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

generano due sottoalgebre di Cartan di $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ che non sono coniugate da nessun automorfismo di $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

CAPITOLO XVI

COOMOLOGIA DEI GRUPPI CLASSICI E DEI LORO SPAZI OMOGENEI

§1 Anello di coomologia di uno spazio topologico

Indichiamo con $\mathbf{I}^n$ il cubo n-dimensionale

$$\mathbf{I}^n = \{t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \le t_i \le 1 \ \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Sia $m \le n$, $\alpha : \{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ una sequenza strettamente crescente ed $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-m}) \in \{0,1\}^{n-m}$. Poniamo $\alpha(0) = 0$ e definiamo $\partial_\alpha^\epsilon : \mathbf{I}^m \longrightarrow \mathbf{I}^n$ mediante:

$$\partial_\alpha^\epsilon(s_1, \dots, s_m) = (t_1, \dots, t_n) \quad \text{con} \quad t_i = \begin{cases} s_j & \text{se} \quad \alpha(j) = i \\ \epsilon_h & \text{se} \begin{cases} \scriptstyle \alpha(j-1)<i<\alpha(j) \\ \scriptstyle 1\le j\le m \text{ e} \\ \scriptstyle j+h=i. \end{cases} \end{cases}$$

Se $1 \le h \le n$ ed $\epsilon \in \{0,1\}$, denotiamo mediante $\partial_h^\epsilon : \mathbf{I}^{n-1} \longrightarrow \mathbf{I}^n$ la $\partial_{\alpha_k}^\epsilon$ ove $\alpha_k(j) = \begin{cases} \scriptstyle j & \scriptstyle \text{se } j<k \\ \scriptstyle j+1 & \scriptstyle \text{se } j\ge k \end{cases}$ se $k < n$ ed $\alpha_n(j) = j$ per $j = 1, \dots, n-1$; indichiamo con $\pi_k : \mathbf{I}^n \longrightarrow \mathbf{I}^{n-1}$ la proiezione $\pi_k(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, \widehat{t_k}, \dots, t_n)$.

Sia X uno spazio topologico. Un *n-cubo singolare* in X è un'applicazione continua $u : \mathbf{I}^n \longrightarrow X$. La sua *faccia* k, ϵ è l'applicazione composta $u_k^\epsilon = u \circ \partial_k^\epsilon : \mathbf{I}^{n-1} \longrightarrow X$.

Un n-cubo singolare $u : \mathbf{I}^n \longrightarrow X$ (con $n > 0$) si dice *degenere* se esiste un $n-1$ cubo singolare $v : \mathbf{I}^{n-1} \longrightarrow X$ e un indice $1 \le k \le n$ tale che $u = v \circ \pi_k$, se cioè u non dipende dalla variabile t_k.

Indichiamo con $\mathcal{Q}_n(X)$ il gruppo abeliano libero generato dagli n-cubi singolari di X e con $\mathcal{D}_n(X)$ il sottogruppo generato dagli n-cubi singolari degeneri di X. Chiamiamo il quoziente $\mathcal{C}_n(X) = \mathcal{Q}_n(X) \Big/ \mathcal{D}_n(X)$ *gruppo delle n catene singolari cubiche* di X e la somma diretta $\sum_{n\ge 0} \mathcal{C}_n(X)$ il *compesso delle catene cubiche di X*.

Definiamo un omomorfismo $\partial_n : \mathcal{C}_n(X) \longrightarrow \mathcal{C}_{n-1}(X)$ per passaggio al quoziente dall'omomorfismo $\tilde{\partial}_n : \mathcal{Q}_n(X) \longrightarrow \mathcal{Q}_{n-1}(X)$, definito sugli n-cubi singolari $u : \mathbf{I}^n \longrightarrow X$ mediante:

$$\tilde{\partial}_n(u) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\partial_k^0 u - \partial_k^1 u\right).$$

Esso è ben definito perché, se u è degnere, allora $\tilde{\partial}_n(u) \in \mathcal{D}_{n-1}(X)$. Osserviamo ancora che $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ ed otteniamo quindi un *complesso di catene*:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathcal{C}_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & \mathcal{C}_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \mathcal{C}_{n-2}(X) & \longrightarrow & \\ \cdots & \longrightarrow & \mathcal{C}_1(X) & \xrightarrow{\partial_1} & \mathcal{C}_0(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

CAPITOLO XVII

GRUPPI E ALGEBRE DI LIE COMPATTI

§1 Forma compatta di un'algebra semisemplice complessa

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie su un campo $\Bbbk$. Ricordiamo che una forma bilineare $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \Bbbk$ si dice *invariante* se

$$\beta([X,Y],Z) = \beta(X,[Y,Z]) \qquad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}\,. \tag{1.1}$$

Un esempio di forma invariante è la *forma di Killing*, definita da

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X,Y) = \mathrm{tr}\,\left(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)\right) \qquad \forall X,Y \in \mathfrak{g}\,. \tag{1.2}$$

Più in generale, se $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(n,\Bbbk)$ è una qualsiasi rappresentazione $\Bbbk$-lineare di dimensione finita di $\mathfrak{g}$, la

$$\beta_\rho(X,Y) = \mathrm{tr}\,\left(\rho(X) \circ \rho(Y)\right) \qquad \forall X,Y \in \mathfrak{g} \tag{1.3}$$

è bilineare simmetrica alternante su $\mathfrak{g}$.

Un'algebra di Lie *reale* $\mathfrak{g}$ si dice *compatta* se ammette un prodotto scalare invariante.

Abbiamo:

Proposizione 1.1 *Condizione necessaria esufficiente affinché un'algebra di Lie reale $\mathfrak{g}$ sia compatta è che sia l'algebra di Lie di un gruppo di Lie compatto.*

Dim. Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie compatto. Per il Teorema 4.1 del Capitolo IX, esso ammette una rappresentazione fedele $r : \mathbf{G} \to \mathbf{O}(n)$ per qualche intero $n \geq 0$. Allora $dr(e) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{o}(n)$ è una rappresentazione fedele dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e $(-\beta_{dr(e)})$:

$$(-\beta_{dr(e)})(X,Y) = -\mathrm{tr}\,\left(dr(e)(X) \circ dr(e)(Y)\right) = \mathrm{tr}\,(dr(e)(X) \circ {}^t[dr(e)(Y)])$$

è un prodotto scalare invariante su $\mathfrak{g}$.

CAPITOLO XVIII

FIBRAZIONI DI MOSTOW

§1 Lo spazio delle matrici reali definite positive

Indichiamo con $\mathfrak{P}_n$ lo spazio delle matrici reali simmetriche di tipo $n \times n$ e con $\mathfrak{P}_n^+$ il sottoinsieme di $\mathfrak{P}_n$ formato dalle matrici reali simmetriche definite positive. Abbiamo mostrato che l'esponenziale di matrici definisce un'applicazione bigettiva $\mathrm{Exp} : \mathfrak{P}_n \longrightarrow \mathfrak{P}_n^+$. Indicheremo la sua inversa con $\mathrm{Log} : \mathfrak{P}_n^+ \longrightarrow \mathfrak{P}_n$.

Il gruppo lineare $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ agisce transitivamente su $\mathfrak{P}_n^+$ mediante l'azione:

$$\rho : \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{P}_n^+ \ni (a, b) \longrightarrow a \circ b \circ {}^t a \in \mathfrak{P}_n^+ \,. \tag{1.1}$$

Lo stabilizzatore della matrice $e = I_n \in \mathfrak{P}_n^+$ è il gruppo ortogonale

$$\mathbf{O}(n) = \{a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \,|\, a \circ {}^t a = e\} \,.$$

In particolare, possiamo identificare $\mathfrak{P}_n^+$ ad uno spazio omogeneo:

$$\mathfrak{P}_n^+ \simeq \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \Big/ \mathbf{O}(n) \,. \tag{1.2}$$

Poiché $\mathfrak{P}_n^+$ è un aperto dello spazio Euclideo $\mathfrak{P}_n \simeq \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, possiamo identificare il suo spazio tangente $T\mathfrak{P}_n^+$ al prodotto cartesiano $\mathfrak{P}_n^+ \times \mathfrak{P}_n$. Con questa identificazione, definiamo su $\mathfrak{P}_n^+$ una metrica Riemanniana g ponendo

$$\|X\|_a^2 = g_a(X, X) = \mathrm{tr}\, \left[(a^{-1}X)^2\right] \quad \forall a \in \mathfrak{P}_n^+,\ \forall X \in \mathfrak{P}_n \,. \tag{1.3}$$

La $\|X\|_a^2$ è positiva perché la traccia del quadrato di una matrice è la somma dei quadrati dei suoi autovalori. Poiché tutti gli autovalori di una matrice simmetrica reale sono reali, la traccia del suo quadrato è sempre non negativa e nulla solo quando essa è nulla.

Se $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, il differenziale dell'azione $\rho(a) : \mathfrak{P}_n^+ \ni x \longrightarrow a \circ x \circ {}^t a \in \mathfrak{P}_n^+$ di a è l'applicazione $\rho(a)_* : \mathfrak{P}_n^+ \ni X \longrightarrow a \circ X \circ {}^t a \in \mathfrak{P}_n$. Abbiamo allora, per ogni $b \in \mathfrak{P}_n^+$ fissato ed ogni $X \in \mathfrak{P}_n$:

$$\begin{aligned} \|\rho(a)_*(X)\|^2_{\rho(a)(b)} &= \mathrm{tr}\, \left[\left((a \circ b \circ {}^t a)^{-1}\, a \circ A\, {}^t a\right)^2\right] \\ &= \mathrm{tr}\, \left[(b^{-1}X)^2\right] = \|X\|_b^2 \,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Quindi le trasformazioni $\rho(a)$, al variare di a in $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, sono isometrie dello spazio Riemanniano $(\mathfrak{P}_n^+, g)$.

Lemma 1.1 *Sia $x \in \mathfrak{P}_n^+$ e sia $X = \mathrm{Log}(x)$. Allora $\gamma : [0, 1] \ni t \longrightarrow \mathrm{Exp}(tX) \in \mathfrak{P}_n^+$ è l'unica geodetica che congiunge l'identità e al punto x.*

DIM. Sia $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathfrak{P}_n^+$ un cammino differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$ con $\alpha(0) = e$ ed $\alpha(1) = x$. Allora $A(t) = \mathrm{Log}(\alpha(t))$ è un cammino $A : [0,1] \longrightarrow \mathfrak{P}_n$ differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$ che congiunge l'origine 0 ad X. Abbiamo:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Exp}(A(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\sum_{r=1}^{k} A^{r-1}(t) \circ \dot{A}(t) \circ A^{k-r}(t)\right)$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
&\|\dot{\alpha}(t)\|^2_{\alpha(t)} \\
&= \mathrm{tr}\left(\sum_{k_1,k_2=1}^{\infty}\sum_{h_1,h_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{h_1+h_2}\sum_{r_1=1}^{k_1}\sum_{r_2=1}^{k_2} A^{r_1+h_1-1}\circ\dot{A}\circ A^{k_1+k_2-r_1-r_2}\circ\dot{A}\circ A^{r_2+h_2-1}}{h_1!h_2!k_1!k_2!}\right) \\
&= \sum_{k_1,k_2=1}^{\infty}\sum_{h_1,h_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{h_1+h_2}\sum_{r_1=1}^{k_1}\sum_{r_2=1}^{k_2} \mathrm{tr}\left(A^{r_1+h_1-1}\circ\dot{A}\circ A^{k_1+k_2-r_1-r_2}\circ\dot{A}\circ A^{r_2+h_2-1}\right)}{h_1!h_2!k_1!k_2!} \\
&= \mathrm{tr}\left(\sum_{h_1,h_2,k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{h_1+h_2}A^{h_1+h_2+k_1+k_2}\dot{A}^2}{h_1!h_2!k_1!k_2!}\right) \\
&= \mathrm{tr}\,\dot{A}^2
\end{aligned}$$

dove, nel passaggio dalla seconda alla terza riga abbiamo usato la continuità della traccia e in quello dalla terza alla quarta il fatto che la traccia di un prodotto di matrici non dipende dall'ordine dei fattori e di nuovo la continuità.

Otteniamo allora:

$$\|\dot{\alpha}(t)\|_{\alpha(t)} = \left[\mathrm{tr}\,(\dot{A}^2(t))\right]^{1/2} = \left[\mathrm{tr}\,(\dot{A}(t)\circ {}^t\dot{A}(t))\right]^{1/2} = \|\dot{A}(t)\|_e\,.$$

Abbiamo perciò:

$$\int_0^1 \|\dot{\alpha}(t)\|^2_{\alpha(t)}dt = \int_0^1 \|\dot{A}(t)\|^2_e dt\,.$$

Dunque, se α è una geodetica in $\mathfrak{P}_n^+$, allora A è una geodetica in $\mathfrak{P}_n$ per la metrica Euclidea associata alla norma $\|\cdot\|_e$. È quindi il segmento $[0,1] \ni t \longrightarrow t\cdot X \in \mathfrak{P}_n$. $\square$

COROLLARIO 1.2 *Siano $x_0, x_1 \in \mathfrak{P}_n^+$ e siano*

$$\begin{cases} X_0 = \mathrm{Log}(x_0)\,, \\ X = \mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(-X_0/2)\circ x_1 \circ \mathrm{Exp}(-X_0/2))\,. \end{cases}$$

Allora $\gamma : [0,1] \ni t \longrightarrow \mathrm{Exp}(X_0/2)\circ\mathrm{Exp}(tX)\circ\mathrm{Exp}(X_0/2)$ è l'unica geodetica che congiunge x_0 ad x_1.

DIM. Infatti l'isometria $\mathfrak{P}_n^+ \ni x \longrightarrow \mathrm{Exp}(-X_0/2)\circ x\circ\mathrm{Exp}(-X_0/2) \in \mathfrak{P}_n^+$ trasforma una geodetica per x_0 in una geodetica per e. $\square$

Le geodetiche di $\mathfrak{P}_n^+$ verificano il sistema di equazioni:

$$\ddot{x} = \dot{x} \circ \left(x^{-1}\right) \circ \dot{x} \tag{1.5}$$

ed otteniamo quindi le equazioni del trasporto parallelo nella forma:

$$\dot{Y} = \frac{1}{2}\left(\dot{x} \circ \left(x^{-1}\right) \circ Y + Y \circ \left(x^{-1}\right) \circ \dot{x}\right) . \tag{1.6}$$

Se $x(t) = a \circ \mathrm{Exp}(tX) \circ a$, con $a \in \mathfrak{P}_n^+$ ed $X \in \mathfrak{P}_n$, è una geodetica in $\mathfrak{P}_n^+$, risolvendo la (1.6) troviamo che un vettore parallelo lungo la geodetica è della forma:

$$Y(t) = \mathrm{Exp}(Qt/2) \circ Y_0 \circ \mathrm{Exp}({}^tQt/2) \quad \text{con} \quad Q = a \circ X \circ a^{-1} \quad \text{e} \quad Y_0 = Y(0) . \tag{1.7}$$

Ricordiamo la decomposizione di Cartan delle matrici di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$.

Se $x \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, indichiamo con $\varpi(x) = \sqrt{x \circ {}^tx} \in \mathfrak{P}_n^+$ l'unica matrice simmetrica definita positiva $\varpi(x)$ il cui quadrato è uguale ad $x \circ {}^tx$. Allora

$$x = \varpi(x) \circ \left([\varpi(x)]^{-1} \circ x\right) \quad \text{con} \quad \varpi(x) \in \mathfrak{P}_n^+ \text{ e } \left([\varpi(x)]^{-1} \circ x\right) \in \mathbf{O}(n) .$$

Infatti

$${}^t\left([\varpi(x)]^{-1} \circ x\right) \circ \left([\varpi(x)]^{-1} \circ x\right) = {}^tx \circ [\varpi(x)]^{-2} \circ x = {}^tx \circ \left(x \circ {}^tx\right)^{-1} \circ x = e .$$

Abbiamo quindi un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \arrow[rr, "\varpi"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}"'] & & \mathfrak{P}_n^+ \arrow[dl, "\mathrm{pr}'"] \\ & \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \big/ \mathbf{O}(n) & \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

dove abbiamo indicato con pr la proiezione nel quoziente e con pr′ l'omeomorfismo che si ottiene restringendo pr a $\mathfrak{P}_n^+$.

Indichiamo con τ_a l'azione di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ su $\mathfrak{P}_n^+$ che corrisponde all'azione di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ sul quoziente $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \big/ \mathbf{O}(n)$:

$$\tau_a : \mathfrak{P}_n^+ \ni x \longrightarrow \tau_a(x) = \varpi(a \circ x) = \sqrt{a \circ x^2 \circ {}^ta} \in \mathfrak{P}_n^+ . \tag{1.9}$$

Lemma 1.3 *Sia $a \in \mathfrak{P}_n^+$. Il differenziale $d\tau_a(e) : T_e\mathfrak{P}_n^+ \simeq \mathfrak{P}_n \to \mathfrak{P}_n \simeq T_a\mathfrak{P}_n^+$ associa ad ogni vettore $X \in \mathfrak{P}_n^+$ il suo trasporto parallelo lungo la geodetica che congiunge e ad a.*

Dim. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \tau_a(e + tX) &= \sqrt{a \circ (e + tX)^2 \circ a} \\ &= \sqrt{a} \circ \sqrt{e + 2tX + t^2X^2} \circ \sqrt{a} \\ &= a + t\left(\sqrt{a} \circ X \circ \sqrt{a}\right) + O(t^2) \end{aligned}$$

e quindi

$$d\tau_a(e)(X) = \sqrt{a} \circ X \circ \sqrt{a}\,. \tag{1.10}$$

Ricordiamo ora che, se $A = \mathrm{Log}(a)$, allora la geodetica che congiunge e ad a è la $[0,1] \ni t \longrightarrow \mathrm{Exp}(tA) \in \mathfrak{P}_n^+$ ed il trasporto parallelo del vettore $X \in T_e\mathfrak{P}_n^+ \simeq \mathfrak{P}_n$ è dato da $X(t) = \mathrm{Exp}(At/2) \circ X \circ \mathrm{Exp}(At/2)$. Quindi $X(1) = d\tau_a(e)(X)$. $\square$

Associamo ad ogni $X \in \mathfrak{P}_n$, l'applicazione lineare:

$$\Theta_X : \mathfrak{P}_n \ni Y \longrightarrow [X,[X,Y]] \in \mathfrak{P}_n\,. \tag{1.11}$$

Vale il seguente:

Lemma 1.4 *Se $X, Y \in \mathfrak{P}_n$, abbiamo*

$$d\mathrm{Exp}(X)(Y) = d\tau_{\mathrm{Exp}(X)}(e) \circ \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\Theta_X^h(Y)}{(2h+1)!}\,. \tag{1.12}$$

Dim. Ricordiamo la formula del differenziale dell'esponenziale di matrici:

$$d\mathrm{Exp}(X)(Y) = \mathrm{Exp}(X) \circ \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{[\mathrm{ad}(X)]^h}{(h+1)!} Y$$
$$\forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})\,.$$

Abbiamo $\varpi(\mathrm{Exp}(X)) = \mathrm{Exp}(X)$ per ogni $X \in \mathfrak{P}_n$. Perciò, differenziando la restrizione dell'esponenziale a $\mathfrak{P}_n$, otteniamo

$$d\mathrm{Exp}(X)(Y) = d\varpi \circ \mathrm{Exp}(X) \circ \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{[\mathrm{ad}(X)]^h}{(h+1)!} Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{P}_n\,.$$

Ora, indicando con L_a la traslazione a sinistra ($L_a(x) = a \circ x$), abbiamo:

$$\varpi \circ L_a(x) = \tau_a \circ \varpi(x) \quad \forall a, x \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})\,.$$

Quindi

$$d\varpi \circ L_{a*} = d\tau_a \circ d\varpi \quad \forall a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})\,.$$

Otteniamo perciò, per ogni $X, Y \in \mathfrak{P}_n$:

$$\begin{aligned} d\mathrm{Exp}(X)(Y) &= d\varpi(\mathrm{Exp}(X)) \circ dL_{\mathrm{Exp}(X)}(e) \left(\sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{[\mathrm{ad}(X)]^h}{(h+1)!} Y \right) \\ &= d\tau_{\mathrm{Exp}(X)}(e) \circ \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{d\varpi(e)\left([\mathrm{ad}(X)]^h (Y)\right)}{(h+1)!}\,. \end{aligned}$$

Il differenziale $d\varpi(e) : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{P}_n$ è la proiezione $X \longrightarrow (X + {}^tX)/2$ di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ su $\mathfrak{P}_n$, con nucleo $\mathfrak{o}(n)$. Poiché $\mathrm{ad}(X)^h(Y)$ è una matrice di $\mathfrak{P}_n$ quando h è pari e di $\mathfrak{o}(n)$ quando h è dispari, otteniamo la tesi. $\square$

Richiamiamo ora alcune nozioni e risultati di Geometria Riemanniana che ci saranno utili per la discussione dei sistemi tripli di Lie in $\mathfrak{P}_n^+$.

Sia (M, g) una varietà Riemanniana. Una sua sottovarietà N si dice *totalmente geodetica* se contiene ogni geodetica di M che le sia tangente in un punto. Vale il seguente:

Lemma 1.5 *Sia M una varietà Riemanniana ed N una sottovarietà differenziabile connessa di M. Sono equivalenti:*

(*i*) *N è totalmente geodetica;*
(*ii*) *il trasporto parallelo lungo curve che giacciono in N trasforma vettori tangenti ad N in vettori tangenti ad N.*

Dim. Sia m la dimensione di M, n la dimensione di N e scegliamo coordinate locali $x^1, \dots, x^m$ in un intorno U di un punto $p_0 \in N$ in modo che $x^j(p_0) = 0$ e la componente connessa N_0 di p_0 in $U \cap N$ sia descritta da:

$$N_0 = \{p \in U \mid x^j(p) = 0 \; \forall n < j \leq n\} .$$

La condizione che N_0 sia totalmente geodetica si può esprimere in termini dei simboli di Christoffel Γ^i_{jk} della connessione di Levi-Civita nelle coordinate locali:

N_0 è totalmente geodetica se e soltanto se

$$(*) \qquad \Gamma^i_{jk}(p) = 0 \quad \forall i > n, \; \forall j, k \leq n \, \forall p \in N_0 .$$

Consideriamo infatti il sistema di equazioni delle geodetiche di U:

$$(\dagger) \qquad \ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{m} \Gamma^i_{jk} \dot{x}^i \dot{x}^k = 0 \qquad \text{per} \quad j = 1, \dots, m$$

e il sistema

$$(\ddagger) \qquad \ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} \dot{x}^i \dot{x}^k = 0 \qquad \text{per} \quad j = 1, \dots, n .$$

Supponiamo valga la $(*)$. Allora, da ogni soluzione

$$t \longrightarrow x'(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

di $(\ddagger)$, otteniamo una soluzione

$$t \longrightarrow x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$$

di $(\dagger)$.

Quindi, se vale $(*)$, ogni geodetica in U con condizioni iniziali $x^j(0) = 0$, $\dot{x}^j(0) = 0$ per $j > n$ è contenuta in N_0.

Viceversa, se questo è vero, otteniamo facilmente la $(*)$ osservando che $\ddot{x}^j(0) = 0$ per ogni soluzione di $(\dagger)$ che soddisfi le condizioni iniziali $x^j(0) = 0$, $\dot{x}^j(0) = 0$ per $j > n$: per le $(\dagger)$ otteniamo $\sum_{j,k=1}^n \Gamma^i_{jk}(p) v^j v^k = 0$ per ogni $p \in N_0$ ed ogni scelta di $v^1, \dots, v^n \in \mathbb{R}$. Poiché i simboli di Christoffel sono simmetrici rispetto agli indici in basso, ciò equivale alle $(*)$.

Ricordiamo che l'equazione del trasporto parallelo di un vettore Y lungo una curva γ si esprime nelle coordinate locali mediante:

$$(\dagger\dagger) \qquad \dot{Y}^i + \sum_{j,k=1}^{m} \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{Y}^k \quad \text{per} \quad i = 1, \dots, m,$$

ove $x^i(t) = x^i(\gamma(t))$. Consideriamo il sistema:

$$(\ddagger\ddagger) \qquad \dot{Y}^i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{Y}^k \quad \text{per} \quad i = 1, \dots, n,$$

Supponiamo che γ sia una curva in N_0. Se vale $(*)$, ogni soluzione

$$t \longrightarrow Y'(t) = (Y^1(t), \dots, Y^n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

di $(\ddagger\ddagger)$ dà una soluzione

$$t \longrightarrow Y(t) = (Y^1(t), \dots, Y^n(t), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$$

di $(\dagger\dagger)$. Per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy, ne segue che ogni soluzione di $(\dagger\dagger)$ che soddisfa la condizione iniziale $Y^i(0) = 0$ per $i > n$ ha $Y^i(t) = 0$ per ogni $i > n$ ed ogni t.

Viceversa, se ciò è vero, abbiamo $\dot{Y}^i(0) = 0$ per ogni soluzione di $(\dagger\dagger)$ con $Y^i(0) = 0$ per $i > n$. Sostituendo abbiamo $\sum_{j,k=1}^n \Gamma^i_{jk}(p)\dot{x}^j(0)Y^k(0) = 0$ per ogni scelta di $p \in N_0$ e $\dot{x}^1(0), \dots, \dot{x}^n(0) \in \mathbb{R}$ e di $Y^1(0), \dots, Y^n(0) \in \mathbb{R}$ e da queste uguaglianze ricaviamo le $(*)$. $\square$

Formuliamo ora il teorema che caratterizza i sistemi di Lie tripli di $\mathfrak{P}_n$. Vale il seguente:

Teorema 1.6 *Sia $\mathfrak{l}$ un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{P}_n$ e sia $N = \operatorname{Exp}(\mathfrak{l})$. Sono allora equivalenti:*

(i) N è una sottovarietà totalmente geodetica di $\mathfrak{P}_n^+$.
(ii) Se $x, y \in N$, allora anche $xyx \in N$.
(iii) $[X, [X, Y]] \in \mathfrak{l}$per ogni $X, Y \in \mathfrak{l}$.
(iv) $[X, [Y, Z]] \in \mathfrak{l}$ per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{l}$.

Dim. *(i) ⇒ (ii)* Siano $x, y \in N$ e siano $X = \operatorname{Log}(x)$, $Y = \operatorname{Log}(y) \in \mathfrak{l}$. Il vettore $x \circ Y \circ x$ è ottenuto per trasporto parallelo, da o a x^2, di $Y \in \mathfrak{l} \simeq T_o N$ lungo la geodetica $t \longrightarrow \operatorname{Exp}(tX)$. Poiché abbiamo supposto N totalmente geodetica, per il Lemma 1.5, $x \circ Y \circ x$ è tangente ad N nel punto x^2. Ancora per l'ipotesi che N fosse totalmente geodetica, la geodetica $x \circ \operatorname{Exp}(tY) \circ x$ è tutta contenuta in N, ed in particolare per $t = 1$ abbiamo che $xyx \in N$.

(ii) ⇒ (iii) Utilizziamo le formule per il prodotto di esponenziali di matrici:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Exp}(tA) \circ \operatorname{Exp}(tB) \\ (1.13) \qquad &= \operatorname{Exp}\Big(t(A+B) + \tfrac{t^2}{2}[A,B] + \tfrac{t^3}{12}\left([A,[A,B]] + [[A,B],B]\right) + O(t^4)\Big) \\ &\qquad \forall A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$
(1.14)\qquad
\begin{aligned}
&\operatorname{Exp}(tA)\circ\operatorname{Exp}(tB)\circ\operatorname{Exp}(-tA)\\
&\quad=\operatorname{Exp}\left[\operatorname{Exp}(tA)\circ B\circ\operatorname{Exp}(-tA)\right]\\
&\quad=\operatorname{Exp}(tB+t^2[A,B]+\tfrac{t^3}{2}[A,[A,B]]+O(t^4))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \forall A,B\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

Siano $X, Y \in \mathfrak{l}$. Se vale la (ii), per ogni $t \in \mathbb{R}$ il punto $\operatorname{Exp}(tX)\circ\operatorname{Exp}(tY)\circ\operatorname{Exp}(tX)$ appartiene ad N. Poniamo $Z(t) = Y + t[X,Y] + \frac{t^2}{2}[X,[X,Y]]$. Allora

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Exp}(tX)\circ\operatorname{Exp}(tY)\circ\operatorname{Exp}(tX)\\
&\quad=(\operatorname{Exp}(tX)\circ\operatorname{Exp}(tY)\circ\operatorname{Exp}(-tX))\circ\operatorname{Exp}(2tX)\\
&\quad=\operatorname{Exp}(tZ(t)+O(t^4))\circ\operatorname{Exp}(2tX)\\
&\quad=\operatorname{Exp}\Big[t(Z(t)+2X)+\tfrac{t^2}{2}[Z(t),2X]+\tfrac{t^3}{12}\left([Z(t),[Z(t),2X]]+[[Z(t),2X],2X]\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +O(t^4)\Big]\\
&\quad=\operatorname{Exp}(W(t))
\end{aligned}
$$

per una curva $t \longrightarrow W(t) \in \mathfrak{l}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$. Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
&[Z(t),X]=-[X,Y]-t[X,[X,Y]]+O(t^2)\\
&[Z(t),[Z(t),X]]=[Y,[Y,X]]+O(t)\\
&[[Z(t),X],X]=[X,[X,Y]]+O(t)
\end{aligned}
$$

e perciò

$$
\begin{aligned}
W(t)=\;& t\left(Y+t[X,Y]+\tfrac{t^2}{2}[X,[X,Y]]+2X\right)\\
&-t^2\left([X,Y]+t[X,[X,Y]]\right)\\
&+\tfrac{t^3}{12}\left(2[Y,[Y,X]]+4[X,[X,Y]]\right)\\
&+O(t^4)\\
=\;& t(Y+2X)+\tfrac{t^3}{6}\left([Y,[Y,X]]-[X,[X,Y]]\right)+O(t^4)\,.
\end{aligned}
$$

Da questa ricaviamo facilmente che $[Y,[Y,X]] - [X,[X,Y]] \in \mathfrak{l}$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{l}$. Sostituendo $2X$ a X troviamo che anche $[Y,[Y,X]] - 2[X,[X,Y]] \in \mathfrak{l}$ e, infine, che $[X,[X,Y]] = ([Y,[Y,X]] - [X,[X,Y]]) - ([Y,[Y,X]] - 2[X,[X,Y]]) \in \mathfrak{l}$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Siano $X, Y, Z \in \mathfrak{l}$. Supponendo che valga (iii), abbiamo:

$$
\mathfrak{l} \ni [X+Y,[X+Y,Z]] = [X,[X,Z]]+[Y,[Y,Z]]+[X,[Y,Z]]+[Y,[X,Z]]\,.
$$

Quindi otteniamo che

$$
[X,[Y,Z]]+[Y,[Y,Z]]\in\mathfrak{l}\quad \forall X,Y,Z\in\mathfrak{l}\,.
$$

Ne segue che

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{l}\ni&[Y,[Z,X]]+[Z,[Y,X]]+2\left([X,[Y,Z]]+[Y,[X,Z]]\right)\\
&=[Z,[Y,X]]+[X,[Y,Z]]+[X,[Y,Z]]+[Y,[X,Z]]\\
&=3\,[X,[Y,Z]]\qquad \forall X,Y,Z\in\mathfrak{l}\,.
\end{aligned}
$$

e quindi $[X,[Y,Z]] \in \mathfrak{l}$ per ogni $X,Y,Z \in \mathfrak{l}$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Osserviamo che $[\mathfrak{l},\mathfrak{l}] \subset [\mathfrak{P}_n,\mathfrak{P}_n] \subset \mathfrak{o}(n)$. Di più, $\mathfrak{s}_0 = [\mathfrak{l},\mathfrak{l}]$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{o}(n)$. Infatti, se $X_1,X_2,Y_1,Y_2 \in \mathfrak{l}$ abbiamo:

$$[[X_1,X_2],[Y_1,Y_2]] = [[[X_1,X_2],Y_1],Y_2] + [Y_1,[[X_1,X_2],Y_2] \subset [\mathfrak{l},Y_2] + [Y_1,\mathfrak{l}] \subset \mathfrak{s}_0$$

e quindi $[\mathfrak{s}_0,\mathfrak{s}_0] \subset \mathfrak{s}_0$ ed $\mathfrak{s}_0$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, contenuta in $\mathfrak{o}(n)$.

Sia $\mathfrak{s}$ la sottoalgebra di Lie:

$$\mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{o}(n) \mid \mathrm{ad}(X)(\mathfrak{l}) \subset \mathfrak{l}\}\,.$$

Allora $\mathfrak{s}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ che contiene $\mathfrak{s}_0$ ed è contenuta in $\mathfrak{o}(n)$. Essa è l'algebra di Lie del gruppo di Lie

$$\mathbf{K} = \{a \in \mathbf{O}(n) \mid \mathrm{Ad}(a)(\mathfrak{l}) \subset \mathfrak{l}\}\,,$$

che è compatto perché è chiuso e contenuto nel sottogruppo compatto $\mathbf{O}(n)$.

Sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$. Poiché

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{l},\mathfrak{l}] + [\mathfrak{l},\mathfrak{s}] + [\mathfrak{s},\mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}_0 + \mathfrak{l} + \mathfrak{s} = \mathfrak{g}\,,$$

$\mathfrak{g}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Sia $\mathbf{G}$ il sottogruppo analitico di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Esso contiene il sottogruppo analitico compatto $\mathbf{K}_e$ con algebra di Lie $\mathfrak{s}$, che è la componente connessa dell'identità di $\mathbf{K}$.

Consideriamo l'orbita N' di $\mathbf{G}$ per il punto $o = \varpi(e) \in \mathfrak{P}_n^+$. Poiché lo stabilizzatore di o per l'azione di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ su $\mathfrak{P}_n^+$ è $\mathbf{O}(n)$, lo stabilizzatore di o in $\mathbf{G}$ è l'intersezione $\mathbf{G} \cap \mathbf{O}(n)$. Esistono un intorno V_0 di 0 in $\mathfrak{l}$ ed un intorno W_0 di 0 in $\mathfrak{s}$ per cui l'applicazione $V_0 \times W_0 \ni (X,Y) \longrightarrow \mathrm{Exp}(Y) \circ \mathrm{Exp}(X) \in \mathbf{G}$ è un diffeomorfismo su un intorno di e in $\mathbf{G}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\tau_{\mathrm{Exp}(Y)\circ\mathrm{Exp}(X)}(o) &= \sqrt{\mathrm{Exp}(Y) \circ \mathrm{Exp}(2X) \circ \mathrm{Exp}(-Y)}\\ &= \mathrm{Exp}\,[2\mathrm{Exp}(Y) \circ X \circ \mathrm{Exp}(-Y)]\end{aligned}$$

Poiché l'esponenziale è bigettivo da $\mathfrak{P}_n$ a $\mathfrak{P}_n^+$, abbiamo $\tau_{\mathrm{Exp}(Y)\circ\mathrm{Exp}(X)}(o) = o$ se e soltanto se $\mathrm{Exp}(Y) \circ X \circ \mathrm{Exp}(-Y) = 0$, cioè se $X = 0$. Ciò dimostra che l'algebra di Lie dello stabilizzatore in $\mathbf{G}$ del punto o è $\mathfrak{s}$. Sia $\mathbf{K}'$ lo stabilizzatore di o in $\mathbf{G}$. Abbiamo allora $\mathbf{K}_e \subset \mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$. In particolare $\mathbf{K}'$ è un sottogruppo compatto ed abbiamo un diffeomorfismo su N' dello spazio omogeneo $\mathbf{G}/_{\mathbf{K}'}$. È $N \subset N'$ perché $\mathrm{Exp}(X) \in \mathbf{G}$ per ogni $X \in \mathfrak{l}$. Inoltre $T_oN' = T_oN = d\varpi(e)(\mathfrak{l})$. In particolare, tutte le geodetiche di $\mathfrak{P}_n^+$ uscenti dal punto o e tangenti ad N' in o sono contenute in N'. Il gruppo $\mathbf{G}$ opera transitivamente su N' come un gruppo di isometrie. Poiché le isometrie trasformano geodetiche in geodetiche, la sottovarietà N' è totalmente geodetica. Poiché $\mathfrak{P}_n^+$ è completa, anche N' è completa[34] e quindi coincide con N,

[34]Utilizziamo il Teorema di Hopf-Rinow: *Sia (M,g) una varietà Riemanniana e sia d_g la distanza definita dalla metrica g. Sono equivalenti:*

(1) *M, con la distanza d_g, è uno spazio metrico completo;*
(2) *Ogni sottoinsieme chiuso e limitato di M è compatto;*

in quanto contiene tutte le geodetiche che congiungono un suo punto al punto o. Dall'uguaglianza $N' = N$ segue dunque che N è totalmente geodetica. □

Un sottospazio vettoriale $\mathfrak{l}$ di $\mathfrak{P}_n$ che soddisfi

$$[X,[Y,Z]] \in \mathfrak{l} \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{l} \tag{1.15}$$

si dice un *sistema di Lie triplo* in $\mathfrak{P}_n$.

COROLLARIO 1.7 *Sia $\mathfrak{l}$ un sistema di Lie triplo in $\mathfrak{P}_n$.*

(*a*) $N = \{\mathrm{Exp}(X) \,|\, X \in \mathfrak{l}\}$ *è una sottovarietà chiusa di* $\mathfrak{P}_n^+$.
(*b*) $[\mathfrak{l},\mathfrak{l}]$ *è una sottoalgebra di Lie di* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.
(*c*) $\mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{o}(n) \,|\, \mathrm{ad}(X)(\mathfrak{l}) \subset \mathfrak{l}\}$ *è una sottoalgebra di Lie di* $\mathfrak{o}(n)$ *che contiene* $[\mathfrak{l},\mathfrak{l}]$.
(*d*) $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{s} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{s}$ *è una sottoalgebra di Lie di* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.
(*e*) *Siano* $\mathbf{G}$ *e* $\mathbf{K}_e$ *i sottogruppi analitici di* $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ *con algebre di Lie* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{s}$ *rispettivamente. Allora* $\mathbf{G}$ *è un sottogruppo chiuso di* $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathbf{K}_e$ *è un sottogruppo compatto massimale di* $\mathbf{G}$ *e l'applicazione:*

$$\mathfrak{l} \times \mathbf{K}_e \ni (X,a) \longrightarrow \mathrm{Exp}(X) \circ a \in \mathbf{G} \tag{1.16}$$

è un diffeomorfismo.

DIM. (*a*) L'applicazione

$$\mathfrak{P}_n \times \mathbf{O}(n) \ni (X,a) \longrightarrow \mathrm{Exp}(X) \circ a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) \tag{$*$}$$

è un diffeomorfismo. Quindi l'immagine N del chiuso $\mathfrak{l} \times \{e\}$ è chiusa in $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ e contenuta in $\mathfrak{P}_n^+ \subset \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$, quindi chiusa in $\mathfrak{P}_n^+$.

(*b*), (*c*), (*d*) sono state provate nel corso della dimostrazione dell'implicazione $(iv) \Rightarrow (i)$ del Teorema 1.6.

(*e*) Nel dimostrare l'implicazione $(iv) \Rightarrow (i)$ del Teorema 1.6, abbiamo fatto vedere che, se $\mathbf{K}'$ è lo stabilizzatore di $o \in \mathfrak{P}_n^+$ in $\mathbf{G}$, allora $\mathbf{G}/_{\mathbf{K}'} \simeq N$. Poiché N è omeorfo a $\mathfrak{l}$ e quindi semplicemente connesso, ciò implica che $\mathbf{K}'$ è connesso e quindi coincide con la propria componente connessa dell'identità $\mathbf{K}_e$.

Siano ora $X \in \mathfrak{P}_n$ e $a \in \mathbf{O}(n)$ tali che $b = \mathrm{Exp}(X) \circ a \in \mathbf{G}$. Poiché $N \ni \tau_b(o) = \varpi(\mathrm{Exp}(X) \circ a) = \mathrm{Exp}(X)$, abbiamo $X \in \mathfrak{l}$ e quindi $a = \mathrm{Exp}(-X) \circ b \in \mathbf{G} \cap \mathbf{O}(n) = \mathbf{K}_e$. Questo dimostra che l'appicazione (1.16) è surgettiva e dunque, essendo la restrizione del diffeormorfismo $(*)$, è un diffeomorfismo. □

§2 SISTEMI TRIPLI DI LIE

LEMMA 2.1 *Sia* $\mathfrak{g}$ *un'algebra di Lie reale e sia* $\mathfrak{l}$ *un sottospazio vettoriale di* $\mathfrak{g}$. *Sono condizioni equivalenti:*

(*i*) $[X,[X,Y]] \in \mathfrak{l}$ *per ogni* $X,Y \in \mathfrak{l}$;
(*ii*) $[X,[Y,Z]] \in \mathfrak{l}$ *per ogni* $X,Y,Z \in \mathfrak{l}$.

---

(3) *Ogni geodetica massimale in M è una curva $\mathbb{R} \ni t \longrightarrow \gamma(t) \in M$ definita per ogni valore del parametro reale $t \in \mathbb{R}$.*

Se M soddista le condizioni equivalenti (1), (2), (3) *si dice una varietà Riemanniana completa. In una varietà Riemanniana completa M, per ogni coppia di punti $x,y \in M$ esiste un arco di geodetica $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ di lunghezza $\mathrm{d}_g(x,y)$ con $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.*

(Vedi ad esempio il §10 del Capitolo I di: Sigurdur Helgason *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* Pure and Applied Mathematics, 80. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978. xv+628 pp)

Chiaramente $(ii) \Rightarrow (i)$ e quindi basta dimostrare l'inclusione opposta. Siano $X, Y, Z \in \mathfrak{l}$. Supponendo che valga (i), abbiamo:

$$\mathfrak{l} \ni [X+Y,[X+Y,Z]] = [X,[X,Z]] + [Y,[Y,Z]] + [X,[Y,Z]] + [Y,[X,Z]]\,.$$

Quindi otteniamo che

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Y,Z]] \in \mathfrak{l} \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{l}\,.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \mathfrak{l} \ni & [Y,[Z,X]] + [Z,[Y,X]] + 2\,([X,[Y,Z]] + [Y,[X,Z]]) \\ &= [Z,[Y,X]] + [X,[Y,Z]] + [X,[Y,Z]] + [Y,[X,Z]] \\ &= 3\,[X,[Y,Z]] \qquad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{l}\,. \end{aligned}$$

Ne segue che $[X,[Y,Z]] \in \mathfrak{l}$ per ogni $X,Y,Z \in \mathfrak{l}$. □

Un sottoinsieme $\mathfrak{l}$ di un'algebra di Lie reale $\mathfrak{g}$, che soddisfi le condizioni equivalenti (i) ed (ii) del Lemma 2.1 si dice un *sistema di Lie triplo*.

§3 Fibrazioni covarianti

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie, $\mathbf{G}_\mathfrak{o}$ un suo sottogruppo chiuso ed $M = \mathbf{G}/\mathbf{G}_\mathfrak{o}$ il corrispondente spazio omogeneo.

Sia F uno spazio topologico e sia λ un'antirappresentazione continua di $\mathbf{G}_\mathfrak{o}$ su F. Ciò significa che

$$\lambda : \mathbf{G} \times F \ni (g,f) \longrightarrow \lambda(g,f) \in F \tag{3.1}$$

è un'applicazione continua e che:

$$\lambda(e,f) = f\,, \quad \lambda(g_1, \lambda(g_2,f)) = \lambda(g_2g_1,f) \quad \forall g_1,g_2 \in \mathbf{G},\ \forall f \in F\,. \tag{3.2}$$

Sul prodotto cartesiano $\mathbf{G} \times F$ definiamo una relazione di equivalenza $\sim$, identificando la coppia (g,f) a tutte le coppie $(gh, \lambda(h,f))$ con $h \in \mathbf{G}_\mathfrak{o}$. Indichiamo con

$$[g,f] = \{(gh, \lambda(h,f)) \mid h \in \mathbf{G}_\mathfrak{o}\} \tag{3.3}$$

la classe di equivalenza di $(g,f) \in \mathbf{G} \times F$.

Indichiamo il quoziente $\mathbf{G} \times F/\sim$ mediante $\mathbf{G} \times_{\mathbf{G}_\mathfrak{o}} F$. Indicando con $\pi : \mathbf{G} \longrightarrow M$ la proiezione sul quoziente, definiamo una proiezione:

$$\varpi : \mathbf{G} \times_{\mathbf{G}_\mathfrak{o}} F \ni [g,f] \longrightarrow \pi(g) \in M\,. \tag{3.4}$$

Lemma 3.1 *La $\varpi : \mathbf{G} \times_{\mathbf{G}_\mathfrak{o}} F \ni [g,f] \longrightarrow \pi(g) \in M$ è una fibrazione localmente banale con fibra tipica F e gruppo strutturale $\mathbf{G}_\mathfrak{o}$.*

Dim. Ad ogni sezione continua $\phi_U : U \longrightarrow \mathbf{G}$ del fibrato principale $\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M$, definita su un aperto U di M, associamo una trivializzazione locale:

$$\tilde{\phi}_U : U \times F \ni (x, f) \longrightarrow [\phi(x), f] \in \varpi^{-1}(U) \subset \mathbf{G} \times_{\mathbf{G}_\mathfrak{o}} F \,. \tag{$*$}$$

Quest'applicazione è bigettiva, e la sua inversa è data da:

$$\varpi^{-1}(U) \ni [g, f] \longrightarrow (\pi(g), \lambda(\phi_U(\pi(g))g^{-1}, f) \in U \times F \,.$$

Data un'altra sezione $\phi_V : V \longrightarrow \mathbf{G}$ del fibrato principale $\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M$, definita su un altro aperto V di M, abbiamo su $U \cap V$:

$$\tilde{\phi}_V^{-1} \circ \tilde{\phi}_U(x, f) = \tilde{\phi}_V^{-1}([\pi(\phi_U(x)), f]) = (x, \lambda(\phi_V(x)\phi_U(x)^{-1}, f)) \,.$$

Osserviamo che $U \cap V \ni x \longrightarrow \phi_V(x)\phi_U(x)^{-1}$ è una funzione continua a valori in $\mathbf{G}_\mathfrak{o}$. Quindi le $(*)$, al variare di ϕ_U tra le sezioni continue del fibrato principale $\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M$, definiscono un atlante di trivializzazione e quindi una struttura di fibrato topologico con fibra F e gruppo strutturale $\mathbf{G}_\mathfrak{o}$ sul fibrato $\mathbf{G} \times_{\mathbf{G}_\mathfrak{o}} F \xrightarrow{\varpi} M$. □

§4 Fibrazioni covarianti di uno spazio di Klein

Uno *spazio di Klein* è una varietà differenziabile M su cui un gruppo di Lie $\mathbf{G}$ opera transitivamente. Se $\mathbf{G}_\mathfrak{o}$ è il gruppo di isotropia di un punto $\mathfrak{o}$ di M, l'applicazione $\tau_\mathfrak{o}$ definita dal diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G} \arrow[rr, "g \longrightarrow g\cdot\mathfrak{o}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M \\ & \mathbf{G}/\mathbf{G}_\mathfrak{o} \arrow[ur, "\tau_\mathfrak{o}"'] & \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

è un omeomorfismo.

Una *fibrazione covariante* di uno spazio di Klein $M \simeq \mathbf{G}/\mathbf{G}_\mathfrak{o}$ è una fibrazione vettoriale $M \xrightarrow{\varpi} N$, con fibra $F \simeq \mathbb{R}^k$, tale che:

(i) Esiste un sottogruppo compatto $\mathbf{K}$ di $\mathbf{G}$ che opera transitivamente sulle fibre di $M \xrightarrow{\varpi} N$;

(ii) Per ogni fibra F_p di $M \xrightarrow{\varpi} N$ il sottogruppo $\mathbf{K}_{\varpi^{-1}(p)}$ delle trasformazioni di $\mathbf{K}$ che lasciano invariata la fibra $\varpi^{-1}(p)$ è un gruppo di trasformazioni lineari di F_p.