Lezioni di Geometria 4
2008-2009
(II Semestre)

Mauro Nacinovich

Indice

Parte 1. Complementi di Topologia Generale 9

Capitolo 1. Spazi normali 11
1. Assiomi di separazione 11
2. Funzioni di Urysohn 15
3. Estensione di funzioni continue 17
4. Partizione dell'unità negli spazi normali 19
5. Funzioni semicontinue e spazi normali 21
6. Assiomi di numerabilità e di separabilità 27
7. Un teorema di immersione e metrizzabilità 30

Capitolo 2. Spazi di Baire 33
1. Definizione ed esempi di spazi di Baire 33
2. Alcuni teoremi sulle funzioni reali continue e semicontinue 35
3. Alcune applicazioni agli spazi normati 41

Capitolo 3. Spazi di funzioni continue 45
1. Il teorema di approssimazione di Stone-Weierstrass 45
2. La topologia compatta-aperta 49
3. Il teorema di approssimazione nel caso non compatto 53

Parte 2. Gruppi Topologici 55

Capitolo 4. Gruppi topologici 57
1. Definizioni principali 57
2. Il gruppo degli omeomorfismi di uno spazio topologico 58
3. Proprietà generali dei gruppi topologici 60
4. Omomorfismi di gruppi topologici 65
5. Caratteri 66

Capitolo 5. Esponenziale di matrici 69
1. Spazi di matrici 69
2. La decomposizione di Wedderburn 72
3. Esponenziale di matrici 73
4. Matrici Hermitiane 78

Capitolo 6. Gruppi lineari e loro algebre di Lie 83
1. Decomposizione di Cartan delle matrici di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ 83

2. Algebre di Lie 84
3. Algebra di Lie di un gruppo lineare 88
4. La trasformata di Cayley 96

Capitolo 7. Gruppi lineari compatti 99
1. Proprietà topologiche di $\mathbf{U}(n)$ 99
2. Il gruppo speciale unitario 101
3. Il gruppo speciale lineare complesso 102
4. I gruppi $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$ 103
5. L'omomorfismo canonico $\mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SO}(3)$ 105
6. Il gruppo quaternonico unitario $\mathbf{Sp}(n)$ 109
7. Sfere e gruppi compatti 111
8. Il gruppo $\mathbf{SO}(4)$ 112

Capitolo 8. La lista di Cartan dei gruppi classici 115
1. Decomposizione di Cartan per una classe di gruppi pseudoalgebrici 115
2. I gruppi classici non compatti 119
3. I gruppi $\mathbf{U}(p,q)$ e $\mathbf{SU}(p,q)$ 120
4. I gruppi $\mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})$ e $\mathbf{SU}^*(2n)$ 122
5. I gruppi $\mathbf{SO}(n,\mathbb{C})$ e $\mathbf{SO}^*(2n)$ 123
6. I gruppi $\mathbf{Sp}(p,q;\mathbb{C})$ 124
7. I gruppi $\mathbf{SO}(p,q)$ 125

Parte 3. Primi elementi di Geometria Differenziale 127

Capitolo 9. Calcolo differenziale negli spazi Euclidei 129
1. Funzioni differenziabili negli spazi $\mathbb{R}^n$ 129
2. Equazioni differenziali ordinarie 132
3. Il teorema delle funzioni implicite 138
4. Mollificatori 141
5. Immersioni e sommersioni differenziabili negli spazi Euclidei 144
6. Sottovarietà differenziabili negli spazi Euclidei 146

Capitolo 10. Geometria differenziale di $\mathbb{R}^n$ 149
1. Campi di vettori in $\mathbb{R}^n$ 149
2. Curve integrali di un campo di vettori in $\mathbb{R}^n$ 152
3. Gruppi locali a un parametro associati ai campi di vettori 154
4. Campi di vettori e cambiamenti di coordinate 157
5. Derivata di Lie rispetto a un campo di vettori 158
6. Spazio tangente a un aperto di $\mathbb{R}^n$ 159
7. Spazio tangente a una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ 160
8. Campi di vettori F-correlati 161
9. Il teorema di Frobenius 162
10. Integrali primi 166

Capitolo 11. Varietà topologiche e varietà differenziabili 167
1. Paracompattezza e partizione dell'unità 167

2. Varietà topologiche 168
3. Definizione di varietà differenziabile 171
4. Applicazioni differenziabili 173
5. Immersioni, sommersioni, diffeomorfismi 175
6. Sottovarietà differenziabili 176
7. Diffeomorfismi 178

Capitolo 12. Il Lemma di Sard 181
1. Il lemma di Sard negli spazi Euclidei 181
2. Il teorema di Sard per varietà differenziabili 186
3. Il teorema d'immersione di Whitney 187

Capitolo 13. Forme differenziali negli spazi Euclidei 193
1. Forme differenziali in $\mathbb{R}^n$ 193
2. Pull-back 193
3. Differenziale di una forma 194
4. Orientazione e sottovarietà di $\mathbb{R}^n$. 196
5. Integrazione e formule di Stokes 198

Capitolo 14. Fibrati vettoriali e fibrati principali 203
1. Campi di vettori e curve integrali sulle varietà 203
2. Vettori tangenti e fibrato tangente 205
3. Fibrati vettoriali 208
4. Fibrato cotangente e tensori 210
5. Forme differenziali su una varietà 211
6. Derivata di Lie di un tensore. 213
7. Distribuzioni vettoriali 215
8. Gruppi di Lie 219
9. Fibrati principali 222
10. Il fibrato dei sistemi di riferimento 224
11. Fibrati vettoriali associati a fibrati principali 224
12. **G**-strutture 225
13. Trasversalità 226

Parte 4. Elementi di teoria dell'omotopia 229

Capitolo 15. Omotopia 231
1. Omotopia libera di applicazioni continue 231
2. Equivalenza omotopica di spazi topologici 232
3. Spazi topologici contrattili 233
4. Omotopia legata. Retratti di deformazione. Omotopia relativa 234
5. k-connessione 235
6. k-connessione relativa 237
7. Proprietà di omotopia delle sfere 238
8. Il teorema del punto fisso di Brouwer 244

Capitolo 16. Gruppi di omotopia 245

1. Gruppi di omotopia di uno spazio puntato 245
2. Cambiamento del punto di base e azione del gruppo fondamentale 249
3. Insiemi convessi in $\mathbb{R}^n$ 250
4. Fibrati di Serre 251
5. Fibrati localmente banali 253
6. Successione esatta di omotopia di un fibrato di Serre 254
7. Esempi 257

Capitolo 17. Rivestimenti ed omotopia 267
1. Azioni di gruppo 267
2. Omeomorfismi locali 269
3. Rivestimenti 271
4. Gruppo del rivestimento 274
5. Rivestimenti con gruppo di rivestimento assegnato 277
6. Rivestimenti di Galois 278

Capitolo 18. Il teorema di Van Kampen 279
1. Prodotto libero di gruppi 279
2. Teorema di Van Kampen 280
3. Alcuni esempi ed applicazioni 284

Capitolo 19. CW-complessi 291
1. Definizioni fondamentali 291
2. Attaccamenti 300
3. Applicazioni cellulari ed attaccamenti di celle 301
4. Prolungamenti differenziabili di funzioni continue 302
5. Approssimazione cellulare 304
6. Una proprietà di omotopia delle coppie cellulari 306
7. Cofibrazioni 307
8. Alcune proprietà di omotopia dei CW-complessi 309
9. Coppie cellulari k-connesse ed equivalenza omotopica 311
10. Gruppi di omotopia degli spazi cellulari di dimensione 1 314
11. Gruppo fondamentale di uno spazio cellulare 315

Capitolo 20. Esercizi e Complementi 317
1. Esercizi 317
2. Le superfici modello 318
3. Gruppo fondamentale delle curve algebriche piane 321
4. Esempi di curve piane irriducibili (Esercizi) 325
5. Curve piane riducibili (Esercizi) 326
6. Altri esercizi 327
7. Varietà di Stiefel e di Grassmann reali 328
8. Varietà di Stiefel e di Grassmann complesse 333

Parte 5. Curve e Superfici 337

Capitolo 21. Geometria differenziale delle curve 339

1. Curve parametriche in $\mathbb{R}^n$ 339
2. Decomposizioni di Gauss e di Gram 343
3. Curve nello spazio Euclideo 350
4. Complementi sulle curve nello spazio euclideo 359
5. Curve nello spazio di Minkowski 362
6. Curve nello spazio unimodulare 364

Capitolo 22. Curve piane 369
1. Equazioni di Frenet delle curve piane 369
2. Concavità, convessità, flessi e circonferenza osculatrice 370
3. Curve piane chiuse 373
4. Altre proprietà delle curve chiuse 377

Capitolo 23. Metriche Riemanniane e pseudo-Riemanniane 381
1. Metriche Riemanniane e pseudo-Riemanniane. Invarianti e parametri differenziali 381
2. Equazioni differenziali ai differenziali totali 385
3. Simboli di Christoffel e differenziazione covariante 389
4. Proprietà dei simboli di Christoffel 393
5. Le equazioni per l'equivalenza 397
6. Curvatura di una metrica pseudo-Riemanniana 398
7. Proprietà del tensore di curvatura 400
8. Metriche a curvatura costante 402

Capitolo 24. Geometria Riemanniana delle superfici 405
1. Alcune considerazioni euristiche 405
2. Superfici Riemanniane 406
3. Superfici immerse: la prima forma fondamentale 408
4. Sistemi di coordinate 410
5. Superfici di rotazione 417
6. Grafici 419
7. Il problema dell'applicabilità 422
8. La seconda forma fondamentale di una superficie 426
9. Le equazioni fondamentali per le superfici in $\mathbb{R}^3$ 430
10. Superfici con prima e seconda forma fondamentale assegnate 433
11. Superfici con curvatura Gaussiana assegnata 437

Capitolo 25. Superficie nello spazio euclideo 441
1. Generalità sulle superficie di $\mathbb{R}^3$ 441
2. Curve su una superficie e riferimenti di Darboux 442
3. Linee geodetiche su una superficie 446
4. Linee di curvatura su una superficie 450
5. Il Teorema di Gauss-Bonnet 454

Capitolo 26. Analisi sulle superfici di Riemann 459
1. Superfici di Riemann 459
2. Laplaciano su una superficie di Riemann 460
3. Il complesso di deRham 468

4. Il complesso di deRham a coefficienti compatti 469
5. Forme differenziali su una superficie di Riemann 472
6. Operatore $*$, forme armoniche e forme olomorfe 475
7. Spazi di Hilbert di forme differenziali 477
8. Forme armoniche e coomologia di deRham 479

Parte 1

Complementi di Topologia Generale

part:comptopgen

CAPITOLO 1

Spazi normali

L'esistenza di funzioni continue a valori reali non banali su uno spazio topologico X è naturalmente legata alle proprietà della struttura topologica. In questo capitolo esamineremo alcuni degli assiomi di separazione e numerabilità collegati a questo problema e le loro conseguenze.

1. Assiomi di separazione

Un *intorno* di A di uno spazio topologico X è un qualsiasi sottoinsieme B di X tale che $A \subset \operatorname{int} B$.

DEFINIZIONE 1.1. Diciamo che uno spazio topologico X soddisfa l'*assioma di separazione* T_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ se:

(T_1) *Per ogni $x \neq y \in X$, esiste un intorno di x in X che non contenga y.*

In modo equivalente: *Per ogni punto $x \in X$, l'insieme $\{x\}$ è chiuso in X.*

(T_2) *Due qualsiasi punti distinti di X ammettono intorni disgiunti: per ogni $x \neq y \in X$, possiamo trovare un aperto $U_x \ni x$ e un aperto $U_y \ni y$ tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$.*

(T_3) *Se F è un chiuso di X e x un punto di X non appartenente ad F, esiste un aperto $A \supset F$ e un aperto $U \ni x$ tali che $A \cap U = \emptyset$.*

Questa prorietà è equivalente al fatto che: *Ogni punto x di X ha un sistema fondamentale di intorni chiusi.*

(T_4) *Ogni coppia di chiusi disgiunti di X ammette una coppia di intorni disgiunti.*

Se cioè F, G sono due chiusi di X con $F \cap G = \emptyset$, allora esistono due aperti $A \supset F$ e $B \supset G$ di X tali che $A \cap B = \emptyset$.

Uno spazio topologico che soddisfi l'assioma T_2 soddisfa anche l'assioma T_1 e si dice *di Hausdorff* o *separato*.

Uno spazio topologico che soddisfi gli assiomi T_1 e T_3 soddisfa anche l'assioma T_2 e si dice *regolare*.

Uno spazio topologico che soddisfi gli assiomi T_1 e T_4 soddisfa anche gli assiomi T_2 e T_3 e si dice *normale*.

ESEMPIO 1.2. Un qualsiasi insieme X che contenga almeno due punti, con la topologia indiscreta, soddisfa T_3 e T_4 ma non T_1 e T_2.

ESEMPIO 1.3. La topologia dell'ordine su un insieme X linearmente ordinato soddisfa T_2.

Siano infatti $x < y$ due punti distinti di X. Se esiste $a \in X$ tale che $x < a < y$, allora le semirette $\{z \in X \,|\, z < a\}$ e $\{z \in X \,|\, a < z\}$ sono intorni aperti disgiunti di x e y rispettivamente. Se non esiste nessun elemento a per cui sia $x < a < y$, allora $\{z \in X \,|\, x < y\}$ e $\{z \in X \,|\, x < a\}$ sono intorni aperti disgiunti di x ed y rispettivamente.

ESEMPIO 1.4. Sia X un insieme che contenga almeno due punti, a un punto di X. La topologia $\tau = \{\emptyset,\, X,\, \{a\}\}$ rende X uno spazio T_4 ma non T_3. Infatti se A e B sono due chiusi disgiunti di X, uno dei due è necessariamente vuoto. Il chiuso $X \setminus \{a\}$ e il punto a non hanno intorni disgiunti, in quanto X è l'unico aperto di X che contiene $X \setminus \{a\}$.

ESEMPIO 1.5. Sia X lo spazio topologico ottenuto considerando sull'intervallo $[0, 1]$ di $\mathbb{R}$ la topologia τ che ha come prebase degli aperti la famiglia Γ formata dagli insiemi $[0, b[$, $]b, 1]$ al variare di b in $]0, 1[$ e dall'insieme

$$U = \{x \in [0, 1[\,|\, x(1 + n) \notin \mathbb{N} - \{0\} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

al variare di b in $]0, 1[$. Lo spazio topologico così ottenuto soddisfa T_2 ma non T_3. La topologia che si ottiene su $[0, 1]$ è più fine della topologia Euclidea e quindi è separata. Mostriamo che essa non soddisfa l'assioma T_3: l'insieme $F = \{(1 + n)^{-1} \quad n \in \mathbb{N}\}$ è un chiuso di $([0, 1], \tau)$ che non contiene il punto 0. Ma 0 ed F non hanno intorni disgiunti: infatti gli aperti $U_b = [0, b[\cap U$ di 0 , al variare di b in $]0, 1[$, formano un sistema fondamentale di intorni di 0 nella τ. Fissato $b \in]0, 1[$, possiamo trovare $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $(1 + \nu)^{-1} < b$. Un qualsiasi aperto contenente F contiene un intervallo $](1 + \nu)^{-1} - \epsilon, (1 + \nu)^{-1} + \epsilon[$ per qualche $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo e quindi ha intersezione non vuota con U_b.

ESEMPIO 1.6. Lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$, con la topologia di Zariski, soddisfa T_1, ma, se $\mathbb{K}$ contiene infiniti elementi e $n \geq 1$, non soddisfa gli assiomi T_2, T_3, T_4.

TEOREMA 1.7. *Un sottospazio di uno spazio topologico che soddisfa l'assioma di separazione T_i soddisfa ancora l'assioma di separazione T_i se $i = 1, 2, 3$. Un sottospazio chiuso di uno spazio topologico che soddisfi l'assioma T_4 soddisfa l'assioma T_4.*

DIMOSTRAZIONE. Sia Y un sottospazio topologico dello spazio topologico X.

Se X soddisfa T_1, i sottoinsiemi di Y formati da un solo punto sono chiusi in X e quindi a maggior ragione nella topologia di sottospazio di Y. Quindi anche Y soddisfa T_1.

Supponiamo che X sia di Hausdorff. Se $x \neq y \in Y$, esistono due intorni aperti disgiunti U_x di x e U_y di y in X. Allora $U_x \cap Y$ e $U_y \cap Y$ sono intorni aperti disgiunti di x e y in Y. Quindi Y è anch'esso di Hausdorff.

Supponiamo ora che X soddisfi T_3. Siano F un chiuso di Y e y un punto di Y non appartenente ad F. Per la definizione della topologia di sottospazio, esiste un sottoinsieme chiuso A di X tale che $A \cap Y = F$. Allora A è un chiuso di X che non contiene il punto y e possiamo trovare aperti B ed U in X tali che

$$A \subset B, \quad y \in U, \quad B \cap U = \emptyset.$$

Allora $B \cap Y$ e $U \cap Y$ sono intorni disgiunti di F ed y in Y.

Supponiamo infine che X soddisfi l'assioma T_4 e che Y sia un chiuso di X. Se F_1 ed F_2 sono chiusi disgiunti di Y, allora essi sono anche chiusi disgiunti di X e vi sono quindi due aperti A_1, A_2 di X tali che

$$F_1 \subset A_1, \quad F_2 \subset F_2, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

Allora $A_1 \cap Y$ e $A_2 \cap Y$ sono intorni aperti disgiunti di F_1 ed F_2 in Y. □

Osservazione 1.8. Vedremo nel seguito che un sottospazio chiuso di uno spazio normale può non essere un sottospazio normale.

Teorema 1.9. *Ogni spazio metrizzabile è normale.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio metrizzabile e sia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una distanza che definisce la topologia di X.

Dimostriamo innanzi tutto che X è di Hausdorff: se $x \neq y \in X$, le palle aperte $B(x, \frac{1}{2}d(x,y))$ e $B(y, \frac{1}{2}d(x,y))$ sono due intorni aperti disgiunti di x e y.

Siano ora A e B due chiusi disgiunti di X. Poiché le funzioni $X \ni x \to d(x, A) \in \mathbb{R}$ e $X \ni x \to d(x, B) \in \mathbb{R}$ sono continue, i due insiemi

$$U = \{x \in X \,|\, d(x,A) < d(x,B)\} \quad \text{e} \quad V = \{x \in X \,|\, d(x,A) > d(x,B)\}$$

sono aperti disgiunti X, che contengono rispettivamente A e B. □

Teorema 1.10. *Ogni retratto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.*

Dimostrazione. Sia $Y \subset X$ un retratto dello spazio topologico di Hausdorff X. Sia $\rho : X \to Y$ una retrazione. Se $Y = X$, la tesi è banalmente vera. Supponiamo quindi $Y \neq X$ e sia $x \in X - Y$. Poiché X è di Hausdorff, x e $\rho(x)$ hanno intorni aperti disgiunti U e V. Poiché ρ è continua, possiamo trovare un intorno aperto U' di x contenuto in U tale che $\rho(U') \subset V$. Ma questa inclusione implica in particolare che $\rho(y) \neq y$ se $y \in U'$, cioè $U' \cap Y = \emptyset$. Quindi $X \setminus Y$ è intorno di ogni suo punto, perciò aperto e Y è chiuso. □

Teorema 1.11. *Condizione necessaria e sufficiente affinché uno spazio topologico X sia di Hausdorff è che la diagonale $\Delta_X = \{(x,x) \,|\, x \in X\}$ sia chiusa nel prodotto topologico $X \times X$.*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia di Hausdorff e siano $x \neq y$ due punti distinti di X. Se U_x, U_y sono intorni aperti disgiunti di x e y rispettivamente, allora $U_x \times U_y$ è un intorno di (x,y) in $X \times X$ che non interseca Δ_X. Questo dimostra che $X \times X \setminus \Delta_X$ è aperto in $X \times X$.

Supponiamo viceversa che Δ_X sia chiusa in $X \times X$. Se x, y sono punti distinti di X, allora $(x, y) \notin \Delta_X$ e possiamo trovare un intorno aperto $U = U_x \times U_y$, con U_x e U_y aperti di X, che non interseca Δ_X. Chiaramente U_x e U_y sono in X intorni disgiunti di x e di y rispettivamente. □

PROPOSIZIONE 1.12. *Siano $f, g : X \to Y$ due applicazioni continue definite su uno spazio topologico X e a valori in uno spazio di Hausdorff Y. Allora*

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

è chiuso in X.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione

$$(f, g) : X \ni x \to (f(x), g(x)) \in Y \times Y$$

è continua. La diagonale $\Delta_Y = \{(y, y) \mid y \in Y\}$ è chiusa in $Y \times Y$ perché Y è di Hausdorff e dunque la sua immagine inversa mediante (f, g) è un chiuso di X. □

TEOREMA 1.13. *Sia h uno degli interi $1, 2, 3$. Il prodotto topologico X di una I-upla $(X_i)_{i \in I}$ di spazi topologici non vuoti soddisfa l'assioma T_h se e soltanto se ogni spazio topologico X_i soddisfa l'assioma T_h.*

DIMOSTRAZIONE. La condizione è necessaria perché ogni spazio X_i ammette un'immersione topologica nel prodotto X.

Il prodotto di spazi T_1 è T_1 perché il prodotto di chiusi è un chiuso.

Supponiamo ora che tutti gli X_i siano separati. Se x, y sono punti distinti di X, vi è almeno un indice $i \in I$ per cui $x_i \neq y_i$. Se A, B sono intorni aperti disgiunti di x_i, y_i in X_i, allora $\pi_i^{-1}(A)$ e $\pi_i^{-1}(B)$ sono intorni aperti disgiunti di x e y in X.

Supponiamo ora che tutti gli X_i soddisfino l'assioma T_3. Sia x un punto di X. Vogliamo dimostrare che esso ammette un sistema fondamentale di intorni chiusi. Sia U un qualsiasi intorno di x in X. Esso contiene un intorno aperto di x della forma

$$\bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(A_j)$$

ove $J \subset I$ è finito e A_j, per $j \in J$, un intorno aperto di x_j in X_j. Poiché X_j è T_3, possiamo trovare chiusi B_j tali che

$$x_j \in \operatorname{int} B_j \subset B_j = \bar{B}_j \subset A_j \quad \forall j \in J.$$

Allora

$$U \supset B = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(B_j) \supset \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(\operatorname{int} B_j) \ni x$$

e quindi B è un intorno chiuso di x contenuto in U. Ciò dimostra che X soddisfa l'assioma T_3. □

OSSERVAZIONE 1.14. In generale il prodotto di spazi normali può non essere uno spazio normale.

2. Funzioni di Urysohn

LEMMA 2.1. *Siano A e B due chiusi disgiunti di uno spazio topologico X che soddisfa l'assioma T_4. Sia Γ la famiglia degli intorni aperti di A che non intersecano B e sia Δ l'insieme di tutti i numeri razionali della forma $m \cdot 2^{-n}$ con m ed n interi e $0 \leq m \cdot 2^{-n} \leq 1$. Esiste una applicazione*

$$\phi : \Delta \to \Gamma$$

tale che

$$\overline{\phi(r_1)} \subset \phi(r_2) \quad \forall r_1, r_2 \in \Delta \quad \textit{con} \quad r_1 < r_2.$$

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con Δ_n l'insieme

$$\Delta_n = \{m2^{-n} \,|\, m \in \mathbb{N},\, 0 \leq m \leq 2^n\}.$$

Osserviamo che $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$. Dimostriamo per induzione su n che è possibile definire $\phi_n : \Delta_n \to \Gamma$ tale che

(1) $\overline{\phi_n(r_1)} \subset \phi_n(r_2) \quad \forall r_1, r_2 \in \Delta_n \quad \text{con} \quad r_1 < r_2,$
(2) $\phi_{n+1}|_{\Delta_n} = \phi_n$ se $n \geq 0$.

Sia $n = 0$. Allora $\Delta_0 = \{0, 1\}$. Definiamo $\phi_0(1) = X \setminus B$. Poiché X soddisfa T_4, A ammette un intorno chiuso F contenuto in $X - B$. Possiamo porre allora $\phi_0(0) = \operatorname{int} F$.

Supponiamo di aver definito ϕ_n per un $n \geq 0$. Definiamo allora ϕ_{n+1} sugli elementi $(2m) \cdot 2^{-n-1} = m \cdot 2^{-n}$ mediante $\phi_{n+1}(2m \cdot 2^{-n-1}) = \phi_n(m \cdot 2^{-n})$. Per ogni intero dispari $0 < 2m + 1 < 2^{n+1}$, dopo aver scelto un intorno chiuso F_m di $\overline{\phi_n(m \cdot 2^{-n})}$ in $\phi_n((m+1) \cdot 2^{-n})$, poniamo $\phi_{n+1}((2m + 1) \cdot 2^{-n-1}) = \operatorname{int} F_m$. La ϕ_{n+1} così definita soddisfa le condizioni (1) e (2). Ottenuta la successione delle ϕ_n, definiamo l'applicazione $\phi : \Delta \to \Gamma$ mediante

$$\phi|_{\Delta_n} = \phi_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tale applicazione soddisfa la tesi. □

TEOREMA 2.2 (Lemma di Urysohn). *Siano A e B due chiusi disgiunti di uno spazio topologico X che soddisfa l'assioma T_4. Allora esiste una funzione continua*

$$f : X \to [0, 1]$$

tale che

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in A, \qquad f(x) = 1 \quad \forall x \in B.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\phi : \Delta \to \Gamma$ l'applicazione definita nel lemma precedente. Definiamo una funzione $f : X \to \mathbf{I} = [0, 1]$ ponendo:

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in \Delta \,|\, x \in \phi(r)\} & \text{se} \quad x \in \phi(1) \\ 1 & \text{se} \quad x \notin \phi(1). \end{cases}$$

Questa funzione vale 0 su A e 1 su B. Inoltre

(1) (*i*) $f^{-1}([0,r[) = \underset{\substack{s\in\Delta\\ s<r}}{\rightarrow} \bigcup \phi(s)$ è aperto in X per ogni $r \in [0,1]$;

(2) (ii) $f^{-1}([0,r]) = \underset{\substack{s\in\Delta\\ s>r}}{\rightarrow} \bigcap \phi(s) = \underset{\substack{s\in\Delta\\ s>r}}{\rightarrow} \bigcap \overline{\phi(s)}$

è chiuso in X per ogni $r \in [0,1]$;

quindi $f^{-1}(]r,1]) = X - f^{-1}([0,r])$ è aperto per ogni $r \in [0,1]$.

Poiché gli aperti della forma $[0,r[$ e $]r,1]$ formano una prebase della topologia di $\mathbf{I} = [0,1]$, ne segue che $f : X \to \mathbf{I}$ è continua. □

Una funzione continua $f : X \to \mathbf{I} = [0,1]$ che valga 0 su A e 1 su B si dice una *funzione di Urysohn della coppia* (A,B). Abbiamo quindi il

Teorema 2.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché uno spazio topologico X soddisfi l'assioma T_4 è che ogni coppia di chiusi disgiunti di X ammetta una funzione di Urysohn.*

Osservazione 2.4. Sia X uno spazio topologico che soddisfa l'assioma di separazione T_4 e sia (A,B) una coppia di chiusi disgiunti di X. Se A è ritagliabile, possiamo trovare una funzione di Urysohn della coppia (A,B) strettamente positiva su $X \setminus A$: se infatti $f : X \to \mathbf{I}$ è una funzione di Urysohn della coppia (A,B) e $g : X \to \mathbf{I}$ una funzione continua tale che $g(x) = 0$ per $x \in A$ e $g(x) > 0$ se $x \notin A$, allora la funzione

$$\max(f,g) : X \ni x \to \max(f(x), g(x)) \in \mathbf{I}$$

è ancora continua e gode delle proprietà desiderate.

Se A e B sono due chiusi disgiunti ed entrambi ritagliabili, allora possiamo trovare una funzione di Urysohn della coppia (A,B) tale che $A = f^{-1}(0)$ e $B = f^{-1}(1)$. Se infatti $f_1 : X \to I$ una funzione di Urysohn della coppia (A,B) con $A = f_1^{-1}(0)$ e $f_2 : X \to I$ una funzione di Urysohn della coppia (B,A) con $f_2^{-1}(0) = B$, allora la $f : X \ni x \to f_1(x)\,(1 - f_2(x)) \in I$ è una funzione di Urysohn della coppia (A,B) con le proprietà desiderate.

Osservazione 2.5. Componendo funzioni di Urysohn con le trasformazioni affini

$$\mathbb{R} \ni t \to at + b \in \mathbb{R}$$

(ove $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$) si possono ottenere funzioni continue che assumano arbitrari valori reali $\alpha \neq \beta$ su una coppia di chiusi disgiunti (A,B) di uno spazio topologico X che soddisfi T_4.

La caratterizzazione di Urysohn degli spazi che godono della proprietà di separazione T_4 suggerisce di introdurre la seguente nozione:

Uno spazio topologico X si dice completamente regolare *se per ogni chiuso A di X ed ogni punto $x \notin A$ di X esiste una funzione continua $f : X \to I$ tale che*

$$f(x) = 0, \qquad f(y) = 1 \quad \forall y \in A.$$

Uno spazio topologico che sia completamente regolare e T_1 si dice *di Tychonoff*.

TEOREMA 2.6. *Un sottospazio topologico di uno spazio normale è di Tychonoff.*

DIMOSTRAZIONE. Siano Y un sottospazio topologico di uno spazio normale X, F un chiuso di Y e y un punto di Y non appartenente ad F. Se B è un chiuso di X tale che $B \cap Y = F$, posto $A = \{y\}$, osserviamo che A è chiuso in X perché X è normale e dunque in particolare T_1, ed è disgiunto da B. La restrizione a Y di una funzione di Urysohn della coppia (A, B) ci dà una funzione continua $f : Y \to \mathbf{I}$ che vale 0 in y e 1 nei punti di F. Questo dimostra che Y è completamente regolare. È anche T_1 perché sottospazio di uno spazio T_1 e quindi di Tychonoff. □

TEOREMA 2.7. *Un prodotto topologico di spazi completamente regolari è completamente regolare.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X il prodotto topologico della I-upla di spazi topologici completamente regolari $(X_i)_{i\in I}$. Fissato un punto x di X e un chiuso F di X che non lo contenga, possiamo trovare un sottoinsieme finito J di I ed aperti $A_j \ni x_j = \pi_j(x)$ di X_j, per $j \in J$, tali che

$$\bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(A_j) \cap F = \emptyset.$$

Per ogni $j \in J$ sia $f_j : X_j \to \mathbf{I}$ una funzione continua tale che $f_j(x_j) = 1$ ed $f_j(y) = 0$ per $y \in X_j \setminus A_j$. Allora

$$f : X \ni y \to \prod_{j\in J} f_j(\pi_j(y)) \in \mathbf{I}$$

è una funzione continua che vale 1 in x e 0 su F. □

3. Estensione di funzioni continue

tm:tptreca

TEOREMA 3.1 (Teorema di estensione di Urysohn). *Sia A un chiuso non vuoto di uno spazio topologico X che soddisfa l'assioma di separazione T_4. Per ogni funzione continua*

$$f : A \to \mathbb{R}$$

possiamo trovare una funzione continua

$$\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$$

che prolunga f: tale cioè che risulti

$$\tilde{f}|_A = f.$$

Inoltre possiamo fare in modo che $\tilde{f}(X)$ sia l'inviluppo convesso di $f(A)$.

Per dimostrare questo teorema utilizzeremo il seguente

LEMMA 3.2. *Sia X uno spazio topologico T_4 e F un chiuso non vuoto di X. Sia L un numero reale positivo e*

$$\phi : F \to [-L, L]$$

una funzione continua. Esiste allora una funzione continua

$$\psi : X \to [-L, L]$$

tale che

$$(i) \qquad |\psi(x)| \leq L/3 \quad \forall x \in X$$

$$(ii) \qquad |\psi(x) - \phi(x)| \leq 2L/3 \quad \forall x \in F.$$

DIMOSTRAZIONE. I sottoinsiemi:

$$A = \{x \in F \,|\, \phi(x) \leq -L/3\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in F \,|\, \phi(x) \geq L/3\}.$$

sono due chiusi disgiunti di X. Per il Lemma di Urysohn esiste una funzione continua $\psi : X \to [-L/3, L/3]$ che valga $-L/3$ su A e $L/3$ su B. Tale funzione soddisfa le condizioni (i) ed (ii). □

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.1 tm:tptreca Supponiamo inizialmente che la funzione f sia a valori nell'intervallo $[-1, 1]$. Dico che allora possiamo trovare una successione $\{g_n\}$ di funzioni continue $g_n : X \to [-1, 1]$, per $n \geq 0$, tale che

$$(*) \qquad \begin{cases} |g_n(x)| \leq 3^{-1}(2/3)^n \\ |f(x) - \sum_{j=1}^{n} g_j(x)| \leq (2/3)^n \qquad \forall x \in A. \end{cases}$$

La successione $\{g_n\}$ può essere definita per ricorrenza: poniamo $g_0 = 0$ e supponiamo di aver costruito $g_0, ..., g_n$ che soddisfino le $(*)$. Allora

$$A \ni x \to f(x) - \sum_{j=1}^{n} g_j(x) \in [-(2/3)^n, (2/3)^n]$$

è una funzione continua e per il lemma precedente possiamo trovare una funzione continua $g_{n+1} : X \to [-(2/3)^n, (2/3)^n]$ che soddisfi:

$$|g_{n+1}(x)| \leq (1/3)(2/3)^n \quad \forall x \in X,$$

$$|f(x) - \sum_{j=1}^{n+1} g_j(x)| \leq (2/3)^{n+1} \quad \forall x \in A.$$

La serie $\sum_{j=0}^{\infty} g_n$ converge allora uniformemente a una funzione continua $g : X \to \mathbb{R}$ ed abbiamo:

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} g_n(x) \right| \leq (1/3) \sum_{j=0}^{\infty} (2/3)^n = 1,$$

$$g|_A = f.$$

Consideriamo ora il caso generale. Sia J l'inviluppo convesso di $f(A)$ in $\mathbb{R}$. Se J è un intervallo della forma $[a,b]$ con $-\infty < a < b < \infty$, ci riconduciamo al caso precedente componendo la f con la trasformazione affine

$$\mathbb{R} \ni t \to h(t) = \frac{2t-a-b}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

La $h \circ f$ è una applicazione continua su A a valori in $[-1,1]$. Se $g : X \to [-1,1]$ è una sua estensione continua, la $\tilde{f} = h^{-1} \circ g$ è una estensione continua di f a valori in $[a,b]$. Se J è un intervallo limitato, consideriamo la sua chiusura $\overline{J}$ in $\mathbb{R}$. Per le considerazioni appena svolte, possiamo supporre $\overline{J} = [-1,1]$ e trovare un'estensione $g : X \to [-1,1]$ di f. Allora F e $g^{-1}([-1,1] - J)$ sono chiusi disgiunti di X e possiamo trovare una funzione continua $\chi : X \to I = [0,1]$ che valga 1 su F e 0 su $g^{-1}([-1,1] - J)$. La $\tilde{f} : X \ni x \to g(x) \cdot \chi(x) \in J$ è allora l'estensione cercata. Infine, se J non è un intervallo limitato di $\mathbb{R}$, ci riconduciamo ai casi precedenti componendo f con l'omeomorfismo

$$\mathbb{R} \ni t \to \frac{t}{1+|t|} \in]-1,1[.$$

4. Partizione dell'unità negli spazi normali

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali definita su uno spazio topologico X. Si dice *supporto* di f la chiusura in X dell'insieme dei punti x di X in cui $f(x) \neq 0$:

$$\mathrm{supp} f = \overline{\{x \in X \,|\, f(x) \neq 0\}}.$$

Sia Γ un ricoprimento di X. Una *partizione continua dell'unità* su X *subordinata al ricoprimento* Γ è il dato di una famiglia

$$\{\phi_A : X \to \mathbb{R} \,|\, A \in \Gamma\}$$

di applicazioni continue tali che

(i) $\phi_A(x) \geq 0 \quad \forall A \in \Gamma, \quad \forall x \in X$;
(ii) $\{\mathrm{supp}\phi_A \,|\, A \in \Gamma\}$ è un ricoprimento localmente finito di X;
(iii) $\sum_{A \in \Gamma} \phi_A(x) = 1 \quad \forall x \in X$.

LEMMA 4.1. *Sia X uno spazio topologico che soddisfa l'assioma T_4 e sia $\Gamma = \{A_i \,|\, i \in I\}$ un ricoprimento aperto localmente finito di X. Possiamo allora trovare un ricoprimento aperto $\Delta = \{B_i \,|\, i \in I\}$ di X tale che $\overline{B}_i \subset A_i$ per ogni $i \in I$.*

DIMOSTRAZIONE. Introduciamo su I un buon ordinamento [1] $<$. Costruiremo la famiglia Δ per induzione transfinita, in modo che

(1) $\overline{B}_i \subset A_i \quad \forall i \in I$,
(2) $\forall j \in I$, $\{B_i \,|\, i \leq j\} \cup \{A_i \,|\, j < i\}$ è un ricoprimento aperto di X.

[1] Ciò significa che I è totalmente ordinato rispetto a $<$ e che ogni sottoinsieme non vuoto di I ammette minimo rispetto a $<$.

Fissiamo $j_0 \in I$ e supponiamo di aver costruito i B_i per $i < j_0$ in modo che la (1) valga per $i < j_0$ e che per ogni $h \in I$ con $h < j_0$ $\{B_i \,|\, i \leq h\} \cup \{A_i \,|\, h < i\}$ sia un ricoprimento aperto di X.

Allora

$$\Delta_{j_0} = \{B_i \,|\, i < j_0\} \cup \{A_i \,|\, i \leq j_0\}$$

è un ricoprimento aperto di X. Infatti, se $x \in X$, allora $J = \{i \in I \,|\, x \in A_i\}$ è finito per l'ipotesi che Γ fosse un ricoprimento localmente finito. Se qualche $i \in J$ è $\geq j_0$, allora Δ_{j_0} contiene un aperto A_i che contiene x. Altrimenti, indichiamo con j' il più grande elemento di J. Poiché per l'ipotesi induttiva

$$\{B_i \,|\, i \leq j'\} \cup \{A_i \,|\, j' < i\}$$

è un ricoprimento aperto di X, $x \in B_i$ per qualche $i \leq j' < j_0$ e dunque appartiene a un $B_i \in \Delta_{j_0}$.

Consideriamo ora l'insieme

$$F = X \setminus \left(\bigcup_{j<j_0} B_j \cup \bigcup_{j_0<j} A_j \right).$$

Esso è un chiuso contenuto in A_{j_0} in quanto Δ_{j_0} è un ricoprimento di X. Essendo X uno spazio T_4, il chiuso F ha un intorno chiuso G contenuto in A_{j_0}. Posto $B_{j_0} = \operatorname{int} G$, chiaramente

$$\{B_i \,|\, i \leq j_0\} \cup \{A_i \,|\, j_0 < i\}$$

è un ricoprimento aperto di X e vale la (1) per $j \leq j_0$.

Per induzione transfinita otteniamo quindi una famiglia $\Delta = \{B_i \,|\, i \in I\}$ tale che valgano le (1), (2). Chiaramente Δ è un ricoprimento aperto di X: se $x \in X$ e j è il minimo indice in I tale che $x \notin A_j$, la (2) ci dice che $x \in B_i$ per qualche $i \leq j$.

La dimostrazione è completa. □

TEOREMA 4.2. *Sia Γ un ricoprimento aperto localmente finito di uno spazio topologico X che soddisfi l'assioma di separazione T_4. Allora esisteuna partizione continua dell'unità subordinata a Γ.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Gamma = \{A_i \,|\, i \in I\}$. Utilizzando il lemma precedente, otteniamo due ricoprimenti aperti $\mathcal{B} = \{B_i \,|\, I \in I\}$ e $\mathcal{D} = \{D_i \,|\, i \in I\}$ tali che

$$\overline{D}_i \subset B_i \subset \overline{B}_i \subset A_i \quad \forall i \in I.$$

Per ogni $i \in I$ sia $\psi_i : X \to \mathbf{I}$ una funzione continua tale che

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad x \in \overline{D}_i \\ 0 & \text{per} \quad x \in X \setminus B_i. \end{cases}$$

La somma

$$\psi(x) = \sum_{i \in I} \psi_i(x)$$

è localmente finita e quindi definisce una funzione continua su X. Inoltre $\psi(x) \geq 1$ per ogni $x \in X$. Ponendo quindi

$$\phi_i(x) = \psi_i(x)/\psi(x) \quad \forall x \in X, \quad \forall i \in I$$

otteniamo la partizione dell'unità continua cercata. □

Osservazione 4.3. Nel caso in cui il ricoprimento aperto Γ sia numerabile o finito, possiamo dimostrare il teorema sull'esistenza di partizioni continue dell'unità subordinate a Γ facendo uso del solo assioma di induzione di Peano.

5. Funzioni semicontinue e spazi normali

Indichiamo con $\overline{\mathbb{R}}$ la retta reale estesa:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

con la relazione d'ordine usuale.

Una funzione

$$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$$

definita su uno spazio topologico X si dice
semicontinua superiormente se $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ è aperto in X per ogni $a \in \mathbb{R}$;
semicontinua inferiormente se $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ è aperto in X per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Osservazione 5.1. In modo equivalente: $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è semicontinua superiormente se $\{x \in X \mid f(x) \geq a\}$ è chiuso in X per ogni $a \in R$;

è semicontinua inferiormente se $\{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ è chiuso in X per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Osservazione 5.2. Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ per cui la $X \ni x \to f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ sia contemporaneamente semicontinua superiormente e inferiormente è continua. [2]

Indichiamo con $\mathrm{SCS}(X)$ (risp. $\mathrm{SCI}(X)$) l'insieme delle funzioni semicontinue superiormente tali che $f(X) \subset [-\infty, +\infty[$ (risp. inferiormente tali che $f(X) \subset]-\infty, +\infty]$) sullo spazio topologico X.

Indichiamo con $\mathcal{C}(X)$ l'insieme di tutte le funzioni continue a valori reali sullo spazio topologico X.

Per l'osservazione precedente,

$$\mathrm{SCS}(X) \cap \mathrm{SCI}(X) = \mathcal{C}(X).$$

[2] In questo paragrafo, per semplificare le notazioni, non faremo distinzione tra una funzione f a valori in un sottoinsieme A di $\overline{\mathbb{R}}$ e la funzione a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ che si ottiene componendola con l'inclusione $A \to \overline{\mathbb{R}}$.

ESEMPIO 5.3. Sia X un insieme e A un sottoinsieme di X. Si dice *funzione caratteristica dell'insieme* A la funzione $\chi_A : X \to I \subset \mathbb{R}$ definita da:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A \\ 0 \text{ se } x \notin A. \end{cases}$$

Se X è uno spazio topologico, la funzione caratteristica χ_A è semicontinua superiormente se e soltanto se l'insieme A è chiuso, semicontinua inferiormente se e soltanto se l'insieme A è aperto.

Infatti: se χ_A è semicontinua superiormente,

$$A = \{x \in X \,|\, \chi_A(x) \geq 1\}$$

è un chiuso. Viceversa, se A è un chiuso, χ_A è semicontinua superiormente perché:

$$\{x \in X \,|\, \chi_A(x) \geq a\} = \begin{cases} X \text{ se } a \leq 0 \\ A \text{ se } 0 < a \leq 1 \\ \emptyset \text{ se } a > 1 \end{cases}$$

è chiuso per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Se χ_A è semicontinua inferiormente, allora

$$A = \{x \in X \,|\, \chi_A(x) > 0\}$$

è un aperto. Viceversa, se A è aperto:

$$\{x \in X \,|\, \chi_A(x) > a\} = \begin{cases} X \text{ se } a < 0 \\ A \text{ se } 0 \leq a < 1 \\ \emptyset \text{ se } a \geq 1 \end{cases}$$

è aperto per ogni $a \in \mathbb{R}$ e quindi χ_A è semicontinua inferiormente.

LEMMA 5.4. *Siano* $f, g \in \mathrm{SCS}(X)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. *Allora*

(1) $f + g \in \mathrm{SCS}(X)$,
(2) $\lambda f \in \mathrm{SCS}(X)$,
(3) $\max\{f, g\} \in \mathrm{SCS}(X)$
(4) $-f \in \mathrm{SCI}(X)$.

Analogamente: Siano $f, g \in \mathrm{SCI}(X)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. *Allora*

(1′) $f + g \in \mathrm{SCI}(X)$,
(2′) $\lambda f \in \mathrm{SCI}(X)$,
(3′) $\min\{f, g\} \in \mathrm{SCI}(X)$
(4′) $-f \in \mathrm{SCS}(X)$.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo la (1). Siano $f, g \in \mathrm{SCS}(X)$. La funzione $f + g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è a valori in $[-\infty, +\infty[$. Inoltre, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in X \,|\, f(x) + g(x) < a\} = \bigcup_{s+t<a} (\{x \in X \,|\, f(x) < s\} \cap \{x \in X \,|\, g(x) < t\})$$

è aperto perché unione di aperti.

La verifica della (2) e della (4) sono immediate.

Mostriamo che $\max\{f,g\} \in \mathrm{SCS}(X)$ se $f, g \in \mathrm{SCS}(X)$. Intanto

$$-\infty \leq \max\{f,g\}(x) < +\infty \text{ per ogni } x \in X$$

perché $-\infty \leq f(x)$, $g(x) < +\infty$. Se poi a è un qualsiasi numero reale,

$$\{x \in X \mid \max\{f,g\}(x) < a\} = \{x \in X \mid f(x) < a\} \cap \{x \in X \mid g(x) < a\}$$

è aperto perché intersezione di due aperti.

Le affermazioni relative a $\mathrm{SCI}(X)$ si verificani in modo analogo. □

LEMMA 5.5. *Sia A un sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$ e $\phi : A \to \mathbb{R}$ una funzione non decrescente.*

Se $\phi \in \mathrm{SCS}(A)$, $f \in \mathrm{SCS}(X)$ e $f(X) \subset A$, allora $\phi \circ f \in \mathrm{SCS}(X)$.

Se $\phi \in \mathrm{SCI}(A)$, $f \in \mathrm{SCI}(X)$ e $f(X) \subset A$, allora $\phi \circ f \in \mathrm{SCI}(X)$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $f \in \mathrm{SCS}(X)$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'insieme:

$$E_a = \bigcup_{\phi(t)<a} \{x \in X \mid f(x) < t\}.$$

Esso è aperto perché unione di aperti e

$$E_a \subset \{x \in X \mid \phi \circ f(x) < a\}$$

perché ϕ è non decrescente.

Per dimostrare che $\phi \circ f \in \mathrm{SCS}(X)$, mostriamo che questi due insiemi coincidono. Sia $x_0 \in X$ tale che $\phi \circ f(x_0) < a$. Posto $f(x_0) = s$, abbiamo $\phi(s) < a$ e, poiché abbiamo supposto la ϕ semicontinua superiormente, possiamo trovare un $\epsilon > 0$ tale che $\phi(t) < a$ se $s - \epsilon < t < s + \epsilon$. Allora $x_0 \in \{x \in X \mid f(x) < s + \frac{\epsilon}{2}\} \subset E_a$. Questo dimostra che

$$\{x \in X \mid \phi \circ f(x) < a\} \subset E_a$$

e quindi i due insiemi coincidono.

La dimostrazione dell'enunciato che riguarda le funzioni semicontinue inferiormente è analoga. □

TEOREMA 5.6. *Sia $\{f_i \mid i \in I\}$ una qualsiasi famiglia di funzioni di $SCS(X)$. Allora la*

$$f : X \ni x \to \inf_{i \in I} f_i(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

è ancora una funzione semicontinua superiormente della classe $\mathrm{SCS}(X)$. *Sia $\{f_i \mid i \in I\}$ una qualsiasi famiglia di funzioni di $SCI(X)$. Allora la*

$$f : X \ni x \to \sup_{i \in I} f_i(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

è ancora una funzione semicontinua inferiormente della classe $\mathrm{SCI}(X)$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $\{f_i \mid i \in I\} \subset \mathrm{SCS}(X)$ e $f(x) = \inf_{i \in I} f_i(x)$ per ogni $x \in X$. Fissato un qualsiasi numero reale a l'insieme:

$$\{x \in X \mid f(x) < a\} = \bigcup_{i \in I} \{x \in X \mid f_i(x) < a\}$$

è aperto perché unione di aperti. Quindi la f è semicontinua inferiormente e chiaramente è a valori in $[-\infty, +\infty[$ se tutte le f_i sono a valori in tale insieme.

La dimostrazione della seconda parte del teorema è del tutto analoga. □

LEMMA 5.7. *Siano $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ due successioni di funzioni continue a valori in $\mathbf{I}$, definite su uno spazio topologico X. Supponiamo che $\inf_n f_n = f \leq g = \sup_n g_n$. Possiamo allora trovare una funzione continua $h : X \to \mathbf{I}$ tale che $f \leq h \leq g$.*

DIMOSTRAZIONE. Sostituendo a f_n la funzione continua $\min\{f_0, ..., f_n\}$ e a g_n la funzione continua $\max\{g_0, ..., g_n\}$ possiamo supporre che $f_n \geq f_{n+1}$ e $g_n \leq g_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definiamo ora due successioni di funzioni continue $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ ponendo

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_n = \max_{j \leq n} \min\{f_j, g_j\} \text{ se } n > 0 \\ \beta_0 = 1 \\ \beta_n = \max\{\alpha_{n-1}, f_n\} \text{ se } n > 0. \end{cases}$$

Le funzioni

$$h_1 : X \ni x \to \sup_n \alpha_n(x) \in I,$$

$$h_2 : X \ni x \to \inf_n \beta_n(x) \in I,$$

sono la prima semicontinua inferiormente e la seconda semicontinua superiormente su X. Inoltre $\alpha_n \leq g_n$ e $\beta_n \geq f_n$ per ogni n ci dicono che $h_1 \leq g$ e $h_2 \geq f$.

Vogliamo dimostrare che $h_1 = h_2 = h$: la h risulterà continua e soddisferà la tesi del lemma.

Sia $\mathbb{R} \ni t < h_1(x)$ per un punto $x \in X$. Poiché la successione delle α_n è non decrescente, possiamo trovare un intero $\nu \geq 1$ tale che $\alpha_n(x) > t$ per ogni $n \geq \nu$. In particolare, per un indice μ con $1 \leq \mu \leq \nu$ abbiamo $f_\mu(x) > t$ e $g_\mu(x) > t$. Quindi

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq ... \geq f_\mu(x) > t < \alpha_\mu(x) \leq \alpha_{\mu+1}(x) \leq ...$$

e quindi anche $\beta_n(x) > t$ per ogni n. Ciò dimostra che $h_1 \leq h_2$.

Sia ora t un numero reale con $t > h_1(x)$. Scegliamo un altro numero reale s tale che $h_1(x) < s < t$. Allora $\alpha_n(x) < s$ per ogni n e quindi $\min\{f_n(x), g_n(x)\} < s$ per ogni n. Se fosse $f_n(x) > t$ per ogni n, avremmo $g_n(x) < s$ per ogni n e dunque $g(x) \leq s < t \leq f(x)$ ci darebbe una contraddizione. Deve quindi essere $f_\nu(x) \leq t$ per qualche intero positivo ν e dunque $\beta_\nu(x) \leq t$. Allora $h_2(x) \leq t$. Ne segue che è anche $h_2 \leq h_1$ e dunque le due funzioni sono uguali. La dimostrazione è completa. □

LEMMA 5.8. *Sia X uno spazio topologico T_4 e siano $f \in \mathrm{SCS}(X)$, $g \in \mathrm{SCI}(X)$ due funzioni tali che*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \leq 1 \quad \forall x \in X.$$

Esiste allora una funzione continua $h : X \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni coppia di interi positivi m, n con $1 \leq m \leq n$ sia $\phi_{n,m} : X \to [\frac{m}{n}, 1] \subset \mathbb{R}$ una funzione continua che valga $\frac{m}{n}$ sul chiuso $\{x \in X \,|\, g(x) \leq \frac{m-1}{n}\}$ e 1 sul chiuso $\{x \in X \,|\, f(x) \geq \frac{m}{n}\}$. Abbiamo $\phi_{n,m}(x) \geq f(x)$ su X. Per ogni intero positivo n consideriamo allora la funzione continua

$$\phi_n : X \ni x \to \min_{1 \leq m \leq n} \phi_{n,m}(x) \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo allora $\phi_n(x) \geq f(x)$ su X e inoltre $\phi_n(x) \leq \frac{m+1}{n}$ se $g(x) \leq \frac{m}{n}$. Posto

$$f_0(x) = \inf_n \phi_n(x) \text{ per } x \in X,$$

otteniamo una funzione semicontinua superiormente tale che

$$f(x) \leq f_0(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X.$$

Applicando lo stesso ragionamento alle funzioni $x \to 1 - g(x)$ e $1 - f_0(x)$, che sono la prima semicontinua superiormente e la seconda semicontinua inferiormente, possiamo trovare una successione $\{\psi_n\}$ di funzioni continue $\psi_n : X \to \mathbf{I}$ tali che, posto $G_0 = \inf_n \psi_n$, risulti $1 - g(x) \leq G_0(x) \leq 1 - f_0(x)$ per ogni $x \in X$. Allora $g_0(x) = 1 - G_0(x)$ è l'estremo superiore di una successione di funzioni continue e risulta

$$f(x) \leq f_0(x) \leq g_0(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X.$$

Per il lemma precedente possiamo trovare una funzione continua $h : X \to \mathbf{I}$ tale che $f_0(x) \leq h(x) \leq g_0(x)$ per ogni $x \in X$. Tale funzione h soddisfa la tesi. □

OSSERVAZIONE 5.9. La proprietà espressa dal Lemma ?? caratterizza gli spazi topologici T_4. Siano infatti A e B due chiusi disgiunti dello spazio topologico X. Dette χ_A e χ_B le loro funzioni caratteristiche, le funzioni $1 - \chi_A$ e χ_B sono la prima semicontinua inferiormente, la seconda semicontinua superiormente e

$$\chi_B(x) \leq 1 - \chi_A(x) \quad \forall x \in X.$$

Una funzione continua $h : X \to I$ tale che

$$\chi_B(x) \leq h(x) \leq 1 - \chi_A(x) \quad \forall x \in X$$

è una funzione di Urysohn della coppia (A, B).

Quindi, uno spazio topologico X per cui valga l'enunciato del Lemma ?? soddisfa necessariamente l'assioma di separazione T_4.

TEOREMA 5.10 (Teorema di interpolazione). *Sia X uno spazio topologico T_4 ed $f \in \mathrm{SCS}(X)$, $g \in \mathrm{SCI}(X)$ due funzioni tali che*

$$-\infty < f(x) \leq g(x) < +\infty \quad \forall x \in X.$$

Esiste allora una funzione $h : X \to \mathbb{R}$ continua tale che

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la funzione $\alpha : \mathbb{R} \to I$ definita da:

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} + \frac{t}{1 + 2|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Essa definisce un omeomorfismo crescente di $\mathbb{R}$ sull'intervallo aperto $\operatorname{int} I =]0, 1[$, che ha inversa

$$\beta(s) = \begin{cases} \frac{2s-1}{4s} \text{ per } 0 < s \leq 1/2 \\ \frac{2s-1}{4(1-s)} \text{ per } 1/2 \leq s < 1. \end{cases}$$

Consideriamo la funzione $\alpha \circ f$. Essa è ancora semicontinua superiormente perché composta di una funzione semicontinua superiormente e di una funzione continua e crescente.

Analogamente $\alpha \circ g$ è ancora semicontinua inferiormente perché composta di una funzione semicontinua inferiormente e di una funzione continua e crescente.

Per il lemma precedente possiamo trovare una funzione continua $\lambda : X \to \mathbf{I}$ tale che

$$\alpha \circ f(x) \leq \lambda(x) \leq \alpha \circ g(x) \quad \forall x \in X.$$

La funzione continua $h = \beta \circ \lambda$ soddisfa allora le condizioni del teorema. □

TEOREMA 5.11. *Sia X uno spazio normale. Allora*

1. *Ogni $f \in \mathrm{SCS}(X)$ limitata superiormente è estremo inferiore di una famiglia di funzioni continue.*
2. *Ogni $f \in \mathrm{SCI}(X)$ limitata inferiormente è estremo superiore di una famiglia di funzioni continue.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in \mathrm{SCS}(X)$ e supponiamo che $f(x) \leq c$ su X per una costante $c \in \mathbb{R}$. Supponiamo vi sia un punto $x_0 \in X$ in cui $f(x_0) < c$. Fissato un qualsiasi numero reale s con $f(x_0) < s < c$, la funzione

$$\psi(x) = \begin{cases} s \text{ se } x = x_0 \\ c \text{ se } x \in X \setminus \{x_0\} \end{cases}$$

è semicontinua inferiormente perché $X \setminus \{x_0\}$ è aperto in quanto abbiamo supposto che X soddisfi l'assioma T_1. Per il teorema di interpolazione, possiamo trovare una funzione continua $h : X \to \mathbb{R}$ tale che

$$\max\{f(x), s\} \leq h(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in X.$$

Da questa osservazione segue che, detto $\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le funzioni continue $h : X \to \mathbb{R}$ tali che $h \geq f$, abbiamo

$$f(x) = \inf\{h(x) \,|\, h \in \mathcal{F}\}.$$

La dimostrazione della (2) è analoga. □

6. Assiomi di numerabilità e di separabilità

sprec

Uno spazio topologico X si dice *separabile* se contiene un sottoinsieme D denso e numerabile.

ESEMPIO 6.1. La retta reale $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea è separabile, in quanto l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è denso in $\mathbb{R}$ e numerabile.

DEFINIZIONE 6.2. Diciamo che uno spazio topologico X *soddisfa al primo assioma di numerabilità* se ogni punto di X ammette un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Diciamo che uno spazio topologico X *soddisfa al secondo assioma di numerabilità* o che è a base numerabile se ammette una base numerabile di aperti.

TEOREMA 6.3. *Uno spazio topologico X che soddisfa il secondo assioma di numerabilità soddisfa anche al primo ed è separabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{B} = \{A_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ una base numerabile degli aperti della topologia τ_X di X. Fissato un punto x di X, la famiglia $\{A_n \in \mathcal{B} \,|\, x \in A_n\}$ è una base numerabile di intorni di x in X.

Per ogni n appartenente all'insieme $\mathbb{N}'$ dei numeri naturali per cui $A_n \neq \emptyset$, scegliamo un elemento $x_n \in A_n$. Allora $D = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}'\}$ è un sottoinsieme denso e numerabile di X. □

TEOREMA 6.4. *Uno spazio topologico metrizzabile soddisfa al primo assioma di numerabilità. Esso soddisfa al secondo assioma di numerabilità se e soltanto se è separabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio topologico metrizzabile e d una distanza su X che ne definisca la topologia. Per ogni $x \in X$ le palle aperte $B_d(x, 2^{-n})$ di X per la distanza d formano un sistema fondamentale di intorni numerabile di X.

Abbiamo già osservato che se X soddisfa al secondo assioma di numerabilità allora è separabile. Supponiamo ora viceversa che X sia separabile. Sia $D = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ un sottoinsieme denso e numerabile di X. Dico che allora

$$\mathcal{B} = \{B_d(x_n, 2^{-m}) \,|\, m, n \in \mathbb{N}\}$$

è una base numerabile di X. Sia infatti A un aperto di X e $x \in A$. Possiamo allora trovare un $\epsilon > 0$ tale che $B_d(x, \epsilon) \subset A$. Scegliamo un intero positivo m tale che $2^{-m} < \epsilon/2$. Poiché D è denso in X, esiste $x_n \in D$ tale che $d(x, x_n) < 2^{-m}$. Allora $x \in B_d(x_n, 2^{-m}) \subset A$. Quindi ogni punto di un aperto A è contenuto in un elemento di $\mathcal{B}$ contenuto in A. Questo dimostra

che $\mathcal{B}$ è una base di X. Chiaramente la base $\mathcal{B}$ che abbiamo ottenuto è numerabile. □

Si verifica facilmente la:

PROPOSIZIONE 6.5. *Un sottospazio di uno spazio topologico che soddisfi al primo (risp. al secondo) assioma di numerabilità soddisfa anch'esso al primo (risp. al secondo) assioma di numerabilità.*

ESEMPIO 6.6. Un sottospazio di uno spazio topologico separabile non è necessariamente separabile. Sia $X = (\mathbb{R}, \tau)$ ove τ è la topologia che ha come base degli aperti gli intervalli chiusi a sinistra e aperti a destra della forma $[a, b[$ con $a < b$. Lo spazio topologico prodotto $X \times X$ è separabile, in quanto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ne è un sottoinsieme denso e numerabile. D'altra parte la topologia indotta sul sottospazio $Y = \{(x, -x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ è la topologia discreta e quindi Y non è separabile con la topologia di sottospazio.

TEOREMA 6.7. *Sia X, con topologia τ, il prodotto topologico di una I-upla $(X_i)_{i\in I}$ di spazi topologici, ciascuno dei quali contenga almeno due punti. Allora*

(1) *X soddisfa al primo assioma di numerabilità se ogni X_i soddisfa al primo assioma di numerabilità e I è finito o numerabile.*
(2) *X soddisfa al secondo assioma di numerabilità se ogni X_i soddisfa al secondo assioma di numerabilità e I è finito o numerabile.*
(3) *X è separabile se e ogni X_i è separabile e I ha al più la potenza del continuo.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Sia $x \in X$ e per ogni $i \in I$ sia $\mathcal{U}_i$ un sistema fondamentale numerabile di intorni di $x_i = \pi_i(x)$ in X_i. Allora

$$\mathcal{U} = \{\cap_{i\in J}\pi_i^{-1}(U_i) \,|\, J \subset I \quad \text{è finito} \quad \text{e} \quad U_i \in \mathcal{U}_i\}$$

è un sistema fondamentale di intorni numerabile di x.
(2) Per ogni $i \in I$ sia $\mathcal{B}_i$ una base numerabile di X_i. Allora

$$\mathcal{B} = \{\cap_{i\in J}\pi_i^{-1}(A_i) \,|\, J \subset I \quad \text{è finito} \quad \text{e} \quad A_i \in \mathcal{B}_i\}$$

è una base numerabile di τ.
(3) Se I ha al più la potenza del continuo, possiamo supporre che $I \subset [0, 1[\subset \mathbb{R}$. Indichiamo con Λ l'insieme di tutte le partizioni finite di $[0, 1[$ in intervalli chiusi a sinistra e aperti a destra con estremi razionali. L'insieme Λ è numerabile. Per ogni indice $i \in I$ sia $D_i = \{x_{in}\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme numerabile e denso di X_i. Consideriamo il sottoinsieme di X:

$$\begin{aligned} D = &\{x \in X \,|\, \exists\{E_1, ..., E_k\} \in \Lambda, \quad n_1, ..., n_k \in \mathbb{N} \\ &\text{tali che} \quad \pi_i(x) = x_{in_s} \text{ se } i \in E_s \cap I \quad 1 \le s \le k\}. \end{aligned}$$

L'insieme D è numerabile. Esso è denso in X. Se infatti J è un sottoinsieme finito di I e, per ogni $j \in J$, A_j un aperto di X_j, possiamo trovare una partizione $\{E_1, ..., E_k\} \in \Lambda$ tale che ciascun insieme della partizione contenga

al più un elemento j di J. Per ogni $j \in J$ l'aperto A_j di X_j contiene un elemento x_{jn_j} di D_j. Allora l'elemento x di D definito da

$$x_h = \begin{cases} x_{hn_j} \text{ se } h, j \in E_s \quad \text{per qualche} \quad 1 \leq s \leq k \\ x_{h0} \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a $\cap_{j\in J}\pi_j^{-1}(A_j)$. □

TEOREMA 6.8. *Ogni spazio topologico che soddisfi l'assioma T_3 e sia a base numerabile soddisfa anche l'assioma T_4.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di aperti di uno spazio topologico X, che soddisfi anche l'assioma di separazione T_3. Siano A e B due chiusi disgiunti di X. Per ogni punto $x \in A$ esiste un intorno aperto $U_x \in \mathcal{B}$ di x tale che $\overline{U}_x \cap B = \emptyset$ e per ogni $y \in B$ un intorno aperto $V_y \in \mathcal{B}$ di y tale che $\overline{V}_y \cap A = \emptyset$. Poiché $\mathcal{B}$ è numerabile, possiamo trovare due successioni $\{x_n\} \subset A$ e $\{y_n\} \subset B$ tali che

$$\{U_x \,|\, x \in A\} = \{U_{x_n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}, \quad = \{V_y \,|\, y \in B\} = \{V_{y_n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Poniamo $U_n = U_{x_n}$ e $V_n = V_{y_n}$. Allora $\{U_n\}$ e $\{V_n\}$ sono due ricoprimenti aperti di A e B rispettivamente che sono numerabili e hanno la proprietà:

$$\overline{U}_n \cap B = \emptyset, \quad \overline{V_n} \cap A = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poniamo

$$U_0' = U_0$$
$$U_n' = U_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} \overline{V}_j$$
$$V_n' = V_n \setminus \bigcup_{j=0}^{n} \overline{U}_j.$$

Allora

$$U = \bigcup_{j=0}^{\infty} U_n' \quad \text{è un aperto contenente } A$$
$$V = \bigcup_{j=0}^{\infty} V_n' \quad \text{è un aperto contenente } B.$$

Dico che i due aperti U e V sono disgiunti. Se infatti fosse $x \in U \cap V$, avremmo $x \in U_n' \cap V_m'$ per due interi $m, n \geq 0$. Non può essere $n \leq m$ perché in questo caso $U_n' \cap V_m' \subset U_n \cap (V_m \setminus U_n) = \emptyset$, né $n > m$ in quanto in questo caso $U_n' \cap V_m' \subset (U_n \setminus V_m) \cap V_m = \emptyset$. Quindi $U \cap V = \emptyset$. La dimostrazione è completa. □

7. Un teorema di immersione e metrizzabilità

TEOREMA 7.1. *Ogni spazio regolare a base numerabile ammette un'immersione topologica in ℓ_2.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio topologico regolare a base numerabile e sia $\mathcal{B}$ una base numerabile degli aperti di X. Sia

$$\Delta = \{(U, V) \,|\, U, V \in \mathcal{B},\ \overline{U} \subset V\}.$$

L'insieme Δ è numerabile e possiamo quindi trovare una applicazione surgettiva

$$\mathbb{N} \ni n \to (U_n, V_n) \in \Delta.$$

Per il Teorema 6.? X è uno spazio normale. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste quindi una funzione di Urysohn f_n della coppia $(\overline{U}_n, X - V_n)$. Consideriamo l'applicazione

$$f : X \ni x \to (2^{-n} f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2.$$

L'applicazione f è iniettiva: se $x \neq y$ sono due punti distinti di X, possiamo trovare una coppia di aperti $A, B \in \mathcal{B}$ tali che $x \in A \subset \overline{A} \subset B \not\ni y$ e quindi un indice $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \in U_n$ e $y \notin V_n$. Allora $f_n(x) = 0$, $f_n(y) = 1$ e dunque $f(x) \neq f(y)$.

Dimostriamo che f è continua: fissiamo $x_0 \in X$ ed $\epsilon > 0$. Possiamo scegliere $m \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, in modo che

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-2n} < \epsilon^2/2.$$

Poiché ciascuna delle funzioni f_n è continua, possiamo poi trovare un intorno aperto W di x_0 tale che

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon/2 \quad \text{per } n = 0, ..., m.$$

Allora

$$\|f(x) - f(x_0)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} |f_n(x) - f_n(x_0)|^2$$

$$\leq (\epsilon^2/4) \sum_{n=0}^{m} 2^{-2n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-2n} < \epsilon^2,$$

$$\forall y \in W.$$

Sia ora $g : f(X) \to X$ la funzione inversa dell'abbreviazione $f|_X^{f(X)} : X \to f(X)$. Sia $y_0 = f(x_0) \in f(X)$ e sia W un intorno di x_0 in X. Possiamo allora trovare una coppia $(U_n, V_n) \in \Delta$ con $x \in U_n \subset V_n \subset W$. Se $y \in B(y_0, 2^{-n}) \cap f(X) = \{f(x) \,|\, \|f(x) - y_0\| < 2^{-n}\}$ avremo in particolare $|f_n(x) - f_n(x_0)| = f_n(x) < 1$ e quindi $x \in V_n \subset W$. Questo dimostra che anche g è continua e quindi f è un'immersione topologica. □

Poiché un sottospazio di uno spazio metrizzabile è metrizzabile, abbiamo ottenuto il

TEOREMA 7.2. *Uno spazio topologico a base numerabile è metrizzabile se e soltanto se è regolare.*

CAPITOLO 2

Spazi di Baire

1. Definizione ed esempi di spazi di Baire

tpaa

Sia X uno spazio topologico. Ricordiamo che un sottoinsieme D di X si dice *denso* in X se la sua chiusura $\bar{D}$ è uguale a X, ovvero se ogni aperto non vuoto di X contiene punti di D.

Viceversa, chiamiamo *raro* o *da nessuna parte denso* un sottoinsieme A di X la cui chiusura non abbia punti interni, tale cioè che risulti

eq:aaaaa

$$\operatorname{int}(\bar{A}) = \emptyset. \tag{1.1}$$

DEFINIZIONE 1.1. Uno spazio topologico $\mathbf{X}$ si dice *di Baire* se l'intersezione di una sua qualsiasi famiglia numerabile di aperti densi è ancora un sottoinsieme denso.

os:aaaab

OSSERVAZIONE 1.2. Un'intersezione finita di aperti densi è ancora un aperto denso. Se infatti $A_0, \dots, A_n$ sono aperti densi di X ed U è un qualsiasi aperto non vuoto di X, allora $A_0 \cap U \neq \emptyset$ perché A_0 è denso in X. Sia m il più grande intero non negativo e minore o uguale ad n per cui $U_m = U \cap \bigcap_{j=0}^{m} A_j \neq \emptyset$. U_m è aperto perché intersezione finita di aperti. Quindi, se fosse $m < n$, avremmo $U_m \cap A_{m+1} \neq \emptyset$ perché A_{m+1} è denso in X. Ma questo ci darebbe una contraddizione perché $U_m \cap A_{m+1} = U \cap \bigcap_{j=0}^{m+1} A_j = U_{m+1} \neq \emptyset$ contraddirebbe la nostra scelta di m.

Per caratterizzare e studiare gli spazi di Baire è utile introdurre il concetto di categoria topologica.

DEFINIZIONE 1.3. Un sottoinsieme A di X si dice *di prima categoria* se è unione numerabile di insiemi rari.

Un sottoinsieme di X che non sia di prima si dice di *seconda categoria*.

OSSERVAZIONE 1.4. Un'unione numerabile d'insiemi di prima categoria è di prima categoria.

LEMMA 1.5. *Sia X uno spazio topologico. Sono equivalenti:*

1. *X è di Baire.*
2. *Se $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia numerabile di chiusi e $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ è tale che $\operatorname{int} F \neq \emptyset$, allora esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\operatorname{int} F_\nu \neq \emptyset$.*
3. *Gli insiemi di prima categoria hanno parte interna vuota.*
4. *Ogni aperto non vuoto di X è di seconda categoria.*

(5) *Il complementare in ogni aperto non vuoto di X di un sottoinsieme di prima categoria di X è di seconda categoria.*

DIMOSTRAZIONE. (1) $\Rightarrow$ (2). Supponiamo che X sia uno spazio di Baire e sia $\{F_n\}$ una qualsiasi successione di chiusi ciascuno con parte interna vuota. Allora $A_n = \complement F_n$ è per ogni n un aperto denso di X. Quindi:

$$D = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \complement \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$$

è denso in X. Se U fosse un aperto non vuoto contenuto in $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$, sarebbe $D \cap U = \emptyset$, ma questo non è possibile perché D è denso in X.

(2) $\Rightarrow$ (3). Se A è un insieme di prima categoria, allora $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, per una successione di insiemi $\{A_n\}$ con $\operatorname{int}(\bar{A}_n) = \emptyset$. Per la (2) abbiamo $\operatorname{int}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n\right) = \emptyset$, e quindi a maggior ragione $\operatorname{int}(A) = \emptyset$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Per la (3) nessun aperto non vuoto può essere di prima categoria.

(4) $\Rightarrow$ (5). È ovvia, perché l'unione di due insiemi di prima categoria è di prima categoria.

(5) $\Rightarrow$ (1). Supponiamo valga (5). Sia $\{A_n\}$ una successione di aperti densi di X. Vogliamo dimostrare che $D = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ è denso in X. Per n, l'insieme $F_n = \complement A_n$ è un chiuso con parte interna vuota. Quindi $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ è di prima categoria in X e $\complement F = D$. Quindi, per la (5), per ogni aperto non vuoto U di X il complemento $U \cap \complement F$ di F in U è di seconda categoria e in particolare non vuoto. Poiché $U \cap \complement F = U \cap D$, otteniamo la tesi. □

Da (4) segue subito che:

COROLLARIO 1.6. *Ogni sottospazio aperto di uno spazio di Baire è uno spazio di Baire.*

TEOREMA 1.7. *Ogni spazio di Hausdorff localmente compatto è di Baire.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $X = (X, \tau_X)$ uno spazio di Hausdorff localmente compatto. Sia $\{A_n\}$ una famiglia numerabile di aperti densi di X e sia $D = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. Per l'Osservazione 1.2, possiamo supporre che $A_{n+1} \subset A_n$ per ogni $n \geq 0$.

Vogliamo dimostrare che per ogni aperto non vuoto U di X interseca D. A questo scopo, costruiamo induttivamente una successione $\{B_n\}$ di aperti non vuoti tali che

$$(*) \qquad \begin{cases} \bar{B}_n \quad \text{è compatto} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \bar{B}_n \subset U \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \bar{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Infatti, poiché X è localmente compatto, un punto x_0 di $U \cap A_0 \neq \emptyset$ ha un intorno aperto non vuoto B_0 con chiusura compatta contenuta in $U \cap A_0$.

Supponiamo di aver costruito B_0, ..., B_m in modo che le (∗) siano soddisfatte per $n < m$. Allora $B_m \cap A_{m+1}$ è un aperto non vuoto, e basterà scegliere un intorno aperto B_{m+1} di un suo punto x_{m+1} con chiusura compatta contenuta in $B_m \cap A_{m+1}$, perché le (∗) siano soddisfatte per ogni $n \leq m$.

La famiglia $\{\bar{B}_n\}$ è una famiglia di sottoinsiemi chiusi del compatto $\bar{B}_0$ che gode della proprietà dell'intersezione finita. Quindi $\emptyset \neq \bigcap_{n=0}^{\infty} \bar{B}_n \subset D \cap U$ e la tesi è dimostrata. □

TEOREMA 1.8. *Ogni spazio metrico completo è uno spazio di Baire.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $\{A_n\}$ una successione di aperti densi di X. Per l'Osservazione 1.2, possiamo supporre che $A_{n+1} \subset A_n$ per ogni $n \geq 0$. Fissiamo un aperto non vuoto U di X. Costruiamo per ricorrenza una successione $\{B_n\}$ di palle aperte di X tali che

$$(*) \qquad \begin{cases} \bar{B}_n \subset U \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ B_n = B(x_n, r_n) \quad \text{con} \quad x_n \in X \quad \text{e} \quad 0 < r_n < 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \bar{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

A questo scopo osserviamo che $A_0 \cap U$ è un aperto non vuoto e quindi, fissati

$$x_0 \in A_0 \cap U \quad \text{e} \quad 0 < r_0 < \min\{1, d(x_0, \complement(A_0 \cap U))\}$$

e posto $B_0 = B(x_0, r_0)$ abbiamo $\bar{B}_0 \subset A_0 \cap U$. Supponiamo di aver costruito, per $n \geq 0$, le palle $B_0, \ldots, B_m$ in modo che valgano le $(*)$ per $n < m$. Fissato un punto x_{m+1} di $B_m \cap A_{m+1} \subset U$, possiamo trovare $0 < r_{m+1} < 2^{-(m+1)}$ tale che, posto $B_{m+1} = B(x_{m+1}, r_{m+1})$ risulti $\bar{B}_{m+1} \subset A_{m+1} \cap B_m$. Allora le $(*)$ sono verificare per $n \leq m$.

Ottenuta così una successione che verifica le $(*)$, la successione $\{x_n\}$ dei centri delle palle B_n è una successione di Cauchy. Il suo limite x_∞ appartiene a $\bar{B}_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi ad $A_n \cap U$ per ogni n. Dunque $x_\infty \in D \cap U \neq \emptyset$. □

2. Alcuni teoremi sulle funzioni reali continue e semicontinue

Dimostriamo in questo paragrafo alcuni teoremi sulle funzioni reali.

2.1. Punti di continuità di un limite puntuale di funzioni continue.

TEOREMA 2.1 (Baire). *Sia $X = (X, \tau_X)$ uno spazio topologico e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue a valori reali definite su X. Supponiamo che per ogni $x \in X$ esista il limite della successione $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{R}$. Allora l'insieme dei punti $x \in X$ in cui la funzione*

$$f : X \ni x \to \lim_{n \to \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$$

non è continua è di prima categoria in X.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni intero positivo n ed ogni numero reale $\epsilon > 0$ poniamo

$$P_n(\epsilon) = \{x \in X \,|\, |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon\}.$$

Poniamo

$$G(\epsilon) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{int} P_n(\epsilon).$$

Dimostriamo che

$$Y = \bigcap_{n=0}^{\infty} G(2^{-n})$$

è il sottoinsieme dei punti di X in cui f è continua. Supponiamo infatti che f sia continua in $x_0 \in X$. Fissato $\epsilon > 0$, possiamo trovare un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \epsilon/3 \quad \forall n \geq \nu.$$

Poiché sia f che f_ν sono continue in x_0, esiste un intorno aperto U di x_0 in X tale che

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon/3 \quad \text{e} \quad |f_\nu(x) - f_\nu(x_0)| < \epsilon/3 \quad \forall x \in U.$$

Allora

$$|f_\nu(x) - f(x)| \leq |f_\nu(x) - f_\nu(x_0)| + |f_\nu(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in U.$$

Ciò dimostra che $A \subset P_\nu(\epsilon)$ e quindi $x_0 \in \operatorname{int} P_n(\epsilon) \subset G(\epsilon)$. Poiché $\epsilon > 0$ è arbitrario, ne segue che $x_0 \in Y$.

Sia viceversa $x_0 \in Y$. Fissiamo $\epsilon > 0$. Poiché $x_0 \in G(\epsilon/3)$, avremo $x_0 \in \operatorname{int} P_n(\epsilon/3)$ per qualche indice $n \in \mathbb{N}$. Esisterà dunque un intorno aperto U di x_0 in cui

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon/3 \quad \forall x \in U.$$

Poiché f_n è continua in x_0, possiamo trovare un intorno aperto U' di x_0, che possiamo supporre contenuto in U, in cui risulti

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon/3.$$

Avremo allora:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall x \in U'$$

e ciò dimostra la continuità di f in x_0.

Poniamo ora, per ogni intero non negativo n e ogni numero reale $\epsilon > 0$:

$$F_n(\epsilon) = \{x \in X \,|\, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \quad \forall m \geq n\}.$$

Per la continuità delle f_n, questi insiemi sono chiusi. Inoltre, per la convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$, abbiamo

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n(\epsilon).$$

Inoltre risulta

$$F_n(\epsilon) \subset P_n(\epsilon),$$

quindi

$$\operatorname{int} F_n(\epsilon) \subset \operatorname{int} P_n(\epsilon),$$

e dunque

$$L(\epsilon) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{int} F_n(\epsilon) \subset G(\epsilon).$$

Ma per il complementare di $L(\epsilon)$ abbiamo allora

$$\complement L(\epsilon) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (F_n(\epsilon) \cap \complement[\operatorname{int}(F_n\epsilon))],$$

unione numerabile di chiusi con parte interna vuota. Quindi $\complement L(\epsilon)$ è di prima categoria e lo è anche, a maggior ragione, $\complement G(\epsilon)$. Quindi l'insieme

$$\complement Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} \complement G(2^{-n}),$$

dei punti in cui f è discontinua, è di prima categoria. □

2.2. Funzioni semicontinue. Ricordiamo che una funzione reale f, definita su uno spazio topologico X, è *semicontinua inferiormente* se, per ogni numero reale c, l'insieme

$$\{x \in X \mid f(x) \leq c\}$$

è chiuso in X.

TEOREMA 2.2. *Sia X uno spazio di Baire ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione semicontinua inferiormente. Allora ogni aperto non vuoto U di X contiene un aperto non vuoto V su cui f è limitata superiormente.*

DIMOSTRAZIONE. Ogni aperto U di X è uno spazio di Baire. Poniamo, per ogni intero non negativo n:

$$F_n = \{x \in U \mid f_n(x) \leq n\}.$$

Tali insiemi sono chiusi in U perché f è semicontinua inferiormente e

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n = U$$

perché la f è a valori reali. Possiamo quindi trovare $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $V = \operatorname{int} F_n \neq \emptyset$. □

lm:aaabc LEMMA 2.3. *Sia (X, d) uno spazio metrico compatto ed $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione semicontinua inferiormente. Possiamo allora trovare una successione non decrescente $\{f_n\}$ di funzioni continue su X a valori reali tale che*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \quad \forall x \in X.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $a = \min_X f(x) \in \mathbb{R}$. Per ogni intero non negativo n siano $x_{n,1}, ..., x_{n,\ell_n}$ punti di X tali che

$$X = \bigcup_{j=1}^{\ell_n} B(x_{n,j}, 2^{-(n+1)}).$$

Per ogni $j = 1, ..., \ell_n$ poniamo

$$\mu_{n,j} = \min\{f(x) \,|\, d(x, x_{n,j}) \leq 2^{-n}\}.$$

Per il lemma di Urysohn possiamo trovare funzioni continue $w_{n,j} : X \to \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} a \leq w_{n,j}(x) \leq \mu_{n,j} \quad \forall x \in X \\ w_{n,j}(x) = \mu_{n,j} \quad \forall x \in \bar{B}(x_{n,j}, 2^{-(n+1)}) \\ w_{n,j}(x) = a \quad \forall x \notin B(x_{n,j}, 2^{-n}). \end{cases}$$

Poniamo

$$g_n(x) = \max\{w_{n,1}(x), ..., w_{n,\ell_n}(x)\} \quad \forall x \in X.$$

Allora

$$g_n : X \ni x \to g_n(x) \in \mathbb{R}$$

è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$g_n \leq f \quad \text{su} \quad X.$$

Poniamo

$$f_n(x) = \max\{g_0(x), g_1(x), ..., g_n(x)\} \quad \forall x \in X.$$

Allora

$$f_n : X \ni x \to f_n(x) \in \mathbb{R}$$

sono continue per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$f_n \leq f \quad \text{su} \quad X.$$

La successione $\{f_n\}$ è una successione non decrescente di funzioni continue. Dico che

$$f(x) = \lim_{n,\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \quad \forall x \in X.$$

Infatti, per ogni $x \in X$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$ sia x_{n,j_n} tale che $x \in B(x_{n,j_n}, 2^{-(n+1)})$. Possiamo allora trovare x_n con $d(x_n, x_{n,j_n}) \leq 2^{-(n+1)}$ tale che $\mu_{n,j_n} = f(x_n) = w_{n,j_n}(x_n)$. Allora $f_n(x_n) = f(x_n)$ e $f_n(x) \geq f(x_n)$ perché $f(x) \geq w_{n,j_n}(x) = \mu_{n,j_n}$. La successione $\{x_n\}$ converge a x e dunque abbiamo, poiché f è semicontinua inferiormente,

$$\sup_n f_n(x) \geq \lim_n f(x_n) \geq f(x).$$

Poiché d'altra parte $\sup_n f_n(x) \leq f(x)$, vale l'uguaglianza e il lemma è dimostrato. □

TEOREMA 2.4. *Sia $X = (X, \tau_X)$ uno spazio metrizzabile localmente compatto. Se $f : X \to \mathbb{R}$ è semicontinua inferiormente, allora l'insieme dei punti in cui la f non è continua è di prima categoria.*

DIMOSTRAZIONE. La tesi segue dal Lemma 2.3 e dal Teorema 2.1. □

2.3. Esistenza di funzioni reali continue su $\mathbb{R}$ non derivabili in nessun punto.

TEOREMA 2.5. *Esiste una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che non è derivabile in nessun punto di $\mathbb{R}$.*

DIMOSTRAZIONE. —Sia I l'intervallo $[0, 1]$ della retta reale. Indichiamo con $\mathcal{C}_0(I)$ l'insieme di tutte le funzioni continue $\phi : I \to \mathbb{R}$, che si annullano in 0 e 1, con la topologia indotta dalla distanza

$$d(\phi, \psi) = \sup_I |\phi(x) - \psi(x)| \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{C}_0(X).$$

Con questa distanza, $\mathcal{C}_0(X)$ è uno spazio metrico completo e quindi di Baire.

Per ogni intero positivo n sia

$$F_n = \left\{ g \in \mathcal{C}_0(I) \;\middle|\; \exists x \in I \text{ tale che } \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} \leq n \quad \forall y \in I \setminus \{x\} \right\}.$$

Dico che F_n è un chiuso. Sia infatti $g \in \mathcal{C}_0(I)$ una funzione continua a valori reali definita su I tale che esista una successione $\{g_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ in F_n tale che $d(g_\nu, g) \to 0$ per $\nu \to \infty$. Per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ indichiamo con $x_\nu \in I$ un punto per cui valga

$$\frac{|g_\nu(y) - g_\nu(x_\nu)|}{|y - x_\nu|} \leq n \quad \forall y \in I \setminus \{x_\nu\}.$$

Poiché I è compatto, passando a una sottosuccessione possiamo supporre che $x_\nu \to x_\infty \in I$ per $\nu \to \infty$. Se $y \in I \setminus \{x_\infty\}$, allora $x_\nu \neq y$ per ν sufficientemente grande e otteniamo quindi

$$\frac{|g(y) - g(x_\infty)|}{|y - x_\infty|} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{|g_\nu(y) - g_\nu(x_\nu)|}{|y - x_\nu|} \leq n.$$

Dimostriamo ora che per ogni intero positivo n il chiuso F_n è raro.

Se così non fosse, potremmo trovare, per un intero positivo n, una $g \in F_n$ tale che per qualche $\epsilon > 0$ ogni $h \in \mathcal{C}(I)$ con $d(h, g) < \epsilon$ appartenga ad F_n.

Mostriamo in primo luogo che le funzioni lineari a tratti sono dense in $\mathcal{C}_0(I)$.

Sia $g \in \mathcal{C}_0(I)$. Allora

$$I \times I \ni (x, y) \to g(x) - g(y) \in \mathbb{R}$$

è una funzione continua e quindi esiste un intorno aperto U di $\{(x, x) \,|\, x \in I\}$ in $I \times I$ tale che $|g(x) - g(y)| < \epsilon$ per ogni $(x, y) \in U$. La topologia prodotto in $I \times I$ è definita dalla distanza euclidea di $\mathbb{R}^2$ e quindi, se $2\delta > 0$ è la distanza da $\{(x, x) \,|\, x \in I\}$ al complementare di U, avremo $|g(x) - g(y)| < \epsilon$ se $|x - y| < \delta$.

Consideriamo una partizione

$$0 = x_0 < x_1 < .... < x_N = 1$$

dell'intervallo I tale che

$$x_j - x_{j-1} < \delta \quad \text{per} \quad j = 1, ..., N$$

e definiamo la funzione lineare a tratti:

$$\psi(x) = g(x_{j-1}) + (g(x_j) - g(x_{j-1}))\,\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$$
$$\text{se} \quad x_{j-1} \le x \le x_j,\ j = 1, ..., N.$$

Abbiamo:

$$|g(x) - \psi(x)| \le \frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}}|g(x) - g(x_{j-1})| + \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}|g(x) - g(x_j)| < \epsilon$$
$$\text{per} \quad x_{j-1} \le x \le x_j,\ j = 1, ..., N,$$

e quindi $\psi \in B(g, \epsilon) = \{f \in \mathcal{C}_0(I) \mid d(f, g) < \epsilon\}$.

Quindi, se fosse $\text{int}(F_n) \neq \emptyset$, esso conterrebbe una funzione lineare a tratti ψ, e quindi una palla aperta $B(\psi, r)$, con $r > 0$. Poiché le funzioni lineari a tratti sono Lipschitziane, esiste una costante $L > 0$ tale che

$$\frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|} \le L \quad \forall x \neq y \in I.$$

Consideriamo, per un intero positivo $M > 0$ fissato, la funzione lineare a tratti

$$\phi_M(x) = \begin{cases} rM(x - j/M) \Leftrightarrow j/M \le x \le (2j+1)/(2M) \\ rM((j+1)/Mx) \Leftrightarrow (2j+1)/(2M) \le x \le j + 1/M \\ \qquad j = 0, 1, ..., M - 1. \end{cases}$$

Abbiamo

$$|\phi_M(x)| \le r/2 \quad \forall x \in I$$

e inoltre per ogni $x \in I$ abbiamo

$$\sup_{\substack{y \in I \\ y \neq x}} \frac{|\phi_M(y) - \phi_M(x)|}{|y - x|} = rM$$

Chiaramente $h_M = \psi + \phi_M \in B(\psi, r)$, ma $h_M \notin F_n$ se $rM - L > n$. Questo dimostra che gli F_n sono rari. Quindi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F$$

è di prima categoria e dunque $F \neq \mathcal{C}_0(I)$ perché questo è uno spazio di Baire. Una qualsiasi funzione $k \in \mathcal{C}_0(I) \setminus F$ non è derivabile in alcun punto di I. Si ottiene una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non derivabile in nessun punto di $\mathbb{R}$ estendendo la k per periodicità:

$$f(x) = k(x - q) \Leftrightarrow q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \le x \le q + 1.$$

□

3. Alcune applicazioni agli spazi normati

Sia V uno spazio vettoriale reale. Una *norma* su V è un'applicazione

$$V \ni v \to \|v\| \in \mathbb{R}$$

che gode delle proprietà:

(i) $\|0\| = 0$ e $\|v\| > 0 \Longleftrightarrow 0 \neq v \in V$;
(ii) $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$;
(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$.

Consideriamo sullo spazio normato V la struttura di spazio metrico definita dalla distanza:

$$V \times V \ni (v, w) \to d(v, w) = \|v - w\| \in \mathbb{R}\,.$$

Definizione 3.1. Uno spazio normato che sia completo rispetto alla distanza definita dalla norma si dice uno *spazio di Banach*.

Due norme $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$ sullo stesso spazio vettoriale V si dicono *equivalenti* se vi è una costante positiva c tale che

$$c^{-1}\|v\| \leq |||v||| \leq c\|v\| \quad \forall v \in V.$$

Norme equivalenti definiscono distanze che inducono la stessa topologia sullo spazio vettoriale V. Abbiamo:

Teorema 3.2. *Sia V uno spazio vettoriale reale. Due norme su V rispetto alle quali V sia uno spazio di Banach sono equivalenti fra loro.*

Dimostrazione. Siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme sullo spazio vettoriale V rispetto alle quali V sia uno spazio di Banach. Definiamo una nuova norma $\|\cdot\|$ su V ponendo

$$\|v\| \,=\, \|v\|_1 \,+\, \|v\|_2 \qquad \forall v \in V\,.$$

Osserviamo che V è uno spazio di Banach con la norma $\|\cdot\|$. Indicheremo con d_1, d_2 e d le distanze associate alle norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|$, rispettivamente.

Indichiamo con X lo spazio metrico completo che si ottiene considerando su V la distanza relativa alla norma $\|\cdot\|_1$. Poniamo, per ogni numero reale positivo r:

$$F_r = \{v \in V \,|\, \|v\| \leq r\}.$$

Poiché

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = V,$$

per il teorema di Baire possiamo trovare un intero positivo ν tale che $\bar{F}_\nu$ contenga punti interni di X (la chiusura si intende rispetto alla topologia associata alla norma $\|\cdot\|_1$. Poiché le omotetie e le traslazioni sono omeomorfismi di $\mathbf{V}$, ne segue che $\bar{F}_1$ contiene un intorno aperto dell'origine in X:

$$\bar{F}_1 \supset \{v \in V \,|\, \|v\|_1 < \epsilon\}$$

per qualche $\epsilon > 0$.

Avremo allora

$$\bar{F}_r \supset \{v \in V \,|\, \|v\|_1 < \epsilon r\} \quad \forall r > 0.$$

Fissiamo un qualsiasi vettore $v \in V$ con $\|v\|_1 < 1$.

Costruiamo per ricorrenza una successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\begin{cases} \|v_n\| \leq \dfrac{2^{-n}}{\epsilon} \quad \forall n \geq 0 \\ \\ \|v - \sum_{j=0}^{n} v_j\|_1 < 2^{-(n+1)} \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Poiché $\bar{F}_{1/\epsilon} \supset \{w \in V \,|\, \|w\|_1 < 1\}$, possiamo trovare $v_0 \in F_{1/\epsilon}$ tale che

$$\|v - v_0\|_1 < 1/2\,.$$

Supponiamo di aver costruito $v_0, v_1, ..., v_n$. Poiché

$$\|v - \sum_{j=0}^{n} v_j\|_1 < 2^{-(n+1)} \qquad \text{e} \qquad \bar{F}_{2^{-(n+1)}/\epsilon} \supset \{w \in V \,|\, \|w\|_1 < 2^{-(n+1)}\}\,,$$

possiamo trovare $v_{n+1} \in F_{2^{-(n+1)}/\epsilon}$ tale che

$$\|v - \sum_{j=0}^{n+1} v_j\|_1 < 2^{-(n+2)}.$$

Abbiamo allora

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \quad \text{in} \quad (X, d_1)$$

e

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|v_j\| \leq (1/\epsilon) \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = 2/\epsilon.$$

Da questa relazione ricaviamo che la serie $\sum_{j=0}^{\infty} v_j$ converge a un elemento $\tilde{v}$ di V nella metrica definita dalla norma $\|\cdot\|$. Abbiamo inoltre

$$\|\tilde{v}\| \leq \frac{2}{\epsilon}\,.$$

Poiché

$$\|\tilde{v} - \sum_{j=1}^{n} v_j\|_1 \leq \|\tilde{v} - \sum_{j=1}^{n} v_j\|\,,$$

segue per l'unicità del limite in (X, d) che $v = \tilde{v}$. Otteniamo quindi

$$\|v\|_1 < 1 \Longrightarrow \|v\| \leq \frac{2}{\epsilon}\,.$$

Per l'omogeneità della norma abbiamo allora:

$$\|v\| \leq \frac{2}{\epsilon}\,\|v\|_1 \qquad \forall v \in V\,,$$

da cui si ricava:

$$\|v\|_2 \leq \frac{2}{\epsilon}\|v\|_1 \qquad \forall v \in V\,.$$

In modo analogo si dimostra che esiste una costante positiva c tale che

$$\|v\|_1 \leq c\,\|v\|_2 \qquad \forall v \in V$$

e quindi le due norme sono equivalenti. □

tm:tacc

TEOREMA 3.3. *Tutte le norme su uno spazio vettoriale reale di dimensione finita sono equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita. Possiamo supporre sia $V = \mathbb{R}^n$. Indichiamo con $|v| = (\sum_{j=1}^n v_j^2)^{1/2}$ la norma Euclidea. Sarà sufficiente mostrare che una qualsiasi norma $\|\cdot\|$ su $\mathbb{R}^n$ è equivalente alla norma Euclidea.

Se $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, abbiamo

$$\|v\| \leq |v_1|\,\|e_1\| + ... + |v_n|\,\|e_n\| \leq \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2}\right) \cdot |v|.$$

Da questa disuguaglianza segue che

$$\mathbb{R}^n \ni v \to \|v\| \in \mathbb{R}$$

è un'applicazione continua per le topologie Euclidee usuali. Poiché

$$S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, |v| = 1\}$$

è un compatto di $\mathbb{R}^n$, la funzione

$$S^{n-1} \ni v \to \|v\| \in \mathbb{R}$$

ammette su S^{n-1} un minimo positivo μ. Quindi, se $v \in \mathbb{R}^n$ e $v \neq 0$, abbiamo

$$\|(v/|v|)\| \geq \mu.$$

Da questa si ricava

$$|v| \leq (1/\mu)\|v\| \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

La dimostrazione è completa. □

COROLLARIO 3.4. *Sia V uno spazio vettoriale reale normato e sia $f : \mathbb{R}^n \to V$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora f è una immersione topologica. Ogni sottospazio vettoriale di dimensione finita di uno spazio vettoriale reale normato è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare che un'applicazione lineare iniettiva $f : \mathbb{R}^n \to V$ è una immersione topologica, basta osservare che, indicando con $|\cdot|$ la norma Euclidea di $\mathbb{R}^n$ e con $\|\cdot\|$ la norma su V, le norme

$$x \to \|f(x)\| \quad \text{e} \quad x \to |x|$$

sono equivalenti su $\mathbb{R}^n$.

In particolare, se W è un sottospazio di dimensione finita di V, esso è uno spazio metrico completo per la restrizione a W della distanza indotta dalla

norma di V. Chiaramente, un sottospazio completo di uno spazio metrico è chiuso. □

TEOREMA 3.5. *Sia V uno spazio vettoriale reale normato, su cui consideriamo la topologia definita dalla distanza indotta dalla norma. Condizione necessaria e sufficiente affinché V sia localmente compatto è che V abbia dimensione finita.*

DIMOSTRAZIONE. Sia V uno spazio vettoriale reale con una norma $\|\cdot\|$. Se V ha dimensione finita, allora è localmente compatto per il Teorema 3.3.

Supponiamo ora che V sia localmente compatto e dimostriamo che ha dimensione finita. Osserviamo innanzi tutto che tutte le palle chiuse $\{v \in V \,|\, \|v\| \leq r\}$, per r reale positivo, sono compatte. In particolare, possiamo trovare vettori $e_1, ..., e_n$ con $\|e_j\| \leq 1$ per $j = 1, ..., n$ tali che

$$\{v \in V \,|\, \|v\| \leq 1\} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \{v \in V \,|\, \|v - e_j\| < 1/2\}.$$

Sia W il sottospazio vettoriale di V generato da $e_1, ..., e_n$.

Se $W = V$, allora V ha dimensione finita e la tesi è dimostrata. Supponiamo sia $W \neq V$. Per il corollario del teorema precedente, W è un sottospazio completo di V e quindi è chiuso. Fissiamo un punto $w \in \complement W$. Allora $d(w, W) = \delta > 0$. Possiamo quindi trovare un vettore $v \in W$ tale che

$$\delta \leq \|v - w\| \leq (3/2)\delta.$$

Allora $\|2(v - w)/(3\delta)\| \leq 1$ e possiamo trovare e_j tale che

$$\|2(v - w)/(3\delta)e_j\| < 1/2,$$

ma questa ci dà una contraddizione perché

$$z = v - (3\delta/2)\, e_j \in W$$

e

$$\|w - z\| < (3/4)\delta < \delta.$$

□

CAPITOLO 3

Spazi di funzioni continue

1. Il teorema di approssimazione di Stone-Weierstrass

Sia Sia X uno spazio di Hausdorff compatto e sia $\mathcal{C}(X)$ l'insieme di tutte le funzioni continue $f : X \to \mathbb{R}$. Lo spazio $\mathcal{C}(X)$ è uno spazio vettoriale reale per l'operazione di combinazione lineare di funzioni, un'algebra rispetto al prodotto di funzioni, e un reticolo rispetto alle operazioni

$$\mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) \ni (f, g) \to f \vee g \in \mathcal{C}(X),$$
$$\mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) \ni (f, g) \to f \wedge g \in \mathcal{C}(X);$$

ove

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \forall x \in X,$$
$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \forall x \in X.$$

Siano $f, g \in \mathcal{C}(X)$. Diciamo che $f \leq g$ se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X$. Indichiamo con $|f|$ la funzione:

$$|f|(x) = |f(x)| \quad \forall x \in X. \tag{1.1}$$

Rispetto alla norma:

$$\mathcal{C}(X) \ni f \to \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

$\mathcal{C}(X)$ è uno spazio di Banach. Valgono le diseguaglianze:

eq:staa

$$\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad \forall f, g \in \mathcal{C}(X), \tag{1.3}$$
$$|f(x)| \leq |g(x)| \quad \forall x \in X \Longrightarrow \|f\| \leq \|g\|. \tag{1.4}$$

Se $c \in \mathbb{R}$, indicheremo ancora con c la funzione continua su X che vale c in ogni punto di X.

TEOREMA 1.1 (Stone-Weierstrass). *Sia $\mathfrak{A}$ una sottoalgebra di $\mathcal{C}(X)$ che contenga le costanti e separi i punti* [1] *di X. Allora $\mathfrak{A}$ è densa in $\mathcal{C}(X)$.*

DIMOSTRAZIONE. **a.** Se $\mathfrak{A}$ è una sottoalgebra di $\mathcal{C}(X)$, anche la sua chiusura $\bar{\mathfrak{A}}$ è una sottoalgebra di $\mathcal{C}(X)$. Questa è una conseguenza immediata di (1.3).

eq:staa

Basterà quindi dimostrare che una sottoalgebra chiusa $\bar{\mathfrak{A}}$ di $\mathcal{C}(X)$, che contenga le costanti e separi i punti di X, coincide con $\mathcal{C}(X)$.

b Dimostriamo che, se $f \in \bar{\mathfrak{A}}$, anche $|f| \in \bar{\mathfrak{A}}$.

[1] Se cioè $x \neq y \in X$, possiamo trovare $f \in \mathfrak{A}$ tale che $f(x) \neq f(y)$.

A questo scopo, cominciamo con il dimostrare che, se $g \in \bar{\mathfrak{A}}$ è una funzione a valori in $(0,1]$, allora $\sqrt{g} \in \bar{\mathfrak{A}}$. Poiché $\bar{\mathfrak{A}}$, è un'algebra, contiene tutti i polinomi negli elementi di $\bar{\mathfrak{A}}$. Poiché è chiusa, contiene anche le somme di tutte le sue serie di potenze uniformemente convergenti. Quindi, poiché $0 < c \leq g(x) \leq 1$ per ogni $x \in X$, è anche $\|g-1\| \leq (1-c)$ e quindi

$$\sqrt{g} = \sqrt{1+(g-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (g-1)^n$$

converge uniformemente su X. Ciò dimostra che $\sqrt{g} \in \bar{\mathfrak{A}}$. Se ora $f \in \bar{\mathfrak{A}}$ è una funzione a valori positivi, allora $g = f/\|f\|$ è una funzione a valori in $(0,1]$ e quindi anche $\sqrt{f} = \sqrt{g} \cdot \sqrt{\|f\|} \in \bar{\mathfrak{A}}$. Se ora f è una qualsiasi funzione di $\bar{\mathfrak{A}}$, otteniamo che $\sqrt{f^2+\epsilon} \in \bar{\mathfrak{A}}$ per ogni $\epsilon > 0$. Passando al limite, otteniamo che

$$|f| = \lim_{\epsilon \searrow 0} \sqrt{f^2+\epsilon} \in \bar{\mathfrak{A}}.$$

c. Dalla **b.** segue che $\bar{\mathfrak{A}}$ è un reticolo. Infatti:

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|),$$
$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|).$$

d. Se x_0, x_1 sono punti distinti di X e t_0, t_1 numeri reali assegnati, allora possiamo trovare $f \in \mathfrak{A}$ tale che

$$f(x_0) = t_0, \quad f(x_1) = t_1.$$

Fissata infatti $g \in \mathfrak{A}$ che assuma in x_0 e x_1 valori distinti, poniamo:

$$f(x) = \frac{t_0(g(x_1)-g(x)) + t_1(g(x)-g(x_0))}{g(x_1)-g(x_0)} \quad \text{per} \quad x \in X.$$

e. Siano A e B chiusi disgiunti di X. Possiamo allora trovare una funzione di Urysohn f della coppia (A,B) che appartenga ad $\bar{\mathfrak{A}}$.

Per ogni coppia di punti $(x,y) \in A \times B$ sia $f_{x,y} \in \mathfrak{A}$ una funzione che valga -1 in x e 2 in y. Per ogni $y \in B$ fissato, gli aperti

$$U_y(x) = \{z \in X \,|\, f_{x,y}(z) < 0\}$$

formano, al variare di x in A, un ricoprimento aperto di A. Poiché A è compatto, possiamo trovare $x_1, ..., x_n$ tali che

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_y(x_j).$$

Poniamo allora

$$\phi_y = f_{x_1,y} \wedge .... \wedge f_{x_N,y}.$$

Otteniamo in questo modo una famiglia $\{\phi_y \,|\, y \in B\}$ di funzioni continue in $\bar{\mathfrak{A}}$ con le proprietà:

$$\phi_y(x) < 0 \quad \forall x \in A, \ \phi_y(y) = 2 \quad \forall y \in B.$$

Poniamo

$$V_y = \{z \in X \,|\, \phi_y(z) > 1\}.$$

Al variare di y in B, questi insiemi formano un ricoprimento aperto di B. Possiamo allora trovare $y_1, ..., y_M \in B$ tali che

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{M} V_{y_j}.$$

La funzione

$$\psi = (\phi_{y_1} \vee 0) \vee ... \vee (\phi_{y_M} \vee 0)$$

appartiene ancora a $\bar{\mathfrak{A}}$ ed è uguale a 0 su A e > 1 su B. Allora

$$f = \psi \wedge 1 \in \bar{\mathfrak{A}}$$

assume valori in $[0, 1]$ e vale 0 su A e 1 su B.

f. Possiamo concludere la dimostrazione ripetendo l'argomento del teorema di estensione di Urysohn.

Sia $f \in \mathcal{C}(X)$. Se f è costante su X, allora $f \in \mathfrak{A}$ e non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti avremo

$$m = \min_{x \in X} f(x) < \max_{x \in X} f(x) = M.$$

Consideriamo la funzione

$$g(x) = \frac{2}{M - m}\left(f(x) \frac{M + m}{2}\right).$$

Essa assume valori nell'intervallo $[-1, 1]$ e chiaramente $g \in \bar{\mathfrak{A}}$ se e soltanto se $f \in \bar{\mathfrak{A}}$.

Poniamo

$$A = \{x \in X \,|\, g(x) \leq -(1/3)\},\ B = \{x \in X \,|\, g(x) \geq 1/3\}.$$

Per il punto (f) possiamo trovare una funzione $g_1 \in \bar{\mathfrak{A}}$ a valori in $[-(1/3), 1/3]$ che valga $-(1/3)$ su A e $1/3$ su B. Allora:

$$\begin{cases} \|g_1\| \leq 1/3 \\ \|g - g_1\| \leq 2/3. \end{cases}$$

Possiamo costruire per ricorrenza una successione $\{g_n\}_{n \geq 1}$ di funzioni di $\bar{\mathfrak{A}}$ tali che

$$\begin{cases} \|g_n\| \leq 2^{n-1}/3^n \\ \|g - g_1 - ... - g_n\| \leq (2/3)^n. \end{cases}$$

Infatti, supponiamo di aver costruito $g_1, ..., g_n$ per qualche $n \geq 1$. Possiamo allora trovare $g_{n+1} \in \bar{\mathfrak{A}}$ che assuma valori nell'intervallo $[-(2^n/3^{n+1}), 2^n/3^{n+1}]$ e che valga $-(2^n/3^{n+1})$ su $A_n = \{x \in X \,|\, g(x) - g_1(x) - ... - g_n(x) \leq -(2^n/3^{n+1})\}$ e $2^n/3^{n+1}$ su $B_n = \{x \in X \,|\, g(x) - g_1(x) - ... - g_n(x) \geq 2^n/3^{n+1}\}$. Abbiamo quindi

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} f_j$$

con convergenza uniforme su X e il teorema è dimostrato, in quanto le somme parziali della serie a secondo membro sono funzioni di $\bar{\mathfrak{A}}$. □

Ricordiamo che un sottoinsieme $\mathfrak{I}$ di un'algebra commutativa $\mathfrak{A}$ su un campo $\mathbb{K}$ si dice un *ideale* se è un sottospazio $\mathbb{K}$-lineare di $\mathfrak{A}$ e se

$$fg \in \mathfrak{I} \quad \forall f \in \mathfrak{A}, \forall g \in \mathfrak{I}.$$

Osserviamo che ogni ideale di $\mathfrak{A}$ è anche una sottoalgebra di $\mathfrak{A}$.

TEOREMA 1.2. *Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff e sia $\mathfrak{I}$ un ideale chiuso di $\mathcal{C}(X)$ che non coincida con $\mathcal{C}(X)$. Allora esiste un punto $x_0 \in X$ tale che $g(x_0) = 0$ per ogni $g \in \mathfrak{I}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{I}$ un ideale di $\mathcal{C}(X)$. Dimostriamo che, se, per ogni punto $x \in X$ vi è una $g \in \mathfrak{I}$ con $g(x) \neq 0$, allora $\mathfrak{I} = \mathcal{C}(X)$.
(*i*) *$\mathfrak{I}$ separa i punti di X.*

Infatti, fissati $x \neq y$ in X, possiamo trovare una funzione continua $f \in \mathcal{C}(X)$ tale che $f(x) = 1$ e $f(y) = 0$. Se $g \in \mathfrak{I}$ è una funzione con $g(x) \neq 0$, allora $fg \in \mathfrak{I}$ e $f(x)g(x) \neq 0 = f(y)g(y)$.
(*ii*) *$\mathfrak{I}$ contiene le costanti.*

Per ogni $x \in X$ sia ϕ_x una funzione di $\mathfrak{I}$ tale che $\phi_x(x) \neq 0$. Al variare di x in X, gli aperti

$$U_x = \{y \in X \mid \phi_x(y) \neq 0\}$$

formano un ricoprimento aperto di X. Poiché X è compatto, possiamo trovare $x_1, ..., x_N \in X$ tali che

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} U_{x_j}.$$

Allora

$$g = \phi_{x_1}^2 + ... + \phi_{x_N}^2 \in \mathfrak{I}$$

ed è positiva in tutti i punti di X. Per il punto (b) della dimostrazione del teorema precedente abbiamo $1/g \in \mathfrak{I}$ e quindi $1 = g \cdot (1/g) \in \mathfrak{I}$ dimostra che $\mathfrak{I}$ contiene le costanti. Per il teorema di Stone-Weierstrass è allora $\mathfrak{I} = \mathcal{C}(X)$. La dimostrazione è completa. □

Sia X uno spazio di Hausdorff compatto e indichiamo con $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ l'insieme di tutte le funzioni continue $f : X \to \mathbb{C}$. Osserviamo che $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ è uno spazio vettoriale complesso, che è uno spazio di Banach rispetto alla norma:

$$\mathcal{C}(X, \mathbb{C}) \ni f \to \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| \in \mathbb{R}.$$

Esso è un'algebra su $\mathbb{C}$ per il prodotto di funzioni e possiede una involuzione indotta dal coniugio sui numeri complessi:

$$\mathcal{C}(X, \mathbb{C}) \ni f \to \bar{f} \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$$

ove

$$\bar{f}(x) = \overline{f(x)} \quad \forall x \in X.$$

Dal teorema di Stone-Weierstrass per le funzioni continue a valori reali si ricava immediatamente:

TEOREMA 1.3. *Sia X uno spazio di Hausdorff compatto. Una sotto-$\mathbb{C}$-algebra $\mathfrak{A}$ di $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ che contenga le costanti, separi i punti di X e sia chiusa rispetto al coniugio è densa in $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.*

Abbiamo in particolare i teoremi:

TEOREMA 1.4 (Weierstrass). *Sia K un compatto di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni funzione continua f su K a valori reali su K è limite, nella topologia della convergenza uniforme su K, di una successione $\{p_n\}$ di polinomi di $\mathbb{R}[x_1,...,x_n]$.*

Ogni funzione continua f su K a valori complessi è limite uniforme su K di una successione $\{p_n\}$ di polinomi di $\mathbb{C}[x_1,...,x_n]$.

TEOREMA 1.5 (Weierstrass). *Sia $\mathcal{C}_{\#}(\mathbb{R}^n)$ l'insieme di tutte le funzioni continue su $\mathbb{R}^n$ periodiche di periodo 2π rispetto a tutte le variabili:*

$$\mathcal{C}_{\#}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(x+2\pi q) = f(x) \quad \forall q \in \mathbb{Z}^n.\}$$

Allora l'algebra $\mathcal{P}$ dei polinomi trigonometrici:

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\le m}} (a_\alpha \cos(\langle x,\alpha\rangle) + b_\alpha \sin(\langle x,\alpha\rangle)) \,\Big|\, m \in \mathbb{N},\, a_\alpha,\, b_\alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

è densa in $\mathcal{C}_{\#}(\mathbb{R}^n)$ per la topologia della convergenza uniforme su $\mathbb{R}^n$.

L'algebra complessa $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ dei polinomi trigonometrici a coefficienti complessi è densa, rispetto alla topologia della convergenza uniforme su $\mathbb{R}^n$, nell'algebra $\mathcal{C}_{\#}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ delle funzioni continue su $\mathbb{R}^n$, a valori complessi, periodiche di periodo 2π rispetto a ciascuna delle variabili.

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il teorema di Stone-Weierstrass nel caso in cui $X = T^n = \mathbb{R}^n/_{\mathbb{Z}^n}$ è il toro di dimensione n. □

2. La topologia compatta-aperta

Siano X e Y due spazi topologici, con topologie τ_X e τ_Y, rispettivamente. Indichiamo con $\mathcal{C}(X,Y)$ l'insieme di tutte le applicazioni continue $f : X \to Y$. Se $(A_1,...,A_n)$ è una n-upla di sottoinsiemi di X e $(Y_1,...,Y_n)$ una n-upla di sottoinsiemi di Y, poniamo

$$\mathcal{C}(X,A_1,...,A_n;Y,B_1,...,B_n) = \{f \in \mathcal{C}(X,Y) \,|\, f(A_j) \subset B_j \quad \forall j = 1,...,n.\}$$

Sia Φ una famiglia assegnata di sottoinsiemi di X. Indichiamo con $\mathcal{C}_\Phi(X,Y)$ l'insieme $\mathcal{C}(X,Y)$ con la topologia che ha come prebase degli aperti gli insiemi:

$$\mathcal{C}(X,A;Y,B) \quad \text{al variare di} \quad A \quad \text{in} \quad \Phi \quad \text{e di} \quad B \quad \text{in} \quad \tau_Y.$$

Se Φ è la famiglia $\mathcal{K}$ di tutti i compatti di X, la topologia di $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(X,Y)$ si dice la *topologia compatta–aperta* di $\mathcal{C}(X,Y)$. Poiché questa è la topologia

usata più di frequente sullo spazio delle funzioni continue, scriveremo d'ora in poi semplicemente $\mathcal{C}(X,Y)$ per indicare lo spazio topologico $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(X,Y)$.

TEOREMA 2.1. *Se Y è uno spazio di Hausdorff, allora $\mathcal{C}(X,Y)$ è di Hausdorff.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f,g \in \mathcal{C}(X,Y)$ e $f \neq g$, allora possiamo trovare un punto $x \in X$ tale che $f(x) \neq g(x)$. Se U e V sono intorni aperti disgiunti di x e y rispettivamente in Y, allora $\mathcal{C}(X,\{x\};Y,U)$ e $\mathcal{C}(X,\{x\};Y,V\}$ sono intorni aperti disgiunti di f e g rispettivamente in $\mathcal{C}(X,Y)$. □

TEOREMA 2.2. *Se X è compatto e Y metrizzabile, allora $\mathcal{C}(X,Y)$ è metrizzabile. Se d è una distanza che induce la topologia di Y, allora*

$$\boldsymbol{d}(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x)) \quad \textit{per} \quad f,g \in \mathcal{C}(X,Y)$$

è una distanza su $\mathcal{C}(X,Y)$ che induce la topologia di $\mathcal{C}(X,Y)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia K un compatto di X e B un aperto di Y. Sia $f \in \mathcal{C}(X,K;Y,B)$. L'insieme $f(K)$ è un compatto di Y contenuto in B. Fissata una distanza d su Y che induce la topologia di Y, abbiamo

$$\epsilon = d(f(K), Y \setminus B) > 0.$$

Allora la palla aperta

$$B(f,\epsilon) = \{g \in \mathcal{C}(X,Y) \,|\, \boldsymbol{d}(f,g) < \epsilon\}$$

è contenuta in $\mathcal{C}(X,K;Y,B)$. Questo dimostra che la topologia indotta su $\mathcal{C}(X,Y)$ dalla metrica $\boldsymbol{d}$ è più fine della topologia di $\mathcal{C}(X,Y)$.

Viceversa, fissata $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ ed $r > 0$, osserviamo che $f(X)$ è un sottoinsieme compatto di Y. Possiamo allora ricoprirlo con un numero finito di palle aperte B_j, $j = 1,...,N$ di raggio minore di $r/2$. Per ogni indice j sia C_j una palla aperta di raggio minore di $r/2$ contenente la chiusura di B_j. Allora:

$$\mathcal{C}(X, f^{-1}(\bar{B}_1),...,f^{-1}(\bar{B}_N);Y,C_1,...,C_N)$$

è un intorno aperto di f in $\mathcal{C}(X,Y)$ contenuto in:

$$B_{\boldsymbol{d}}(f,r) = \{g \in \mathcal{C}(X,Y) \,|\, \boldsymbol{d}(f,g) < r\}.$$

Quindi la topologia di $\mathcal{C}(X,Y)$ è più fine della topologia indotta dalla distanza $\boldsymbol{d}$ e quindi le due topologie coincidono. □

TEOREMA 2.3. *Siano X uno spazio topologico con topologia τ_X, e $\{Y_j$, con topologie τ_{Y_j}, una famiglia di spazi topologici non vuoti. Allora l'applicazione naturale*

$$\mathcal{C}(X, \prod_{j\in J} Y_j) \to \prod_{j\in J} \mathcal{C}(X,Y_j)$$

è un omeomorfismo.

TEOREMA 2.4. *Siano X, Y, Z tre spazi topologici. Data una applicazione continua*

$$\phi : X \to Z$$

l'applicazione

$$\phi^* : \mathcal{C}(Z, Y) \ni f \to f \circ \phi \in \mathcal{C}(X, Y)$$

è continua per le topologie compatte-aperte.

Se X è uno spazio di Hausdorff compatto, Z di Hausdorff, e ϕ surgettiva, allora ϕ^* è una immersione topologica.

DIMOSTRAZIONE. La ϕ^* è continua perché $\phi(K)$ è compatto in Z per ogni compatto K di X.

Supponiamo ora che X sia uno spazio di Hausdorff compatto, che Z sia uno spazio di Hausdorff e che ϕ sia surgettiva. Dimostriamo che $\phi^*|^{\phi^*(\mathcal{C}(Z,X))}_{\mathcal{C}(Z,X)}$ è aperta. Sia K un compatto di Z e U un aperto di Y. Allora

$$\begin{aligned}\phi^* \left(\mathcal{C}(Z, K; Y, U)\right) &= \{f \circ \phi \,|\, f \in \mathcal{C}(Z, Y),\ f(K) \subset U\} \\ &= \phi^*(\mathcal{C}(Z, Y)) \cap \{g \in \mathcal{C}(X, Y) \,|\, g(\phi^{-1}(K)) \subset U\}.\end{aligned}$$

Questo è un aperto di $\phi^* \left(\mathcal{C}(Z, Y)\right)$ perché $\phi^{-1}(K)$ è un compatto di X. □

TEOREMA 2.5. **a.** *Siano X, Y, Z tre spazi topologici. Se*

$$\phi : X \times Y \to Z$$

è continua per la topologia prodotto su $X \times Y$, allora la

$$X \ni x \to \check{\phi}(x) \in \mathcal{C}(Y, Z)$$

definita da

$$\check{\phi}(x)(y) = \phi(x, y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

è continua per la topologia compatta-aperta su $\mathcal{C}(Y, Z)$.

b. *Supponiamo inoltre che Y sia localmente compatto e di Hausdorff. Se*

$$\psi : X \to \mathcal{C}(Y, Z)$$

è una applicazione continua per la topologia compatta-aperta di $\mathcal{C}(X, Y)$, allora la

$$\hat{\psi} : X \times Y \to Z$$

definita da

$$\hat{\psi}(x, y) = \psi(x)(y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

è continua.

DIMOSTRAZIONE. **a.** Siano K un compatto di Y e U un aperto di Z. Allora

$$A = \check{\phi}^{-1} \left(\mathcal{C}(Y, K; Z, U)\right) = \{x \in X \,|\, \phi(x, y) \in U \quad \forall y \in K\}.$$

Sia $x_0 \in A$. Per ogni $y \in K$ possiamo trovare un intorno aperto W_y di x_0 e un intorno aperto V_y di y tali che

$$\phi(W_y \times V_y) \subset U.$$

Poiché K è compatto, possiamo trovare $y_1, ..., y_n \in K$ tali che

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j}.$$

Se $W = \bigcap_{j=1}^{n} W_{y_j}$, allora $x_0 \in W \subset A$ e quindi A contiene un intorno aperto di ogni suo punto e quindi è aperto. Ciò dimostra che $\check{\phi}$ è continua.

b. Sia $(x_0, y_0) \in X \times Y$ e sia U un intorno aperto di $(\hat{\psi}(x_0, y_0)$ in Z. Scegliamo un intorno compatto V di y_0 in Y tale che $V \subset \psi(x_0)^{-1}(U)$. Allora

$$W = \psi^{-1}(\mathcal{C}(Y, V; Z, U))$$

è aperto in X e $\hat{\psi}(W \times \operatorname{int} V) \subset U$. □

TEOREMA 2.6. *Siano X, Y, Z tre spazi topologici. Con le notazioni del teorema precedente:*

$$\alpha : \mathcal{C}(X \times Y, Z) \ni \phi \to \check{\phi} \in \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$$

è continua. Se Y è localmente compatto di Hausdorff, allora α è un omeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Siano K un compatto di X, F un compatto di Y e U un aperto di Z. Per il punto (a) del teorema precedente:

$$\alpha^{-1}(\mathcal{C}(X, K; \mathcal{C}(Y, Z), \mathcal{C}(Y, F; Z, U)) = \mathcal{C}(X \times Y, K \times F; Z, U).$$

Questa uguaglianza dimostra che α è continua. Dimostriamo ora che anche α^{-1} è continua, sotto le ulteriori ipotesi che X, Y siano di Hausdorff e Y sia localmente compatto.

Sia Q un compatto di $X \times Y$ e sia U un aperto di Z. Sia $f : X \times Y \to Z$ una applicazione continua tale che $f(Q) \subset U$. Per ogni punto $(x, y) \in Q$ possiamo trovare un intorno compatto $A_{x,y}$ di x in $\pi_X(Q)$ e un intorno compatto $B_{x,y}$ di y in $\pi_Y(Q)$ tali che

$$f(A_{x,y} \times B_{x,y}) \subset U.$$

Poiché Q è compatto, possiamo trovare $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) \in Q$ tali che

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{n} (A_{x_j,y_j} \times B_{x_j,y_j}).$$

Allora

$$\bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{C}(X \times Y, A_{x_j,y_j} \times B_{x_j,y_j}; Z, U)$$

è un intorno aperto di f in $\mathcal{C}(X \times Y, Z)$ contenuto in $\mathcal{C}(X \times Y, Q; Z, U)$ e quindi

$$\bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{C}(X, A_{x_j,y_j}; \mathcal{C}(Y, Z), \mathcal{C}(Y, B_{y_j,x_j})) \subset \alpha(\mathcal{C}(X \times Y, Q; Z, U))$$

è un intorno aperto di $\alpha(f)$ in $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$. Questo dimostra che α è aperta e quindi è un omeomorfismo. □

3. Il teorema di approssimazione nel caso non compatto

Sia X uno spazio topologico. L'insieme $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ delle funzioni reali continue su X è un'algebra reale e un reticolo con le operazioni definite nel paragrafo precedente. Su $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ considereremo la topologia compatta-aperta, che coincide con la topologia della convergenza uniforme sui compatti di X.

DEFINIZIONE 3.1. Uno spazio topologico X si dice *numerabile all'infinito* se contiene una successione $\{K_n\}$ di sottoinsiemi compatti tali che

eq:aabca

$$\begin{cases} K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1}) & \text{per ogni } n \in \mathbb{N}, \\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X. \end{cases} \tag{3.1}$$

Abbiamo:

TEOREMA 3.2. *Supponiamo che X sia uno spazio di Hausdorff numerabile all'infinito. Allora ogni sottoalgebra di $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ che contenga le costanti e separi i punti di X è densa in $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.*

Ogni sottoalgebra complessa di $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ che contenga le costanti, separi i punti di X e sia chiusa rispetto alla coniugazione, è densa in $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti X è unione numerabile di una successione di compatti $\{K_n\}$ con $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che $\mathfrak{A}$ sia una sottoalgebra di $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ che contenga le costanti e separi i punti di X. Allora $\mathfrak{A}|_{K_n} = \{g|_{K_n} \mid g \in \mathfrak{A}\}$ è una sottoalgebra di $\mathcal{C}(K_n, \mathbb{R})$ che contiene le costanti e separa i punti di K_n. Per il Teorema di Stone-Weierstrass, se $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, per ogni n possiamo trovare una funzione $f_n \in \mathfrak{A}$ tale che

$$\sup_{x\in K_n} |f(x) - f_n(x)| < 2^{-n}.$$

Allora $\{f_n\}$ è una successione di funzioni di $\mathfrak{A}$ che converge a f in $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Si ragiona in modo analogo nel caso di sottoalgebre complesse di $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. □

Parte 2

Gruppi Topologici

part:gruptop

CAPITOLO 4

Gruppi topologici

1. Definizioni principali

Dato un gruppo $\mathbf{G}$ e un elemento a di $\mathbf{G}$, indichiamo con R_a, L_a e $\mathrm{ad}(a)$, rispettivamente, le applicazioni bigettive di $\mathbf{G}$ in sè:

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_a :&\mathbf{G} \ni g \to g\,a \in \mathbf{G} && \text{(traslazione a destra)} \\ \mathrm{L}_a :&\mathbf{G} \ni g \to a\,g \in \mathbf{G} && \text{(traslazione a sinistra)} \\ \mathrm{ad}_a :&\mathbf{G} \ni g \to a\,g\,a^{-1} \in \mathbf{G} && \text{(aggiunta)} \end{aligned}$$

Se $a \in \mathbf{G}$ e A è un sottoinsieme di $\mathbf{G}$, scriveremo a volte aA invece di $\mathrm{L}_a(A)$ e Aa invece di $\mathrm{R}_a(A)$.

Si verifica facilmente che valgono le relazioni:

$$\begin{cases} \mathrm{R}_a \circ \mathrm{R}_b = \mathrm{R}_{ba} \\ \mathrm{L}_a \circ \mathrm{L}_b = \mathrm{L}_{ab} \\ \mathrm{L}_a \circ \mathrm{R}_b = \mathrm{R}_b \circ \mathrm{L}_a \qquad \forall a,\, b \in \mathbf{G}. \\ \mathrm{ad}_a = \mathrm{R}_{a^{-1}} \circ \mathrm{L}_a \\ \qquad\; = \mathrm{L}_a \circ \mathrm{R}_{a^{-1}} \end{cases}$$

LEMMA 1.1. *Le applicazioni*

$$\mathrm{L} : \mathbf{G} \ni a \to \mathrm{L}_a \in \mathfrak{S}(\mathbf{G})$$

$$\mathrm{R} : \mathbf{G} \ni a \to \mathrm{R}_{a^{-1}} \in \mathfrak{S}(\mathbf{G})$$

sono rappresentazioni fedeli del gruppo $\mathbf{G}$ *nel gruppo* $\mathfrak{S}(\mathbf{G})$ *delle applicazioni bigettive di* $\mathbf{G}$ *in sè.*

L'applicazione

$$\mathrm{ad} : \mathbf{G} \ni a \to \mathrm{ad}(a) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{G})$$

è una rappresentazione di $\mathbf{G}$ *nel gruppo dei suoi automorfismi* [1]*. Abbiamo:*

$$\ker \mathrm{ad} = \{a \in \mathbf{G} \mid ag = ga\ \forall g \in \mathbf{G}\}.$$

DEFINIZIONE 1.2. La rappresentazione $\mathrm{ad} : \mathbf{G} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{G})$ si dice la *rappresentazione aggiunta di* $\mathbf{G}$. Il suo nucleo è il *centro* $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$: esso è un sottogruppo abeliano normale di $\mathbf{G}$.

[1] Un automorfismo di $\mathbf{G}$ è un'applicazione bigettiva $\phi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ tale che $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ per ogni $a, b \in \mathbf{G}$.

DEFINIZIONE 1.3. Una topologia τ su un gruppo $\mathbf{G}$ si dice *compatibile con la struttura di gruppo* se l'applicazione

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g_1, g_2) \to g_1^{-1} g_2 \in \mathbf{G}$$

è continua (per la topologia prodotto su $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$).

Ciò equivale al fatto che siano continue le due applicazioni

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g_1, g_2) \to g_1 g_2 \in \mathbf{G} \quad \text{e} \quad \mathbf{G} \ni g \to g^{-1} \in \mathbf{G}.$$

Un *gruppo topologico* è un gruppo $\mathbf{G}$ su cui si sia fissata una topologia τ compatibile con la sua struttura di gruppo.

LEMMA 1.4. *Se $\mathbf{G}$ è un gruppo topologico, allora per ogni $a \in \mathbf{G}$ le applicazioni R_a, L_a, ad_a sono omeomorfismi di $\mathbf{G}$ in sè. Se $\{e\}$ è chiuso, allora il centro $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ è chiuso in $\mathbf{G}$. Se $\mathbf{H}$ è un sottogruppo di $\mathbf{G}$, esso è un gruppo topologico con la topologia di sottospazio indotta da $\mathbf{G}$.*

OSSERVAZIONE 1.5. La topologia discreta e la topologia indiscreta sono entrambe compatibili con la struttura di gruppo di un qualsiasi gruppo $\mathbf{G}$. Quindi ogni gruppo può essere considerato come gruppo topologico.

2. Il gruppo degli omeomorfismi di uno spazio topologico

L'insieme $\mathfrak{S}_\tau(X)$ di tutti gli omeomorfismi di uno spazio topologico $X = (X, \tau_X)$ in sè è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni. Consideriamo su $\mathfrak{S}_\tau(X)$ la topologia $\tilde{\tau}_X$ che ha come prebase[2] $\mathcal{U}$ degli aperti gli insiemi

$$\mathrm{U}(K, A) = \{\phi \in \mathfrak{S}_\tau(X) \,|\, \phi(K) \subset A\} \quad \text{e}$$
$$\mathrm{U}^{-1}(K, A) = \{\phi \in \mathfrak{S}_\tau(X) \,|\, \phi^{-1}(K) \subset A\}$$

al variare di K tra i compatti e di A tra gli aperti di X.

Si ottiene una prebase della stessa topologia di $\mathfrak{S}_\tau(X)$ se si fa variare A in una prebase degli aperti di X.

TEOREMA 2.1. *Se X è uno spazio di Hausdorff localmente compatto, allora $\mathfrak{S}_\tau(X)$, con la topologia $\tilde{\tau}_X$, è un gruppo topologico.*

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente la $\mathfrak{S}_\tau(X) \ni \phi \to \phi^{-1} \in \mathfrak{S}_\tau(X)$ è continua perché scambia tra loro gli aperti $\mathrm{U}(K, A)$ e $\mathrm{U}^{-1}(K, A)$ della prebase $\mathcal{U}$.

Dimostriamo che anche la

$$\lambda : \mathfrak{S}_\tau(X) \times \mathfrak{S}_\tau(X) \ni (\phi, \psi) \to \phi \circ \psi \in \mathfrak{S}_\tau(X)$$

è continua. Siano K un compatto e A un aperto di X e siano ϕ_0, ψ_0 due omeomorfismi in $\mathfrak{S}_\tau(X)$ tali che $\phi_0(\psi_0(K)) \subset A$.

[2]Data una famiglia $\mathcal{U}$ di sottoinsiemi di un insieme Y, è univocamente determinata la topologia $\tau(\mathcal{U})$ su Y, meno fine tra tutte quelle per cui tutti i sottoinsiemi di $\mathcal{U}$ siano aperti. Se su Y è assegnata una topologia τ, diciamo che la famiglia $\mathcal{U}$ di sottoinsiemi di Y è una *prebase* della τ se $\tau(\mathcal{U}) = \tau$.

Poiché $\psi_0(K)$ è un compatto di X contenuto in A, possiamo trovare un intorno aperto relativamente compatto V di $\psi_0(K)$ tale che

$$\psi_0(K) \subset V \subset \overline{V} \Subset A.$$

Allora, se $\psi \in \mathrm{U}(K, V)$ e $\phi \in \mathrm{U}(\overline{V}, A)$, abbiamo $\phi \circ \psi(K) \subset A$.

Quindi $\lambda^{-1}(\mathrm{U}(K, A)) \supset \mathrm{U}(\overline{V}, A) \times \mathrm{U}(K, V) \ni (\phi_0, \psi_0)$ è un intorno aperto di ogni suo punto e quindi un aperto.

In modo analogo, se $(\phi_0 \circ \psi_0)^{-1}(K) \subset A$, scegliamo un intorno aperto V del compatto $\phi_0^{-1}(K)$ con

$$\phi_0^{-1}(K) \subset V \subset \overline{V} \Subset A.$$

Allora $\lambda^{-1}(\mathrm{U}^{-1}(K, A)) \supset \mathrm{U}^{-1}(K, V) \times \mathrm{U}^{-1}(\overline{V}, A) \ni (\phi_0, \psi_0)$ dimostra che $\lambda^{-1}(\mathrm{U}^{-1}(K, A))$ è intorno di ogni suo punto e quindi aperto.

Pertanto λ è continua. □

Teorema 2.2. *Se $X = (X, \tau_X)$ è uno spazio di Hausdorff localmente compatto e localmente connesso, allora la topologia $\tilde{\tau}_X$ su $\mathfrak{S}_\tau(X)$ coincide con la topologia compatta-aperta.*

Dimostrazione. Sarà sufficiente dimostrare che, se K è un compatto ed A un aperto di X, l'insieme $\mathrm{U}^{-1}(K, A)$ è aperto nella topologia compatta-aperta di $\mathfrak{S}_\tau(X)$. Poiché per ipotesi gli aperti relativamente compatti di X formano una base di τ_X, possiamo limitarci a considerare il caso in cui A sia relativamente compatto in X. Possiamo inoltre supporre che K abbia parte interna non vuota e connessa. Infatti, fissato ϕ_0 in $\mathrm{U}^{-1}(K, A)$, possiamo trovare un ricoprimento finito $\{U_1, ..., U_n\}$ di K mediante aperti connessi e relativamente compatti con $\phi_0^{-1}(\overline{U}_j) \subset A$ per ogni $j = 1, ..., n$. Allora

$$\phi_0 \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{U}^{-1}(\overline{U}_j, A) \subset \mathrm{U}^{-1}(K, A)$$

e sarà allora sufficiente verificare che ciascuno degli insiemi $\mathrm{U}^{-1}(\overline{U}_j, A)$ sia aperto in $\mathfrak{S}_\tau(X)$ per la topologia compatta-aperta.

Supponiamo quindi che A sia un aperto relativamente compatto di X e che K sia un compatto di X con parte interna connessa.

Sia ϕ_0 un elemento di $\mathrm{U}^{-1}(K, A)$; fissiamo un punto $x_0 \in A$ la cui immagine $\phi_0(x_0)$ mediante ϕ_0 sia un punto interno di K, e consideriamo l'aperto

$$W = \mathrm{U}(\{x_0\}, \operatorname{int} K) \cap \mathrm{U}(\overline{A} \cap \complement A, \complement K)$$

della topologia compatta-aperta di $\mathfrak{S}_\tau(X)$. L'immagine della frontiera $bA = \overline{A} \cap \complement A$ dell'aperto A mediante un omeomorfismo ϕ di W non interseca il compatto K; quindi $\phi^{-1}(K) \subset A \cup \complement\overline{A}$.

Osserviamo che K è connesso perché ha parte interna connessa. Essendo connesso, $\phi^{-1}(K)$ è contenuto o in A o nel complementare $\complement\overline{A}$ della sua chiusura. Poiché $\phi \in \mathrm{U}(\{x_0\}, \operatorname{int} K)$, otteniamo $\phi^{-1}(x_0) \in \phi^{-1}(K) \cap A$ e dunque $\phi^{-1}(K) \subset A$. Ciò dimostra che $W \subset \mathrm{U}^{-1}(K, A)$. Abbiamo verificato

in questo modo che $\mathrm{U}^{-1}(K, A)$ è intorno di ogni suo punto e quindi aperto nella topologia compatta-aperta di $\mathfrak{S}_\tau(X)$. □

3. Proprietà generali dei gruppi topologici

TEOREMA 3.1. *La componente connessa $\mathbf{G}_e$ dell'identità in un gruppo topologico $\mathbf{G}$ è un sottogruppo chiuso normale di $\mathbf{G}$. Analogamente, la componente connessa per archi dell'identità è un sottogruppo normale di $\mathbf{G}$.*

DIMOSTRAZIONE. L'immagine di $\mathbf{G}_e \times \mathbf{G}_e$ mediante l'applicazione

$$\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (g, h) \to gh^{-1} \in \mathbf{G}$$

è un connesso di $\mathbf{G}$ che contiene e e dunque è contenuta in $\mathbf{G}_e$. Ciò dimostra che $\mathbf{G}_e$ è un sottogruppo di $\mathbf{G}$. Se $a \in \mathbf{G}$, allora l'immagine di $\mathbf{G}_e$ mediante $\mathrm{ad}(a)$ è un connesso di $\mathbf{G}$ che contiene e ed è dunque contenuta in $\mathbf{G}_e$. Ciò dimostra che $\mathbf{G}_e$ è un sottogruppo normale.

La seconda affermazione del teorema si dimostra in modo analogo, in quanto immagini continue di sottoinsiemi connessi per archi sono ancora connesse per archi. □

teoracb

TEOREMA 3.2. *Un sottogruppo aperto $\mathbf{H}$ di $\mathbf{G}$ è anche chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathbf{H}$ è un sottogruppo aperto di $\mathbf{G}$, allora il suo complementare $\complement\mathbf{H}$ è aperto in $\mathbf{G}$ perché unione di aperti:

$$\complement\mathbf{H} = \bigcup \{\mathrm{R}_g(\mathbf{H}) \,|\, g \notin \mathbf{H}\}.$$

□

DEFINIZIONE 3.3. Dato un sottogruppo $\mathbf{H}$ di un gruppo $\mathbf{G}$, indichiamo con $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ l'insieme delle sue classi laterali sinistre [3]:

$$\mathbf{G}/\mathbf{H} = \{g\mathbf{H} \,|\, g \in \mathbf{G}\}.$$

Esso è il quoziente di $\mathbf{G}$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in \mathbf{H}.$$

Se $\mathbf{G}$ è un gruppo topologico, consideriamo su $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ la topologia quoziente.

---

[3] Si possono in modo analogo considerare le classi laterali destre

$$\mathbf{H}\backslash\mathbf{G} = \{\mathbf{H}g \mid g \in \mathbf{G}\}.$$

Se $r : \mathbf{G} \ni x \to x^{-1} \in \mathbf{G}$ è l'inversione, abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xrightarrow{r} & \mathbf{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}\backslash\mathbf{G} & \xrightarrow[\hat{r}]{} & \mathbf{G}/\mathbf{H} \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono le proiezioni nel quoziente. La $\hat{r}$ è bigettiva e, nel caso in cui $\mathbf{G}$ sia un gruppo topologico, un omeomorfismo. Potremo quindi nella discussione seguente limitarci a considerare soltanto classi laterali sinistre, poiché i risultati ottenuti si applicheranno automaticamente anche alle classi laterali destre.

TEOREMA 3.4. *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo topologico e sia* $\mathbf{H}$ *un suo sottogruppo. Allora la proiezione nel quoziente*

$$\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G}/\mathbf{H}$$

è un'applicazione aperta.

DIMOSTRAZIONE. Se A è un aperto di $\mathbf{G}$, allora

$$\pi^{-1}\pi(A) = \bigcup \{\mathrm{R}_h(A) \,|\, h \in \mathbf{H}\}$$

è aperto perché unione di aperti. □

tm:gtace

TEOREMA 3.5. *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo topologico ed* $\mathbf{H}$ *un suo sottogruppo. La chiusura* $\overline{\mathbf{H}}$ *di* $\mathbf{H}$ *è ancora un sottogruppo di* $\mathbf{G}$*. Se* $\mathbf{H}$ *è normale, anche la sua chiusura* $\overline{\mathbf{H}}$ *è normale in* $\mathbf{G}$*.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con r l'applicazione $r : \mathbf{G} \ni g \to g^{-1} \in \mathbf{G}$ che ad ogni elemento di $\mathbf{G}$ fa corrispondere il suo inverso. La r è un omeomorfismo e quindi $r(\overline{A}) = \overline{r(A)}$ per ogni sottoinsieme A di $\mathbf{G}$. Se $\mathbf{H}$ è un sottogruppo di $\mathbf{G}$, $r(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ ed otteniamo:

$$r(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{r(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}}\,.$$

Analogamente, poiché per ogni $g \in \mathbf{G}$ le applicazioni L_g e R_g sono omeomorfismi, abbiamo $\mathrm{L}_g(\overline{A}) = \overline{\mathrm{L}_g(A)}$ e $\mathrm{R}_g(\overline{A}) = \overline{\mathrm{R}_g(A)}$ per ogni sottoinsieme A di $\mathbf{G}$. Se $g \in \mathbf{H}$, poiché $\mathrm{L}_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ e $\mathrm{R}_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$, avremo:

$$\mathrm{L}_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{\mathrm{L}_g(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}}\,, \qquad \mathrm{R}_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{\mathrm{R}_g(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}} \qquad \forall g \in \mathbf{H}.$$

Queste relazioni implicano che

$$\mathrm{R}_g(\mathbf{H}) \subset \overline{\mathbf{H}}\,, \qquad \mathrm{L}_g(\mathbf{H}) \subset \overline{\mathbf{H}} \qquad \forall g \in \overline{\mathbf{H}}\,,$$

e pertanto, passando alle chiusure,

$$\mathrm{L}_g(\overline{\mathbf{H}}) = \mathrm{R}_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{\mathbf{H}} \quad \forall g \in \overline{\mathbf{H}}.$$

Quindi $\overline{\mathbf{H}}$ è un sottogruppo di $\mathbf{G}$.

Poiché ad_g è, per ogni $g \in \mathbf{G}$ un omeomorfismo di $\mathbf{G}$ in sè, abbiamo $\mathrm{ad}_g(\overline{A}) = \overline{\mathrm{ad}_g(A)}$ per ogni sottoinsieme A di $\mathbf{G}$. Dire che $\mathbf{H}$ è un sottogruppo normale di $\mathbf{G}$ equivale al fatto che $\mathrm{ad}_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ per ogni $g \in \mathbf{G}$. Se quindi $\mathbf{H}$ è normale, risulta:

$$\mathrm{ad}_g(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{\mathrm{ad}_g(\mathbf{H})} = \overline{H} \quad \forall g \in \mathbf{G}$$

e questa uguaglianza dimostra che anche $\overline{\mathbf{H}}$ è normale. □

TEOREMA 3.6. *Se* $\mathbf{H}$ *è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico* $\mathbf{G}$*, allora* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ *è uno spazio regolare. In particolare,* $\mathbf{G}$ *è uno spazio regolare*

se e soltanto se è uno spazio [4] T_1 *e ciò equivale al fatto che* $\{e\}$ *sia chiuso in* $\mathbf{G}$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathbf{H}$ è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico $\mathbf{G}$, allora tutte le sue classi laterali sinistre sono chiusi di $\mathbf{G}$ e quindi $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ è uno spazio topologico T_1.

Sia F un chiuso di $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ e sia g un elemento di $\mathbf{G}$ tale che $\pi(g) \notin F$. Consideriamo l'applicazione continua

$$\lambda : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (a, b) \to a^{-1}b \in \mathbf{G}.$$

Poiché $\pi^{-1}(F)$ è un chiuso che non contiene $\lambda(e, g)$, possiamo trovare un intorno aperto U_e di e e un intorno aperto U_g di g in $\mathbf{G}$ tali che

$$g_1^{-1}g_2 \notin \pi^{-1}(F) \quad \text{per ogni} \quad g_1 \in U_e,\ g_2 \in U_g.$$

Consideriamo gli insiemi:

$$\tilde{U}_g = \pi^{-1}(\pi(U_g)) \text{ e } \tilde{V} = \bigcup\{\mathrm{R}_a(U_e) \,|\, a \in \pi^{-1}(F)\} = \bigcup\{\mathrm{L}_a(\pi^{-1}(F)) \,|\, a \in U_e\}.$$

Poiché la proiezione π è un'applicazione aperta, il primo è un aperto saturo che contiene g e il secondo un aperto saturo che contiene $\pi^{-1}(F)$. Dimostriamo che $\tilde{U}_g \cap \tilde{V} = \emptyset$. Se così non fosse, potremmo trovare $g_1 \in U_g$, $g_2 \in \mathbf{H}$, $g_3 \in U_e$, $g_4 \in \pi^{-1}(F)$ tali che $g_1 g_2 = g_3 g_4$.

Ma questa relazione implicherebbe che $g_3^{-1}g_1 = g_4 g_2^{-1} \in \pi^{-1}(F)$, contraddicendo la scelta di U_e e U_g.

Ciò dimostra che $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ soddisfa l'assioma T_3 e quindi è regolare. □

DEFINIZIONE 3.7. Un gruppo topologico $\mathbf{G}$ in cui $\{e\}$ sia un sottoinsieme chiuso si dice *separato*. Per il teorema precedente, questa condizione equivale al fatto che $\mathbf{G}$ sia uno spazio regolare.

Se $\mathbf{G}$ è un gruppo topologico, per il Teorema tm:gtace 3.5, la chiusura $\overline{\{e\}}$ di $\{e\}$ è un sottogruppo chiuso normale di $\mathbf{G}$ e quindi $\mathbf{G}/\overline{\{e\}}$, con la topologia quoziente, è un gruppo topologico separato. Esso si dice il *separato* di $\mathbf{G}$ e si indica con $\mathbf{G}_{\mathrm{sep}}$.

TEOREMA 3.8. *Se* $\mathbf{G}$ *è un gruppo topologico separato, allora la chiusura di un sottogruppo abeliano di* $\mathbf{G}$ *è ancora un sottogruppo abeliano di* $\mathbf{G}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathbf{A}$ un sottogruppo abeliano di $\mathbf{G}$. Fissato un elemento a di $\mathbf{G}$ l'applicazione $f_a : \mathbf{G} \ni x \to [a, x] = a\,x\,a^{-1}\,x^{-1} \in \mathbf{G}$ è continua. Inoltre, $f_a(\mathbf{A}) = \{e\}$, per ogni $a \in \mathbf{A}$, perché $\mathbf{A}$ è abeliano. Per l'ipotesi che $\{e\}$ sia chiuso, $f_a^{-1}(e)$ è un chiuso che contiene $\mathbf{A}$.Quindi $a\,x = x\,a$ per ogni $x \in \overline{\mathbf{A}}$ ed ogni $a \in \mathbf{A}$, ma questo equivale al fatto che $f_a(x) = e$ per ogni $a \in \overline{\mathbf{A}}$ ed ogni $x \in \mathbf{A}$.

[4] Uno spazio topologico X soddisfa l'assioma di separazione T_1 se tutti i suoi sottoinsiemi finiti sono chiusi; soddisfa l'assioma di separazione T_3 se dati un punto a di X e un chiuso A di X che non contiene a, esistono aperti disgiunti U e V con $a \in U$ e $A \subset V$; è regolare se soddisfa entrambi gli assiomi T_1 e T_3.

Quindi, poiché $\{e\}$ è un chiuso di $\mathbf{G}$, per ogni $a \in \overline{\mathbf{A}}$, l'insieme $f_a^{-1}(e)$ è un chiuso che contiene $\mathbf{A}$: perciò $f_a^{-1}(e) \supset \overline{\mathbf{A}}$ per ogni $a \in \overline{\mathbf{A}}$, cioè $\overline{\mathbf{A}}$ è abeliano. □

Più in generale, abbiamo:

PROPOSIZIONE 3.9. *Se $\mathbf{G}$ è un gruppo separato ed E un sottoinsieme di $\mathbf{G}$, il centralizzatore di E in $\mathbf{G}$:*

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(E) = \{g \in \mathbf{G} \mid \mathrm{ad}_g(x) = x \ \forall x \in E\}$$

è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{G}$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, con la notazione del teorema precedente:

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(E) = \bigcap_{x \in E} f_x^{-1}(e)$$

è chiuso perché intersezione di chiusi. □

PROPOSIZIONE 3.10. *Se $\mathbf{H}$ è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico $\mathbf{G}$, allora in normalizzatore di $\mathbf{H}$ in $\mathbf{G}$*

$$\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \{g \in \mathbf{G} \mid \mathrm{ad}_g(\mathbf{H}) = \mathbf{H}\}$$

è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{G}$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $g \in \mathbf{G}$ l'applicazione $\lambda_g : \mathbf{G} \ni x \to xgx^{-1} \in \mathbf{G}$ è continua. Quindi $\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \bigcap_{h \in \mathbf{H}} \lambda_h^{-1}(\mathbf{H})$ è chiuso perché intersezione di chiusi. □

PROPOSIZIONE 3.11. *Sia $\mathbf{H}$ un sottogruppo di un gruppo topologico $\mathbf{G}$. Allora:*

(1) *$\mathbf{H}$ è chiuso se e soltanto se è localmente chiuso in un punto;*
(2) *$\mathbf{H}$ è aperto se e soltanto se contiene un punto interno;*
(3) *$\mathbf{H}$ è discreto se e soltanto se ha un punto isolato.*

Un sottogruppo discreto di un gruppo separato è chiuso.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che $\mathbf{H}$ è localmente chiuso in un suo punto h se esiste un intorno aperto U di h in $\mathbf{G}$ tale che $\mathbf{H} \cap U$ sia chiuso in U, cioè $\overline{\mathbf{H}} \cap U = \mathbf{H} \cap U$. Poiché le traslazioni a destra e a sinistra sono omeomorfismi, se $\mathbf{H}$ è localmente chiuso in h è anche localmente chiuso in $e = R_{h^{-1}}(h)$. Possiamo quindi trovare un intorno aperto U di e tale che $\mathbf{H} \cap U$ sia chiuso in U. Poiché anche $\mathbf{H} \cap U \cap U^{-1}$ è chiuso in $U \cap U^{-1}$, non è restrittivo supporre che $U = U^{-1}$. Sia ora $x \in \overline{\mathbf{H}}$. Allora $x\,U \cap \mathbf{H}$ non è vuoto: possiamo quindi fissare un elemento $y \in \mathbf{H}$ e un $g \in U$ tali che $xg = y$. Osserviamo che

$$y^{-1}x = L_{y^{-1}}(x) \in L_{y^{-1}}(\overline{\mathbf{H}}) = \overline{L_{y^{-1}}(\mathbf{H})} = \overline{\mathbf{H}}$$

e quindi $y^{-1}x = g^{-1} \in \overline{\mathbf{H}} \cap U = \mathbf{H} \cap U$ implica che $x = y\,g^{-1} \in \mathbf{H}$. Abbiamo così dimostrato che $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ è chiuso.

Poiché ogni chiuso è localmente chiuso, la (1) è completamente dimostrata. La (2) e la (3) sono immediate e l'osservazione finale segue dalla (1).

TEOREMA 3.12. *Ogni intorno aperto dell'identità di un gruppo connesso è un insieme di generatori del gruppo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia U un intorno aperto dell'identità del gruppo topologico connesso $\mathbf{G}$. Poniamo $U^{-1} = \{g^{-1} \,|\, g \in U\}$. Allora anche $V = U \cap U^{-1}$ è un intorno aperto dell'identità di $\mathbf{G}$. Sia

$$V^n = \{g_1 ... g_n \,|\, g_1, ..., g_n \in V\}.$$

Allora

$$\mathbf{H} = \cup_{n=1}^{\infty} V^n$$

è un sottogruppo aperto di $\mathbf{G}$. Esso è anche chiuso per il Teorema 3.2 e quindi coincide con $\mathbf{G}$ perché $\mathbf{G}$ è connesso. □

TEOREMA 3.13. *Un gruppo topologico separato e localmente compatto è paracompatto, e quindi, in particolare, uno spazio topologico normale*[5].

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico separato localmente compatto. Fissiamo un intorno aperto V di e con $V = V^{-1} = \{g^{-1} \,|\, g \in V\}$ e $\overline{V}$ compatto. Per ogni n, sia $\overline{V}^n = \{g_1 \cdots g_n \,|\, g_1, \ldots, g_n \in \overline{V}\}$. Esso è compatto perché immagine del compatto $\underbrace{\overline{V} \times \cdots \times \overline{V}}_{n \text{ volte}}$ mediante l'applicazione continua $(g_1, \ldots, g_n) \longrightarrow g_1 \cdots g_n$.

Con $V^n = \{g_1 \cdots g_n \,|\, g_1, \ldots, g_n \in V\}$, osserviamo poi che $\overline{V} \subset V^2$: infatti per ogni $g \in \overline{V}$ è $gV \cap V \neq \emptyset$; otteniamo perciò $gg_1 = g_2$ con $g_1, g_2 \in V$ e quindi $g = g_1^{-1} g_2 \in V^2$ perché $V^{-1} = V$.

Da questa relazione otteniamo che

$$\mathbf{G}_0 = \bigcup_n \overline{V}^n = \bigcup_n V^n .$$

Quindi $\mathbf{G}_0$ è un sottogruppo aperto, e perciò anche chiuso, di $\mathbf{G}$, ed è paracompatto perché localmente compatto e unione numerabile di compatti. Ne segue che $\mathbf{G}$, unione disgiunta delle classi laterali $g\mathbf{G}_0$ ($g \in \mathbf{G}$) di $\mathbf{G}_0$, è paracompatto. □

COROLLARIO 3.14. *Se $\mathbf{G}$ è un gruppo topologico separato e localmente compatto ed $\mathbf{H}$ un suo sottogruppo chiuso, allora lo spazio omogeneo $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ è separato, localmente compatto, paracompatto, ed è quindi uno spazio topologico normale.*

DIMOSTRAZIONE. Lo spazio omogeneo $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ è regolare perché $\mathbf{H}$ è compatto; inoltre è localmente compatto perché immagine di uno spazio localmente compatto mediante un'applicazione aperta. Infine, con la notazione introdotta nella dimostrazione del teorema precedente, osserviamo che le orbite $\mathbf{G}_0 \cdot p$ ($p \in \mathbf{G}/\mathbf{H}$) di $\mathbf{G}_0$ in $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ sono aperte e paracompatte (i

[5]Ricordiamo che uno spazio topologico X è *paracompatto* se è di Hausdorff ed ogni suo ricoprimento aperto ammette un raffinamento chiuso localmente finito. Uno spazio di Hausdorff localmente compatto è paracompatto se e soltanto se è unione disgiunta di sottospazi che sono ciascuno un'unione numerabile di compatti. Lo spazio topologico X si dice *normale* se è di Hausdorff e chiusi disgiunti hanno intorni aperti disgiunti. Ogni spazio topologico paracompatto è normale.

sottoinsiemi $\overline{V}^n \cdot p$ formano una successione di compatti la cui unione è l'orbita $\mathbf{G}_0 \cdot p$) e quindi $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ è paracompatto perché unione disgiunta di spazi paracompatti. □

4. Omomorfismi di gruppi topologici

TEOREMA 4.1. *Sia $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ un omomorfismo di gruppi tra due gruppi topologici $\mathbf{G}_1$ e $\mathbf{G}_2$. Condizione necessaria e sufficiente affinché ϕ sia continua è che essa sia continua nell'identità di $\mathbf{G}_1$.*

DIMOSTRAZIONE. La condizione è ovviamente necessaria. Dimostriamo la sufficienza. Sia $g \in \mathbf{G}_1$ e sia V un intorno aperto di $\phi(g)$ in $\mathbf{G}_2$. Allora $(\phi(g))^{-1}V$ è un intorno aperto dell'identità e_2 di $\mathbf{G}_2$ e possiamo quindi trovare un intorno aperto U dell'identità e_1 di $\mathbf{G}_1$ tale che $\phi(U) \subset V$.

Allora gU è un intorno aperto di g in $\mathbf{G}_1$ e risulta

$$\phi(gh) = \phi(g)\phi(h) \in \phi(g)\left((\phi(g))^{-1}V\right) = V \quad \forall h \in U\,,$$

onde $\phi(gU) \subset V$. Quindi ϕ è continua in ogni punto $g \in \mathbf{G}_1$ e perciò continua. □

DEFINIZIONE 4.2. Un *omomorfismo di gruppi topologici* è un'applicazione continua $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ che sia anche un omomorfismo di gruppi. Se la ϕ è inoltre un omeomorfismo di spazi topologici essa è anche un isomorfismo di gruppi e si dice un *isomorfismo topologico*. Un omomorfismo di gruppi topologici iniettivo (risp. surgettivo) si dice un *monomorfismo topologico* (risp. *epimorfismo topologico*).

Indichiamo con $\mathrm{Aut}_c(\mathbf{G})$ l'insieme degli isomorfismi topologici di un gruppo topologico $\mathbf{G}$ in sè.

Si verifica facilmente che $\mathrm{Aut}_c(\mathbf{G})$ è un gruppo per l'operazione di composizione di applicazioni. Se $\mathbf{G}$ è localmente compatto, $\mathrm{Aut}_c(\mathbf{G})$ è un gruppo topologico con la topologia $\tilde{\tau}_{\mathbf{G}}$ definita nel §2; questa coincide con la topologia compatta-aperta se $\mathbf{G}$ è anche localmente compatto. □

TEOREMA 4.3. *Un epimorfismo topologico $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ è un'applicazione aperta se e soltanto se il suo quoziente iniettivo*

$$\hat{\phi} : \mathbf{G}_1/_{\ker \phi} \to \mathbf{G}_2$$

è un isomorfismo topologico.

DIMOSTRAZIONE. Ciò è conseguenza del fatto che la proiezione nel quoziente $\mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_1/_{\ker \phi}$ è un'applicazione aperta. □

TEOREMA 4.4. *Se $\mathbf{G}_1$ è un gruppo topologico compatto e $\mathbf{G}_2$ un gruppo topologico separato, ogni epimorfismo topologico $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ è un'applicazione aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ un epimorfismo topologico. Poiché $\mathbf{G}_2$ è separato, $\ker \phi$ è un sottogruppo normale chiuso di $\mathbf{G}_1$. Ne segue, passando al quoziente iniettivo, che l'applicazione

$$\hat{\phi} : \mathbf{G}_1/_{\ker \phi} \to \mathbf{G}_2$$

è continua e bigettiva tra spazi compatti di Hausdorff e dunque un omeomorfismo. La tesi segue allora dal teorema precedente. □

ESEMPIO 4.5. Sia $\mathbb{H}$ il corpo dei quaternioni, che possiamo identificare alla sottoalgebra dell'algebra delle matrici 2×2 a coefficienti complessi formata dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Le matrici di $\mathbb{H}$ con determinante 1 formano un gruppo moltiplicativo, che è un gruppo topologico per la topologia definita dall'identificazione standard con la sfera $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Esso è un gruppo topologico separato e compatto, che si indica con $\mathbf{SU}^*(2)$. Il suo sottogruppo $\{I, -I\}$ è un sottogruppo chiuso normale e il gruppo quoziente $\mathbf{SU}^*(2)/_{\{I,-I\}}$ è omeomorfo a $\mathbb{RP}^3$.

TEOREMA 4.6. *Se $\mathbf{H}$ è un sottogruppo normale di un gruppo topologico $\mathbf{G}$, il gruppo $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ è un gruppo topologico per la topologia quoziente e l'omomorfismo $\mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ è un omomorfismo di gruppi topologici. Inoltre:*

1. *$\mathbf{G}/\mathbf{H}$ è separato se e soltanto se $\mathbf{H}$ è chiuso in $\mathbf{G}$;*
2. *$\mathbf{G}/\mathbf{H}$ è discreto se e soltanto se $\mathbf{H}$ è aperto in $\mathbf{G}$.*
3. *Se $\mathbf{H}$ è discreto, allora la proiezione nel quoziente $\mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{H}$ è un omeomorfismo locale.*

5. Caratteri

Un *carattere* di un gruppo topologico $\mathbf{G}$ è un omomorfismo continuo $\chi : \mathbf{G} \to \mathbf{S}^1$ di $\mathbf{G}$ nel gruppo moltiplicativo $\mathbf{S}^1$ dei numeri complessi di modulo 1. Indichiamo con $\mathbf{G}'$ l'insieme dei caratteri di $\mathbf{G}$. Esso è un gruppo abeliano rispetto all'operazione di moltiplicazione di funzioni: la funzione $\chi_{\mathbf{G}}$, costantemente uguale a 1 su $\mathbf{G}$, è l'identità di $\mathbf{G}'$.

Si verifica facilmente che vale il:

TEOREMA 5.1. *Se $\mathbf{G}$ è un gruppo topologico, anche il gruppo $\mathbf{G}'$ dei suoi caratteri è un gruppo topologico per la topologia compatta-aperta. Se $\mathbf{G}$ è separato, anche $\mathbf{G}'$ è separato.*

TEOREMA 5.2. *Sia $\mathbf{G}$ un gruppo topologico localmente compatto e separato. Allora anche $\mathbf{G}'$ è localmente compatto e separato. Inoltre, se $\mathbf{G}$ è a base numerabile, anche $\mathbf{G}'$ è a base numerabile. Se $\mathbf{G}$ è compatto e separato, allora $\mathbf{G}'$ è discreto. Se $\mathbf{G}$ è discreto, allora $\mathbf{G}'$ è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathbf{G}$ è compatto, il carattere costante $\chi_{\mathbf{G}}$ è l'unico elemento di $U(\mathbf{G}, \mathbf{S}_\epsilon) = \{\chi \in \mathbf{G}' \mid \operatorname{Arg}(\chi(g)) \in]-\epsilon, \epsilon[\}$ se $\epsilon < \pi/2$. Quindi $\{\chi_{\mathbf{G}}\}$ è aperto e $\mathbf{G}'$ ha la topologia discreta.

Se $\mathbf{G}$ è discreto, allora l'applicazione $\mathbf{G}' \ni \chi \to (\chi(g))_{g\in\mathbf{G}} \in \left[\mathbf{S}^1\right]^{\mathbf{G}}$ è un'immersione di $\mathbf{G}'$ in un sottospazio chiuso di $\left[\mathbf{S}^1\right]^{\mathbf{G}}$, e quindi $\mathbf{G}'$ è compatto in quanto sottospazio chiuso di uno spazio compatto. □

CAPITOLO 5

Esponenziale di matrici

gldue

1. Spazi di matrici

Sia $\mathbb{K}$ un campo ed indichiamo con $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{K})$ lo spazio vettoriale di dimensione mn su $\mathbb{K}$ delle matrici a m righe ed n colonne a coefficienti in $\mathbb{K}$.

DEFINIZIONE 1.1. Sia $A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$ una matrice $m \times n$ complessa:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}).$$

La trasposta della sua coniugata

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \dots & \bar{a}_{m1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \dots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(n \times m, \mathbb{C}).$$

si dice l'*aggiunta* della A.

Date due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ in $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$ poniamo

$$(A|B) = \operatorname{trac}(B^* A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \bar{b}_{ij} a_{ij}.$$

L'applicazione

$$\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}) \times \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}) \ni (A, B) \to (A|B) \in \mathbb{C}$$

definisce su $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$ un prodotto scalare Hermitiano. Indichiamo con

$$|A| = \sqrt{(A|A)} \quad \text{per} \quad A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$$

la norma associata e consideriamo su $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$ la relativa distanza:

$$d(A, B) = |A - B| \text{ se } A, B \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}).$$

TEOREMA 1.2. *L'applicazione* $\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}) \ni A \to A^* \in \mathfrak{M}(n \times m, \mathbb{C})$ *è un'isometria anti-*$\mathbb{C}$*-lineare.*

L'applicazione

$$\mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C}) \ni A \to {}^t A \in \mathfrak{M}(n \times m, \mathbb{C})$$

è un'isometria $\mathbb{C}$-lineare.

La moltiplicazione righe per colonne definisce un'applicazione continua

$$\mathfrak{M}(m\times n,\mathbb{C})\times\mathfrak{M}(n\times k,\mathbb{C})\ni(A,B)\to AB\in\mathfrak{M}(m\times k,\mathbb{C})$$

e si ha inoltre

$$|AB|\le|A|\cdot|B|\quad\forall A\in\mathfrak{M}(m\times n,\mathbb{C}),\ B\in\mathfrak{M}(n\times k,\mathbb{C}).$$

DIMOSTRAZIONE. La verifica delle prime due affermazioni è immediata. Per verificare l'ultima, scriviamo

$$A=\begin{pmatrix}{}^tA_1\\ \vdots\\ {}^tA_m\end{pmatrix}\quad\text{e}\quad B=(B^1,...,B^k)\quad\text{con}\quad A_1,...,A_m,B^1,...,B^k\in\mathbb{C}^n.$$

Allora

$$|AB|^2=\sum_{i,j}|(A_i|B^j)_{\mathbb{C}^n}|^2\le\sum_i|A_i|^2\sum_j|B^j|^2=|A|^2\cdot|B|^2,$$

ove abbiamo indicato con $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{C}^n}$ e con $|\cdot|$ rispettivamente il prodotto scalare Hermitiano canonico di $\mathbb{C}^n$ e la norma ad esso associata. Da questa diseguaglianza segue la tesi. □

lm:lemmabab

LEMMA 1.3. *Siano m,n interi positivi. Data una matrice complessa $A\in\mathfrak{M}(m\times n,\mathbb{C})$ poniamo*

$$\|A\|=\sup\{|Av|\ ;\ v\in\mathbb{C}^n,\ |v|=1\}\ .$$

Allora

$$\mathfrak{M}(m\times n,\mathbb{C})\ni A\to\|A\|\in\mathbf{R}$$

è una norma equivalente a $|\cdot|$.

Inoltre, se k è un altro intero positivo, vale la diseguaglianza:

$$(*)\qquad\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|\qquad\forall A\in\mathfrak{M}(m\times n,\mathbb{C}),\quad B\in\mathfrak{M}(n\times k,\mathbb{C}).$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché tutte le norme definite su uno spazio vettoriale di dimensione finita sono equivalenti, basta dimostrare che $\|\cdot\|$ è una norma su $\mathfrak{M}(m\times n,\mathbb{C})$. A questo scopo osserviamo innanzi tutto che, per il teorema di Weierstrass, poiché l'applicazione $S^{2n-1}\ni v\to|Av|\in\mathbf{R}$ è continua e $S^{2n-1}=\{v\in\mathbb{C}^n\,|\,|v|=1\}$ è compatto, per ogni $A\in\mathfrak{M}(m\times n,\mathbb{C})$ possiamo trovare un vettore $v_A\in S^{2n-1}$ tale che

$$|Av_A|=\|A\|.$$

Da questo si deduce che $\|\cdot\|$ è ben definita e si ricava immediatamente che

$$\|A\|>0\Leftrightarrow 0\ne A\in\mathfrak{M}(m\times n,\mathbb{C}),\quad\text{e}\quad\|0\|=0\,.$$

È ovvio che

$$\|\lambda A\|=|\lambda|\,\|A\|\quad\forall\lambda\in\mathbb{C},\ \forall A\in\mathfrak{M}(m\times n,\mathbb{C}).$$

Per concludere, dimostriamo la subadditività. Fissate $A, B \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$ abbiamo, per un vettore $v_{A+B} \in S^{2n-1}$:

$$\|A + B\| = |(A + B)v_{A+B}| \leq |Av_{A+B}| + |Bv_{A+B}| \leq \|A\| + \|B\|\,.$$

Siano $A \in \mathfrak{M}(m \times n, \mathbb{C})$, $B \in \mathfrak{M}(n \times k, \mathbb{C})$. Se $B = 0$, la $(*)$ è banalmente vera. Se $B \neq 0$, allora possiamo trovare un vettore $w_{AB} \in \mathbb{C}^k$ tale che $|w_{AB}| = 1$, $Bw_{AB} \neq 0$ e $\|AB\| = |(AB)w_{AB}|$. Risulta allora:

$$\|AB\| = |(AB)(w_{AB})| = \left|A\left(\frac{B(w_{AB})}{|B(w_{AB})|}\right)\right| \cdot |B(w_{AB})| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

□

Definizione 1.4. Fissato un campo $\mathbb{K}$, nel seguito useremo le notazioni:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) &= \mathfrak{M}(n \times n, \mathbb{K}) \\
\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) &= \{A \in \mathfrak{M}(n \times n, \mathbb{K}) \,|\, \mathrm{trac}(A) = 0\} \\
\mathbf{GL}(n, \mathbb{K}) &= \{a \in \mathfrak{M}(n \times n, \mathbb{K}) \mid \det a \neq 0\} \quad \text{(gruppo linerare su } \mathbb{K}) \\
\mathbf{SL}(n, \mathbb{K}) &= \{a \in \mathfrak{M}(n \times n, \mathbb{K}) \mid \det a = 1\} \quad \text{(gruppo speciale linerare su } \mathbb{K})
\end{aligned}$$

Se $\mathbb{K}$ è uno dei campi $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, su ciascuno di questi insiemi consideriamo la topologia di sottospazio di $\mathfrak{M}(n \times n, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$.

Teorema 1.5. *Con le operazioni di prodotto righe per colonne di matrici,* $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ *e* $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ *sono gruppi topologici.*

Dimostrazione. Per il Lemma 1.3, il prodotto

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \times \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \ni (a, b) \to ab \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

è un'applicazione continua.

La topologia di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ coincide con la topologia Euclidea di $\mathbb{C}^{n^2}$. In particolare l'applicazione determinante

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \ni A \to \det(A) \in \mathbb{C}$$

è continua. Indichiamo con $M^i_j(A)$ il determinante della matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta sopprimendo dalla matrice $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ la j-esima riga e la i-esima colonna. Le applicazioni

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \ni A \to M^i_j(A) \in \mathbb{C},\ 1 \leq i, j \leq n$$

sono continue. È allora continua l'applicazione

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \ni a \to (-1)^{i+j}(\det a)^{-1} M^i_j(a) \in \mathbb{C}$$

che associa a una matrice invertibile a il coefficiente sulla riga i-esima e la colonna j-esima della sua inversa a^{-1} e quindi è continua l'applicazione

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \ni a \to a^{-1} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Questo dimostra che $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ è un gruppo topologico.

I gruppi $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ sono gruppi topologici perché sottogruppi di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. □

2. La decomposizione di Wedderburn

Nella proposizione che segue descriviamo la *decomposizione di Wedderburn* di un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo di caratteristica zero.

TEOREMA 2.1 (Decomposizione di Wedderburn). *Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica zero. Per ogni $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ sono univocamente determinate una $S \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ semisemplice* [1] *e una $N \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ nilpotente tali che*

eq:gldba
$$A = S + N \qquad e \qquad [S,N] = SN - NS = 0\,. \tag{2.1}$$

Gli endomorfismi S ed N sono polinomi di A.

Se $a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$, sono univocamente determinate una matrice semisemplice $s \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ e una matrice unipotente [2] *$\nu \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ tali che*

eq:gldbb
$$a = s\nu = \nu s. \tag{2.2}$$

Risultano $s, \nu \in \mathbb{K}[a]$.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $\mathfrak{n}$ l'ideale di $\mathbb{K}[A]$ generato dai suoi elementi nilpotenti. Se $\mu_A(\lambda) = p_1^{k_1}(\lambda)\cdots p_m^{k_m}(\lambda)$ è la decomposizione del polinomio minimo $\mu_A(\lambda)$ di A in prodotto di potenze di primi distinti, indichiamo con $f(\lambda) = p_1(\lambda)\cdots p_m(\lambda)$ il prodotto dei primi distinti contenuti in $\mu_A(\lambda)$. Allora $\mathfrak{n}$ è l'ideale principale generato da $f(A) = p_1(A)\cdots p_m(A)$.

Dimostriamo per ricorrenza che per ogni intero positivo k è possibile determinare un $A_k \in \mathbb{K}[A]$ tale che

$$(*) \qquad A_k = A - N_k \quad \text{con} \quad N_k \in \mathfrak{n}\,, \quad f(A_k) \in \mathfrak{n}^k$$

Per $k = 1$ possiamo scegliere $A_1 = A$. Supponiamo di aver ottenuto $A_1, \ldots, A_k$ che soddisfino $(*)$, e cerchiamo A_{k+1} nella forma $A_{k+1} = A_k + T$, con $T \in \mathfrak{n}^k$. Utilizzando la formula di Taylor otteniamo:

$$\begin{aligned} f(A_{k+1}) &= f(A_k + T) \\ &= f(A_k) + f'(A_k)\,T \,+\, T_1 \end{aligned}$$

con $T_1 \in \mathfrak{n}^{2k} \subset \mathfrak{n}^{k+1}$ in quanto $f(A_{k+1}) - f(A_k) - f'(A_k)\,T = T^2 B$ per qualche matrice $B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$. Osserviamo ora che, poiché A_k differisce da A per una matrice nilpotente di $\mathbb{K}[A]$, il suo polinomio minimo $\mu_{A_k}(\lambda)$ ha gli stessi fattori primi di $\mu_A(\lambda)$. Poiché $f(\lambda)$ contiene solo fattori primi semplici,

[1] Un endomorfismo S si dice semisemplice, o completamente decomponibile, se ogni sottospazio S-invariante ammette un complementare S-invariante. Un endomorfismo S è semisemplice se e soltanto se il suo polinomio minimo μ_S è prodotto di fattori primi semplici. Da questa caratterizzazione segue che un endomorfismo $S \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ è semisemplice se e soltanto se è semisemplice come elemento di $\mathfrak{gl}(n,\hat{\mathbb{K}})$ per una qualsiasi estensione $\hat{\mathbb{K}}$ di $\mathbb{K}$, ed in particolare se è diagonalizzabile in un corpo di spezzamento del suo polinomio minimo. Da ciò segue che la somma di due endomorfismi semisemplici che commutano tra loro è ancora semisemplice.

[2] Una matrice ν si dice unipotente se la matrice $\nu - e$ è nilpotente.

$f(\lambda)$ ed $f'(\lambda)$, e quindi anche $\mu_{A_k}(\lambda)$ ed $f'(\lambda)$, sono primi tra loro. Quindi $f'(A_k)$ è invertibile. Otteniamo perciò la $(*)$ per A_{k+1} scegliendo

$$T = -\left(f'(A_k)\right)^{-1} f(A_k) \in \mathfrak{n}^k\,.$$

Poiché $\mathfrak{n}^n = 0$, otteniamo la decomposizione cercata con $S = A_n$, $N = N_n$. Infatti $f(A_n) \in \mathfrak{n}^n = \{0\}$ ci dice che il polinomio minimo μ_{A_n} di A_n è proprio $f(\lambda)$ e quindi A_n è semisemplice perché il suo polinomio minimo contiene solo fattori primi semplici.

Dimostriamo ora l'unicità. Se S', N' sono due endomorfismi, il primo semisemplice e il secondo nilpotente, con $A = S' + N'$ ed $S'N' = N'S'$, osserviamo innanzi tutto che ciascuno di essi commuta con A e quindi anche con gli endomorfismi S, $N \in \mathbb{K}[A]$ trovati in precedenza. Poiché S ed S' sono due endomorfismi semisemplici che commutano tra loro anche $S - S'$ è semisemplice, e poiché N ed N' sono due endomorfismi nilpotenti che commutano tra loro anche $N - N'$ è nilpotente. Quindi $S - S' = N' - N$ è al tempo stesso semisemplice e nilpotente e quindi è nullo. Ciò dimostra l'unicità della decomposizione di Wedderburn.

Sia ora $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$. Esso ha una decomposizione di Wedderburn $a = s + N$, con $s, N \in \mathbb{K}[a]$, per la prima parte della dimostrazione. Basterà allora osservare che la parte semisemplice s di a è anch'essa invertibile e $s^{-1} \in \mathbb{K}[a]$. Quindi $\nu = I + s^{-1}N$ è un elemento unipotente di $\mathbb{K}[a]$ per cui vale la $a = s\nu = \nu s$. L'unicità della decomposizione segue dal fatto che, se vale la (2.2), allora $a = s + s(\nu - I)$ è la decomposizione di Wedderburn (2.1) di a. □

Definizione 2.2. Se $A = S + N$ è una decomposizione di Wedderburn di $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, l' endomorfismo semisemplice S si dice *parte semisemplice* di A e l'endomorfismo nilpotente N *parte nilpotente* di A.

Se $a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$, ed $a = s\nu = S + N$ con $s, S \in \mathbb{K}[a]$ semisemplici, $N \in \mathbb{K}[a]$ nilpotente e $\nu \in \mathbb{K}[a]$ unipotente, chiamiamo $s = S$ la sua *parte semisemplice*, N la sua *parte nilpotente*, $\nu = I_n + S^{-1}N$ la sua *parte unipotente*.

Nel caso complesso, la decomposizione di Wedderburn si può ricavare dalla decomposizione di Jordan: in una matrice di Jordan la diagonale è la sua parte semisemplice nella decomposizione di Wedderburn. Mediante il coniugio possiamo quindi ricondurre la decomposizione di Wedderburn a quella di Jordan.

3. Esponenziale di matrici

Definiamo innanzi tutto l'applicazione esponenziale per endomorfismi nilpotenti. Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica zero e sia $N \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ un endomorfismo nilpotente. Poiché $N^m = 0$ se $m \geq n$, la serie:

$$\exp(N) \;=\; \sum_{h=0}^{\infty} \frac{N^h}{h!}$$

si riduce alla somma finita dei suoi primi n termini:

$$\exp(N) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{N^h}{h!} = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{N^h}{h!}.$$

Indichiamo con $\mathcal{N}(n,\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici nilpotenti di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ e con $\mathcal{U}(n,\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici unipotenti di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$. Abbiamo:

TEOREMA 3.1. *L'applicazione $N \to \exp(N)$ è una trasformazione bigettiva di $\mathcal{N}(n,\mathbb{K})$ su $\mathcal{U}(n,\mathbb{K})$.*

DIMOSTRAZIONE. L'esponenziale di una matrice nilpotente N è l'endomorfismo $e + N'$ dove $N' = \sum_{h=1}^{n-1} \frac{N^h}{h!}$ è nilpotente perché somma di endomorfismi nilpotenti che commutano tra loro. Quindi $\exp(N) \in \mathcal{U}(n,\mathbb{K})$ se $N \in \mathcal{N}(n,\mathbb{K})$.

Indichiamo con $p_n(\lambda)$ il polinomio $p_n(\lambda) = \sum_{h=0}^{n-1} \lambda^h/h! \in \mathbb{K}[\lambda]$ e con $q_n(\lambda)$ il polinomio $q_n(\lambda) = \sum_{h=0}^{n-2} (-1)^h \lambda^{h+1}/(h+1) \in \mathbb{K}[\lambda]$.

se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, essi sono i polinomi di Taylor di grado $(n-1)$ di e^λ e di $\log(1+\lambda)$, rispettivamente.

Poiché $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$, otteniamo perciò che

$$p_n(q_n(\lambda)) = 1 + \lambda + \lambda^n f(\lambda)$$

per un opportuno polinomio $f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$. Ne segue che, data $\nu \in \mathcal{U}(n,\mathbb{K})$, la $N = q_n(\nu - e)$ è una matrice nilpotente per cui $p_n(N) = \exp(N) = \nu$. Ciò dimostra la surgettività dell'applicazione esponenziale.

Dimostriamo ora l'unicità. Innanzi tutto osserviamo che, se $N_1, N_2 \in \mathcal{N}(n,\mathbb{K})$ ed $\exp(N_1) = \exp(N_2)$, allora $\ker N_1 = \ker N_2$.

Se, per assurdo, ciò non fosse vero, uno dei due sottospazi non sarebbe contenuto nell'altro e quindi, a meno di scambiare gli indici, potremmo trovare un vettore $v \in \ker N_1 \cap \complement \ker N_2$. Poiché $\exp(N_2)(v) = \exp(N_1)(v) = v$, otteniamo che $\sum_{h=1}^{n-1} N_2^h(v)/h! = 0$. Avendo supposto che $w = N_2(v)$ non fosse nullo, avremmo $f(N_2)(w) = 0$ con $f(\lambda) = 1 + \sum_{h=1}^{n-2} \lambda^h/(h+1)! \in \mathbb{K}[\lambda]$. Ma allora il polinomio minimo $\mu_{N_2}(\lambda)$ di N_2 dovrebbe contenere un fattore primo di $f(\lambda)$, e quindi un fattore primo che non si annulla per $\lambda = 0$, contro l'ipotesi che N_2 fosse nilpotente. Quindi $\ker N_2 = \ker N_1$.

Posto $W = \ker N_1 = \ker N_2$, possiamo considerare gli endomorfismi nilpotenti $\widehat{N}_1$ e $\widehat{N}_2$ definiti da N_1 ed N_2 su $\mathbb{K}^n/W$ per passaggio al quoziente. Da $\exp(\widehat{N}_1) = \exp(\widehat{N}_2)$ ricaviamo, ripetendo il ragionamento precedente, che $\ker \widehat{N}_1 = \ker \widehat{N}_2$, cioè $\ker N_1^2 = \ker N_2^2$.

Per ricorrenza otterremo allora che $\ker N_1^m = \ker N_2^m$ per ogni intero positivo m. Questo ci dice che per una scelta opportuna della base di $\mathbb{K}^n$, i due endomorfismi nilpotenti N_1 ed N_2 si possono mettere entrambi in forma triangolare superiore. Indichiamo con $\mathfrak{n}_+(n,\mathbb{K})$ l'insieme di tutte le matrici triangolari superiori nilpotenti. Esse formano un anello nilpotente e, posto

$$\mathfrak{n}_+^k(n,\mathbb{K}) = \{N_1 \cdots N_k \,|\, N_1, \ldots, N_k \in \mathfrak{n}_+(n,\mathbb{K})\},$$

risulta $\mathfrak{n}_+^n(n,\mathbb{K}) = \{0\}$.

Se $N_1, N_2 \in \mathfrak{n}_+(n,\mathbb{K})$ ed $N_1 - N_2 \in \mathfrak{n}_+^k(n,\mathbb{K})$, allora $N_1^m - N_2^m \in \mathfrak{n}_+^{k+m-1}(n,\mathbb{K})$. Infatti questo è vero se $m = 1$ e segue per ricorrenza dall'uguaglianza: $N_1^m - N_2^m = (N_1 - N_2)N_1^{m-1} + N_2(N_1^{m-1} - N_2^{m-1})$ per $m \geq 2$.

Se $\exp(N_1) = \exp(N_2)$ con $N_1, N_2 \in \mathfrak{n}_+(n,\mathbb{K})$, abbiamo

$$(\dagger) \qquad N_1 - N_2 = \sum_{h=2}^{n-1} (N_2^h - N_1^h)/h!.$$

Se fosse $N_1 \neq N_2$, dovrebbe essere $N_1 - N_2 \in \mathfrak{n}_+^k(n,\mathbb{K}) \setminus \mathfrak{n}_+^{k+1}(n,\mathbb{K})$ per qualche $k < n$, ma questo contraddice la (†) perché allora il secondo membro apparterrebbe a $\mathfrak{n}_+^{k+1}(n,\mathbb{K})$. □

Osservazione 3.2. Dalla dimostrazione del teorema segue che, se f è un polinomio di $\mathbb{K}[\lambda]$ con $f'(0) \neq 0$, l'applicazione $\mathfrak{n}_+(n,\mathbb{K}) \ni N \to f(N) \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ è iniettiva.

Teorema 3.3. *Per ogni $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, la serie*

$$\exp A = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} A^h$$

converge in $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ e definisce un elemento di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. L'applicazione

$$\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \ni A \to \exp A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$$

è continua e surgettiva.

Se $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ sono gli autovalori di $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, ripetuti con la loro molteplicità, allora gli autovalori di $\exp A$ sono $e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}$. In particolare vale la formula

$$(3.1) \qquad \det(\exp A) = e^{\operatorname{trac}(A)}.$$

Se $A, B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, allora

$$(3.2) \qquad \exp(A+B) = \exp(A)\,\exp(B) \quad \textit{se} \quad AB = BA.$$

Se $a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ e $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, allora

$$(3.3) \qquad a \circ \exp(A) \circ a^{-1} = \exp(a \circ A \circ a^{-1}).$$

Dimostrazione. Osserviamo che la serie a termini positivi

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \|A^h\|$$

è maggiorata termine a termine dalla serie convergente, a termini di segno positivo,

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \|A\|^h$$

e quindi la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} A^h$$

è convergente in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, uniformemente sui sottoinsiemi compatti di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Poiché per ogni polinomio $p \in \mathbb{C}[z]$ l'applicazione $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \ni A \to p(A) \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ è continua, la funzione $\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ è continua perché limite uniforme, su ogni compatto di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, di una successione di applicazioni continue.

Se $A, B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ e $AB = BA$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}(A+B)^h &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \sum_{h_1+h_2=h} \frac{h!}{h_1!h_2!} A^{h_1} B^{h_2} \\ &= \sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!} A^{h_1} \sum_{h_2=0}^{\infty} \frac{1}{h_2!} B^{h_2} \\ &= \exp(A)\ \exp(B)\,.\end{aligned}$$

Se $A = S+N$ è la decomposizione di Wedderburn della matrice $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, la

$$\exp(A) = \exp(S+N) = \exp(S)\exp(N)$$

dà la decomposizione dell'esponenziale di A nel prodotto della sua parte semisemplice e di una matrice unipotente che con essa commuta. Osserviamo che, se $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ e $a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, allora

$$(aAa^{-1})^h = aA^h a^{-1} \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo quindi

$$\exp(aAa^{-1}) = a(\exp A)a^{-1} \quad \forall A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\ \forall a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}).$$

Questa formula ci dà la possibilità di calcolare l'esponenziale di una matrice semisemplice S utilizzando la sua diagonalizzazione: se $a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ e

$$a \circ S \circ a^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avremo

$$\exp(S) = \exp\left(a^{-1} \circ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \circ a \right) \;=\; a^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \circ a\,.$$

Chiaramente la matrice $\exp S$ è invertibile, ed ha determinante

$$\det(\exp S) = e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)} = e^{\mathrm{trac}(A)}.$$

La matrice $\exp N$ è unipotente ed ha dunque determinante 1. Quindi

$$\det(\exp A) = \det(\exp(S+N)) = \det(\exp S \cdot \exp N) \;=\; \det(\exp S) \;=\; e^{\mathrm{trac}(A)} \neq 0$$

ed $\exp A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$.

Dimostriamo ora che $\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ è surgettiva. Fissiamo un isomorfismo lineare a in $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, e siano $s, \nu \in \mathbb{C}[a]$ la sua parte semisemplice e la sua parte unipotente. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di s e sia $b \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ tale che

$$b \circ s \circ b^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}$$

con $n_1 + \cdots + n_k = n$. Poiché i λ_i sono diversi da zero, possiamo trovare numeri complessi $\mu_1, \ldots, \mu_k$ tali che $e^{\mu_i} = \lambda_i$. Allora la matrice

$$S = b^{-1} \circ \begin{pmatrix} \mu_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_k I_{n_k} \end{pmatrix} \circ b\,,$$

poiché la sua restrizione ad ogni autospazio di s è un multiplo dell'identità, appartiene a $\mathbb{C}[s]$, e quindi a $\mathbb{C}[a]$, ed $\exp(S) = s$. Sia N la matrice nilpotente tale che $\exp(N) = \nu$. Poiché $S, N \in \mathbb{C}[a]$, le due matrici commutano tra loro e quindi

$$\exp(S+N) = \exp(S)\exp(N) = s\,\nu = a\,.$$

La dimostrazione è completa. □

Osservazione 3.4. Se $A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, allora $\exp(A) \in \mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$, ma, se $n \geq 2$, l' applicazione $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \xrightarrow{\exp} \mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$ non è surgettiva. Consideriamo ad esempio il caso $n = 2$. Allora

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C} \right\}.$$

Per una matrice triangolare superiore in $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ abbiamo:

$$\exp \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & \beta\cdot\phi(\alpha) \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \phi(\alpha) = \begin{cases} \frac{\sinh\alpha}{\alpha} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}$$

Consideriamo ora la matrice $a = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$. Supponiamo per assurdo vi sia $A \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ con $\exp(A) = a$. La A è coniugata di una triangolare superiore B, e $b = \exp(B)$ è allora una triangolare superiore coniugata ad a: poiché b è della forma $b = \left(\begin{smallmatrix} -1 & k \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ con $k \neq 0$, e $B = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{smallmatrix}\right)$, questo non è possibile: dovrebbe essere infatti $\alpha = (2h+1)\pi\, i$ con $h \in \mathbb{Z}$, e quindi $\phi(\alpha) = 0$ ed $\exp(B)$ sarebbe diagonale.

Osservazione 3.5. Il determinante dell'esponenziale di una matrice reale è l'esponenziale della sua traccia e quindi è un numero reale positivo. Quindi l'esponenziale definisce un'applicazione di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ nel sottogruppo normale $\mathbf{GL}_+(n,\mathbb{R})$ delle matrici reali invertibili con determinante positivo.

Come nell'osservazione precedente, si può verificare che la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{R}) \subset \mathbf{GL}_+(2,\mathbb{R})$$

non è l'esponenziale di una matrice reale, e che quindi $\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathbf{GL}_+(n,\mathbb{R})$ non è surgettivo, e la sua immagine non contiene $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$.

OSSERVAZIONE 3.6. Se $A, B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ sono due matrici che non commutano tra loro: $[A,B] = A \circ B - B \circ A \neq 0$, in generale non vale la formula di addizione: è cioè in generale $\exp(A+B) \neq \exp A \circ \exp B$.

LEMMA 3.7. *Per ogni $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ l'applicazione*

$$\mathbf{R} \ni t \to \exp(tA) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$$

è differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ e

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k \exp(tA) = A^k \exp(tA) = \exp(tA) A^k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $t, s \in \mathbf{R}$ ed $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, abbiamo:

$$\exp((t+s)A) = \exp(tA)\exp(sA) = \exp(sA)\exp(tA).$$

Quindi vale la

$$\begin{aligned} \exp((t+s)A) &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s^h}{h!} A^h \exp(tA) \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{s^h}{h!} \exp(tA) A^h \qquad \forall t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e la serie converge uniformemente in norma su ogni compatto di $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. La tesi segue allora dalla formula di Taylor. □

LEMMA 3.8. *Sia $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ tale che $\exp(tA) \in \mathbf{GL}(n,\mathbf{R})$ per ogni $t \in \mathbf{R}$. Allora $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, da $\exp(tA) \in \mathbf{GL}(n,\mathbf{R}) \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ per ogni $t \in \mathbf{R}$ ricaviamo, derivando rispetto a t in $t = 0$, che

$$A = \left.\frac{d \exp(tA)}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{\exp(tA) - I}{t} \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$$

perché $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{R})$ è chiuso in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. □

4. Matrici Hermitiane

DEFINIZIONE 4.1. Una matrice $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ si dice *Hermitiana* se $A^* = A$, si dice *antihermitiana* se $A^* = -A$.

Gli insiemi $\mathfrak{p}(n)$ delle matrici Hermitiane e $\mathfrak{u}(n)$ delle matrici antihermitiane formano sottospazi vettoriali reali di dimensione n^2 di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ (pensato come spazio vettoriale reale di dimensione $2n^2$).

Infatti $* : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ è un'involuzione, e quindi $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{p}(n) \oplus \mathfrak{u}(n)$, e la moltiplicazione per l'unità immaginaria i è un isomorfismo lineare che scambia $\mathfrak{p}(n)$ con $\mathfrak{u}(n)$, onde $\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{p}(n) = \dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{u}(n)$.

DEFINIZIONE 4.2. Una matrice $u \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ si dice *unitaria* se $uu^* = e$, dove e indica la matrice identità.

Le matrici unitarie sono le matrici di cambiamenti di basi ortonormali per il prodotto scalare Hermitiano canonico di $\mathbb{C}^n$. Le matrici unitarie formano un sottogruppo di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, che denotiamo con $\mathbf{U}(n)$ e chiamiamo *gruppo unitario di ordine n*.

LEMMA 4.3. *Ogni matrice Hermitiana è diagonalizzabile ed ha autovalori reali. Se $A \in \mathfrak{p}(n)$, possiamo trovare una matrice $u \in \mathbf{U}(n)$ tale che uAu^{-1} sia diagonale e reale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ una matrice Hermitiana. Sia λ un autovalore di A e sia $v \in \mathbb{C}^n$ un autovettore relativo a λ. Abbiamo:

$$\lambda\,|v|^2 = (Av|v)_{\mathbb{C}^n} = (v|A^*v)_{\mathbb{C}^n} = (v|Av)_{\mathbb{C}^n} = (v|\lambda v)_{\mathbb{C}^n} = \bar{\lambda}\,|v|^2,$$

da cui $\lambda = \bar{\lambda}$ e $\lambda \in \mathbf{R}$.

Se $w \in \mathbb{C}^n$ è un vettore ortogonale a v, allora

$$(v|Aw)_{\mathbb{C}^n} = (Av|w)_{\mathbb{C}^n} = \lambda\,(v|w) = 0.$$

Quindi il sottospazio dei vettori di $\mathbb{C}^n$ perpendicolari a v è A-invariante: da questo fatto si ricava immediatamente che $\mathbb{C}^n$ ammette una base ortonormale di autovettori di A. □

DEFINIZIONE 4.4. Indichiamo con $\mathbf{P}_+(n)$ l'insieme delle matrici Hermitiane definite positive, cioè delle matrici Hermitiane che hanno tutti gli autovalori positivi. Consideriamo su tale insieme la topologia di sottospazio di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

tm:gldde

TEOREMA 4.5. *Se $A \in \mathfrak{p}(n)$, allora $\exp(A) \in \mathbf{P}_+(n)$. L'applicazione esponenziale definisce un omeomorfismo*

$$\mathfrak{p}(n) \ni A \to \exp(A) \in \mathbf{P}_+(n).$$

DIMOSTRAZIONE. Si verifica immediatamente che $(\exp(A))^* = \exp(A^*)$. Quindi l' esponenziale di una matrice Hermitiana è ancora una matrice Hermitiana ed è definita positiva perché i suoi autovalori sono esponenziali di numeri reali.

Se $a \in \mathbf{P}_+(n)$, possiamo trovare una matrice unitaria u tale che

$$a = u \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix} u^{-1} \quad \text{con} \quad k_1, ..., k_n \quad \text{numeri reali positivi.}$$

Allora $A = u \begin{pmatrix} \log k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \log k_n \end{pmatrix} u^{-1} \in \mathfrak{p}(n)$ ed $\exp(A) = a$. Questo dimostra che $\exp : \mathfrak{p}(n) \to \mathbf{P}_+(n)$ è surgettivo.

Dimostriamo ora che $\exp : \mathfrak{p}(n) \to \mathbf{P}_+(n)$ è iniettivo. Siano $A, B \in \mathfrak{p}(n)$ tali che $\exp(A) = \exp(B)$. Fissiamo una base ortonormale $e_1, ..., e_n$ di autovettori di A. Abbiamo

$$A\, e_j = \lambda_j\, e_j \quad \text{con} \quad \lambda_j \in \mathbf{R} \quad \text{per} \quad j = 1, ..., n.$$

Allora

$$\exp(B)\, e_j = \exp(A)\, e_j = e^{\lambda_j}\, e_j \quad \text{per} \quad j = 1, ..., n.$$

Sia ora $v \neq 0$ un autovettore di B relativo a un autovalore $\mu \in \mathbf{R}$. Se $v = v^1 e_1 + ... + v^n e_n$, otteniamo

$$e^{\mu}\, v = \sum_{j=1}^{n} e^{\mu} v^j e_j = \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j} v^j e_j.$$

Quindi

$$e^{\mu} = e^{\lambda_j} \Longrightarrow \mu = \lambda_j \quad \text{se} \quad v^j \neq 0,$$

e dunque

$$B\, v = \mu\, v = \sum_{j=1}^{n} \mu\, v^j\, e_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, v^j\, e_j = A\, v.$$

Questa relazione vale per tutti gli autovettori di B e quindi, poiché $\mathbb{C}^n$ ammette una base ortonormale di autovettori di B, se ne deduce che $A = B$.

Quindi $\exp : \mathfrak{p}(n) \to \mathbf{P}_+(n)$ è invertibile.

Resta da dimostrare che l'inversa è continua.

A questo scopo osserviamo che per una matrice Hermitiana A abbiamo

$$|A|^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2,$$

ove $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sono gli autovalori di A ripetuti con la loro molteplicità.

Da questo ricaviamo facilmente che l'applicazione

$$\exp : \mathfrak{p}(n) \to \mathbf{P}_+(n)$$

è un'applicazione chiusa. Sia infatti F un sottoinsieme chiuso di $\mathfrak{p}(n)$ e sia $\{a_\nu\}$ una successione a valori in $\exp(F)$ che converge a una matrice $a \in \mathbf{P}_+(n)$. Gli autovalori di a e delle a_ν sono reali e positivi. Indichiamo con μ il più piccolo e con M il più grande degli autovalori di a e con μ_ν e M_ν il più piccolo e il più grande degli autovalori di a_ν. Dico che è possibile trovare un intero positivo ν_0 tale che

$$\mu/2 < \mu_\nu \leq M_\nu < 2M \quad \forall \nu \geq \nu_0.$$

Infatti, se fosse $\mu_\nu \leq \mu/2$ per infiniti indici $\nu \in \mathbb{N}$, potremmo trovare una sottosuccessione $\{a_{k_\nu}\}$ di $\{a_\nu\}$ tale che $\mu_{k_\nu} \leq \mu/2$ per ogni ν. Sia v_{k_ν} un

vettore di $\mathbb{C}^n$ con

$$|v_{k_\nu}| = 1 \quad \text{e} \quad a_{k_\nu}(v_{k_\nu}) = \mu_{k_\nu} v_{k_\nu}.$$

Poiché la sfera $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ è compatta, possiamo supporre, a meno di passare a una sottosuccessione estratta, che

$$v_{k_\nu} \to v \in S^{2n-1}.$$

Avremmo allora

$$|a(v)| = \lim_{\nu\to\infty} |a_{k_\nu}(v_{k_\nu})| \leq \mu/2$$

e questo di dà una contraddizione perché

$$|a(v)| \geq \mu \quad \text{essendo} \quad |v| = 1.$$

In modo analogo si dimostra che $M_\nu < 2M$ definitivamente.

Siano ora $\{A_\nu\} \subset F$ tali che $\exp A_\nu = a_\nu$. Allora per ogni $\nu \geq \nu_0$ le matrici A_ν appartengono al compatto

$$K = \{A \in \mathfrak{p}(n) \,|\, \|A\| \leq \max\{|\log(\mu/2)|, |\log(2M)|\}.$$

Poiché F è un chiuso, $K \cap F$ è compatto e possiamo quindi estrarre una sottosuccessione $\{A_{k_\nu}\}$ convergente a un elemento $A \in K \cap F$. Poiché l'esponenziale è un'applicazione continua, otteniamo che $\exp A = a$ e quindi $\exp(F)$ è chiuso in $\mathbf{P}_+(n)$. Quindi $\exp : \mathfrak{p}(n) \to \mathbf{P}_+(n)$, essendo continua, chiusa e bigettiva è un omeomorfismo. □

Indichiamo con

$$\log : \mathbf{P}_+(n) \to \mathfrak{p}(n)$$

l'applicazione inversa dell'esponenziale $\exp : \mathfrak{p}(n) \to \mathbf{P}_+(n)$.

Indichiamo con $\mathfrak{p}(n, \mathbf{R})$ il sottospazio vettoriale reale delle matrici simmetriche a coefficienti reali e con $\mathbf{P}_+(n, \mathbf{R})$ il sottoinsieme di $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ delle matrici reali simmetriche definite positive. Abbiamo allora

Teorema 4.6. *L'applicazione esponenziale definisce un omeomorfismo*

$$\exp : \mathfrak{p}(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{P}_+(n, \mathbf{R}).$$

Dimostrazione. Infatti ogni matrice simmetrica reale $n \times n$ ammette una base ortonormale di autovettori in $\mathbf{R}^n$. Ripetendo la dimostrazione svolta per il caso delle matrici complesse Hermitiane, si ottiene che $\exp : \mathfrak{p}(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{P}_+(n, \mathbf{R})$ è continua, chiusa e bigettiva e quindi un omeomorfismo. □

CAPITOLO 6

Gruppi lineari e loro algebre di Lie

gltre

Un *gruppo lineare* è un sottogruppo chiuso $\mathbf{G}$ di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ (per qualche intero positivo n). In questo capitolo iniziamo lo studio della struttura dei gruppi lineari.

1. Decomposizione di Cartan delle matrici di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$

tm:treaa

TEOREMA 1.1. *Ogni matrice $a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ si può scrivere in modo unico come il prodotto*

$$a = u \circ p$$

di una matrice unitaria $u \in \mathbf{U}(n)$ e di una matrice Hermitiana definita positiva $p \in \mathbf{P}_+(n)$.

DIMOSTRAZIONE. Data $a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, la matrice a^*a è Hermitiana e definita positiva. Sia $Q = \log(a^*a)$ e $p = \exp(Q/2)$. Poniamo

$$u = a \circ p^{-1}.$$

Allora

$$\begin{aligned} u \circ u^* =& a \circ p^{-1} \circ p^{-1} \circ a^* \\ =& a \circ (a^* \circ a)^{-1} \circ a \\ =& a \circ a^{-1} \circ (a^*)^{-1} a^* \\ =& e. \end{aligned}$$

Quindi $u^* = u^{-1}$ e $u \in \mathbf{U}(n)$.

Dimostriamo ora che la decomposizione è unica.
Se $a = u \circ p$ con $u \in \mathbf{U}(n)$ e $p \in \mathbf{P}_+(n)$, allora

$$a^* \circ a = p \circ u^* \circ u \circ p = p^2.$$

Per dimostrare l'unicità è allora sufficiente verificare che due matrici Hermitiane definite positive $p, q \in \mathbf{P}_+(n)$ che hanno quadrati uguali sono uguali. Siano $P, Q \in \mathfrak{p}(n)$ le matrici Hermitiane tali che $\exp P = p$, $\exp Q = q$. Da $\exp(2P) = \exp(2Q)$ otteniamo $2P = 2Q$ e quindi $P = Q$ e $p = q$. □

Se $p \in \mathbf{P}_+(n)$ indichiamo con $\sqrt{p}$ la sua radice quadrata in $\mathbf{P}_+(n)$, cioè l'unica matrice Hermitiana definita positiva $q \in \mathbf{P}_+(n)$ tale che $q^2 = p$.

lm:treab

LEMMA 1.2. *L'applicazione $\mathbf{P}_+(n) \ni a \to \sqrt{a} \in \mathbf{P}_+(n)$ è un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}_+(n) & \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} & \mathbf{P}_+(n) \\ {\scriptstyle\exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\exp} \\ \mathfrak{p}(n) & \xrightarrow[(1/2)]{} & \mathfrak{p}(n) \end{array}$$

in cui le frecce verticali e la $\mathfrak{p}(n) \ni P \to P/2 \in \mathfrak{p}(n)$ sono degli omeomorfismi. □

TEOREMA 1.3. *L'applicazione*

$$\mathbf{U}(n) \times \mathbf{P}_+(n) \ni (u, p) \to u \circ p \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

è un omeomorfismo. In particolare $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ *è omeomorfo al prodotto topologico* $\mathbf{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione è continua e bigettiva per il teorema precedente. La sua inversa è data da

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \ni a \to (a(\sqrt{a^* \circ a})^{-1}, \sqrt{a^* \circ a}) \in \mathbf{U}(n) \times \mathbf{P}_+(n)$$

ed è quindi continua.

Per concludere basta ricordare (Teorema 4.5 del Capitolo 5) che l'esponenziale definisce un omeomorfismo di $\mathfrak{p}(n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ su $\mathbf{P}_+(n)$. □

2. Algebre di Lie

DEFINIZIONE 2.1. Si dice *algebra di Lie* su un campo $\mathbb{K}$ un'algebra $\mathfrak{g}$ su $\mathbb{K}$ il cui prodotto [1], che indichiamo con

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \to [X, Y] \in \mathfrak{g}\,,$$

sia antisimmetrico e soddisfi l'*identità di Jacobi*:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

OSSERVAZIONE 2.2. Se il prodotto in $\mathfrak{g}$ è antisimmetrico, il primo membro dell'identità di Jacobi è un'applicazione trilineare alternata. Per verificare che $\mathfrak{g}$ sia un'algebra di Lie sarà quindi sufficiente verificare

(1) che $[X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$
(2) che l'identità di Jacobi valga per ogni terna di vettori distinti di una base di $\mathfrak{g}$ come spazio vettoriale.

ESEMPIO 2.3. Sia V un qualsiasi spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Allora V è un'algebra di Lie con il prodotto

$$V \times V \ni (v_1, v_2) \to 0 \in V.$$

DEFINIZIONE 2.4. Un'algebra di Lie in cui il prodotto di due qualsiasi elementi sia 0 si dice *abeliana*.

[1] Ricordiamo che un'algebra su un campo $\mathbb{K}$ è il dato di uno spazio vettoriale A su $\mathbb{K}$ e di un'applicazione bilineare $A \times A \ni (a, b) \to a \cdot b \in A$.

ESEMPIO 2.5. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di tutti gli endomorfismi lineari di V. Allora $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$ è un'algebra di Lie su $\mathbb{K}$ rispetto all'operazione di commutazione di endomorfismi $\mathbb{K}$-lineari:

$$\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V) \times \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V) \ni (X, Y) \to [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V).$$

Abbiamo infatti, se $X, Y, Z \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$:

$$\begin{aligned}[X, [Y, Z]] =& X \circ (Y \circ Z - Z \circ Y) - (Y \circ Z - Z \circ Y) X \\ =& X \circ Y \circ Z - X \circ Z \circ Y - Y \circ Z \circ X + Z \circ Y \circ X\end{aligned}$$

e analogamente

$$[Y, [Z, X]] = Y \circ Z \circ X - Y \circ X \circ Z - Z \circ X \circ Y + X \circ Z \circ Y,$$

$$[Z, [X, Y]] = Z \circ X \circ Y - Z \circ Y \circ X - X \circ Y \circ Z + Y \circ X \circ Z.$$

Sommando membro a membro, da queste tre uguaglianze otteniamo l'identità di Jacobi.

In particolare, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ è un'algebra di Lie su $\mathbb{K}$ rispetto all'operazione di commutazione di matrici:

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \times \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \ni (X, Y) \to [X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}).$$

Se il campo $\mathbb{K}$ è una estensione del campo $\mathbb{F}$, considereremo a volte $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ come un'algebra di Lie su $\mathbb{F}$ per *restrizione del campo degli scalari*.

DEFINIZIONE 2.6. Un'applicazione lineare $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tra due algebre di Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ sullo stesso campo $\mathbb{K}$ si dice un *omomorfismo di algebre di Lie* se

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie su $\mathbb{K}$ e V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, si dice *rappresentazione lineare* di $\mathfrak{g}$ in V un omomorfismo di algebre di Lie

$$\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)\,.$$

Se $\ker \phi = \{0\}$, la rappresentazione ϕ si dice *fedele*.

Una rappresentazione fedele permette di identificare $\mathfrak{g}$ ad una sottoalgebra dell'algebra di Lie degli endomorfismi di uno spazio vettoriale.

ESEMPIO 2.7. Sia A sia un'algebra associativa sul campo $\mathbb{K}$, con prodotto $A \times A \ni (a, b) \to a \cdot b \in A$. Otteniamo un'algebra di Lie $A_{\mathfrak{L}}$ considerando su A il prodotto:

$$[a, b] = a \cdot b \, - \, b \cdot a \quad \forall a, b \in A.$$

Supponiamo che $\mathfrak{g}$ sia un'algebra di Lie di dimensione finita N su un campo $\mathbb{K}$. Fissata una base $E_1, ..., E_N$ di $\mathfrak{g}$, si definiscono *costanti di struttura* dell'algebra $\mathfrak{g}$ in tale base gli scalari $(c^i_{j,k})_{1 \le i,j,k \le N}$ definiti da

$$[E_j, E_k] = \sum_{i=1}^{N} c^i_{j,k} E_i \quad \forall 1 \le j, k \le N.$$

Le costanti di struttura verificano le relazioni:

$$c^i_{j,k} = -c^i_{k,j} \quad \text{(antisimmetria)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} c^i_{j,k}c^r_{i,h} + c^i_{k,h}c^r_{i,j} + c^i_{h,j}c^r_{i,k} = 0 \quad \text{(identità di Jacobi)}.$$

Viceversa, dato uno spazio vettoriale $\mathfrak{g}$ su $\mathbb{K}$, una sua base $E_1, ..., E_N$ di $\mathfrak{g}$ e coefficienti $(c^i_{j,k})_{1\leq i,j,k\leq N}$ che verificano queste relazioni, vi è un'unica struttura di algebra di Lie su $\mathfrak{g}$ per cui tali coefficienti siano le costanti di struttura nella base $E_1, ..., E_N$.

Esempio 2.8. Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio Euclideo di dimensione 3. Il *prodotto vettore*

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (v, w) \to v \times w \in \mathbb{R}^3$$

è definito dall'identità:

$$\det(v, w, z) = (v \times w|z) \quad \forall v, w, z \in \mathbb{R}^3,$$

dove abbiamo indicato con (v, w, z) la matrice 3×3 che ha come colonne i vettori v, w, z. Le regole di calcolo del prodotto vettore si esprimono nei vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica mediante:

$$e_i \times e_i = 0, \quad e_i \times e_j = \epsilon(i, j, k)e_k$$

per ogni $i = 1, 2, 3$ ed ogni permutazione (i, j, k) di $\{1, 2, 3\}$. Lo spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto vettore è un'algebra di Lie reale. Infatti il prodotto vettore è antisimmetrico perché, scambiando le prime due colonne di una matrice, il determinante cambia segno. Infine, per verificare l'identità di Jacobi basta verificare che

$$e_1 \times (e_2 \times e_3) + e_2 \times (e_3 \times e_1) + e_3 \times (e_1 \times e_2) = 0$$

Questa relazione è banale perché ciascuno degli addendi a primo membro è uguale a zero.

In modo equivalente, possiamo identificare $\mathbb{R}^3$ allo spazio vettoriale reale formato dai quaternioni puramente immaginari. In questa identificazione, la parte reale e la parte immaginaria del prodotto di due quaternioni puramente immaginari sono rispettivamente il prodotto scalare e il prodotto vettore dei vettori corrispondenti.

Se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono sottospazi vettoriali di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ sul campo $\mathbb{K}$, indichiamo con $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ il sottospazio vettoriale generato dagli elementi $[X, Y]$ al variare di X in $\mathfrak{a}$ e di Y in $\mathfrak{b}$. Poiché il prodotto è antisimmetrico, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}]$. Un sottospazio vettoriale $\mathfrak{a}$ di $\mathfrak{g}$ si dice una *sottoalgebra di Lie di* $\mathfrak{g}$ se

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}.$$

Un sottospazio vettoriale $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{g}$ si dice un *ideale dell'algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ se

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}.$$

Si verifica facilmente:

LEMMA 2.9. *Se $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ è un omomorfismo di algebre di Lie, allora* $\ker \phi$ *è un ideale di* $\mathfrak{g}$.

Se $\mathfrak{h}$ è un ideale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, allora vi è un'unica struttura di algebra di Lie su $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ che renda la proiezione nel quoziente

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

un omomorfismo di algebre di Lie.

Sia A un'algebra su un campo $\mathbb{K}$. Un endomorfismo $\mathbb{K}$-lineare

$$D : A \to A$$

si dice una *derivazione* di A se verifica l'*identità di Leibnitz*:

$$D(a \cdot b) = (Da) \cdot b + a \cdot (Db).$$

LEMMA 2.10. *L'insieme* $\mathrm{Der}(A)$ *di tutte le derivazioni di un'algebra A su $\mathbb{K}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(A)$.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzi tutto che $\mathrm{Der}(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{gl}_K(A)$ perché il prodotto $A \times A \ni (a, b) \to a \cdot b \in A$ è $\mathbb{K}$-bilineare.

Se $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(A)$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](a \cdot b) =& D_1(D_2 a \cdot b + a \cdot D_2 b) - D_2(D_1 a \cdot b + a \cdot D_1 b) \\
=& D_1 D_2 a \cdot b + D_2 a \cdot D_1 b + D_1 a \cdot D_2 b + a \cdot D_1 D_2 b \\
& - D_2 D_1 a \cdot b - D_1 a \cdot D_2 b - D_2 a \cdot D_1 b - a \cdot D_2 D_1 b \\
=& (D_1 D_2 - D_2 D_1) a \cdot b + a \cdot (D_1 D_2 - D_2 D_1) b \\
=& [D_1, D_2] a \cdot b + a \cdot [D_1, D_2] b
\end{aligned}$$

e quindi $\mathrm{Der}(A)$ è un'algebra di Lie. □

Se A è un'algebra associativa, allora per ogni $a \in A$ l'applicazione

$$D_a : A \ni b \to a \cdot b - b \cdot a \in A$$

è una derivazione di A.

Si verifica facilmente che vale il seguente:

LEMMA 2.11. *Sia A un'algebra associativa su $\mathbb{K}$. Allora l'applicazione*

$$A \ni a \to D_a \in \mathrm{Der}(A)$$

è un omomorfismo dell'algebra di Lie A_{Lie} nell'algebra di Lie $\mathrm{Der}(A)$ *delle derivazioni di A.*

Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ sul campo $\mathbb{K}$, ed un elemento $X \in \mathfrak{g}$, indichiamo con $\mathrm{ad}(X)$ l'endomorfismo lineare

$$\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \ni Y \to \mathrm{ad}(X)Y = [X, Y] \in \mathfrak{g}.$$

TEOREMA 2.12. *L'applicazione*

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \ni X \to \mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$$

è una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ *nell'algebra* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *delle derivazioni di* $\mathfrak{g}$.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione ad è lineare perché il prodotto $[\,\cdot,\,\cdot]$ è bilineare.

Dall'identità di Jacobi ricaviamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(X)[Y,Z] =& [X,[Y,Z]]\\ =& -[Y,[Z,X]] - [Z,[X,Y]]\\ =& [Y,\mathrm{ad}(X)Z] + [\mathrm{ad}(X)Y,Z]\\ & \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}\end{aligned}$$

e quindi $\mathrm{ad}(X)$ è, per ogni $X \in \mathfrak{g}$, una derivazione dell'algebra $\mathfrak{g}$. Abbiamo inoltre

$$\begin{aligned}[\mathrm{ad}(X),\mathrm{ad}(Y)]Z =& \mathrm{ad}(X)[Y,Z] - \mathrm{ad}(Y)[X,Z]\\ =& [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]]\\ =& [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]]\\ =& -[Z,[X,Y]]\\ =& \mathrm{ad}([X,Y])Z,\\ & \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g},\end{aligned}$$

e quindi ad è un omomorfismo di algebre di Lie. □

DEFINIZIONE 2.13. L'applicazione

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \ni X \to \mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$$

si dice la *rappresentazione aggiunta di* $\mathfrak{g}$. Gli elementi dell'immagine $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ si dicono *derivazioni interne di* $\mathfrak{g}$.

TEOREMA 2.14. *Ogni algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ *di dimensione finita su un campo* $\mathbb{K}$ *ammette una rappresentazione lineare fedele.*

Nel seguito potremo quindi limitarci a considerare algebre di Lie $\mathfrak{g}$ che sono sottoalgebre di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.

3. Algebra di Lie di un gruppo lineare

In questo paragrafo studieremo la relazione tra sottoalgebre di Lie di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ e sottogruppi di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. Dimostriamo innanzi tutto il seguente:

LEMMA 3.1. *Per ogni* $X,\ Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ *valgono le seguenti formule di commutazione:*

(*i*) $\mathrm{ad}(X)(XY) = X\mathrm{ad}(X)Y$.

(*ii*) $X^kY = YX^k + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{ad}^j(X)YX^{k-j} \qquad \forall k \geq 1.$

(*iii*) $YX^k = X^kY + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j X^{k-j}\mathrm{ad}^j(X)Y \qquad \forall k \geq 1.$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la (i). Abbiamo:
$\mathrm{ad}(X)(XY) = [X, XY] = X^2Y - XYX = X\mathrm{ad}(X)Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Le dimostrazioni delle (ii) ed (iii) sono simili. Mostriamo ad esempio che vale la (iii).

Ragioniamo per induzione sull'intero $k \geq 1$. Se $k = 1$, la

$$YX = XY - \mathrm{ad}(X)Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

segue dalla definizione di ad. Fissiamo quindi un intero $m \geq 2$ e supponiamo che la formula (iii) valga per $k = m - 1$. Allora

$$\begin{aligned}
YX^m =& YX^{m-1}X \\
=& X^{m-1}YX + \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j X^{m-1-j} \mathrm{ad}^j(X) YX \\
=& X^mY - X^{m-1}\mathrm{ad}(X)Y + \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j X^{m-j} \mathrm{ad}^j(X)Y \\
& - \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m-1}{j} (-1)^j X^{m-j-1} \mathrm{ad}^{j+1}(X)Y \\
=& X^mY - X^{m-1}\mathrm{ad}(X)Y + (-1)^m \mathrm{ad}^m(X)Y \\
& + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \left\{ \binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1} \right\} X^{m-j}\mathrm{ad}^j(X)Y \\
& - \binom{m-1}{1} X^{m-1}\mathrm{ad}(X)Y
\end{aligned}$$

perché i due endomorfismi $\mathrm{ad}(X)$ e $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \ni Y \to XY \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ commutano per la (i), da cui, tenuto conto della formula di somma dei binomiali:

$$\binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1} = \binom{m}{j},$$

otteniamo la (iii). □

TEOREMA 3.2 (Formula dello Jacobiano). *L'applicazione esponenziale* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{\exp} \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ *è differenziabile in ogni punto e il suo differenziale in* $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ *è dato da:*

$$d\exp(A) : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \ni X \to \frac{I - \exp(-\mathrm{ad}(A))}{\mathrm{ad}(A)} \exp(A)X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}),$$

ove

$$\frac{I - \exp(-\mathrm{ad}(A))}{\mathrm{ad}(A)} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(h+1)!} \mathrm{ad}^h(A).$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Per ogni $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ abbiamo:

$$\exp(A+X) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(A+X)^h}{h!}.$$

Ora, risulta:

$$(A+X)^h = A^h + \sum_{r=0}^{h-1} A^r X A^{h-r-1} + o(X).$$

Per la formula di commutazione (iii) abbiamo:

$$A^r X A^s = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} A^{h-j-1} \mathrm{ad}^j(A) X.$$

Sostituendo troviamo:

$$\begin{aligned}\sum_{r+s=h-1} A^r X A^s &= \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} A^{h-j-1} \mathrm{ad}^j(A) X \\ &= \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^j \left(\sum_{k=0}^{h-j-1} \binom{j+k}{j} \right) A^{h-j-1} \mathrm{ad}^j(A) X \\ &= \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^j \binom{h}{j+1} A^{h-j-1} \mathrm{ad}^j(A) X.\end{aligned}$$

Otteniamo perciò:

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} \sum_{r+s=h-1} A^r X A^s &= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{h-1} \frac{A^{h-j-1}}{(h-j-1)!} \frac{(-1)^j \mathrm{ad}^j(A)}{(j+1)!} X \\ &= \exp(A) \frac{I - \exp(-\mathrm{ad}(A))}{\mathrm{ad}(A)} X = \frac{I - \exp(-\mathrm{ad}(A))}{\mathrm{ad}(A)} \exp(A) X\,,\end{aligned}$$

e quindi:

$$\exp(A+X) = \exp(A) + \frac{I - \exp(-\mathrm{ad}(A))}{\mathrm{ad}(A)} \exp(A) X + O(|X|^2),$$

che dà la formula desiderata per il differenziale. □

Ricordiamo il

tm:gldcc

TEOREMA 3.3 (Teorema dell'inversa). *Sia Ω un aperto di uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ (con $1 \le k \le \infty$). Sia $x_0 \in \Omega$ un punto in cui*

$$df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

sia un isomorfismo lineare. Allora esiste un intorno aperto U di x_0 in Ω tale che $f(U)$ sia aperto in $\mathbb{R}^n$ e

$$f|_U^{f(U)} : U \to f(U)$$

sia un omeomorfismo, con inversa $[f|_U^{f(U)}]^{-1}$ differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$.

DEFINIZIONE 3.4. Un omeomorfismo tra due aperti di $\mathbb{R}^n$ che sia differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ (con $1 \leq k \leq \infty$) ed abbia inversa differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ si dice un *diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$*.

Dal Teorema 3.3 ricaviamo:

TEOREMA 3.5. *L'applicazione* $\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \to \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ *definisce un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^\infty$ di un intorno aperto di* 0 *in* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ *su un intorno aperto di e in* $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\exp(X) = I + X + 0(X^2)$, il differenziale di exp in 0 è l'identità:

$$d\exp(0) : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \ni X \to X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}).$$

La tesi è perciò conseguenza del teorema dell'applicazione inversa. □

TEOREMA 3.6 (Coordinate di seconda specie). *Siano V, W due sottospazi vettoriali reali di* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, *considerato come spazio vettoriale reale di dimensione* $2n^2$, *tali che*

$$V \oplus W = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}).$$

Allora possiamo trovare un intorno aperto U_1 di 0 *in V e un intorno aperto U_2 di* 0 *in W tali che*

$$U_1 \times U_2 \ni (X,Y) \to \exp(X)\exp(Y) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$$

sia un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^\infty$ su un intorno aperto di e in $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $X = X_1 + X_2 \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ con $X_1 \in V$ e $X_2 \in W$. Allora, per la formula dello Jacobiano,

$$\begin{aligned}\exp(X_1)\exp(X_2) =& (e + X_1 + O(\|X_1\|^2))(e + X_2 + O(\|X_2\|^2)\\ =& e + X + O(\|X\|^2)\end{aligned}$$

e quindi l'applicazione

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \ni X \to \exp(X_1)\exp(X_2) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$$

ha in 0 differenziale uguale all'identità. La tesi segue quindi dal Teorema 3.3. □

OSSERVAZIONE 3.7. Se $a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ e $\|a - e\| < 1$, la serie

$$\log(a) = \log(e + (a-e)) = -\sum_{h=1}^{\infty} \frac{(e-a)^h}{h}$$

converge uniformemente su ogni aperto $\{\|a-e\| < r\}$ per $0 < r < 1$ e definisce un endomorfismo $\log(a) \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ tale che

$$\exp(\log(a)) = a.$$

lm:trecg

LEMMA 3.8. *Se A, $B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ allora*

$$\exp(tA)\exp(tB) = \exp(t(A+B) + (t^2/2)[A,B]) + O(t^3) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che le due applicazioni

$$F_1 : \mathbb{R} \ni t \to \exp(tA)\exp(tB) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \qquad \text{ed}$$

$$F_2 : \mathbb{R} \ni t \to \exp(t(A+B) + (t^2/2)[A,B]) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$$

assumono per $t = 0$ gli stessi valori ed hanno uguali per $t = 0$ le loro derivate prime e seconde.

Abbiamo $F_1(0) = e = F_2(0)$. Inoltre:

$$\begin{aligned} F_1(t) =& (e + tA + (t^2/2)A^2 + O(t^3))(e + tB + (t^2/2)B^2 + O(t^3) \\ =& e + t(A+B) + t^2(A^2/2 + AB + B^2/2) + O(t^3) \end{aligned}$$

ci dà

$$F_1'(0) = A + B, \qquad F_1''(0) = A^2 + 2AB + B^2.$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned} F_2(t) =& e + t(A+B) + (t^2/2)[A,B] + (1/2)(t(A+B) + (t^2/2)[A,B])^2 + O(t^3) \\ =& e + t(A+B) + (t^2/2)([A,B] + A^2 + AB + BA + B^2) + O(t^3) \\ =& e + t(A+B) + (t^2/2)(A^2 + 2AB + B^2) + O(t^3) \end{aligned}$$

e quindi anche

$$F_2'(0) = A + B, \qquad F_2''(0) = A^2 + 2AB + B^2.$$

□

Utilizziamo questo lemma per esplicitare la relazione tra sottogruppi chiusi di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ e sottoalgebre di Lie reali di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$:

tm:gltci

TEOREMA 3.9. *Sia $\mathbf{G}$ un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. Poniamo*

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G}\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Allora $\mathfrak{g}$ è una sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Inoltre

$$\exp : \mathfrak{g} \to \mathbf{G}$$

definisce un omeomorfismo di un intorno aperto di 0 in $\mathfrak{g}$ su un intorno aperto di e in $\mathbf{G}$.

DIMOSTRAZIONE. È chiaro che, se $X \in \mathfrak{g}$, allora $tX \in \mathfrak{g}$ per ogni numero reale t. Dimostriamo ora che, se $X, Y \in \mathfrak{g}$, anche $X + Y \in \mathfrak{g}$. Abbiamo:

$$(\exp(tX/n)\exp(tY/n))^n \in \mathbf{G} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per il Lemma lm:trecg 3.8

$$\exp(tX/n)\exp(tY/n) = \exp(t(X+Y)/n + O(t^2/n^2))$$

e quindi

$$(\exp(tX/n)\exp(tY/n))^n = \exp(t(X+Y)+O(t^2/n)).$$

Passando al limite per $n \to \infty$, poiché $\mathbf{G}$ è chiuso, troviamo $\exp(t(X+Y)) \in \mathbf{G}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi $X+Y \in \mathfrak{g}$.

Poiché $\mathbf{G}$ è un gruppo, avremo allora anche

$$\exp(tX/n)\exp(tY/n)\exp(-t(X+Y)/n) \in \mathbf{G} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Usamdo ancora il Lemma 3.8, abbiamo

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{tX}{n}\right)\exp\left(\frac{tY}{n}\right)\exp\left(\frac{-t(X+Y)}{n}\right) &= \exp\left(\frac{t(X+Y)}{n}+\frac{t^2}{2n^2}[X,Y]+O\left(\frac{t^3}{n^3}\right)\right)\exp\left(\frac{-t(X+Y)}{n}\right)\\ &= \exp(\frac{t^2}{2n^2}[X,Y]+O(t^3/n^3)).\end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$(\exp(tX/n)\exp(tY/n)\exp(-t(X+Y)/n))^{n^2} = \exp(\frac{t^2}{2}[X,Y]+O(t^3/n))$$

e, passando al limite per $n \to \infty$ abbiamo

$$\exp(\frac{t^2}{2}[X,Y]) \in \mathbf{G}$$

perché $\mathbf{G}$ è chiuso. Poiché $\mathbf{G}$ è un gruppo, e quindi contiene l'inverso di ogni suo elemento, ricaviamo che $\exp(t[X,Y]) \in \mathbf{G}$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$ e quindi $[X,Y] \in \mathfrak{g}$. Sia $\mathbf{G}'$ il sottogruppo di $\mathbf{G}$ generato da

$$\exp(\mathfrak{g}) = \{\exp(X) \,|\, X \in \mathfrak{g}\}.$$

Dico che $\mathbf{G}'$ è un intorno di e in $\mathbf{G}$. Se cosí non fosse, potremmo trovare una successione $\{g_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \complement\mathbf{G}'$ tale che $g_\nu \to e$ per $\nu \to \infty$. Scegliamo un sottospazio vettoriale reale V di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ complementare di $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Possiamo allora trovare intorni aperti U di 0 in $\mathfrak{g}$ e U' di 0 in V tali che

$$U \times U' \ni (X,Y) \to \exp(X)\exp(Y) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$$

sia un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^\infty$ su un intorno W di e in $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. In particolare, possiamo supporre, a meno di passare a una sottosuccessione estratta, che

$$g_\nu = \exp(X_\nu)\exp(Y_\nu) \quad \text{con} \quad X_\nu \in U,\, Y_\nu \in U',\ \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo:

$$X_\nu \to 0 \quad \text{e} \quad Y_\nu \to 0 \quad \text{per} \quad \nu \to \infty.$$

Inoltre, $Y_\nu \neq 0$ ed $\exp(Y_\nu) \in \mathbf{G}$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$. Sia m_ν un intero tale che

$$m_\nu \leq \|Y_\nu\|^{-1} < m_\nu + 1.$$

A meno di passare a una sottosuccessione, possiamo allora supporre che

$$\lim_{\nu\to\infty} m_\nu Y_\nu = Y \in V \setminus \{0\}.$$

Per ogni coppia di interi p, q con $q > 0$ poniamo

$$pm_\nu = qs_\nu + r_\nu \quad \text{con} \quad 0 \le r_\nu < q.$$

Poiché

$$\lim_{\nu\to\infty} r_\nu Y_\nu = 0$$

otteniamo

$$\exp\left(\frac{p}{q}Y\right) = \lim_{\nu\to\infty} \exp\left(\frac{pm_\nu}{q}Y_\nu\right) = \lim_{\nu\to\infty} (\exp(Y_\nu))^{s_\nu} \in \mathbf{G}.$$

Quindi $\mathbf{G}$ contiene gli elementi $\exp(tY)$ per ogni razionale positivo t. Poiché $\mathbf{G}$ è chiuso, $\exp(tY) \in \mathbf{G}$ per ogni t reale non negativo, e poiché $\mathbf{G}$ è un gruppo ciò vale anche per i t reali negativi. Abbiamo allora $Y \in \mathfrak{g}$, che contraddice la scelta di V. Ne segue che $\mathbf{G}'$ è un intorno aperto di e in $\mathbf{G}$ e quindi coincide con la componente connessa $\mathbf{G}_e$ dell'identità in $\mathbf{G}$. Inoltre, la dimostrazione mostra che l'esponenziale definisce un omeomorfismo dell'intorno aperto U di 0 in $\mathfrak{g}$ sull'intorno aperto $W \cap \mathbf{G}$ dell'identità in $\mathbf{G}$. □

Definizione 3.10. Se $\mathbf{G}$ è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, chiamiamo

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in \mathbf{G} \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$$

l'*algebra di Lie* del gruppo $\mathbf{G}$.

La dimensione di $\mathfrak{g}$ come spazio vettoriale reale si dice *dimensione* del gruppo $\mathbf{G}$.

Teorema 3.11 (Rappresentazione aggiunta). *Sia $\mathbf{G}$ un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ e sia $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ la sua algebra di Lie. Allora*

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1} \in \mathfrak{g} \quad \forall g \in \mathbf{G}, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Per ogni $g \in \mathbf{G}$ l'applicazione

$$\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

è un isomorfismo di algebre di Lie.

L'applicazione

$$\mathrm{Ad} : \mathbf{G} \ni g \to \mathrm{Ad}(g) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$$

è un omomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Se $X \in \mathfrak{g}$ e $g \in \mathbf{G}$, abbiamo

$$\exp(tgXg^{-1}) = g\exp(tX)g^{-1} \in \mathbf{G} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e quindi $\mathrm{Ad}(g)X \in \mathfrak{g}$. L'applicazione $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ è lineare.

Siano ora $g \in \mathbf{G}$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}[\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y] &= (\mathrm{Ad}(g)X)(\mathrm{Ad}(g)Y) - (\mathrm{Ad}(g)Y)(\mathrm{Ad}(g)X) \\ &= (gXg^{-1})(gYg^{-1}) - (gYg^{-1})(gXg^{-1}) \\ &= g(XY - YX)g^{-1} = \mathrm{Ad}(g)[X, Y]\end{aligned}$$

e quindi $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ è un automorfismo dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Infine, abbiamo:

$$\mathrm{Ad}(g_1) \circ \mathrm{Ad}(g_2)X = g_1 \left(g_2 X g_2^{-1}\right) g_1^{-1} = (g_1 g_2)X(g_1 g_2)^{-1} = \mathrm{Ad}(g_1 g_2)X$$

per ogni $X \in \mathfrak{g}$ ed ogni $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$; questo dimostra che $\mathbf{G} \ni g \to \mathrm{Ad}(g) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ è un omomorfismo di gruppi. □

PROPOSIZIONE 3.12. *Sia $\mathbf{G}$ un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ e sia $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Sia I un intervallo aperto della retta reale ed $\alpha : I \to \mathbf{G}$ un'applicazione di classe $\mathcal{C}^1$. Allora*

eq:gldck

$$\alpha^{-1}(t)\dot{\alpha}(t) \text{ e } \dot{\alpha}(t)\alpha^{-1}(t) \in \mathfrak{g} \qquad \forall t \in I. \tag{3.1}$$

Viceversa, se $A : I \to \mathfrak{g}$ è un'applicazione continua, $t_0 \in I$ e $g_0 \in \mathbf{G}$, le soluzioni $\alpha_i \in \mathcal{C}^1(I, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, $i = 1, 2$, dei problemi di Cauchy

eq:gldcj

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1(t) = \alpha_1(t)A(t) \\ \alpha_1(t_0) = g_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\alpha}_2(t) = A(t)\alpha_2(t) \\ \alpha_2(t_0) = g_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

hanno valori in $\mathbf{G}$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo dapprima che $I \ni 0$ e che $\alpha(0) = e$ sia l'identità. Sia U un intorno di 0 in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ tale che exp definisca un diffeomorfismo di U su un intorno W di e in $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. Possiamo trovare allora $\epsilon > 0$ tale che $\alpha(t) \in W$ per $|t| < \epsilon$. Sia, per $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $A(t) = \log(\alpha(t)) \in U$. L'applicazione $(-\epsilon, \epsilon) \ni t \to A(t) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ è di classe $\mathcal{C}^1$. Per il Teorema 3.9, $A(t) \in \mathfrak{g}$ per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Poiché abbiamo supposto che $\alpha(0) = e$, abbiamo $A(0) = 0$. Quindi $A(t) = A_1 t + o(t)$ per $t \to 0$, con $A_1 \in \mathfrak{g}$. Poiché

thm:gltci

$$\alpha(t) = \exp(A(t)) = \exp(A_1 t + o(t)) = e + A_1 t + o(t) \quad \text{per} \quad t \to 0,$$

abbiamo $\dot{\alpha}(0) = A_1 \in \mathfrak{g}$.

Consideriamo ora il caso generale. Se $t_0 \in I$, le curve $\alpha^{-1}(t_0)\alpha(t_0 + t)$ ed $\alpha(t_0 + t)\alpha^{-1}(t_0)$ sono entrambe definite su un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ che contiene 0 e sono l'identità per $t = 0$. Per la prima parte della dimostrazione

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\alpha^{-1}(t_0)\alpha(t_0 + t)\right)\Big|_{t=0} &= \alpha^{-1}(t_0)\dot{\alpha}(t_0) \in \mathfrak{g} \quad \text{e} \\ \frac{d}{dt}\left(\alpha(t_0 + t)\alpha^{-1}(t_0)\right)\Big|_{t=0} &= \dot{\alpha}(t_0)\alpha^{-1}(t_0) \in \mathfrak{g}.\end{aligned}$$

Per dimostrare il viceversa, consideriamo prima il caso in cui $A(t) = A$ sia costante. Allora $\alpha_1(t) = g_0 \exp((t - t_0)A)$ ed $\alpha_2(t) = \exp((t - t_0)A)g_0$ sono a valori in $\mathbf{G}$. Nel caso generale, basterà approssimare la $A(t)$ con applicazioni

costanti a tratti e considerare le soluzioni $\mathcal{C}^1$ a tratti dei problemi approssimanti. Per l'argomento svolto nel caso $A(t)$ =costante, queste soluzioni approssimanti sono a valori in $\mathbf{G}$ e quindi anche i loro limiti $\alpha_i(t)$ sono a valori in $\mathbf{G}$, in quanto abbiamo supposto che il gruppo $\mathbf{G}$ fosse chiuso. □

4. La trasformata di Cayley

DEFINIZIONE 4.1. Una matrice $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ si dice *C-non singolare* se

eq:gltda
$$\det(I+A) \neq 0. \tag{4.1}$$

Data una matrice C-non singolare $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, la matrice

eq:gltdb
$$A^\sharp = (I+A)^{-1}(I-A) \tag{4.2}$$

si dice la *trasformata di Cayley* di A.

Se $\mathbb{K}$ è o il campo dei numeri complessi, oppure quello dei numeri reali, l'insieme $\mathfrak{gl}^\sharp(n,\mathbb{K})$ è un aperto nello spazio vettoriale $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{n^2}$.

PROPOSIZIONE 4.2. *La trasformata di Cayley è un'involuzione razionale*

eq:gltdc
$$\mathfrak{gl}^\sharp(n,\mathbb{K}) \ni A \to \mathfrak{gl}^\sharp(n,\mathbb{K}). \tag{4.3}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $A \in \mathfrak{gl}^\sharp(n,\mathbb{K})$. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} I + A^\sharp &= I + (I+A)^{-1}(I-A) \\ &= [(I+A)+(I-A)] + (I+A)^{-1}(I-A) \\ &= 2(I+A)^{-1}. \end{aligned}$$

Questo dimostra che $A^\sharp \in \mathfrak{gl}^\sharp(n,\mathbb{K})$. In modo analogo, otteniamo:

$$\begin{aligned} I - A^\sharp &= I - (I+A)^{-1}(I-A) \\ &= [(I+A)-(I-A)] + (I+A)^{-1}(I-A) \\ &= 2A(I+A)^{-1}. \end{aligned}$$

Quindi

$$A^{\sharp\sharp} = (I+A^\sharp)^{-1}(I-A^\sharp) = \left(\frac{1}{2}(I+A)\right)\left(2A(I+A)^{-1}\right) = A.$$

□

OSSERVAZIONE 4.3. La funzione razionale $f(\lambda) = \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$ è un'involuzione della retta proiettiva $\mathbb{KP}^1$ che scambia tra loro $\lambda = -1$ e $\lambda = \infty$. Essa definisce una bigezione della circonferenza $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, privata del punto $z = -1$ sulla retta immaginaria $i\mathbb{R}$. Quindi, a meno di moltiplicazione per l'unità immaginaria, rappresenta la proiezione stereografica di Tolomeo della circonferenza sulla retta.

Possiamo quindi considerare la seguente come una generalizzazione al gruppo unitario della proiezione stereografica:

PROPOSIZIONE 4.4. *La trasformata di Cayley definisce un omeomorfismo di*

$$\mathbf{U}^\sharp(n) = \{u \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \mid u^* u = e\} \cap \mathfrak{gl}^\sharp(n,\mathbb{C})$$

su

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid X^* + X = 0\} \subset \mathfrak{gl}^\sharp(n,\mathbb{C}).$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che le matrici di $\mathfrak{u}(n)$ appartengono tutte a $\mathfrak{gl}^\sharp(n,\mathbb{C})$ perché hanno autovalori puramente immaginari.

Se $u \in \mathbf{U}^\sharp(n)$, abbiamo

$$\begin{aligned}[u^\sharp]^* &= [(I+u)^{-1}(I-u)]^* = (I-u)^*[(I+u)^{-1}]^* = (I-u^*)(I+u^*)^{-1} \\ &= (I-u^{-1})(I+u^{-1})^{-1} = [(u-I)u^{-1}][(u+I)u^{-1}]^{-1} \\ &= (u-I)(u^{-1}u)(I+u)^{-1} = -(I+u)^{-1}(I+u) = -u^\sharp.\end{aligned}$$

Viceversa, se $X \in \mathfrak{u}(n)$, otteniamo:

$$\begin{aligned}[X^\sharp]^* X^\sharp &= (I-X)^*[(I+X)^{-1}]^*(I-X)[(I+X)^{-1}] \\ &= (I-X^*)(I+X^*)^{-1}(I-X)(I+X)^{-1} \\ &= (I+X)(I-X)^{-1}(I-X)(I+X)^{-1} = I.\end{aligned}$$

□

Poiché la trasformata di Cayley di una matrice reale è ancora una matrice reale, otteniamo ancora:

PROPOSIZIONE 4.5. *La trasformata di Cayley definisce un omeomorfismo di*

$$\mathbf{SO}^\sharp(n) = \{u \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) \mid {}^t u\, u = e\} \cap \mathfrak{gl}^\sharp(n,\mathbb{R})$$

su

$$\mathfrak{o}^\sharp(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid {}^t X + X = 0\} \cap \mathfrak{gl}^\sharp(n,\mathbb{R}).$$

OSSERVAZIONE 4.6. Consideriamo il gruppo $\mathbf{SU}(2)$, formato dalle matrici di $\mathbf{U}(2)$ con determinante uguale ad 1:

$$\mathbf{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \subset \mathbf{GL}(2,\mathbb{C}).$$

Esso è un gruppo topologico omeomorfo alla sfera $\mathbb{S}^3$. L'intersezione $\mathbf{SU}^\sharp(2) = \mathbf{SU}(2) \cap \mathfrak{gl}^\sharp(2,\mathbb{C})$ consiste della sola matrice $-I_2$, ed è quindi omeomorfa alla sfera S^3 privata d'un punto. L'algebra di Lie di $\mathbf{SU}(2)$ è

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) \mid X + X^* = 0 \text{ e } \operatorname{trac}(X) = 0\}$$

ed è tutta contenuta in $\mathfrak{gl}^\sharp(2,\mathbb{C})$, perché tutte le matrici di $\mathfrak{su}(2)$ hanno autovalori puramente immaginari. La trasformata di Cayley definisce allora la proiezione stereografica

$$S^3 \setminus p_0 \simeq \mathbf{SU}^\sharp(2) = \mathbf{SU}(2) \setminus \{-I_2\} \to \mathfrak{su}(2) \simeq \mathbb{R}^3.$$

CAPITOLO 7

Gruppi lineari compatti

cp:glq

In questo capitolo studiamo la struttura topologica di alcuni gruppi lineari compatti.

Indicheremo con I_n, o per semplicità con I, la matrice unitaria $n \times n$ e con J_n, o per semplicità con J, la matrice antisimmetrica $(2n) \times (2n)$:

$$J_n = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo la definizione dei seguenti gruppi compatti:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}(n) &= \{u \in \mathbf{GL}(n,\mathbf{C}) \mid u^* u = I_n\} && (\textit{gruppo unitario}) \\
\mathbf{SU}(n) &= \{u \in \mathbf{U}(n) \mid \det(u) = 1\} && (\textit{gruppo speciale unitario}) \\
\mathbf{O}(n) &= \{a \in \mathbf{GL}(n,\mathbf{R}) \mid {}^t u\, u = I_n\} \\
&= \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{GL}(n,\mathbf{R}) && (\textit{gruppo ortogonale}) \\
\mathbf{SO}(n) &= \{a \in \mathbf{O}(n) \mid \det(u) = 1\} && (\textit{gruppo speciale ortogonale}) \\
\mathbf{Sp}(n) &= \{g \in \mathbf{U}(2n) \mid {}^t g\, J\, g = J\} && \begin{array}{l}(\textit{gruppo quaternonico unitario} \\ \text{o } \textit{gruppo simplettico compatto})\end{array}
\end{aligned}$$

1. Proprietà topologiche di $\mathbf{U}(n)$

lm:quataa

LEMMA 1.1. *Ogni matrice di $\mathbf{U}(n)$ è diagonalizzabile in una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$. I suoi autovalori hanno tutti modulo uguale a 1.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $u \in \mathbf{U}(n)$. Poiché il campo $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, u ha almeno un autovalore $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, con autovettore ϵ_1, che possiamo normalizzare in modo che risulti $|\epsilon_1| = 1$.

Se $v \in \mathbb{C}^n$ e $v \in \epsilon_1^\perp$, allora

$$(u(v)|\epsilon_1) = \lambda^{-1}(u(v)|u(\epsilon_1)) = \lambda^{-1}(v|\epsilon_1) = 0.$$

Quindi $u(\epsilon_1^\perp) = \epsilon_1^\perp$ e la restrizione di u all'iperpiano $\epsilon_1^\perp$ è ancora un'applicazione unitaria su uno spazio vettoriale complesso di dimensione $n-1$. L'esistenza di una base ortonormale di autovettori di u segue allora per ricorrenza.

Infine, se λ è un autovalore di $u \in \mathbf{U}(n)$ e $v \neq 0$ un autovettore di u relativo all'autovalore λ, allora

$$|v|^2 = (v|v) = (u(v)|u(v)) = (\lambda v|\lambda v) = |\lambda|^2 |v|^2$$

implica che $|\lambda| = 1$. □

TEOREMA 1.2. *Il gruppo* $\mathbf{U}(n)$ *è un sottogruppo chiuso, compatto e connesso per archi di* $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. *La sua algebra di Lie* $\mathfrak{u}(n)$ *è*

$$(*) \qquad \mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \,|\, X + X^* = 0\}$$

ed ha dimensione reale n^2. *L'applicazione esponenziale*

$$\mathfrak{u}(n) \ni X \to \exp(X) \in \mathbf{U}(n)$$

è surgettiva.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione $\phi : \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \ni a \to a^*a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ è continua e quindi $U(n) = \phi^{-1}(e)$ è un chiuso, contenuto nel compatto $\{a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \,|\, \|a\| = 1\}$ e quindi compatto.

Per ogni $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, risulta $(\exp(X))^* = \exp(X^*)$.

Infatti, è $(P(X))^* = P(X^*)$ per ogni polinomio P a coefficienti reali e quindi, poiché la $X \to X^*$ è continua abbiamo:

$$\begin{aligned}(\exp(X))^* &= \left(\lim_{\nu\to\infty} \sum_{h=0}^{\nu} \frac{X^n}{n!}\right)^* = \lim_{\nu\to\infty} \left(\sum_{h=0}^{\nu} \frac{X^n}{n!}\right)^* \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \sum_{h=0}^{\nu} \frac{(X^*)^n}{n!} = \exp(X^*).\end{aligned}$$

L'algebra di Lie $\mathfrak{u}(n)$ di $\mathbf{U}(n)$ è caratterizzata da

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid (\exp(tX))^* \exp(tX) = e,\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Se $X \in \mathfrak{u}(n)$, differenziando l'identità $\exp(tX^*)\exp(tX) = e$ in $t = 0$ otteniamo

$$X^* + X = 0.$$

Supponiamo viceversa che sia $X + X^* = 0$. Consideriamo l'applicazione differenziabile

$$\alpha : \mathbb{R} \ni t \to \exp(tX^*)\exp(tX) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}).$$

Differenziando otteniamo:

$$\alpha'(t) = \exp(tX^*)(X^* + X)\exp(tX) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$\alpha(t) = \text{costante} = \alpha(0) = e$$

dimostra che $X \in \mathfrak{u}(n)$.

Dimostriamo ora che l'applicazione $\exp : \mathfrak{u}(n) \to \mathbf{U}(n)$ è surgettiva. Fissiamo $u \in \mathbf{U}(n)$. Per il Lemma 1.1 possiamo trovare una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$, e quindi una matrice $a \in \mathbf{U}(n)$, tale che

$$u' = aua^{-1} = aua^* = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\theta_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

Allora, posto

$$A = \begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i\theta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\theta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i\theta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & i\theta_n \end{pmatrix}$$

abbiamo $A \in \mathfrak{u}(n)$ e $\exp(A) = u'$. Allora, poiché $a^* = a^{-1} \in \mathbf{U}(n)$, abbiamo:

$$a^*Aa \in \mathfrak{u}(n) \quad \text{e} \quad \exp(a^*Aa) = a^* \exp(A)a = a^*u'a = u.$$

Essendo immagine dello spazio vettoriale $\mathfrak{u}(n)$ mediante l'applicazione continua exp, il gruppo $\mathbf{U}(n)$ è connesso per archi. □

2. Il gruppo speciale unitario

L'applicazione

$$\mathbf{U}(n) \ni u \to \det(u) \in \mathbf{S}^1 \subset \mathbb{C}$$

è un omomorfismo continuo del gruppo unitario nel gruppo moltiplicativo $\mathbf{S}^1$ dei numeri complessi di modulo 1. Il suo nucleo

$$\mathbf{SU}(n) = \{u \in \mathbf{U}(n) \,|\, \det(u) = 1\}$$

è un sottogruppo chiuso normale di $\mathbf{U}(n)$, che si dice *gruppo unitario speciale* di ordine n.

TEOREMA 2.1. *L'algebra di Lie di* $\mathbf{SU}(n)$ *è la sottoalgebra di Lie* $\mathfrak{su}(n)$ *di* $\mathfrak{u}(n)$*, di dimensione* $n^2 - 1$*, formata dalle matrici di* $\mathfrak{u}(n)$ *che hanno traccia nulla:*

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \operatorname{trac}(X) = 0\}.$$

L'applicazione

$$\mathfrak{su}(n) \ni X \to \exp(X) \in \mathbf{SU}(n)$$

è surgettiva. Il gruppo $\mathbf{SU}(n)$ *è compatto e connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dalla

$$\det(\exp(X)) = e^{\operatorname{trac}(X)}.$$

Infatti, se $X \in \mathfrak{su}(n)$, da $\exp(tX) \in \mathbf{SU}(n)$ per ogni numero reale t, segue che:

$$\begin{cases} X + X^* = 0 \\ \operatorname{trac}(tX) = t \cdot \operatorname{trac}(X) = 2k\pi i \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{con} \quad k = k(t) \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La seconda relazione implica che $\operatorname{trac}(X) = 0$.

Sia ora $u \in \mathbf{SU}(n)$. Allora possiamo trovare $a \in \mathbf{U}(n)$ tale che

$$aua^{-1} = aua^* = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\theta_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

La condizione $\det(u) = 1$ dà allora

$$\exp(i(\theta_1 + ... + \theta_n)) = 1$$

e quindi

$$\exp(i\theta_n) = \exp(-i(\theta_1 + ... + \theta_{n-1})).$$

Posto

$$U = \begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & i\theta_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\theta_3 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & i\theta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -i(\theta_1+...+\theta_{n-1}) \end{pmatrix}$$

abbiamo $U \in \mathfrak{su}(n)$ e quindi $a^*Ua = a^*U(a^*)^{-1} \in \mathfrak{su}(n)$ perché $a^* = a^{-1} \in \mathbf{U}(n)$ e la traccia è invariante rispetto al coniugio. Abbiamo quindi

$$\exp(a^*Ua) = a^* \exp(U)a = u.$$

L'applicazione $\mathfrak{u}(n) \ni X \to \mathrm{trac}(X) \in \mathbb{R}$ è un funzionale lineare non identicamente nullo su $\mathfrak{u}(n)$ e quindi $\mathfrak{su}(n)$ ha dimensione n^2-1. Il gruppo $\mathbf{SU}(n)$ è compatto perché è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{U}(n)$ e connesso per archi perché è immagine continua, mediante l'applicazione esponenziale, della propria algebra di Lie $\mathfrak{su}(n)$. □

TEOREMA 2.2. *Per ogni $n \geq 2$ il gruppo $\mathbf{U}(n)$ è omeomorfo al prodotto topologico $\mathbf{SU}(n) \times S^1$.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $D_n(\lambda)$ la matrice $n \times n$:

$$D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiamo allora l'omeomorfismo cercato mediante:

$$\mathbf{SU}(n) \times S^1 \ni (g, \lambda) \to D_n(\lambda)\, g \in \mathbf{U}(n)\,;$$

il suo inverso è dato da:

$$\mathbf{U}(n) \ni g \to (D_n(1/\det g)\, g, \det g) \in \mathbf{SU}(n) \times S^1\,.$$

□

3. Il gruppo speciale lineare complesso

Ricordiamo che il *gruppo speciale lineare complesso* $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$, è il sottogruppo normale di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ delle matrici di determinante 1. Esso è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$.

TEOREMA 3.1. *L'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ di $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ è la sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, di dimensione complessa $n^2 - 1$, e quindi dimensione reale $2(n^2 - 1)$, formata dalle matrici complesse a traccia nulla:*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \mathrm{trac}(X) = 0\}.$$

Il gruppo $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$ *è connesso per archi. Siano*

$$\mathfrak{p}_0(n) = \{X \in \mathfrak{p}(n) \mid \mathrm{trac}(X) = 0\},$$
$$\mathbf{SP}_+(n) = \{p \in \mathbf{P}_+(n) \,|\, \det(p) = 1\}.$$

Allora

$$\exp(\mathfrak{p}_0(n)) = \mathbf{SP}_+(n).$$

L'applicazione

$$(*) \qquad \mathbf{SU}(n) \times \mathbf{SP}_+(n) \ni (u,p) \to u \circ p \in \mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$$

è un omeomorfismo tra $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$ *ed* $\mathbf{SU}(n) \times \mathbf{SP}_+(n)$. *Il gruppo topologico* $\mathbf{SU}(n)$ *è omeomorfo al prodotto topologico* $\mathbf{SU}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$.

DIMOSTRAZIONE. Le prime affermazioni si deducono facilmente dal Teorema 1.1 del Capitolo 6 (decomposizione di Cartan in $\mathbf{GL}(n,\mathbf{C})$) e da considerazioni analoghe a quelle svolte nella dimostrazione del teorema precedente. Infatti, ogni $a \in \mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$ si può scrivere in modo unico come il prodotto

$$a = u \circ p$$

di un elemento $u \in \mathbf{U}(n)$ e di un elemento $p \in \mathbf{P}_+(n)$. Poiché

$$\det(a) = \det(u) \cdot \det(p) = 1$$

e il determinante di p è un numero reale positivo, mentre il determinante di u è un numero complesso di modulo 1, otteniamo che

$$\det(u) = \det(p) = 1.$$

Quindi la $(*)$ è un omeomorfismo. L'ultima affermazione segue dal fatto che $\mathfrak{p}_0(n)$ è un iperpiano dello spazio vettoriale reale $\mathfrak{p}(n)$ ed exp definisce un omeomorfismo di $\mathfrak{p}_0(n)$ su $\mathbf{SP}_+(n)$. □

4. I gruppi $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$

Il gruppo $\mathbf{O}(n)$ (*gruppo ortogonale di ordine* n) è il gruppo delle isometrie lineari e $\mathbf{SO}(n)$ (*gruppo speciale ortogonale o gruppo delle rotazioni di ordine* n) quello delle isometrie lineari di determinante 1 dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$.

Osserviamo che $\mathbf{SO}(n)$ è un sottogruppo normale di indice 2 di $\mathbf{O}(n)$. Poiché $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, anche $\mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{SO}(n)$ sono sottogruppi chiusi di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$.

TEOREMA 4.1. *I due gruppi* $\mathbf{O}(n)$ *e* $\mathbf{SO}(n)$ *hanno la stessa algebra di Lie, di dimensione reale* $n(n-1)/2$,

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid X + {}^tX = 0\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia X un elemento dell'algebra di Lie $\mathfrak{o}(n)$ di $\mathbf{O}(n)$. Poiché $\exp(tX) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, abbiamo $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Risulta allora

$$\det(tX) = e^{t\cdot\mathrm{trac}(X)} \text{ reale e } > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$\exp(tX) \in \mathbf{SO}(n) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

dimostra che $\mathbf{O}(n)$ e $\mathbf{SO}(n)$ hanno la stessa algebra di Lie. Abbiamo poi

$$I = {}^t(\exp(tX)) \exp(tX) = \exp(t \cdot {}^t X) \exp(tX) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Derivando rispetto a t otteniamo la relazione

$$\exp(t \cdot {}^t X) \left({}^t X + X\right) \exp(tX) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Da questa si ricava che condizione necessaria e sufficiente affinché $X \in \mathfrak{o}(n)$ è che sia ${}^t X + X = 0$. □

TEOREMA 4.2. *L'applicazione*

$$\mathfrak{o}(n) \ni X \to \exp(X) \in \mathbf{SO}(n)$$

è surgettiva.

DIMOSTRAZIONE. Data una rotazione $a \in \mathbf{SO}(n)$, possiamo decomporre $\mathbb{R}^n$ in somma diretta di sottospazi a-invarianti, due a due ortogonali,

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_m$$

tale che ogni sottospazio V_j abbia dimensione minore o uguale a 2 e la restrizione di a a V_j sia l'identità se V_j ha dimensione 1. Su ciascuno dei sottospazi V_j di dimensione 2 la a definisce una rotazione dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^2$. Sarà quindi sufficiente dimostrare che

$$\mathfrak{o}(2) \ni X \to \mathbf{SO}(2)$$

è surgettiva. Un elemento di $\mathfrak{o}(2)$ è una matrice della forma

$$A(\theta) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Poiché

$$A(\theta)^{2h} = \left(\begin{smallmatrix} (-1)^h \theta^{2h} & 0 \\ 0 & (-1)^h \theta^{2h} \end{smallmatrix}\right)$$

e

$$A(\theta)^{2h+1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & (-1)^h \theta^{2h+1} \\ -(-1)^h \theta^{2h+1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

otteniamo

$$\exp(A(\theta)) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right).$$

Ciò dimostra che $\exp : \mathfrak{o}(2) \to \mathbf{SO}(2)$ è surgettiva. La dimostrazione è completa. □

TEOREMA 4.3. $\mathbf{SO}(n)$ *è un gruppo compatto e connesso per archi. Il gruppo* $\mathbf{O}(n)$ *è unione di due componenti connesse, ciascuna omeomorfa a* $\mathbf{SO}(n)$.

DIMOSTRAZIONE. I gruppi $\mathbf{SO}(n)$ e $\mathbf{O}(n)$ sono compatti perché sottogruppi chiusi del gruppo compatto $\mathbf{U}(n)$:

$$\mathbf{SO}(n) = \mathbf{SU}(n) \cap \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}), \quad \mathbf{O}(n) = \mathbf{U}(n) \cap \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}).$$

Inoltre $\mathbf{SO}(n)$ è connesso per archi perché immagine mediante l'esponenziale dello spazio vettoriale $\mathfrak{o}(n)$.

In quanto immagine dell'algebra di Lie di $\mathfrak{o}(n)$ mediante l'applicazione esponenziale, $\mathbf{SO}(n)$ è la componente connessa dell'identità in $\mathbf{O}(n)$. La moltiplicazione a sinistra per la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

è un omeomorfismo di $\mathbf{SO}(n)$ sul suo complementare $\complement\mathbf{SO}(n)$ in $\mathbf{O}(n)$. Quindi $\mathbf{O}(n)$ ha esattamente due componenti connesse, omeomorfe a $\mathbf{SO}(n)$. □

Osservazione 4.4. Il gruppo $\mathbf{SO}(1)$ è il gruppo banale $\{I\}$. L'applicazione

$$\mathbf{SO}(2) \ni a \to a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

definisce un omeomorfismo di $\mathbf{SO}(2)$ su S^1.

5. L'omomorfismo canonico $\mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SO}(3)$

Le algebre di Lie $\mathfrak{o}(3)$ e $\mathfrak{su}(2)$ sono algebre di Lie reali di dimensione reale 3. Abbiamo

$$\mathfrak{o}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & -z \\ -y & z & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix} \,|\, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Poniamo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \; B_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora A_1, A_2, A_3 formano una base di $\mathfrak{o}(3)$ e B_1, B_2, B_3 una base di $\mathfrak{su}(2)$ e il prodotto di Lie delle due algebre è descritto nelle due basi dalle tabelle:

$$\begin{cases} [A_j, A_h] = A_k \\ [B_j, B_h] = B_k \end{cases} \Leftrightarrow (j, h, k) \text{ è una permutazione positiva di } \{1, 2, 3\}.$$

Le due algebre sono quindi isomorfe e isomorfe all'algebra di Lie definita su $\mathbb{R}^3$ dal prodotto vettore.

Indichiamo con

$$\mathbf{s} : \mathfrak{o}(3) \to \mathfrak{su}(2)$$

l'isomorfismo di algebre di Lie che fa corrispondere ad $A_j \in \mathfrak{o}(3)$ l'elemento $B_j \in \mathfrak{su}(2)$.

Per descrivere una rappresentazione di $\mathbf{SU}(2)$ nel gruppo delle rotazioni di $\mathbb{R}^3$, introduciamo l'isomorfismo $\mathbb{R}$-lineare:

$$\lambda : \mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2).$$

Abbiamo

$$\mathbf{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \,\middle|\, (\alpha, \beta) \in S^3 \right\} \simeq S^3 \subset \mathbb{C}^2.$$

Facciamo operare $\mathbf{SU}(2)$ su $\mathfrak{su}(2)$ mediante la rappresentazione aggiunta:

$$\mathbf{SU}(2) \times \mathfrak{su}(2) \ni (u, X) \to \mathrm{Ad}(u)X = uXu^{-1} \in \mathfrak{su}(2).$$

L'isomorfismo λ ci permette di definire una rappresentazione lineare

$$\rho : \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{GL}(3, \mathbb{R})$$

mediante

$$\rho(u)v = \lambda^{-1}(\mathrm{ad}(u)\lambda(v)) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

LEMMA 5.1. *Per ogni $u \in \mathbf{SU}(2)$, è $\rho(u) \in \mathbf{SO}(3)$.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che

$$|v|^2 = \det\lambda(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

Abbiamo perciò

$$|\rho(u)v|^2 = \det(u\lambda(v)u^{-1}) = \det\lambda(v) = |v|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

□

tm:glceb

TEOREMA 5.2. *L'applicazione*

$$\rho : \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SO}(3)$$

è un omomorfismo di gruppi surgettivo. Il suo nucleo è il sottogruppo normale

$$\{\pm I_2\} \subset \mathbf{SU}(2).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $a, b \in \mathbf{SU}(2)$. Allora

$$\begin{aligned} \rho(a) \circ \rho(b)v =& \rho(a)(\lambda^{-1}\mathrm{Ad}(b)\lambda(v)) \\ =& \lambda^{-1} \circ \mathrm{Ad}(a) \circ \lambda \circ \lambda^{-1}\mathrm{Ad}(b)\lambda(v) \\ =& \lambda^{-1} \circ \mathrm{Ad}(a) \circ \mathrm{Ad}(b)\lambda(v) \\ =& \lambda^{-1} \circ \mathrm{Ad}(ab)\lambda(v) \\ =& \rho(ab)v \qquad \forall v \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Ciò dimostra che ρ è un omomorfismo. Calcoliamone il nucleo. Esso è formato dalle trasformazioni $u \in \mathbf{SU}(2)$ tali che

$$\mathrm{Ad}(u)X = X \quad \forall X \in \mathfrak{su}(2),$$

cioè

$$[u, X] = uX - Xu = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{su}(2).$$

Scrivendo queste identità con $X = B_j$, per $j = 1, 2, 3$, si ottiene, per $u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, che

$$\beta = 0,\ \alpha = \pm 1.$$

Per completare la dimostrazione, basta osservare che la trasformazione $\rho : \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SO}(3)$ può essere definita dal diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{su}(2) & \xrightarrow{\exp} & \mathbf{SU}(2) \\ {\scriptstyle \mathbf{s}}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ \mathfrak{o}(3) & \xrightarrow[\exp]{} & \mathbf{SO}(3). \end{array}$$

Da questo diagramma otteniamo immediatamente che ρ è surgettiva in quanto

$$\rho \circ \exp|_{\mathfrak{su}(2)} \circ \mathbf{s}^{-1} = \exp|_{\mathfrak{o}(3)}$$

è surgettiva. □

TEOREMA 5.3. *Il gruppo topologico* $\mathbf{SO}(3)$ *è omeomorfo allo spazio proiettivo* $\mathbb{RP}^3$.

DIMOSTRAZIONE. Il quoziente iniettivo della rappresentazione $\rho : \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SO}(3)$ dà un omeomorfismo

$$\mathbf{SU}(2)/_{\{\pm I_2\}} \to \mathbf{SO}(3).$$

Il quoziente $\mathbf{SU}(2)/_{\{\pm I_2\}}$ è omeomorfo al quoziente di $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ rispetto alla mappa antipodale

$$S^3 \ni \xi \to -\xi \in S^3$$

e quindi allo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^3$. □

OSSERVAZIONE 5.4. L'omomorfismo canonico $\mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SO}(3)$ ha un importante significato fisico: il fattore $1/2$ che compare nell'isomorfismo $\mathbf{s}$ tra l'algebra di Lie delle matrici 3×3 antisimmetriche e l'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$ delle matrici antihermitiane 2×2 a traccia nulla si può interpretare come lo *spin* dell'elettrone.

5.1. Angoli di Eulero. Per ricavare la surgettività dell'applicazione $\rho : \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SO}(3)$ possiamo utilizzare la rappresentazione di $\mathbf{SO}(3)$ mediante gli *angoli di Eulero*. Consideriamo gli omomorfismi

$$\tau, \sigma : S^1 \to \mathbf{SO}(3)$$

definiti da

$$\tau(e^{i\phi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \sigma(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(rotazioni intorno all'asse x e rotazioni intorno all'asse y).

LEMMA 5.5. *L'applicazione*

$$\alpha : S^1 \times S^1 \times S^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) \to \tau(e^{i\theta_1}) \circ \sigma(e^{i\theta_2}) \circ \tau(e^{i\theta_3}) \in \mathbf{SO}(3)$$

è surgettiva.

DIMOSTRAZIONE. Sia e_1, e_2, e_3 la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Un'applicazione $a \in \mathbf{SO}(3)$ è completamente determinata dall'immagine dei vettori e_1, e_2. Poniamo $\epsilon_j = a(e_j)$ per $j = 1, 2$. Poiché $|\epsilon_1| = 1$, abbiamo per opportuni $\phi, \psi \in \mathbb{R}$:

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\phi \sin\psi \\ \cos\phi \sin\psi \end{pmatrix}$$

(coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$). Una base ortogonale di $\epsilon_1^\perp$ è data dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\phi \\ -\sin\phi \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\sin\psi \\ \sin\phi\cos\psi \\ \cos\phi\cos\psi \end{pmatrix}.$$

Quindi $\epsilon_2 = v_1 \cos\theta + v_2 \sin\theta$ per un opportuno $\theta \in \mathbb{R}$. Chiaramente

$$a = \alpha(e^{-i\phi}, e^{i\psi}, e^{i\theta}).$$

□

OSSERVAZIONE 5.6. In generale gli angoli di Eulero si riferiscono a una scelta di ϕ, ψ, θ con $0 \le \psi < \pi$ e $0 \le \phi, \theta < 2\pi$.

Definiamo ora

$$\hat\tau, \hat\sigma : S^1 \to \mathbf{SU}(2)$$

mediante

$$\hat\tau(e^{i\phi}) = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \qquad \hat\sigma(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Sia

$$\hat\alpha : S^1 \times S^1 \times S^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) \to \hat\tau(e^{i\theta_1}) \circ \hat\sigma(e^{i\theta_2}) \circ \hat\tau(e^{i\theta_3}) \in \mathbf{SU}(2).$$

Otteniamo allora il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 \times S^1 & = & S^1 \times S^1 \times S^1 \\ {\scriptstyle\hat\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ \mathbf{SU}(2) & \xrightarrow[\rho]{} & \mathbf{SO}(3). \end{array}$$

6. Il gruppo quaternonico unitario $\mathbf{Sp}(n)$

Abbiamo definito il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ come il gruppo di tutte le matrici complesse unitarie a di ordine $2n$ che soddisfano ${}^t a\, J\, a = J$, ove $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$.

Il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ si può identificare al gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti quaternioni che preservano il prodotto scalare canonico di $\mathbb{H}^n$.

Ricordiamo che il corpo (non commutativo) $\mathbb{H}$ dei quaternioni di Hamilton si può identificare all'anello associativo delle matrici 2×2 a coefficienti complessi della forma $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ con $z, w \in \mathbb{C}$. Un numero complesso z si rappresenta con la matrice $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$. Indichiamo con j la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Possiamo allora scrivere il quaternione $\mathbf{q}$ mediante:

$$\mathbf{q} = z + wj = z + j\bar{w}.$$

Il prodotto di due quaternioni si può esprimere mediante:

$$(z_1 + w_1 j) \cdot (z_2 + w_2 j) = (z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2) + (z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2) j \quad \forall z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}.$$

Questa formula si ricava immediatamente da:

$$jz = \bar{z} j \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad \text{e} \qquad j^2 = -1.$$

Il coniugato di un quaternione (corrispondente all'aggiunta della matrice con cui è definito) è dato da:

$$\overline{z + wj} = \bar{z} - wj.$$

Indichiamo con σ l'isomorfismo:

$$\sigma : \mathbb{C}^{2n} \ni (z^h, w^h)_{1 \le h \le n} \longrightarrow (z^h + j\, w^h)_{1 \le h \le n} \in \mathbb{H}^n$$

e con

$$\varsigma : \mathbb{C}^{2n} \ni (z^h, w^h) \to (\bar{z}^h, \bar{w}^h) \in \mathbb{C}^{2n}$$

il coniugio. Allora, indicando con $(\cdot j)$ la moltiplicazione a destra di un vettore di $\mathbb{H}^n$ per il quaternione j, abbiamo:

$$\sigma^{-1} \circ (\cdot j) \circ \sigma = -J \circ \varsigma = \begin{pmatrix} & -I_n \\ I_n & \end{pmatrix} \circ \varsigma\,.$$

Consideriamo una matrice $B = C + jD = (C_{hk} + jD_{hk})_{1 \le h,k \le n}$ con coefficienti $C_{hk} + jD_{hk} \in \mathbb{H}$, $C_{hk}, D_{hk} \in \mathbb{C}$. Se $u = v + jw \in \mathbb{H}^n$, con $v, w \in \mathbb{C}^n$, abbiamo

$$Bu = (Cv - \bar{D}w) + j(Dv + \bar{C}w).$$

Ad essa risulta dunque associata la matrice $\tilde{B} \in \mathfrak{M}(2n, 2n; \mathbb{C})$ definita da

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} C & D \\ -\bar{D} & \bar{C} \end{pmatrix}.$$

Le matrici di questa forma sono tutte e sole le matrici $2n \times 2n$ complesse A che soddisfano la:

$$(*) \qquad AJ = J\bar{A}.$$

Esse formano una sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C})$, che si indica con $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{H})$.

DEFINIZIONE 6.1. Gli elementi invertibili di $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{H})$ formano il *gruppo lineare di ordine n sui quaternioni*, che indichiamo con $\mathbf{GL}(n,\mathbb{H})$.

Consideriamo ora un elemento $g \in \mathbf{Sp}(n)$. Esso è rappresentato da una matrice complessa unitaria $(2n)\times(2n)$, che verifica ${}^t g\, J\, g = J$. Poiché ${}^t g = \bar{g}^{-1}$, sostituendo otteniamo $(*)$.

Abbiamo ottenuto un'inclusione naturale: $\mathbf{Sp}(n) \hookrightarrow \mathbf{GL}(n,\mathbb{H})$.

Possiamo quindi rendere esplicita la caratterizzazione $\mathbf{Sp}(n)$ come il gruppo delle trasformazioni $\mathbb{H}$-lineari a destra su $\mathbb{H}^n$, che lasciano invariato il prodotto scalare sui quaternioni:

$$(**) \qquad (u_1|u_2)_{\mathbb{H}} = \sum_{h=1}^{n} u_1^h \bar{u}_2^h .$$

Se scriviamo le componenti u_l^h nella forma $v_l^h + j w_l^h$ con $v_l^h, w_l^h \in \mathbb{C}$ per $l = 1,2$, troviamo per il prodotto scalare sui quaternioni l'espressione:

$$\begin{aligned}(u_1|u_2)_{\mathbb{H}} &= \sum_{h=1}^{n} v_1^h \bar{v}_2^h + \bar{w}_1^h w_2^h + j \sum_{h=1}^{n} w_1^h \bar{v}_2^h - \bar{v}_1^h w_2^h \\ &= \left(\begin{smallmatrix}\bar{v}_1\\ w_1\end{smallmatrix}\right)^* I_{2n} \left(\begin{smallmatrix}\bar{v}_2\\ w_2\end{smallmatrix}\right) + \left[{}^t\left(\begin{smallmatrix}\bar{v}_1\\ w_1\end{smallmatrix}\right) J \left(\begin{smallmatrix}\bar{v}_2\\ w_2\end{smallmatrix}\right)\right] j ,\end{aligned}$$

da cui segue che $\mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})$ consiste esattamente delle matrici di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{H})$ che preservano il prodotto $(**)$.

TEOREMA 6.2. *Per ogni intero $n \geq 1$ il gruppo $\mathbf{Sp}(n)$ è compatto e connesso per archi. La sua algebra di Lie è*

$$\mathfrak{sp}(n) = \{ X \in \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C}) \,|\, {}^t X J + J X = 0\,,\ X^* + X = 0 \}.$$

L'esponenziale definisce un'applicazione surgettiva

$$\exp : \mathfrak{sp}(n) \to \mathbf{Sp}(n)\,.$$

L'algebra di Lie $\mathfrak{sp}(n)$ ha dimensione $n(2n+1)$.

DIMOSTRAZIONE. $\mathbf{Sp}(n)$ è compatto perché è un sottospazio chiuso di $\mathbf{U}(2n)$, che è compatto.

La caratterizzazione della sua algebra di Lie $\mathfrak{sp}(n)$ si ottiene con argomenti simili a quelli utilizzati in precedenza: si osserva che $\mathfrak{sp}(n) \subset \mathfrak{u}(2n)$ e che, posto $\gamma(t) = \exp(t^t X)\, J\, \exp(tX)$, risulta:

$$\gamma'(t) \,=\, \exp(t^t X)\, (J^t X \,+\, X\, J)\, \exp(tX).$$

Da questa si ottiene facilmente che la condizione $J^t X + X\, J = 0$ è necessaria e sufficiente affinché una $X \in \mathfrak{u}(2n)$ appartenga a $\mathfrak{sp}(n)$. Moltiplicando a sinistra per J e calcolando la traccia troviamo che $\mathrm{trac}(X) = 0$ (e quindi $X \in \mathfrak{su}(2n)$) e moltiplicando a destra e a sinistra per J troviamo la condizione equivalente ${}^t X J + J X = 0$.

Osserviamo infine che *per ogni* $g \in \mathbf{Sp}(n)$ *possiamo trovare* $a \in \mathbf{Sp}(n)$ *tale che*

$$(*) \qquad a\,g\,a^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & e^{i\theta_n} & & & & \\ & & & e^{-i\theta_1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & e^{-i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

Sia infatti λ_1 un autovalore di g e sia v_1 un suo autovettore con $|v_1| = 1$. Abbiamo allora:

$$a(J\bar{v}_1) = J\bar{a}\bar{v}_1 = J(\bar{\lambda}_1 v_1) = \bar{\lambda}_1(J\bar{v}_1)\,.$$

Ragionando per ricorrenza, troviamo una base ortonormale di $\mathbb{C}^{2n}$ della forma:

$$v_1, \ldots, v_n, J(v_1), \ldots, J(v_n)\,.$$

I suoi vettori formano le colonne della matrice $a \in \mathbf{Sp}(n)$ per cui $a^{-1}ga$ ha la forma diagonale $(*)$.

La matrice

$$X = a^{-1} \begin{pmatrix} i\theta_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & i\theta_n & & & & \\ & & & -i\theta_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -i\theta_n \end{pmatrix} a$$

appartiene a $\mathfrak{sp}(n)$ ed $\exp(X) = g$.

Ciò dimostra la surgettività dell'esponenziale e quindi il fatto che $\mathbf{Sp}(n)$ è connesso per archi. □

7. Sfere e gruppi compatti

Sia $\mathbb{K}$ uno dei corpi $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e indichiamo con $e_1, e_2, \ldots, e_n$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Possiamo allora identificare $\mathbf{O}(n-1)$ (risp. $\mathbf{SO}(n-1)$, $\mathbf{U}(n-1)$, $\mathbf{SU}(n-1)$, $\mathbf{Sp}(n-1)$) al sottogruppo di $\mathbf{O}(n)$ (risp. $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{SU}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$) delle trasformazioni che lasciano fisso il vettore e_n. Abbiamo allora i seguenti omeomorfismi:

Teorema 7.1.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(1) &\simeq S^1 \\ \mathbf{SU}(2) &\simeq S^3 \\ \mathbf{Sp}(1) &\simeq S^3 \\ \mathbf{O}(n)/\mathbf{O}(n-1) \simeq \mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-1) &\simeq S^{n-1} \quad (n>1) \\ \mathbf{U}(n)/\mathbf{U}(n-1) \simeq \mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-1) &\simeq S^{2n-1} \quad (n>1) \\ \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1) &\simeq S^{4n-1} \quad (n>1) \end{aligned}$$

Dimostrazione. In ciascuno dei casi l'omeomorfismo cercato è il quoziente iniettivo dell'applicazione $g \to g(e_n)$. □

8. Il gruppo $\mathbf{SO}(4)$

Identifichiamo lo spazio Euclideo $\mathbb{R}^4$ al corpo non commutativo $\mathbb{H}$ dei quaternioni di Hamilton. Il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^4$ si può esprimere per mezzo del prodotto di quaternioni:

eq:glchb
$$(x|y) = \mathrm{Re}\,(x\,\bar{y}) = \mathrm{Re}\,(y\,\bar{x}) = \frac{1}{2}(x\,\bar{y} + y\,\bar{x}). \tag{8.1}$$

La sfera S^3 si identificata all'insieme dei quaternioni di modulo 1 ed è un gruppo per la moltiplicazione dei quaternioni.

Se $v \in S^3$, la *simmetria ortogonale di vettore* v, rispetto al prodotto scalare Euclideo di $\mathbb{R}^4$, è la trasformazione:

eq:glcha
$$s_v(x) = x - 2(x|v)v = x - (x\bar{v} + v\bar{x})v \quad \forall x \in \mathbb{R}^4. \tag{8.2}$$

lm:glcha
LEMMA 8.1. *Sia $v \in S^3$. Allora la simmetria ortogonale di vettore v è descritta dalla formula*

eq:glchc
$$s_v(x) = -v\,\bar{x}\,v \qquad \forall x \in \mathbb{H}. \tag{8.3}$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti:

$$-v\,\bar{x}\,v = x \Longleftrightarrow -v\,\bar{x} = x\,\bar{v} \Longleftrightarrow (x|v) = \frac{1}{2}(x\,\bar{v} + v\,\bar{x}) = 0,$$

e $-v\,\bar{v}\,v = -v$. Quindi la trasformazione $x \to -v\,\bar{x}\,v$ lascia fissi i punti dell'iperpiano ortogonale a v e trasforma v nel suo opposto. Essa coincide perciò con la simmetria s_v. □

TEOREMA 8.2. *Per ogni $v \in S^3$ le applicazioni*

eq:glchd
$$L_v : \mathbb{H} \ni x \to v\,x \in \mathbb{H} \quad e \quad R_v : \mathbb{H} \ni x \to x\,v \in \mathbb{H} \tag{8.4}$$

sono trasformazioni di $\mathbf{SO}(4)$. Le

eq:glche
$$S^3 \ni v \to L_v \in \mathbf{SO}(4) \quad e \quad S^3 \ni v \to R_{\bar{v}} \in \mathbf{SO}(4) \tag{8.5}$$

sono omomorfismi di gruppi. Le loro immagini $L(S^3)$ ed $R(S^3)$ sono sottogruppi normali di $\mathbf{SO}(4)$. L'applicazione

eq:glchf
$$S^3 \times S^3 \ni (v_1, v_2) \to L_{v_1} \circ R_{\bar{v}_2} \in \mathbf{SO}(4) \tag{8.6}$$

è un omomorfismo surgettivo del prodotto diretto di due copie di S^3 su $\mathbf{SO}(4)$. È inoltre un omeomorfismo locale di gruppi topologici, con nucleo $\{(1,1),(-1,-1)\}$ e quindi è un rivestimento a due fogli.

DIMOSTRAZIONE. Poiché $|x\,y| = |x|\cdot|y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$, ne segue che L_v ed R_v sono trasformazioni di $\mathbf{SO}(4)$ per ogni $v \in S^3$. Inoltre, poiché $\mathbf{H}$ è un corpo, le $L : S^3 \to \mathbf{SO}(4)$ ed $R : S^3 \to \mathbf{SO}(4)$ sono iniettive. Si verifica poi facilmente, per l'associatività del prodotto dei quaternioni, che L ed R sono omomorfismi di gruppi.

Per dimostrare che (8.6) è surgettiva, ricordiamo che ogni trasformazione di $\mathbf{SO}(4)$ si può scrivere come la composizione di quattro simmetrie vettoriali. Quindi, se $a \in \mathbf{SO}(4)$ ed $a = s_{v_1} \circ s_{v_2} \circ s_{v_3} \circ s_{v_4}$ con $v_1, v_2, v_3, v_4 \in S^3$,

abbiamo per il Lemma 8.1:

$$\begin{aligned} a(x) &= s_{v_1} \circ s_{v_2} \circ s_{v_3}(-v_4\,\bar{x}\,v_4) = s_{v_1} \circ s_{v_2}(v_3\bar{v}_4\,x\,\bar{v}_4 v_3) \\ &= s_{v_1}(-v_2\bar{v}_3 v_4 \bar{x} v_4 \bar{v}_3 v_2) = v_1\bar{v}_2 v_3 \bar{v}_4 x \bar{v}_4 v_3 \bar{v}_2 v_1 = w_1 x w_2, \end{aligned}$$

con $w_1 = v_1\bar{v}_2 v_3\bar{v}_4$ e $\bar{v}_4 v_3 \bar{v}_2 v_1$ in S^3.

Infine, se $v_1, v_2 \in S^3$ e $v_1 x v_2 = x$ per ogni $x \in \mathbb{H}$, abbiamo

$$(*) \qquad v_1 x v_2 = x \Longleftrightarrow v_1 x = x\bar{v}_2 \quad \forall x \in \mathbb{H}.$$

Ponendo $x = 1$ troviamo che $v_1 = \bar{v}_2$ e quindi la $(*)$ ci dà $v_1\,x = x\,v_1$ per ogni $x \in \mathbb{H}$. Quindi v_1 è un punto reale di S^3 e perciò uguale a ± 1.

Chiaramente $L(S^3)$ ed $R(S^3)$ sono sottogruppi normali di $\mathbf{SO}(4)$. Infatti, se $v \in S^3$, ed $a \in \mathbf{SO}(4)$, scriviamo $a = L_{w_1} \circ R_{w_2}$ con $w_1, w_2 \in S^3$. Allora

$$\begin{aligned} a \circ L_v \circ a^{-1}(x) &= a(L_v(\bar{w}_1 x\,\bar{w}_2)) = a(v\bar{w}_1 x \bar{w}_2) \\ &= w_1 v \bar{w}_1 x\,\bar{w}_2 w_2 = w_1 v \bar{w}_1 x = L_{w_1 v \bar{w}_1}(x). \end{aligned}$$

Ciò dimostra che $L(S^3)$ è normale. La verifica che anche $R(S^3)$ è normale è analoga. □

Il sottogruppo di $\mathbf{SO}(4)$ delle rotazioni che lasciano fissi i punti della retta reale è un sottogruppo isomorfo ad $\mathbf{SO}(3)$. Le $a \in \mathbf{SO}(3)$ saranno della forma $a = L_{v_1} \circ R_{v_2}$ con $v_1, v_2 \in S^3$ e $v_1 v_2 = 1$. Quindi $v_2 = \bar{v}_1$ ed otteniamo perciò:

PROPOSIZIONE 8.3. *L'applicazione*

eq:glchg

$$(8.7) \qquad S^3 \ni v \to L_v \circ R_{\bar{v}} \in \mathbf{SO}(3) \simeq \{g \in \mathbf{SO}(4) \mid g(1_{\mathbb{H}}) = 1_{\mathbb{H}}\}$$

è un omomorfismo surgettivo di gruppi, con nucleo $\{\pm 1_{\mathbb{H}}\}$. *È un omeomorfismo locale e quindi un rivestimento a due fogli di gruppi topologici.*

Osservando che $\mathbf{Sp}(1) \simeq S^3$ è omeomorfo a $\mathbf{SU}(2)$, abbiamo ottenuto un'altra dimostrazione del Teorema 5.2.

CAPITOLO 8

La lista di Cartan dei gruppi classici

Ogni gruppo di Lie $\mathbf{G}$ con un numero finito di componenti connesse è omeomorfo al prodotto topologico $\mathbf{K} \times \mathbb{R}^k$ di un gruppo di Lie compatto $\mathbf{K}$ e di uno spazio Euclideo $\mathbb{R}^k$. Il gruppo $\mathbf{G}$ contiene un sottogruppo compatto massimale omeomorfo a $\mathbf{K}$, e tutti i sottogruppi compatti massimali di $\mathbf{G}$ sono tra loro omeomorfi. Tale decomposizione si dice la *decomposizione di Cartan* di $\mathbf{G}$.

In questo capitolo definiamo i gruppi lineari della lista di Cartan, che si dicono anche *i gruppi classici*, e descriviamo per ciascuno di essi la relativa *decomposizione di Cartan*.

Mostreremo che, per una presentazione opportuna del gruppo lineare $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, un sottogruppo compatto massimale $\mathbf{K}$ sarà l'intersezione $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ di $\mathbf{G}$ con il gruppo delle matrici unitarie.

1. Decomposizione di Cartan per una classe di gruppi pseudoalgebrici

DEFINIZIONE 1.1. Un sottogruppo $\mathbf{G}$ di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ si dice *pseudoalgebrico* se può essere definito mediante un sistema di equazioni:

$$(*) \qquad f_1(g, g^*) = ... = f_N(g, g^*) = 0$$

dove $f_1, ..., f_N$ sono polinomi a coefficienti reali delle parti reali e immaginarie dei coefficienti di $g \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. I sottogruppi pseudoalgebrici sono ovviamente chiusi.

I gruppi classici della lista di Cartan che introdurremo nel paragrafo seguente sono tutti pseudoalgebrici.

Il seguente teorema ci dà un metodo per calcolare la loro decomposizione di Cartan come il prodotto del sottogruppo compatto $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ e di uno spazio euclideo $\mathbb{R}^k$.

tm:glqaa

TEOREMA 1.2. *Sia* $\mathbf{G}$ *un sottogruppo pseudoalgebrico connesso di* $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ *che goda della proprietà:*

$$g \in \mathbf{G} \Longrightarrow g^* \in \mathbf{G}\,,$$

e sia $\mathfrak{g}$ *l'algebra di Lie di* $\mathbf{G}$*. Allora l'applicazione*

$$(\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)) \ni (u, B) \to u \exp(B) \in \mathbf{G}$$

è un omeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 1.1 del Capitolo 6, ogni elemento $g \in \mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ si scrive in modo unico come

$$g = u \circ p \quad \text{con} \quad u \in \mathbf{U}(n),\ p \in \mathbf{P}_+(n).$$

Poiché per ipotesi anche

$$g^* = p \circ u^* = p \circ u^{-1} \in \mathbf{G},$$

il gruppo $\mathbf{G}$ contiene l'elemento

$$g^* g = p^2.$$

Per il Lemma 1.2 del Capitolo 6 vi è un unico elemento $B \in \mathfrak{p}(n)$ tale che

$$p = \exp(B).$$

Sia $a \in \mathbf{U}(n)$ tale che $a \circ B \circ a^*$ sia in forma diagonale:

$$\mathrm{Ad}(a)(B) = a \circ B \circ a^* = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \theta_n \end{pmatrix}$$

con $\theta_j \in \mathbb{R}$ per $j = 1, ..., n$. Il gruppo $\mathrm{ad}(a)(\mathbf{G})$ è ancora un sottogruppo pseudoalgebrico di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ e quindi le matrici diagonali reali di $\mathrm{ad}(a)(\mathbf{G})$ formano un sottogruppo pseudoalgebrico $\mathbf{Q}$ di $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$. Possiamo perciò trovare un insieme finito di polinomi $f_1, ..., f_N \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ tali che la matrice diagonale reale

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$$

appartenga a $\mathbf{Q}$ se e soltanto se

$$f_j(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = 0 \quad \text{per} \quad j = 1, ..., N.$$

Poiché $p^{\pm 2}, p^{\pm 4}, \dots, p^{\pm 2k}, \dots$ appartengono a $\mathbf{G}$, abbiamo

$$f_j(e^{2k\theta_1}, e^{2k\theta_2}, ..., e^{2k\theta_n}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall j = 1, ..., N.$$

Per concludere la dimostrazione utilizziamo il seguente

LEMMA 1.3. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione esponenziale-polinomiale della forma:*

$$f(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j e^{b_j t} \qquad t \in \mathbb{R}$$

con $c_j, b_j \in \mathbb{R}$ e $b_i \neq b_j$ se $i \neq j$. Se f si annulla per ogni $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, allora f si annulla per ogni $t \in \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $\exp(b_j) = \xi_j$. Consideriamo la matrice

$$M(\xi_1, ..., \xi_N) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \cdots & \xi_N \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \cdots & \xi_N^2 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 & \xi_3^3 & \cdots & \xi_N^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^N & \xi_2^N & \xi_3^N & \cdots & \xi_N^N \end{pmatrix}.$$

Dico che

$$\det M(\xi_1, ..., \xi_N) = \xi_1 ... \xi_n \prod_{1 \le i < j \le N} (\xi_j - \xi_i).$$

Per dimostrare questa formula osserviamo che

$$\det M(\xi_1, ..., \xi_N) = \xi_1 \cdot ... \cdot \xi_N \cdot \det V(\xi_1, ..., \xi_N)$$

dove $V(\xi_1, ..., \xi_N)$ è la matrice di Vandermonde di ordine N:

$$V(\xi_1, ...\xi_N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & ... & \xi_N \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & ... & \xi_N^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{N-1} & \xi_2^{N-1} & \xi_3^{N-1} & ... & \xi_N^{N-1} \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$(\dagger) \qquad \det V(\xi_1, ..., \xi_N) = \prod_{1 \le i < j \le N} (\xi_j - \xi_i).$$

Per verificare la (†), ragioniamo per ricorrenza su N. La formula del determinante di Vandermonde è facilmente verificata nel caso $N = 2$. Supponiamo quindi $N > 2$ e la formula vera per determinanti di Vandermonde di ordine $N - 1$. Sottraendo alla $j + 1$-esima riga ξ_1 volte la $j - esima$, per $j = 1, ..., N - 1$, otteniamo:

$$\det V(\xi_1,...,\xi_N) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & \xi_2 - \xi_1 & \xi_3 - \xi_1 & ... & \xi_N - \xi_1 \\ 0 & \xi_2(\xi_2 - \xi_1) & \xi_3(\xi_3 - \xi_1) & ... & \xi_N(\xi_N - \xi_1) \\ 0 & \xi_2^2(\xi_2 - \xi_1) & \xi_3^2(\xi_3 - \xi_1) & ... & \xi_N^2(\xi_N - \xi_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \xi_2^{N-2}(\xi_2 - \xi_1) & \xi_3^{N-2}(\xi_3 - \xi_1) & ... & \xi_N^{N-2}(\xi_N - \xi_1) \end{pmatrix}$$

Raccogliendo il fattore $(\xi_j - \xi_1)$ nella j-esima colonna, per $j = 2, ..., N$, si ottiene

$$\det V(\xi_1, ..., \xi_N) = (\xi_2 - \xi_1) \cdot ... \cdot (\xi_N - \xi_1) \cdot \det V(\xi_2, ..., \xi_N).$$

La formula segue allora dall'ipotesi di ricorrenza.

In particolare, $M(\xi_1, ..., \xi_N)$ è una matrice invertibile e la relazione

$$(c_1, ..., c_N) M(\xi_1, ..., \xi_N) = 0,$$

che equivale all'annullarsi di $f(t)$ per $t = 1, \ldots, N$, implica che tutti i coefficienti $c_1, \ldots, c_N$, e quindi $f(t)$, sono uguali a 0. □

Concludiamo ora la dimostrazione del teorema. Per il lemma appena dimostrato,

$$f_j(e^{t\theta_1}, ..., e^{t\theta_n}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},\ j = 1, ..., N.$$

Quindi $\exp(2t(aBa^*)) \in \mathbf{Q}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e ciò mostra che

$$B \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n).$$

Allora $p \in \mathbf{G}$ e perciò $u = g \circ p^{-1} \in \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$. L'applicazione

$$(\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)) \ni (u, B) \to u \exp(B) \in \mathbf{G}$$

è quindi continua e surgettiva e ha inversa:

$$\mathbf{G} \ni g \to (g \circ (g^*g)^{-1/2}, (g^*g)^{1/2}) \in (\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)) \times (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n))$$

continua, onde è un omeomorfismo. □

Nella ricerca della decomposizione di Cartan di un gruppo classico $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ della lista di Cartan, con algebra di Lie $\mathfrak{g}$, seguiremo quindi il seguente procedimento:

(1) Verificheremo che esso contenga l'aggiunto di ogni suo elemento;
(2) Calcoleremo $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}(n)$;
(3) Studieremo il sottogruppo compatto $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$.

Osserviamo ancora che l'algebra di Lie di $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$ è $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n)$ e che l'applicazione esponenziale

$$\mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n) \ni X \to \exp(X) \in \mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$$

ha come immagine la componente connessa dell'identità in $\mathbf{G} \cap \mathbf{U}(n)$. Abbiamo infatti

Teorema 1.4 (Cartan-Weyl-Hopf). *Sia* $\mathbf{G}$ *un sottogruppo compatto e connesso di* $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$*, con algebra di Lie* $\mathfrak{g}$*. Allora*

$$\mathfrak{g} \ni X \to \exp(X) \in \mathbf{G}$$

è surgettiva.

Non diamo qui la dimostrazione di questo teorema[1], la cui validità abbiamo già verificato per ciascuno dei gruppi classici compatti e connessi: $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{SU}(n)$ e $\mathbf{Sp}(n)$.

[1]Possiamo introdurre su $\mathbf{G}$ una metrica Riemanniana invariante per le traslazioni a destra e a sinistra; allora le geodetiche per l'origine sono tutti e soli i sottogruppi a un parametro di $\mathbf{G}$. La tesi segue allora dal fatto che l'identità e di $\mathbf{G}$ si può congiungere a un qualsiasi punto $g \in \mathbf{G}$ mediante una geodetica $\gamma : [0, 1] \ni t \to \exp(tX) \in \mathbf{G}$ di lunghezza minima per cui $\gamma(0) = e$ e $\gamma(1) = g$.

2. I gruppi classici non compatti

cp:glq

Nel Capitolo 7 abbiamo esaminato i gruppi classici compatti della lista di Cartan. Completiamo ora la *lista di Cartan* con l'elenco dei gruppi classici non compatti. Per ciascuno di essi descriveremo anche la rispettiva algebra di Lie.

U(p,q) (*gruppo unitario di segnatura* (p,q)) è il gruppo delle matrici complesse $a \in \mathbf{GL}(p+q,\mathbb{C})$ che soddisfano $a\,K\,a^* = K$ per una matrice Hermitiana simmetrica K con segnatura (p,q). Ad esempio, possiamo scegliere $K = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$. La sua algebra di Lie è

$$\mathfrak{u}(p,q) = \{X \in \mathfrak{gl}(p+q,\mathbb{C}) \,|\, X^*K + K\,X = 0\}\,.$$

SU(p,q) (*gruppo speciale unitario di segnatura* (p,q)) è il gruppo delle matrici complesse $a \in \mathbf{U}(p,q)$ con determinante 1: $\mathbf{SU}(p,q) = \mathbf{U}(p,q) \cap \mathbf{SL}(p+q,\mathbb{C})$. L'algebra di Lie corrispondente è

$$\mathfrak{su}(p,q) = \{X \in \mathfrak{u}(p,q) \,|\, \mathrm{trac}(X) = 0\} = \mathfrak{u}(p,q) \cap \mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{C})\,.$$

SU$^*(2n)$, che si indica anche con $\mathbf{SL}(n,\mathbb{H})$, (*gruppo lineare quaternionico*) è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{SL}(2n,\mathbb{C})$ tali che

$$a\,J = J\,\bar{a}$$

dove $\bar{a}$ è la matrice i cui coefficienti sono i coniugati dei coefficienti di a e J è una matrice reale antisimmetrica di rango $2n$. Ad esempio possiamo fissare $J = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$. La sua algebra di Lie, che si indica a volte anche con $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})$, è:

$$\mathfrak{su}^*(2n) = \left\{X \in \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C}) \;\middle|\; X\,J = J\,\bar{X}\right\}\,.$$

SO$(n,\mathbb{C})$ (*gruppo ortogonale complesso*) è il gruppo delle matrici a di $\mathbf{SL}(n,\mathbb{C})$ che lasciano invariata una matrice complessa simmetrica non degenere Q:

$$\mathbf{SO}(n,\mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{SL}(n,\mathbb{C}) \,|\, {}^t a\,Q\,a = Q\}\,.$$

La sua algebra di Lie è:

$$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \,|\, {}^t X\,Q + Q\,X = 0\}.$$

SO(p,q) (*gruppo ortogonale di segnatura* (p,q)) è il gruppo delle matrici reali $a \in \mathbf{SL}(p+q,\mathbb{R})$ tali che ${}^t a\,K\,a = K$ per una matrice $(p+q)\times(p+q)$ reale e simmetrica K, di segnatura (p,q). La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{o}(p,q) = \{X \in \mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{R}) \,|\, {}^t X\,K + K\,X = 0\}.$$

SO$^*(2n)$ (*gruppo complesso ortogonale simplettico*) è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{SL}(2n,\mathbb{C})$ tali che

$$a^*\,J\,a = J \qquad \text{e} \qquad {}^t a\,a = K$$

ove J è una matrice antihermitiana di rango $2n$ e K è una matrice simmetrica di rango $2n$ con $JK = KJ$. Possiamo ad esempio fissare $K = I_{2n}$ e $J = \left(\begin{smallmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{smallmatrix}\right)$. L'algebra di Lie corrispondente è:

$$\mathfrak{so}^*(2n) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C}) \,|\, X^*J + JX = 0\,,\ {}^tXK + KX = 0\}\,.$$

$\mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})$ (*gruppo simplettico complesso*) è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{GL}(2n,\mathbb{C})$ tali che ${}^taJa = J$ per una matrice antisimmetrica $J \in \mathfrak{M}(2n,\mathbb{C})$ di rango $2n$. La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \,|\, {}^tXJ + JX = 0\}\,.$$

$\mathbf{Sp}(n,\mathbb{R})$ (*gruppo simplettico*) è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{GL}(2n,\mathbb{R})$ tali che ${}^taJa = J$ per una matrice antisimmetrica $J \in \mathfrak{M}(2n,\mathbb{R})$ di rango $2n$. La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{R}) \,|\, {}^tXJ + JX = 0\}\,.$$

$\mathbf{Sp}(p,q)$ (*gruppo unitario simplettico di segnatura* (p,q)) è il gruppo delle matrici $a \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})$ (con $p+q=n$) tali che $a^*Ka = K$ per una matrice Hermitiana simmetrica K di segnatura $(2p,2q)$ che commuta con J. Se $J = \left(\begin{smallmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{smallmatrix}\right)$, possiamo fissare ad esempio

$$K = \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & I_p & \\ & & & -I_q \end{pmatrix}\,.$$

La corrispondente algebra di Lie è:

$$\mathfrak{sp}(p,q) = \{X \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) \,|\, X^*K + KX = 0\}\,.$$

Osserviamo che $\mathbf{Sp}(n) = \mathbf{Sp}(n,0) = \mathbf{Sp}(0,n) = \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n)$.

3. I gruppi $\mathbf{U}(p,q)$ e $\mathbf{SU}(p,q)$

Fissiamo $K = I_{p,q} = \left(\begin{smallmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{smallmatrix}\right)$ e poniamo $n = p+q$.

lemmdba LEMMA 3.1. *Se $g \in \mathbf{U}(p,q)$, allora $g^* \in \mathbf{U}(p,q)$. Se $g \in \mathbf{SU}(p,q)$, allora $g^* \in \mathbf{SU}(p,q)$.*

DIMOSTRAZIONE. Per la definizione del gruppo $\mathbf{U}(p,q)$, abbiamo

$$g^* I_{p,q} = I_{p,q} g^{-1}.$$

Da questa otteniamo, passando alle inverse:

$$gI_{p,q} = (g^*)^* I_{p,q} = I_{p,q}(g^*)^{-1}$$

e quindi $g^* \in \mathbf{U}(p,q)$. Inoltre, se $\det(g) = 1$, anche $\det(g^*) = \overline{\det(g)} = 1$. □

lemmdbb LEMMA 3.2. $\mathbf{U}(p,q) \cap \mathbf{U}(n) \cong \mathbf{U}(p) \bowtie \mathbf{U}(q)$.

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo un elemento $g \in \mathbf{U}(p,q) \cap \mathbf{U}(n)$ nella forma

$$g = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$$

con matrici a di tipo $p \times p$, b di tipo $q \times q$, c di tipo $p \times q$, d di tipo $q \times p$. Poiché $g \in \mathbf{U}(p,q)$, abbiamo

$$a^*a - d^*d = I_p, \quad a^*c = d^*b, \quad b^*b - c^*c = I_q.$$

Essendo $g \in \mathbf{U}(n)$, abbiamo anche:

$$a^*a + d^*d = I_p, \quad a^*c + d^*b = 0, \quad b^*b + c^*c = I_q.$$

Da queste uguaglianze ricaviamo

$$c = 0, \quad d = 0$$

da cui segue la tesi. □

COROLLARIO 3.3. $\mathbf{SU}(p,q) \cap \mathbf{U}(n)$ *è omeomorfo al prodotto topologico* $\mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(q) \times S^1$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\sigma \in \mathbb{C}$, per ogni intero positivo h indichiamo con $D_h(\sigma)$ la matrice diagonale $h \times h$:

$$D_h(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione

$$\mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(q) \times S^1 \ni (a, b, \sigma) \longrightarrow \begin{pmatrix} D_p(\sigma)\, a & 0 \\ 0 & D_q(\sigma^{-1})\, b \end{pmatrix} \in \mathbf{SU}(p,q) \cap \mathbf{U}(n)$$

è continua e bigettiva e dunque un omeomorfismo perché i due spazi sono compatti di Hausdorff. □

TEOREMA 3.4. *Il gruppo* $\mathbf{SU}(p,q)$ *è omeomorfo al prodotto topologico:*

$$\mathbf{SU}(p,q) \simeq \mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(q) \times S^1 \times \mathbb{C}^{pq}.$$

Il gruppo $\mathbf{U}(p,q)$ *è omeomorfo al prodotto topologico* $\mathbf{SU}(p,q) \times S^1$*:*

$$\mathbf{U}(p,q) \simeq \mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(q) \times S^1 \times S^1 \times \mathbb{C}^{pq}.$$

I due gruppi sono pertanto connessi per archi, ma non compatti se $pq \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Calcoliamo l'intersezione $\mathfrak{u}(p,q) \cap \mathfrak{p}(n)$. Scriviamo $X \in \mathfrak{u}(p,q) \cap \mathfrak{p}(n)$ nella forma $X = \left(\begin{smallmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{smallmatrix}\right)$ con $X_{11} \in \mathfrak{p}(p)$, $X_{22} \in \mathfrak{p}(q)$ e X_{12} matrice complessa di tipo $p \times q$. Allora:

$$0 = X^* I_{p,q} + I_{p,q} X = X\, I_{p,q} + I_{p,q} X = \left(\begin{smallmatrix} 2X_{11} & 0 \\ 0 & 2X_{22} \end{smallmatrix}\right).$$

Quindi

$$\mathfrak{u}(p,q) \cap \mathfrak{p}(n) = \mathfrak{su}(p,q) \cap \mathfrak{p}(n) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{12}^* & 0 \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; X_{12} \in \mathfrak{M}(p \times q, \mathbb{C}) \right\}.$$

La tesi è perciò conseguenza dei lemmi precedenti e del Teorema 1.2. tm:glqaa □

4. I gruppi $\mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})$ e $\mathbf{SU}^*(2n)$

LEMMA 4.1. *Se $g \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})$, allora $g^* \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})$.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$ {}^t g J g = J,$$

e dunque

$$ J g = {}^t g^{-1} J,$$

da cui, passando alle inverse:

$$ g^{-1} J = J \, {}^t g.$$

Passando ai coniugati, otteniamo:

$$ \bar{g}^{-1} J = J g^*,$$

da cui

$$ {}^t g^* J g^* = J,$$

che ci dà $g^* \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})$. □

TEOREMA 4.2. *Il gruppo $\mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})$ è omeomorfo a $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbb{R}^{n(2n+1)}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $g \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})$. Possiamo decomporre g in modo unico nella forma:

$$ g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) \quad \text{e} \quad b \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C}) \cap \mathbf{P}_+(2n).$$

La b si può rappresentare in modo unico come esponenziale di una matrice $B \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2n)$. Scriviamo B nella forma

$$ B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} \end{pmatrix}$$

con B_{hk} matrici complesse $n \times n$, B_{11} e B_{22} Hermitiane. Da ${}^t B J + J B = 0$ otteniamo allora le uguaglianze:

$$ B_{11} = {}^t B_{22}$$

$$ B_{12} = {}^t B_{12}.$$

La matrice B è dunque della forma

$$ (*) \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & -\bar{B}_{11} \end{pmatrix}$$

con B_{11} Hermitiana e B_{12} simmetrica. Lo spazio vettoriale reale $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2n)$ è quindi lo spazio delle matrici Hermitiane della forma $(*)$. Esso ha quindi dimensione reale $n^2 + n(n+1) = n(2n+1)$. La tesi segue dall'omeomorfismo del Teorema 1.2 tm:glqaa

$$ \mathbf{Sp}(n) \times (\mathfrak{sp}(n) \cap \mathfrak{p}(2n)) \ni (a, B) \longrightarrow a \exp(B) \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{C}).$$

□

TEOREMA 4.3. *Il gruppo $\mathbf{SU}^*(2n)$ è omeomorfo a $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbb{R}^{2n^2-n-1}$.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che $g \in \mathbf{SU}^*(2n)$ se $g \in \mathbf{SL}(2n,\mathbb{C})$ e $Jg = \bar{g}J$. Poiché ${}^tJ = -J$, per trasposizione otteniamo $\overline{g^*}J = {}^tgJ = J\,{}^t\bar{g} = Jg^*$, e quindi, se $g \in \mathbf{SU}^*(2n)$, anche $g^* \in \mathbf{SU}^*(2n)$.

Se $g \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n)$ abbiamo

$$ {}^tgJg = {}^t g\,\bar{g}J = \overline{g^*g}\,J = J$$

e dunque $g \in \mathbf{Sp}(n)$. Viceversa, $\mathbf{Sp}(n) \subset \mathbf{SU}^*(2n)$, perché, se $g^*g = e$ e ${}^tgJg = J$, abbiamo anche $g^*J\bar{g} = J$ perché J è reale, e quindi

$$gJ = g(g^*J\bar{g}) = J\bar{g}.$$

Qundi $\mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n) = \mathbf{Sp}(n)$.

Per il Teorema tm:glqaa 1.2 gli elementi g di $\mathbf{SU}^*(2n)$ si decompongono nella forma

$$g = ab \quad \text{con} \quad a \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n) \text{e} \quad b \in \mathbf{SU}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)\,.$$

La b è l'esponenziale di una matrice Hermitiana B in $\mathfrak{su}^*(2n)$. Lo spazio $\mathfrak{su}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)$ è lo spazio vettoriale reale delle matrici della forma:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & \bar{B}_{11} \end{pmatrix}$$

con B_{11} matrice $n \times n$ Hermitiana con traccia nulla e B_{12} matrice $n \times n$ complessa antisimmetrica: ${}^tB_{12} = -B_{12}$. Esso ha quindi dimensione reale $(n^2-1) + n(n-1) = 2n^2 - n - 1$. La tesi segue dal Teorema tm:glqaa 1.2, che ci dà un omeomorfismo:

$$\mathbf{Sp}(n) \times (\mathfrak{su}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)) \ni (a, B) \longrightarrow a\exp(B) \in \mathbf{SU}^*(2n).$$

□

5. I gruppi $\mathbf{SO}(n,\mathbb{C})$ e $\mathbf{SO}^*(2n)$

TEOREMA 5.1. *Il gruppo* $\mathbf{SO}(n,\mathbb{C})$ *è omeomorfo a* $\mathbf{SO}(n) \times \mathbb{R}^{(n^2-n)/2}$.

DIMOSTRAZIONE. Un elemento g di $\mathbf{SO}(n,\mathbb{C})$ sono caratterizzati da:

$$\det(g) = 1, \quad {}^t g\, g = e, \text{cioè} \quad {}^tg = g^{-1}.$$

Abbiamo allora, coniugando, $g^* = \bar{g}^{-1} = \left[{}^tg^*\right]^{-1}$. Quindi $g^* \in \mathbf{SO}(n,\mathbb{C})$ se $g \in \mathbf{SO}(n,\mathbb{C})$.

Un elemento g di $\mathbf{SO}(n,\mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n)$ soddisfa

$$ {}^tg = g^{-1} = g^*$$

e dunque è una matrice a coefficienti reali. Quindi

$$\mathbf{SO}(n,\mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(n) = \mathbf{SO}(n).$$

Lo spazio vettoriale $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(n)$ consiste delle matrici Hermitiane B con ${}^tB + B = 0$. Gli elementi di $(\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(n))$ sono quindi le matrici antisimmetriche puramente immaginarie, e formano pertanto uno spazio vettoriale reale di dimensione $n(n-1)/2$. Per il Teorema tm:glqaa 1.2 abbiamo un omeomorfismo

$$\mathbf{SO}(n) \times i\mathfrak{o}(n) \ni (u, iA) \to u\exp(iA) \in \mathbf{SO}(n,\mathbb{C}).$$

□

TEOREMA 5.2. *Il gruppo* $\mathbf{SO}^*(2n)$ *è omeomorfo a* $\mathbf{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-n}$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $K = I = \begin{pmatrix} I_n & \\ & I_n \end{pmatrix}$ e $J = \begin{pmatrix} I_n & \\ & -I_n \end{pmatrix}$. Sia $g \in \mathbf{SO}^*(2n)$. Allora $\mathbf{SO}^*(2n) = \mathbf{SO}(2n) \cap \mathbf{SU}^*(2n)$. Poiché abbiamo già verificato che sia $\mathbf{SO}(2n)$ che $\mathbf{SU}^*(2n)$ sono invarianti per aggiunzione, anche $\mathbf{SO}^*(2n)$ è invariante per aggiunzione.

Utilizziamo quindi il Teorema 1.2.

Verifichiamo in primo luogo che il gruppo $\mathbf{K} = \mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n)$ è isomorfo, come gruppo topologico, a $\mathbf{U}(n)$. Se infatti $g \in \mathbf{K}$, valgono le equazioni:

$$ {}^t g g = I, \quad g^* J g = J, \quad g^* g = I, \quad \det(g) = 1. $$

La prima e la terza di queste equazioni ci dicono che g è una matrice reale di $\mathbf{SO}(2n)$. La seconda ci dice allora che g commuta con J e dunque è $\mathbb{C}$-lineare per la struttura complessa su $\mathbb{R}^{2n}$ definita da J. Si verifica facilmente che, se definiamo l'isomorfismo $\mathbb{R}$-lineare $\sigma : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ mediante

$$ \sigma(e_k) = e_k \quad \text{per} \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{e} \quad \sigma(Je_k) = \sigma(e_{k+n}) = ie_k $$

l'applicazione

$$ \mathbf{SO}^*(2n) \cap \mathbf{U}(2n) \ni g \longrightarrow \sigma \circ g \circ \sigma^{-1} \in \mathbf{U}(n) $$

è un isomorfismo di gruppi topologici.

Calcoliamo ora l'intersezione $\mathfrak{so}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)$. Le matrici B che appartengono a tale intersezione sono quelle della forma:

$$ B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ -\bar{B}_{1,2} & \bar{B}_{1,1} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad B_{1,1},\ B_{1,2} \in i\mathfrak{o}(n). $$

Dunque $\mathfrak{so}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione $n(n-1)$. Per il Teorema 1.2 l'applicazione:

$$ \mathbf{U}(n) \times (\mathfrak{so}^*(2n) \cap \mathfrak{p}(2n)) \ni (u, B) \to u \exp(B) \in \mathbf{SO}^*(2n) $$

è un omeomorfismo. □

6. I gruppi $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$

TEOREMA 6.1. *Abbiamo l'omeomorfismo*

$$ \mathbf{Sp}(p, q) \cong \mathbf{Sp}(p) \times \mathbf{Sp}(q) \times \mathbb{R}^{4pq}. $$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che il gruppo $\mathbf{Sp}(p, q; \mathbb{C})$ è caratterizzato dalle equazioni:

$$ {}^t g J g = J \qquad \text{e} \qquad g^* \begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q} \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q} \end{pmatrix}. $$

Quindi $\mathbf{Sp}(p, q) = \mathbf{Sp}(p+q, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2p, 2q)$, ove $\mathbf{U}(2p, 2q)$ è definito in questo caso come il gruppo delle matrici g per cui $g^* K g = K$, per la matrice

$$ K = \begin{pmatrix} I_{p,q} & \\ & I_{p,q} \end{pmatrix}. $$

Poiché $K = K^* = K^{-1}$, otteniamo

$$g \in \mathbf{U}(2p,2q) \Leftrightarrow Kg^*K = g^{-1} \Leftrightarrow = Kg^{**}K = [g^*]^{-1} \Leftrightarrow g^* \in \mathbf{U}(2p,2q).$$

Quindi, poiché sia $\mathbf{Sp}(p+q,\mathbb{C})$ che $\mathbf{U}(2p,2q) = \{g \in \mathbf{GL}(2n,\mathbb{C}) \mid g^*Kg = K\}$ sono invarianti rispetto all'aggiunzione, anche $\mathbf{Sp}(p,q;\mathbb{C})$ è invariante rispetto all'aggiunzione.

Utilizziamo allora il Teorema I.2. tm:glqaa È $\mathbf{Sp}(p,q;\mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) \subset \mathbf{Sp}(n) \subset \mathbf{GL}(n,\mathbb{H})$. Scriviamo $\tilde{g}$ per la matrice a coefficienti quaternioni corrispondente a g. Troviamo allora: se $g \in \mathbf{Sp}(p,q;\mathbb{C})$, allora

$$\tilde{g}^*\tilde{g} = I$$
$$\tilde{g}^* I_{p,q} g = I_{p,q}.$$

Si ottiene quindi

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad g_1 \in \mathbf{Sp}(p),\ g_2 \in \mathbf{Sp}(q).$$

Il Teorema I.2 tm:glqaa ci dà quindi un omeomorfismo

$$\mathbf{Sp}(p) \times \mathbf{Sp}(q) \times (\mathfrak{sp}(p,q;\mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2p+2q)) \longrightarrow \mathbf{Sp}(p,q;\mathbb{C})$$

$$\text{definito da:} \qquad (g_1,g_2,B) \longrightarrow \begin{pmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{pmatrix} \exp(B)$$

L'intersezione $\mathfrak{sp}(p,q;\mathbb{C}) \cap \mathfrak{p}(2n)$ è lo spazio vettoriale reale di dimensione $4pq$ delle matrici Hermitiane della forma:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & 0 & B_{14} \\ B_{12}^* & 0 & {}^tB_{14} & 0 \\ 0 & \bar{B}_{14} & 0 & -\bar{B}_{12} \\ B_{14}^* & 0 & -{}^tB_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

con B_{12} e B_{14} matrici complesse di tipo $p \times q$. □

7. I gruppi $\mathbf{SO}(p,q)$

TEOREMA 7.1. *Siano p,q due interi positivi con $p+q=n$. Allora il gruppo $\mathbf{SO}(p,q)$ è omeomorfo a $\{-1,1\} \times SO(p) \times SO(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo come nella dimostrazione dei teoremi precedenti. Si verifica facilmente che

$$\mathbf{SO}(p,q) = \{g \in \mathbf{SL}(n,\mathbb{R}) \mid {}^tgKg = K\} \quad \text{con} \quad K = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$$

contiene l'aggiunta di ogni suo elemento. È quindi un gruppo pseudoalgebrico cui possiamo applicare il Teorema Ricaviamo in primo luogo che $\mathbf{SO}(p,q) \cap \mathbf{U}(n)$ è formato dalle matrici:

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$$

con $g_1 \in \mathbf{O}(p)$, $g_2 \in \mathbf{O}(q)$ e $\det(g_1) \cdot \det(g_2) = 1$.

Quindi abbiamo l'omeomorfismo:

$$\mathbf{SO}(p,q) \cap \mathbf{U}(n) \cong \{-1,1\} \times \mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(q).$$

D'altra parte $\mathbf{SO}(p,q)\cap\mathbf{P}_+(n)$ è l'immagine iniettiva mediante l'applicazione esponenziale delle matrici

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ {}^tB_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

ove B_{12} è una matrice reale $p \times q$. Concludiamo utilizzando il Teorema 1.2. □

Parte 3

Primi elementi di Geometria Differenziale

part:elgeodif

CAPITOLO 9

Calcolo differenziale negli spazi Euclidei

cdiffeu

In questo capitolo raccogliamo i risultati di calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali, a valori negli spazi Euclidei, che ci saranno utili nel seguito.

1. Funzioni differenziabili negli spazi $\mathbb{R}^n$

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed

$$f : \Omega \ni x \to f(x) = {}^t(f^1(x), ..., f^m(x)) \in \mathbb{R}^m$$

un'applicazione di Ω in $\mathbb{R}^m$. Diciamo che f ammette in $x_0 \in \Omega$ *derivata parziale rispetto a* x^i se la funzione

$$t \to \alpha(t) = f(x_0 + t\mathbf{e}_i) \in \mathbb{R}^m \,,$$

definita in un intorno di $0 \in \mathbb{R}$, è derivabile in 0. Si pone allora

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} \;=\; \frac{d}{dt}\alpha(t)\bigg|_{t=0} \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + t\mathbf{e}_i) - f(x_0)}{t}\,.$$

La f si dice *differenziabile* in $x_0 \in \Omega$ se esiste un'applicazione lineare $df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che

$$f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0) = o(|x - x_0|) \quad \text{per} \quad x \to x_0\,.$$

Questa condizione significa che, per ogni $\epsilon > 0$, possiamo trovare un intorno U_ϵ di x_0 in Ω tale che

$$|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)| \;\le\; \epsilon|x - x_0| \quad \forall x \in U_\epsilon\,.$$

Vale il:

Teorema 1.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione, x_0 un punto di Ω. La f ammette la derivata parziale $\partial f(x_0)/\partial x^i$ (risp. è differenziabile in x_0) se e soltanto se ciascuna delle funzioni*

$$\Omega \ni x \to f^j(x) \in \mathbb{R},\; j = 1, ..., m$$

ammette la derivata parziale $\partial f^j(x_0)/\partial x^i$ (risp. è differenziabile in x_0).

Se f è differenziabile in x_0 essa è continua in x_0, ammette tutte le derivate parziali $\partial f(x_0)/\partial x^i$ (per $i = 1, ..., n$) in x_0 e

$$df(x_0)(v) = (Jf)(x_0)v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

ove $(Jf)(x_0)$ *è la matrice Jacobiana*

$$(Jf)(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^m(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^m(x_0)}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo il seguente:

TEOREMA 1.2. *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *ed* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *una funzione che ammette derivate parziali* $\partial f(x)/\partial x^i$ *rispetto a tutte coordinate* $x^1, ..., x^n$ *di* $\mathbb{R}^n$ *in ogni punto di* Ω*. Se le funzioni*

$$\Omega \ni x \to \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \in \mathbb{R}^m$$

sono continue per ogni $i = 1, ..., n$*, allora* f *è differenziabile in ogni punto* x *di* Ω*.*

DEFINIZIONE 1.3. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ che ammetta derivate parziali prime continue in Ω, rispetto a ciascuna delle coordinate, si dice *differenziabile di classe* $\mathcal{C}^1$.

TEOREMA 1.4 (Differenziale della funzione composta). *Siano* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *e* $g : G \to \mathbb{R}^\ell$ *due funzioni di classe* $\mathcal{C}^1$*, definite rispettivamente su un aperto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e su un aperto* $G \subset \mathbb{R}^m$*. Se* $f(\Omega) \subset G$*, allora la funzione composta* $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^\ell$ *è differenziabile di classe* $\mathcal{C}^1$ *e*

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

DEFINIZIONE 1.5. Le derivate parziali di ordine superiore di una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ si definiscono per ricorrenza: se $1 \leq i_1, ..., i_m \leq n$ e la derivata parziale $\partial^m f(x)/\partial x^{i_1} .... \partial x^{i_m}$ è definita in Ω, e $1 \leq j \leq n$, allora la derivata parziale

$$\partial^{m+1} f(x)/\partial x^j \partial x^{i_1} .... \partial x^{i_m}$$

è, quando esiste, la derivata parziale rispetto alla coordinata x^j della funzione

$$\Omega \ni x \to \partial^m f(x)/\partial x^{i_1} .... \partial x^{i_m} \in \mathbb{R}^m.$$

Vale il:

TEOREMA 1.6. *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *una funzione che ammetta derivate parziali del primo e del secondo ordine rispetto alle coordinate, continue in* Ω*. Allora*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^j \partial x^i} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n,\ x \in \Omega.$$

DEFINIZIONE 1.7. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ definita su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ si dice differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ in Ω se ammette derivate parziali continue in Ω fino all'ordine k.

Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$, indichiamo con $\mathcal{C}^k(\Omega, A)$ l'insieme di tutte le funzioni $f : \Omega \to A$ tali che $\Omega \ni x \to f(x) \in \mathbb{R}^m$ sia differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ in Ω.

Diremo che f è differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ nel punto x_0 di Ω se esiste un intorno aperto U di x_0 in Ω tale che $f|_U$ sia differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$.

Per il teorema precedente, se $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$, le sue derivate parziali fino all'ordine k non dipendono dall'ordine in cui si eseguono le successive derivate prime:

$$\partial^h f(x)/\partial x^{i_1}...\partial x^{i_h} = \partial^h f(x)/\partial x^{i_{\sigma_1}}...\partial x^{i_{\sigma_h}}$$
$$\forall 1 \le h \le k,\ 1 \le i_1, ..., i_h \le n,\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_h\,.$$

Associamo ad ogni h-upla $(i_1, ..., i_h)$ di interi con $1 \le i_1, ..., i_h \le n$ un multiindice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ove α_j è il numero di indici r tali che $i_r = j$. Definiamo allora:

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x^\alpha} = \partial^h f(x)/\partial x^{i_1}...\partial x^{i_h}.$$

Se $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, scriveremo a volte per semplicità

$$\partial_\alpha \quad \text{oppure } D^\alpha \quad \text{invece di} \quad \frac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}\,,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!\,, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n\,,$$

e, se $x = {}^t(x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$,

$$x^\alpha = (x^1)^{\alpha^1} \cdot ... \cdot (x^n)^{\alpha_n}\,.$$

DEFINIZIONE 1.8. Poniamo

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ si dice *analitica reale* in Ω se per ogni punto $x_0 \in \Omega$ la serie di Taylor

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\partial_\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha$$

converge uniformemente, in un intorno di x_0, alla funzione f.

L'insieme delle funzioni analitiche reali definite sull'aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, a valori in $\mathbb{R}^m$, si indica con $\mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Vale la catena di inclusioni:

$$\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^m) \supset \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \supset .... \supset \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^m) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) \supset \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Se $m = 1$, scriviamo $\mathcal{C}^k(\Omega)$ invece di $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ e osserviamo che, per la formula di Leibnitz,

$$\partial_\alpha(fg) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}(\partial_\beta f)(\partial_\gamma g)\,, \quad \forall f,\, g \in \mathcal{C}^k(\Omega),\ \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \le k\,;$$

ne segue che $\mathcal{C}^k(\Omega)$ *(per* $0 \le k \le \omega$*) è una* $\mathbb{R}$*-algebra ed un anello unitario per il prodotto di funzioni.*

2. Equazioni differenziali ordinarie

TEOREMA 2.1 (Peano). *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^{m+1}$ *e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *una funzione continua. Fissati* $(t_0, y_0) \in \Omega$*, possiamo trovare un* $r > 0$ *e una funzione* $u : [t_0, t_0 + r] \to \mathbb{R}^m$ *di classe* $\mathcal{C}^1$ *tale che*

$$\begin{aligned} &(i) \quad (t, u(t)) \in \Omega \quad \forall t_0 \le t \le t_0 + r, \\ &(ii) \quad u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t_0 \le t \le t_0 + r, \\ &(iii) \quad u(t_0) = y_0. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre, per semplicità di notazioni, che $t_0 = 0$, $y_0 = 0$. Siano $a > 0$ ed $R > 0$ tali che

$$K = [-a, a] \times \bar{B}(0, R) \subset \Omega.$$

Per il teorema di Weierstrass, la f è limitata sul compatto K: sia $M > 0$ tale che

$$|f(t, y)| \le M \quad \forall (t, y) \in K.$$

Fissiamo $r > 0$ tale che

$$r\,M \,<\, R.$$

Sia X l'insieme di tutte le funzioni continue $u : [0, r] \to \mathbb{R}^m$ tali che $|u(t)| \le R$ per ogni $0 \le t \le r$. Su X consideriamo la topologia della convergenza uniforme, associata alla distanza

$$\|u - v\| = \sup_{0 \le t \le r} |u(t) - v(t)|.$$

Con questa topologia, X è uno spazio metrico completo. Consideriamo l'applicazione

$$X \ni u \to \Phi(u) \in \mathcal{C}([0, r], \mathbb{R}^m)$$

definita da

$$\Phi(u)(t) = \int_0^t f(s, u(s))ds.$$

Abbiamo

$$|\Phi(u)(t)| \le \int_0^t |f(s, u(s))|ds \le \int_0^t M ds = Mt \le R \quad \text{se} \quad 0 \le t \le r.$$

Quindi $\Phi(u) \in X$ per ogni $u \in X$. La funzione Φ è continua su X. Infatti la f è uniformemente continua su K e quindi, fissato $\epsilon > 0$, possiamo trovare $\eta > 0$ tale che

$$|f(t, y) - f(s, z)| < r^{-1}\epsilon \quad \text{se} \quad (t, y),\, (s, z) \in K, \quad |t - s| < \eta,\ |y - z| < \eta.$$

Siano $u, v \in X$ con $\|u - v\| < \eta$. Allora

$$|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)| = \left| \int_0^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))ds \right| \leq r^{-1}\epsilon t \leq \epsilon.$$

Osserviamo ancora che le funzioni di $\Phi(X)$ sono equicontinue ed equilimitate e quindi $\Phi(X)$ è relativamente compatto in X per il teorema di Ascoli-Arzelà.

Consideriamo la funzione

$$X \ni u \to \|u - \Phi(u)\| \in \mathbb{R}$$

e sia

$$\delta = \inf_{u \in X} \|u - \Phi(u)\|.$$

Dico che $\delta = 0$. Infatti, fissato $\epsilon > 0$, sia $\eta > 0$ tale che

$$|f(t, y) - f(s, z)| < r^{-1}\epsilon \quad \text{se} \quad (t, y),\ (s, z) \in K, \quad |t - s| < \eta,\ |y - z| < \eta.$$

Consideriamo una partizione

$$0 = t_0 < t_1 < .... < t_N = r$$

con $|t_j - t_{j-1}| < (1 + M)^{-1}\eta$ per $j = 1, ..., N$. Definiamo per ricorrenza

$$\begin{cases} y_0 = f(0, 0) \\ y_j = y_{j-1} + (t_j - t_{j-1})f(t_{j-1}, y_{j-1}) \quad \text{se} \quad j = 1, ..., N. \end{cases}$$

Consideriamo poi la funzione a scalini

$$\psi(t) = f(t_{j-1}, y_{j-1}) \quad \text{se} \quad t \in [t_{j-1}, t_j[, \quad j = 1, ..., N.$$

La funzione

$$v(t) = \int_0^t \psi(s)ds$$

è lineare a tratti e appartiene a X. Inoltre

$$|\psi(t) - f(t, v(t))| < r^{-1}\epsilon \quad \forall 0 \leq t \leq r.$$

Infatti su ciascuno degli intervalli $[t_{j-1}, t_j[$ abbiamo:

$$|\psi(t) - f(t, v(t))| = |f(t_{j-1}, y_{j-1}) - f(t, y_{j-1} + (t - t_{j-1})f(t_{j-1}, y_{j-1})| < r^{-1}\epsilon$$

perché

$$|t_{j-1} - t| \leq |t_j - t_{j-1}| < \eta,$$
$$|(t - t_{j-1})f(t_{j-1}, y_{j-1})| < (1 + M)^{-1}M\eta < \eta.$$

Quindi

$$|v(t) - \Phi(v)(t)| \leq \int_0^t |\psi(s) - f(s, v(s))|ds \leq r^{-1}\epsilon t \leq \epsilon.$$

Dunque $\delta = 0$.

Sia $\{u_\nu\}$ una successione in X tale che

$$\lim_{\nu \to \infty} \|u_\nu - \Phi(u_\nu)\| = 0.$$

Poiché $\Phi(X)$ è relativamente compatto in X, a meno di estrarre una sotto-successione, possiamo supporre che

$$\{\Phi(u_\nu)\} \quad \text{sia una successione convergente in} \quad X.$$

Allora

$$\|u_\nu - u_\mu\| \leq \|(u_\nu - \Phi(u_\nu))\| + \|u_\mu - \Phi(u_\mu)\| + \|\Phi(u_\nu) - \Phi(u_\mu)\| \to 0 \quad \text{se} \quad \mu, \nu \to \infty$$

e quindi la $\{u_\nu\}$ è una successione di Cauchy in X. Poiché X è completo, essa converge a una funzione $u \in X$. Per la continuità di Φ, abbiamo

$$\Phi(u) = u$$

e quindi

$$u(t) = \int_0^t f(s, u(s))ds \quad \forall 0 \leq t \leq r.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che $u \in \mathcal{C}^1([0, r], \bar{B}(0, R))$ e soddisfa il sistema

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \quad \text{se} \quad 0 \leq t \leq r, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

□

Osservazione 2.2. Sotto le ipotesi del teorema di Peano, la soluzione del problema

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \quad \text{se} \quad t_0 \leq t \leq t_0 + r \\ u(t_0) = y_0 \end{cases}$$

può non essere unica. Consideriamo ad esempio fa funzione continua

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}.$$

Tutte le funzioni

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{se} \quad 0 \leq t \leq c \\ \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x - c)\right)^3} \quad \text{se} \quad t \geq c \end{cases}$$

per $c \geq 0$ sono soluzioni di

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt[3]{u(t)} \quad \text{se} \quad t \geq 0, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Un'altra dimostrazione del Teorema di Peano. Siano K, M, r e X definiti come in precedenza. Fissato un qualsiasi numero reale positivo $0 < \epsilon < r$, vi è una e una sola funzione $u_\epsilon \in X$ che soddisfa:

$$\begin{cases} u_\epsilon(t) = 0 \quad \text{se} \quad 0 \leq t \leq \epsilon \\ \\ u_\epsilon(t) = \int_0^t f(s, u_\epsilon(s - \epsilon))ds \quad \text{se} \quad \epsilon \leq t \leq r. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che la famiglia $\{u_\epsilon\} \subset X$ è relativamente compatta in X per il teorema di Ascoli-Arzelà. Possiamo quindi trovare una successione $\{\epsilon_\nu\}$ infinitesima tale che

$$u_{\epsilon_\nu} \to u \quad \text{in} \quad X.$$

Passando al limite sotto il segno di integrale, otteniamo allora

$$u(t) = \int_0^t f(s, u(s))ds \quad \text{se} \quad 0 \le t \le r.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale la u è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ su $[0, r]$ e soddisfa:

$$\begin{cases} (t, u(t)) \in \Omega \quad \forall 0 \le t \le r \\ u(0) = 0 \\ u'(t) = f(t, u(t)) \quad \text{se} \quad 0 \le t \le r. \end{cases}$$

□

TEOREMA 2.3 (Unicità). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^m_y$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione continua, che ammette derivate parziali prime continue rispetto alle variabili $y^1, ..., y^m$. Sia $(t_0, y_0) \in \Omega$. Se $u_j : [t_0, t_0 + r_j] \to \mathbb{R}^m$ (con $r_j > 0$ per $j = 1, 2$) sono funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ che risolvono il sistema:*

$$\begin{cases} (t, u_j(t)) \in \Omega \quad \textit{se} \quad t \in [t_0, t_0 + r_j], \\ u_j'(t) = f(t, u_j(t)) \quad \textit{se} \quad t \in [t_0, t_0 + r_j], \\ u_j(t_0) = y_0 \end{cases}$$

allora

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \forall t_0 \le t \le t_0 + \min\{r_1, r_2\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $r = \min\{r_1, r_2\}$ e sia

$$A = \{t \in [t_0, t_0 + r] \,|\, u_1(t) = u_2(t)\}.$$

L'insieme A è chiuso perché le funzioni u_j sono continue. Esso contiene t_0 e quindi non è vuoto. La componente connessa A_0 di t_0 in A è un intervallo chiuso $[t_0, t_1]$ con $t_0 \le t_1 \le t_0 + r$. Dico che $t_1 = t_0 + r$. Infatti, se fosse $t_1 < t_0 + r$, avremmo

$$u_j(t) = y_1 + \int_{t_1}^t f(s, u_j(s))ds \qquad \text{se} \quad t_1 \le t \le t_0 + r, \quad j = 1, 2$$

con

$$y_1 = u_1(t_1) = u_2(t_1).$$

L'aperto Ω contiene un intorno di (t_1, y_1) della forma

$$K = \{|t - t_1| \le r_1\} \times \bar{B}(y_1, R_1).$$

Su K abbiamo

$$\left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right| \le L < \infty.$$

Inoltre, poiché le u_j sono continue, possiamo scegliere $0 < \epsilon < \min\{r_1, t_0 + r - t_1\}$ tale che

$$u_j(t) \in \bar{B}(y_1, R_1) \quad \forall t_1 \leq t \leq t_1 + \epsilon, \quad j = 1, 2.$$

Se $z_1, z_2 \in \bar{B}(y_1, R_1)$, abbiamo

$$\begin{aligned} |f(t, z_2) - f(t, z_1)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{d\xi} f(t, z_1 + \xi(z_2 - z_1)) d\xi \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(t, z_1 + \xi(z_2 - z_1))(z_2 - z_1) d\xi \right| \\ &\leq \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, z_1 + \xi(z_2 - z_1)) \right| d\xi \right\} |z_2 - z_1| \\ &\leq L \cdot |z_2 - z_1|. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} |u_2(t) - u_1(t)| &\leq \int_{t_1}^t |f(s, u_2(s)) - f(s, u_1(s))| ds \\ &\leq (t - t_1) L \sup_{t_1 \leq s \leq t} |u_2(s) - u_1(s)| \end{aligned}$$

per $t_1 \leq t \leq t_1 + \epsilon$. Pur di scegliere $\delta > 0$ con $\delta L < 1$, $\delta \leq \epsilon$, avremo

$$\sup_{t_1 \leq t \leq t_1 + \delta} |u_2(t) - u_1(t)| \leq \delta L \sup_{t_1 \leq t \leq t_1 + \delta} |u_2(t) - u_1(t)| \Rightarrow u_1(t) = u_2(t)$$
$$\forall t_1 \leq t \leq t_1 + \delta.$$

Ciò contraddice la definizione di t_1 e mostra quindi che $t_1 = t + r$. □

TEOREMA 2.4 (Dipendenza continua dai dati iniziali). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y^m$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione continua, che ammette derivate parziali prime continue rispetto alle variabili $y^1, ..., y^m$. Sia $(t_0, y_0) \in \Omega$. Possiamo allora trovare $r > 0$, $R > 0$ e una funzione continua*

$$\phi : [t_0, t_0 + r] \times B(y_0, R) \to \mathbb{R}^m,$$

che ammette derivata parziale prima continua rispetto alla variabile t, tale che

$$\begin{cases} (t, \phi(t, y)) \in \Omega \quad se \quad (t, y) \in [t_0, t_0 + r] \times B(y_0, R) \\ \phi(t_0, y) = y \quad se \quad y \in B(y_0, R) \\ \dfrac{\partial \phi(t, y)}{\partial t} = f(t, \phi(t, y)) \quad se \quad t_0 \leq t \leq t_0 + r. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, per semplicità di notazioni, che $t_0 = 0$, $y_0 = 0$. Dal teorema di esistenza e unicità segue facilmente l'esistenza, per

ogni y in un intorno di 0, di una soluzione $u_y(t)$ del problema

$$\begin{cases} (t, u_y(t)) \in \Omega \quad \text{se} \quad 0 \le t \le r \\ u_y(0) = y \\ u_y'(t) = f(t, u_y(t)) \quad \text{se} \quad 0 \le t \le r. \end{cases}$$

Posto $\phi(t, y) = u_y(t)$, resta da dimostrare la dipendenza continua di ϕ da y.

A questo scopo introduciamo $\psi(t, y) = \phi(t, y) - y$ ed osserviamo che vale l'uguaglianza:

$$\psi(t, y) = \int_0^t f(s, y + \psi(s, y))ds \quad \text{se} \quad 0 \le t \le r.$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} \alpha(t) = |\psi(t, y_2) - \psi(t, y_1)| &\le \int_0^t |f(s, y_2 + \psi(s, y_2)) - f(s, y_1 + \psi(s, y_1))|ds \\ &\le \int_0^t L(|y_2 - y_1| + \alpha(s))ds \\ &\le Lt|y_2 - y_1| + L\int_0^t \alpha(s)ds \\ &\le Lr|y_2 - y_1| + L\int_0^t \alpha(s)ds. \end{aligned}$$

Indichiamo con $\beta(t)$ la funzione

$$\beta(t) = Lr|y_2 - y_1| + L\int_0^t \alpha(s)ds.$$

Allora $\beta(t)$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e

$$\begin{cases} \beta'(t) = L\alpha(t) \\ \beta(t) \ge Lr|y_2 - y_1| \\ \alpha(t) \le \beta(t). \end{cases}$$

Otteniamo allora

$$\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \le L$$

da cui, integrando,

$$\beta(t) \le Lr|y_2 - y_1|e^{Lt}.$$

Questa disuguaglianza dimostra la tesi. □

TEOREMA 2.5 (Dipendenza $\mathcal{C}^k$ dai dati iniziali). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^m_y \times \mathbb{R}^k_\lambda$ e sia*

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

una funzione di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \ge 1$. Fissato un punto $(t_0, y_0, \lambda_0) \in \Omega$, possiamo trovare $r > 0$, $R > 0$, e una funzione

$$\phi : G = [-r + t_0, r + t_0] \times B(y_0, R) \times B(\lambda_0, L) \to \mathbb{R}^m$$

di classe $\mathcal{C}^k$ tale che:

$$\begin{cases} (t, \phi(t,y,\lambda), \lambda) \in \Omega \quad \forall (t,y,\lambda) \in G, \\ \dfrac{\partial \phi(t,y,\lambda)}{\partial t} = f(t, \phi(t,y,\lambda), \lambda) \quad se \quad |t - t_0| \leq r \\ \phi(t_0, y, \lambda) = y. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che le derivate parziali delle soluzioni del sistema differenziale

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,y,\lambda) = f(t, \phi(t,y,\lambda), \lambda)$$

soddisfano ancora un sistema differenziale (che si ottiene calcolando le derivate parziali di ambo i membri) ed applicare il teorema di esistenza e unicità. □

3. Il teorema delle funzioni implicite

TEOREMA 3.1 (delle funzioni implicite). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione continua. Supponiamo che F ammetta derivate parziali prime continue rispetto a $y^1, ..., y^m$ in Ω e che, in un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ la matrice*

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1(x_0,y_0)}{\partial y^1} & \frac{\partial F^1(x_0,y_0)}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial F^1(x_0,y_0)}{\partial y^m} \\ \frac{\partial F^2(x_0,y_0)}{\partial y^1} & \frac{\partial F^2(x_0,y_0)}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial F^2(x_0,y_0)}{\partial y^m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m(x_0,y_0)}{\partial y^1} & \frac{\partial F^m(x_0,y_0)}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial F^m(x_0,y_0)}{\partial y^m} \end{pmatrix}$$

sia invertibile. Possiamo allora determinare due numeri reali positivi r, R e una funzione continua

$$f : B(x_0, r) \to B(y_0, R)$$

tali che

$$B(x_0, r) \times B(y_0, R) \subset \Omega \quad e \quad F(x, f(x)) = F(x_0, y_0) \quad \forall x \in B(x_0, y_0).$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre, per semplificare le notazioni, che $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ e $F(x_0, y_0) = 0$. Sia $A = \frac{\partial F(0,0)}{\partial y}$ e consideriamo l'applicazione

$$G : \Omega \ni (x,y) \to y - A^{-1}F(x,y) \in \mathbb{R}^m.$$

La G ammette derivate parziali prime continue rispetto a $y^1, ..., y^m$ e $\frac{\partial G(0,0)}{\partial y} = 0$. Possiamo quindi trovare $r > 0$, $R > 0$ tali che

$$\bar{B}(0, r) \times \bar{B}(0, R) \subset \Omega$$

e

$$\left\| \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} \right\| < \frac{1}{2} \quad \text{se} \quad |x| < r, \ |y| < R.$$

Abbiamo allora:

$$|G(x,y_2)-G(x,y_1)| = \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}G(x,y_1+t(y_2-y_1))dt\right|$$

$$= \left|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial y}(x,y_1+t(y_2-y_1))(y_2-y_1)dt\right|$$
$$\leq \left\{\int_0^1 \left\|\frac{\partial G}{\partial y}(x,y_1+t(y_2-y_1))\right\| dt\right\} |y_2-y_1|$$

$$\leq \frac{1}{2}|y_2-y_1|, \qquad \forall |x|<r,\ |y_1|,\ |y_2|<R.$$

La G è uniformente continua sul compatto $\bar{B}(0,r)\times\bar{B}(0,R)$. In particolare possiamo trovare $0<r_0<r$ tale che

$$|G(x_2,y_2)-G(x_1,y_1)| < \frac{R}{2} \quad \text{se} \quad |x_2-x_1|\leq r_0,$$
$$|y_2-y_1|\leq r_0,\ (x_1,y_1),\ (x_2,y_2)\in \bar{B}(0,r)\times\bar{B}(0,R).$$

Siano ora $x\in\bar{B}(0,r_0)$, $y\in\bar{B}(0,R)$. Allora

$$|G(x,y)|\leq |G(x,y)-G(0,y)|+|G(0,y)|<R.$$

In particolare, se X è lo spazio delle funzioni continue

$$f:\bar{B}(0,r)\to\bar{B}(0,R)$$

munito della topologia della convergenza uniforme, l'applicazione

$$T: X\ni f\to G(x,f(x))\in X$$

è ben definita. Inoltre

$$\|T(u)-T(v)\| = \sup_{\bar{B}(0,r_0)} |G(x,u(x))-G(x,v(x))| \leq \frac{1}{2}\|u-v\| \quad \forall u,v\in X.$$

La T è una contrazione ed ammette quindi un unico punto fisso $f\in X$:

$$f(x)=f(x)-A^{-1}F(x,f(x))\Rightarrow F(x,f(x))=0.$$

Per dimostrare l'unicità, è sufficiente osservare che

$$|y_2-y_1| = |G(x,y_2)-G(x,y_1)| \leq \frac{1}{2}|y_2-y_1|$$
$$\text{se} \quad (x,y_1),\ (x,y_2)\in\bar{B}(0,r)\times\bar{B}(0,R), \quad F(x,y_1)=F(x,y_2)=0.$$

□

Supponiamo che la funzione F ammetta derivate parziali continue rispetto a tutte le variabili. Se una funzione $f(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ soddisfa, in un intorno del punto x_0,

$$\begin{cases} F(x,f(x)) = F(x_0,y_0) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

otteniamo, calcolando il differenziale rispetto a x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \, + \, \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \frac{\partial f}{\partial x}(x) \, = \, 0 \, .$$

La matrice Jacobiana $A(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ è invertibile in un intorno di (x_0, y_0) ed otteniamo quindi:

eq:parz

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \, = \, - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \, . \tag{3.1}$$

Per ogni variabile x^i, questo sistema definisce un sistema di equazioni differenziali ordinarie, dipendente dalle altre variabili x^j $(j \neq i)$ come parametri. Otteniamo quindi che, se F è di classe $\mathcal{C}^k$ per $k \geq 1$ (rispetto a tutte le variabili x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^m la funzione f è di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno di x_0.

Vale quindi il:

TEOREMA 3.2. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $1 \leq k \leq \omega$. Se, in un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ lo Jacobiano $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ è una matrice invertibile, allora esiste un intorno aperto convesso U di x_0 in $\mathbb{R}^n$ e un'unica funzione $f : U \to \mathbb{R}^m$ di classe $\mathcal{C}^k$ tale che*

$$(x, f(x)) \in \Omega \quad \forall x \in U \qquad e \quad F(x, f(x)) = F(x_0, y_0) \quad \forall x \in U \, .$$

DIMOSTRAZIONE. I casi in cui k sia un intero positivo o ∞ seguono dall'osservazione precedente. Per dimostrare il teorema delle funzioni implicite nel caso analitico reale, si ragiona risolvendo *per serie*, cioè calcolando le successive derivate parziali di $f(x)$ in x_0 usando la (3.1) e le relazioni che si ottengono differenziando la (3.1) ; occorre poi stimare la crescita di tali derivate usando l'ipotesi di analiticità della F. □

TEOREMA 3.3 (dell'applicazione inversa). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ con $1 \leq k \leq \omega$. Se $\mathrm{d}f(x_0)$ è invertibile, allora f è un omeomorfismo di un intorno aperto U di x_0 su un intorno aperto V di $y_0 = f(x_0)$ e l'applicazione inversa $\left(f|^V_U \right)^{-1}$ è differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno di y_0.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'applicazione

$$\mathbb{R}^n_y \times \Omega \ni (y, x) \to f(x) - y \in \mathbb{R}^n \, .$$

Essa è di classe $\mathcal{C}^k$ e

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

è invertibile per $x = x_0$, $y = y_0 = f(x_0)$. Per il teorema delle funzioni implicite vi è una g, univocamente definita e di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno V di y_0 in $\mathbb{R}^n_y$, tale che

$$\begin{cases} f(g(y)) - y \, = \, 0 \quad \forall y \in V \, , \\ g(y_0) = x_0 \, . \end{cases}$$

Poiché $\mathrm{d}g(y_0) = \mathrm{d}f(x_0)^{-1}$ è ancora invertibile, possiamo determinare un'unica h di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno W di x_0, a valori in $\mathbb{R}^n$, tale che $g \circ h$ sia ben definita in W e $g(h(x)) = x$ in W, $h(x_0) = y_0$. Possiamo supporre, poiché h è continua, che $h(W) \subset V$ e quindi applicando f ai due membri dell'uguaglianza $g \circ h(x) = x$ otteniamo:

$$h(x) = f \circ g \circ h(x) = f(x) \quad \text{in} \quad W\,.$$

□

4. Mollificatori

Ricordiamo che il *supporto* di una funzione reale f, definita su uno spazio topologico X, è la chiusura dell'insieme dei punti x di X in cui $f(x) \neq 0$:

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Definizione 4.1. Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$, indichiamo con $\mathcal{C}^k_{\mathrm{comp}}(\Omega)$, per $0 \leq k \leq \infty$, lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali, di classe $\mathcal{C}^k$ su Ω, con supporto compatto contenuto in Ω.

Osserviamo che la funzione identicamente nulla (che ha supporto vuoto) è l'unica funzione analitica reale a supporto compatto.

Lemma 4.2. *Possiamo trovare una funzione $\phi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\phi(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\phi(0) > 0$ e $\operatorname{supp}(f) = \{|x| \leq 1\}$.*

Dimostrazione. La funzione reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-1/t) & \text{se} \quad t > 0 \\ 0 & \text{se} \quad t \leq 0\,. \end{cases}$$

è di classe $\mathcal{C}^\infty$; essa è infatti di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutti i punti $t \neq 0$. È continua in 0 in quanto

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to +\infty} \frac{1}{e^s} = 0\,.$$

Abbiamo poi, se $t > 0$ e k è un intero positivo:

eq:molla

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(t) = \frac{p_k(t)}{t^{2k}} f(t) \tag{4.1}$$

per un polinomio $p_k \in \mathbb{R}[t]$ di grado minore di k. Infatti:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) = \frac{-1}{t^2} f(t) \quad \forall t > 0;$$

supponiamo che la (4.1) sia vera per un intero $k \geq 1$. Allora

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}t^{k+1}} f(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{p_k(t)}{t^{2k}} f(t) \right) \\ &= \frac{t^2 p_k'(t) - (1 + 2kt) p_k(t)}{t^{2(k+1)}}\, f(t), \qquad \forall t > 0\,. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi, per polinomi $q_{2k} \in \mathbb{R}[s]$ di grado $\leq 2k$:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(t) = \lim_{s\to+\infty} \frac{q_{2k}(s)}{e^s} = 0$$

per ogni intero $k \geq 1$. Per il Teorema dell'Hôpital, ne segue che f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e ha tutte le derivate nulle per $t = 0$.

Allora la funzione $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definita da:

$$\phi(x) = f(1 - |x|^2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n\,,$$

gode di tutte le proprietà richieste. □

LEMMA 4.3. *Sia $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua a supporto compatto. Se $\phi(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $\phi(x_0) > 0$ in un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, allora*

$$0 < \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x < \infty\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che ϕ è integrabile perché è continua e nulla fuori da un compatto. Per il Teorema di Weierstrass ϕ ha un massimo M su $\operatorname{supp}\phi$ e $0 < M < \infty$. Inoltre il supporto di ϕ, essendo compatto, è contenuto nel cubo $[-R/2, R/2]^n$ per un numero positivo R sufficientemente grande. Per la monotonia dell'integrale, otteniamo quindi

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x \leq M\, R^n < \infty\,.$$

Poiché ϕ è continua, possiamo poi trovare $\epsilon > 0$ tale che

$$\phi(x) \geq \phi(x_0)/2 > 0 \quad \text{se} \quad x_0^i - \epsilon/2 \leq x^i \leq x_0^i + \epsilon/2\,.$$

Ancora per la monotonia dell'integrale, otteniamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x \geq \int_{|x^i - x_0^i| \leq \epsilon/2} \phi(x_0)/2\,\mathrm{d}x = \epsilon^n \phi(x_0)/2 > 0\,.$$

□

Dai due lemmi precedenti otteniamo:

LEMMA 4.4. *Esiste una funzione $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, di classe $\mathcal{C}^\infty$ e a supporto compatto, tale che*

(1) $\phi(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$*;*
(2) $\operatorname{supp}(\phi) \subset D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| \leq 1\}$*;*
(3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x \,=\, 1.$

Sia ϕ una funzione reale con le proprietà elencate nel lemma. Allora ciascuna delle funzioni ϕ_ϵ, per $\epsilon > 0$, definite da:

$$\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\phi(x/\epsilon) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

gode delle proprietà:

(1) $\operatorname{supp}(\phi_\epsilon) \subset B(0,\epsilon) = \{|x| \leq \epsilon\}$;

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x)\mathrm{d}x \;=\; 1. \tag{2}$$

La seconda proprietà segue infatti dalle formule di cambiamento di variabili negli integrali multipli.

DEFINIZIONE 4.5. La famiglia $\{\phi_\epsilon \,|\, \epsilon > 0\}$ si dice una famiglia di *mollificatori* in $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 4.6. *Sia $\{\phi_\epsilon = \epsilon^{-n}\phi(x/\epsilon)\}_{\epsilon>0}$ una famiglia di mollificatori in $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni funzione continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, le funzioni:*

$$f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_\epsilon(x-y)\mathrm{d}y \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

sono di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathbb{R}^n$; inoltre:

(1) $\mathrm{supp}(f_\epsilon) \subset \mathrm{supp}(f) + B(0,\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathrm{dist}(x, \mathrm{supp}(f)) \le \epsilon\}$;
(2) $\lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon(x) = f(x)$ *uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^n$.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ fissato, la funzione $\mathbb{R}^n \ni y \to f(y)\phi_\epsilon(x-y)$ è continua e uguale a 0 fuori dalla palla chiusa di centro x e raggio ϵ. Essa è dunque integrabile su $\mathbb{R}^n$ e quindi la f_ϵ è ben definita. Chiaramente $f_\epsilon(x) = 0$ se $\mathrm{dist}(x, \mathrm{supp}\, f) > \epsilon$.

Essa è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale.

Infine, abbiamo

$$f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\phi_\epsilon(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\epsilon y)\phi(y)\mathrm{d}y$$

per il teorema di cambiamento di variabili negli integrali multipli. La funzione $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x,y) \to f(x-y) \in \mathbb{R}$ è continua e quindi uniformemente continua sui compatti. Fissato un numero reale δ positivo, possiamo trovare allora per ogni compatto K di $\mathbb{R}^n$ un $\sigma > 0$ tale che

$$|f(x-y) - f(x)| < \delta \quad \text{se} \quad x \in K,\, |y| < \sigma\,.$$

Allora:

$$|f_\epsilon(x) - f(x)| \le \left| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\epsilon y) - f(x)|\phi(y)\mathrm{d}y \right| < \delta \quad \text{se} \quad \epsilon < \sigma\,,\; x \in K\,.$$

La dimostrazione è completa. □

pp:mlfctr

PROPOSIZIONE 4.7. *Sia K un compatto di $\mathbb{R}^n$ e A un aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente K. Esiste allora una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $0 \le f(x) \le 1$ in $\mathbb{R}^n$, $f(x) = 1$ su K ed $f(x) = 0$ se $x \notin A$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano U_1, U_2 intorni aperti di K in A con $U_1 \Subset U_2 \Subset A$. Sia $\epsilon > 0$ un numero reale maggiore di $\mathrm{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U_1)$, $\mathrm{dist}(\overline{U}_1, \mathbb{R}^n \setminus U_2)$ e $\mathrm{dist}(\overline{U}_2, \mathbb{R}^n \setminus A)$. Poiché $\mathbb{R}^n$ è uno spazio normale, possiamo trovare una

funzione di Urysohn $\psi : \mathbb{R}^n \to I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ tale che $\psi(x) = 1$ se $x \in \overline{U}_1$, $\psi(x) = 0$ se $x \notin U_2$. Sia $\{\phi_\sigma\}_{\sigma>0}$ una famiglia di mollificatori in $\mathbb{R}^n$. Allora

$$f(x) = \psi_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\phi_\epsilon(x-y)\mathrm{d}y$$

soddisfa tutte le proprietà richieste. Infatti, poiché $0 \leq \psi(x) \leq 1$,

$$0 \leq f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\phi_\epsilon(x-y)\mathrm{d}y \leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x-y)\mathrm{d}y = 1;$$

se $x \in K$, allora $\psi(y)\phi_\epsilon(x-y) = \phi_\epsilon(x-y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ perché $y \in \overline{U}_1$ se $x - y$ appartiene al supporto di ϕ_ϵ e quindi

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\phi_\epsilon(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x-y)\mathrm{d}y = 1 \quad \forall x \in K\,;$$

se $x \notin A$, allora $\psi(y) = 0$ sul supporto di $y \to \phi_\epsilon(x-y)$, in quanto esso è contenuto in $\mathbb{R}^n \setminus U_2$ e perciò:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\phi_\epsilon(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} 0\mathrm{d}y = 0.$$

□

5. Immersioni e sommersioni differenziabili negli spazi Euclidei

Siano A un aperto di $\mathbb{R}^n$, B un aperto di $\mathbb{R}^m$ ed $f : A \to B$ una funzione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$.

Definizione 5.1. Diciamo che f è un' *immersione differenziabile in* $x_0 \in A$ se il suo differenziale $\mathrm{d}f(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un monomorfismo $\mathbb{R}$–lineare; la f si dice un' *immersione differenziabile* se è tale in ogni punto di A.

Diciamo che f è una *sommersione differenziabile in* $x_0 \in A$ se il suo differenziale $\mathrm{d}f(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un epimorfismo $\mathbb{R}$–lineare; la f si dice una *sommersione differenziabile* se è tale in ogni punto di A.

Un punto x_0 in cui la f *non* sia una sommersione differenziabile si dice *punto critico* di f e la sua immagine $f(x_0) \in B$ si dice *valore critico* di f.

L'insieme dei punti critici di f si indica con $C(f)$ e l'insieme dei valori critici con $CV(f)$.

Esempio 5.2. Consideriamo l'applicazione $f : \mathbb{R} \ni x \to 1 + x^2 \in \mathbb{R}$. Allora f è un'immersione e una sommersione in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; abbiamo $C(f) = \{0\}$ e $CV(f) = \{1\}$.

Teorema 5.3 (dell'inversa sinistra). *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ due aperti ed $f : A \to B$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$. Se f è un'immersione nel punto $x_0 \in A$, allora $n \leq m$ e possiamo trovare un intorno aperto U di x_0 in A , un intorno aperto W di $f(x_0)$ in B e un'applicazione differenziabile $g : W \to U$ di classe $\mathcal{C}^k$ tali che*

$$f(U) \subset W \qquad e \qquad g \circ f(x) = x \quad \forall x \in U\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi il differenziale $df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un monomorfismo $\mathbb{R}$–lineare e quindi $n \leq m$. In particolare il determinante di un minore $n \times n$ della matrice Jacobiana di f in x_0 è diverso da zero. Supponiamo per semplicità che la matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^n(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^n(x_0)}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

abbia determinante diverso da zero. Poiché essa è la matrice Jacobiana in x_0 della composizione $\pi \circ f$ di f con la proiezione nelle prime n coordinate:

$$\pi : \mathbb{R}^m \ni {}^t(y^1, \ldots, y^m) \to {}^t(y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n \,,$$

per il teorema dell'applicazione inversa possiamo trovare intorni aperti U di x_0 in A e W' di $\pi \circ f(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$ tali che $(\pi \circ f)\big|_U^{W'} : U \to W'$ sia un omeomorfismo e $\left((\pi \circ f)\big|_U^{W'}\right)^{-1}$ sia differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ in W'. Poniamo $W = \pi^{-1}(W') \cap B$ e poniamo $g = \left((\pi \circ f)\big|_U^{W'}\right)^{-1} \circ \pi$ su W: la funzione così definita è di classe $\mathcal{C}^k$ e soddisfa la tesi del teorema. □

TEOREMA 5.4 (dell'inversa destra). *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ due aperti ed $f : A \to B$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$. Se f è una sommersione differenziabile nel punto $x_0 \in A$, allora $n \geq m$ e possiamo trovare intorni aperti U di x_0 in A, W di $f(x_0)$ in B e una funzione differenziabile $g : W \to U$ di classe $\mathcal{C}^k$ tale che*

$$g(W) \subset U \qquad e \quad f \circ g(y) = y \quad \forall y \in W \,.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\mathrm{d}f(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un epimorfismo $\mathbb{R}$–lineare, $n \geq m$. A meno di permutare gli indici delle coordinate $x^1, \ldots, x^m$, possiamo supporre che la matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^m} \\ \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^2(x_0)}{\partial x^m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m(x_0)}{\partial x^1} & \frac{\partial f^m(x_0)}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^m(x_0)}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

abbia determinante diverso da 0. Sia

$$\iota : \mathbb{R}^m \ni {}^t(x^1, \ldots, x^m) \to {}^t(x^1, \ldots, x^m, x_0^{m+1}, \ldots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$$

l'immersione di $\mathbb{R}^m$ in un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ per il punto x_0. L'applicazione ι è differenziabile di classe $\mathcal{C}^\omega$. Quindi la $f \circ \iota$ è definita e differenziabile in un intorno Ω di $z_0 = {}^t(x_0^1, \ldots, x_0^m)$ in $\mathbb{R}^m$ e il suo differenziale in z_0 è un'isomorfismo lineare $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Per il teorema dell'applicazione inversa, possiamo trovare intorni U' di z_0 in Ω, W di $f(x_0) = f \circ \iota(z_0)$

in B, tali che $(f\circ\iota)\big|_{U'}^{W} : U \to W$ sia un omeomorfismo e la sua inversa $\left((f\circ\iota)\big|_{U'}^{W}\right)^{-1} : W \to U'$ sia differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$. Allora la $g = \iota\circ\left((f\circ\iota)\big|_{U'}^{W}\right)^{-1}$ soddisfa la tesi del teorema. □

6. Sottovarietà differenziabili negli spazi Euclidei

DEFINIZIONE 6.1. Si dice *sottovarietà parametrica di dimensione m e di classe $\mathcal{C}^k$* dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$ un'applicazione

$$\alpha : \Omega \to \mathbb{R}^n\,,$$

definita su un aperto Ω di $\mathbb{R}^m$, tale che:

(1) α è un'immersione topologica;
(2) α è un'immersione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$.

L'immagine $\alpha(\Omega)$ si dice il *supporto* della varietà parametrica e si indica con $|\alpha|$.

Osserviamo che $m \le n$. Se $m = n$, per il teorema dell'applicazione inversa la α è un *diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$* dell'aperto Ω di $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$ sull'aperto $\alpha(\Omega)$ di $\mathbb{R}^n$.

PPcea

LEMMA 6.2. *Sia $\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una varietà parametrica di dimensione m, definita su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \ge 1$. Per ogni $y_0 \in \Omega$, esistono un intorno aperto U di $\alpha(y_0)$ in $\mathbb{R}^n$ e $n-m$ funzioni $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^k$ tali che*

$$\alpha(\Omega)\cap U \;=\; \left\{x \in U \,\middle|\, f_i(x) = 0 \quad 1 \le i \le n-m\right\}\,,$$

e inoltre

$$\mathrm{d}f_1(x),\, ...,\, \mathrm{d}f_{n-m}(x) \in (\mathbb{R}^n)'$$

sono linearmente indipendenti per ogni $x \in U$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché α è un'immersione differenziabile in ogni punto di Ω, possiamo senz'altro supporre che la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial\alpha^1}{\partial y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\alpha^m}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial\alpha^m}{\partial y^m} \end{pmatrix}$$

abbia determinante diverso da zero in $y_0 \in \Omega$. Sia $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la proiezione nelle prime m coordinate. Per il teorema dell'applicazione inversa, possiamo trovare un intorno aperto W di $\pi(\alpha(y_0))$ in $\mathbb{R}^m$ e un intorno V di y_0 in Ω tale che

$$g\circ\pi\circ\alpha(y) = y, \quad \forall y \in V\,, \qquad \pi\circ\alpha\circ g(x') = x'\,, \quad \forall x' \in W\,.$$

Poiché abbiamo supposto che α sia un'immersione topologica, possiamo trovare un intorno aperto U di $\alpha(y_0)$ in $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\alpha(V) \;=\; U \cap \alpha(\Omega)\,.$$

Poniamo

$$f^i(x) = x^{m+i} - \alpha^{m+i} \circ g(\pi(x)) \quad \text{per} \quad x \in U, \quad i = 1, ..., n-m\,.$$

Chiaramente le f^i hanno differenziali linearmente indipendenti in U e $\alpha(V)$ è il luogo di zeri delle f^i in U. □

Viceversa, vale il

LEMMA 6.3. *Siano n, m interi con $0 < m < n$ e sia $F : A \to \mathbb{R}^{n-m}$ una sommersione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$), definita su un aperto A di $\mathbb{R}^n$. Se $F(x_0) = 0$ in un punto $x_0 \in A$, possiamo trovare una sottovarietà parametrica $\alpha : \Omega \to A$, definita su un aperto Ω di $\mathbb{R}^m$, di classe $\mathcal{C}^k$ e dimensione m, tale che, per un intorno aperto U di x_0 in A, risulti:*

$$\{x \in U \,|\, F(x) = 0\} = \alpha(\Omega)\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che la matrice $\left(\frac{\partial F^i(x)}{\partial x^{m+j}}\right)_{1 \leq i,j \leq n-m}$ sia invertibile per $x = x_0$. Per il teorema delle funzioni implicite possiamo allora trovare un intorno aperto Ω di $(x_0^1, ..., x_0^m)$ in $\mathbb{R}^m$, un intorno aperto W di $(x_0^{m+1}, ..., x_0^n)$ in $\mathbb{R}^{n-m}$ tali che $\Omega \times W = U \subset \Omega$ e una funzione $g : \Omega \to W$, di classe $\mathcal{C}^k$, tale che

$$\{F(x) = 0\} \cap U \,=\, \{(y, g(y)) \,|\, y \in \Omega\}\,.$$

Basterà allora definire

$$\alpha : \Omega \ni y \to (y, g(y)) \in \mathbb{R}^n\,.$$

□

DEFINIZIONE 6.4. Si dice *sottovarietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ e di dimensione m* di $\mathbb{R}^n$ un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^n$ tale che, per ogni punto $x_0 \in S$ si possa trovare un intorno aperto U di x_0 in $\mathbb{R}^n$ tale che la componente connessa di x_0 in $S \cap U$ sia il supporto di una sottovarietà parametrica di dimensione m.

Una superficie parametrica regolare $\alpha : \Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^k$, con $\alpha(\Omega) \subset S$, si dice una *parametrizzazione locale* di classe $\mathcal{C}^k$, della superficie S.

La *topologia di sottovarietà* di S è quella che ha per base le componenti connesse delle intersezioni di S con gli aperti di $\mathbb{R}^n$.

Si può scegliere come base della topologia di sottovarietà di S anche la famiglia dei supporti delle sue parametrizzazioni locali di classe $\mathcal{C}^k$.

Essa è in generale più fine della topologia di sottospazio.

CAPITOLO 10

Geometria differenziale di $\mathbb{R}^n$

chap:dba

1. Campi di vettori in $\mathbb{R}^n$

sec:campvectrn

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Indichiamo con $\mathcal{E}(\Omega)$ l'algebra reale delle funzioni reali che sono definite e continue, con le loro derivate parziali di ogni ordine, su Ω.

Vale il seguente:

LMcaa

LEMMA 1.1. *Sia x_0 un punto dell'aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ ed $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. Esistono allora funzioni $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{E}(\Omega)$ tali che:*

eq:caa

$$f(x) = f(x_0) + (x^1 - x_0^1)g_1(x) + \cdots + (x^n - x_0^n)g_n(x) \quad \forall x \in \Omega \tag{1.1}$$

ed inoltre:

eq:cab

$$g_j(x_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^j} \quad \textit{per} \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre per semplicità che $f(x_0) = 0$. Sia $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r\}$ una palla aperta, di centro x_0, contenuta in Ω. Per ogni punto x di $B(x_0, r)$, il segmento $[x_0, x]$ di estremi x_0, x_1 è contenuto in Ω. Abbiamo perciò, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x) - x(x_0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_0 + t(x - x_0))dt \\ &= \sum\nolimits_{j=1}^n (x^j - x_0^j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0 + t(x - x_0))dt. \end{aligned}$$

Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, le funzioni

$$h_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0 + t(x - x_0))dt$$

sono definite e di classe $\mathcal{C}^\infty$ sulla palla aperta $B(x_0, r)$. Fissiamo ora numeri reali r_1, r_2 con $0 < r_1 < r_2 < r$ e introduciamo la *funzione di taglio*:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t \le r_1 \\ \exp\left(\frac{\exp(1/(r_1 - t)}{t - r_2}\right) & \text{se} \quad r_1 < t < r_2 \\ 0 & \text{se} \quad t \ge r_2. \end{cases}$$

La ϕ è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$, non crescente, uguale a 1 per $t \leq r_1$ ed uguale a 0 per $t \geq r_2$. Perciò le funzioni

$$k_j(x) = \begin{cases} \phi(|x - x_0|)h_j(x) & \text{se} \quad |x - x_0| < r_2 \\ 0 & \text{se} \quad |x - x_0| \geq r_2 \end{cases}$$

sono definite e di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $\mathbb{R}^n$. Osserviamo che $k_j(x) = h_j(x)$ se $|x-x_0| \leq r_1$. In particolare:

$$f(x) = \sum\nolimits_{j=1}^{n} (x^j - x_0^j)k_j(x) \quad \text{per } x \in B(x_0, r_1).$$

Poiché la funzione $\tilde{f} = f(x) - \sum_{j=1}^{n}(x^j - x_0^j)k_j(x)$, che è definita e di classe $\mathcal{C}^\infty$ su Ω, si annulla sulla palla $B(x_0, r_1)$, le funzioni

$$\eta_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in B(x_0, r_1) \\ \dfrac{(x^j - x_0^j)\tilde{f}(x)}{|x - x_0|^2} & \text{se} \quad x \in \Omega \setminus \{x_0\} \end{cases}$$

sono definite e di classe $\mathcal{C}^\infty$ in Ω. Otteniamo quindi la tesi ponendo $g_j = k_j + \eta_j$, per $j = 1, \ldots, n$. Infatti la (1.2) è conseguenza della (1.1). □

DEFINIZIONE 1.2. Un *campo di vettori* X sull'aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ è un *operatore differenziale lineare reale del primo ordine omogeneo* su Ω, cioè un'applicazione:

eq:cac (1.3) $$X : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega)$$

che si possa descrivere mediante:

eq:cad (1.4) $$\begin{cases} X(f)(x) = \sum\nolimits_{j=1}^{n} a^j(x) \dfrac{\partial f(x)}{\partial x^j} \quad \forall f \in \mathcal{E}(\Omega) \\ \quad \text{con} \quad a^j \in \mathcal{E}(\Omega) \quad \text{per} \quad j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Indicheremo nel seguito con $\mathfrak{X}(\Omega)$ l'insieme di tutti i campi di vettori su Ω.

Ricordiamo la definizione:

DEFINIZIONE 1.3. Un'algebra $\mathfrak{g}$ su un campo $\mathbb{K}$, con prodotto $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \to [X, Y] \in \mathfrak{g}$ si dice un'*algebra di Lie* se il prodotto soddisfa gli assiomi:

$$[X, X] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g} \qquad \text{(antisimmetria)}$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} \qquad \text{(identità di Jacobi).}$$

Abbiamo facilmente:

PROPOSIZIONE 1.4. *L'insieme* $\mathfrak{X}(\Omega)$ *dei campi di vettori su* Ω *è:*

(1) *uno spazio vettoriale reale;*
(2) *un* $\mathcal{E}(\Omega)$*-modulo a sinistra;*

(3) *un'algebra di Lie reale per l'operazione di commutazione di campi di vettori:*

eq:cae (1.5) $$\mathfrak{X}(\Omega)\times\mathfrak{X}(\Omega)\ni(X,Y)\to[X,Y]=X\circ Y-Y\circ X\in\mathfrak{X}(\Omega).$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che, se

$$X=\sum\nolimits_{j=1}^{n}a^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}\quad\text{ed}\quad Y=\sum\nolimits_{j=1}^{n}b^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j},$$

si ha:

$$\alpha X+\beta Y=\sum\nolimits_{j=1}^{n}\left(\alpha a^j(x)+\beta b^j(x)\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\qquad\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},$$
$$fX+gY=\sum\nolimits_{j=1}^{n}\left(f(x)a^j(x)+g(x)b^j(x)\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\qquad\forall f,g\in\mathcal{E}(\Omega).$$

Queste operazioni definiscono le strutture di spazio vettoriale reale e di $\mathcal{E}(\Omega)$-modulo di $\mathfrak{X}(\Omega)$. La verifica di (1) e (2) è dunque immediata.

Per dimostrare la (3), basta verificare che:

eq:caf (1.6) $$[X,Y]=\sum\nolimits_{j,k=1}^{n}\left(a^k(x)\frac{\partial b^j(x)}{\partial x^k}-b^k(x)\frac{\partial a^j(x)}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$ □

Per preparare la definizione astratta di campo di vettori su una varietà, dimostriamo la

PROPOSIZIONE 1.5. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $X:\mathcal{E}(\Omega)\to\mathcal{E}(\Omega)$ sia un campo di vettori in Ω è che valga la:*

eq:cag (1.7) $$X(fg)=fX(g)+gX(f)\quad\forall f,g\in\mathcal{E}(\Omega)\quad\textit{(identità di Leibnitz).}$$

DIMOSTRAZIONE. La verifica della necessità della condizione è immediata. Verifichiamo la sufficienza. Dimostriamo innanzi tutto che, se $X\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}(\Omega))$ soddisfa la (1.7), allora X si annulla sulle costanti. Se infatti indichiamo con c la funzione che vale identicamente $c\in\mathbb{R}$ su Ω, otteniamo dalla (1.7):

$$X(1)=X(1\cdot1)=1\,X(1)+1\,X(1)=2\,X(1)\Longrightarrow X(1)=0.$$

Quindi anche:

$$X(c)=X(c\cdot1)=c\,X(1)=c\cdot0=0.$$

Poniamo ora $a^j(x)=X(x^j)$. Fissato $x_0\in\Omega$ ed $f\in\mathcal{E}(\Omega)$, utilizziamo il Lemma 1.1 per fissare anche funzioni $g_j\in\mathcal{E}(\Omega)$ che soddisfano le (1.1) ed

(1.2). Otteniamo:

$$\begin{aligned} X(f)(x_0) &= [X(f(x_0) + \sum_{j=1}^n (x^j - x_0^j) g_j(x))]_{x=x_0} \\ &= X(f(x_0)) + \sum_{j+1}^n \Big[X((x^j - x_0^j) g_j(x)) \Big]_{x=x_0} \\ &= 0 + \sum_{j=1}^n \Big[(x^j - x_0^j) X(g_j) + g_j(x) X(x^j - x_0^j) \Big]_{x=x_0} \\ &= \sum_{j=1}^n g_j(x_0) X(x^j)(x_0) = \sum_{j=1}^n a^j(x_0) \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

La dimostrazione è completa. □

2. Curve integrali di un campo di vettori in $\mathbb{R}^n$

sec:crvintrn

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Al campo di vettori

eq:cbaa
$$X = \sum_{j=1}^n a^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(\Omega) \tag{2.1}$$

associamo il sistema (autonomo) di equazioni differenziali ordinarie:

eq:cba
$$\dot{x}^j(t) = a^j(x(t)), \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.2}$$

DEFINIZIONE 2.1. Le soluzioni del sistema (2.2) si dicono *curve integrali* o *curve caratteristiche* del campo di vettori (2.1).

OSSERVAZIONE 2.2. Lungo le curve integrali del campo di vettori (2.1) l'azione del campo si riduce alla differenziazione ordinaria:

eq:cbb
$$(Xf)(x(t)) = \frac{d}{dt} f(x(t)) \quad \forall f \in \mathcal{E}(\Omega) \tag{2.3}$$

se $x = x(t)$ è soluzione di (2.2). Viceversa, le soluzioni $u \in \mathcal{E}(\Omega)$ dell'equazione differenziale alle derivate parziali:

eq:cbc
$$Xu(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \tag{2.4}$$

sono *integrali primi* del sistema (2.2). Cioè, se $x = x(t)$, per $t \in (a, b)$, è soluzione di (2.2), allora:

eq:cbd
$$u(x(t)) = \text{costante} \quad \text{per} \quad a < t < b. \tag{2.5}$$

Dal teorema di esistenza, unicità e dipendenza differenziabile dei dati per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie abbiamo:

PPcbc

PROPOSIZIONE 2.3. *Siano (2.1) un campo di vettori nell'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ed x_0 un punto di Ω. Allora vi è un unico intervallo aperto $(a, b) \subset \mathbb{R}$, con $-\infty \le a < 0 < b \le +\infty$ ed un'unica curva $\alpha : (a, b) \to \Omega$ di classe $\mathcal{C}^\infty$, tale che valgano le (2.6) e (2.7):*

eq:cbe
$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = a^j(\alpha(t)) \quad \textit{per ogni} \quad a < t < b \quad e \quad 1 \le j \le n, \\ \alpha(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

eq:cbex (2.7) $$\begin{cases} \alpha(t_\nu) \text{ diverge in } \Omega \\ \forall \text{ successione } \{t_\nu\} \text{ limitata e divergente in } (a,b). \quad \square \end{cases}$$

Indicheremo con con I_{X,x_0} l'intervallo (a,b) e con $\alpha_X(x_0,t)$ la curva $\alpha : (a,b) \to \Omega$ descritti nella Proposizione PPcbc 2.3. Abbiamo ancora:

pp:dbabd PROPOSIZIONE 2.4 (Dipendenza dai dati iniziali). *Con le notazioni della Proposizione PPcbc 2.3: fissato $x_0 \in \Omega$ esistono un intorno U di x_0 in Ω ed un numero reale $r > 0$ tali che:*

(2.8) $I_{X,x} \supset (-r,r) \quad \forall x \in U$,

(2.9) $U \times (-r,r) \ni (x,t) \to \alpha_X(x,t) \in \Omega$ *è un'applicazione di classe* $\mathcal{C}^\infty$.

DEFINIZIONE 2.5. Sia eq:cbaa (2.1) un campo di vettori. Un punto $x \in \Omega$ si dice:

regolare, o *non stazionario*, se $(a^1(x), \dots, a^n(x)) \neq \vec{0}$,
critico, o *stazionario*, se $(a^1(x), \dots, a^n(x)) = \vec{0}$.

Osserviamo che $x \in \Omega$ è un punto critico per $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ se e soltanto se $I_{X,x} = \mathbb{R}$ e $\alpha_X(x,t) = x$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO 2.6. Sia $\Omega = \mathbb{R}^n$ e supponiamo che i coefficienti a^j di eq:cbaa (2.1) siano costanti e non tutti nulli. Allora le curve integrali di X sono della forma:

$$x^j(t) = x_0^j + ta^j \quad \text{per} \quad j = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R},$$

sono cioè il fascio delle rette parallele alla direzione $\vec{a} = (a^1, \dots, a^n)$.

Fissiamo un'applicazione lineare $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ che abbia come nucleo la retta $\mathbb{R}\,\vec{a}$. Allora le soluzioni di eq:cbc (2.4) sono tutte e sole le $u = v \circ \psi$, al variare di v in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-1})$.

ESEMPIO 2.7. Sia $\Omega = \mathbb{R}^2_{x,y}$ e sia:

$$X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Allora il corrispondente sistema di equazioni ordinarie è:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = \ x \end{cases}$$

che ha soluzioni della forma:

$$\begin{cases} x = A\cos(t + t_0) \\ y = A\sin(t + t_0) \\ \quad \text{con } A, t_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi l'origine, che è l'unico punto stazionario di X, e le circonferenze con centro nell'origine.

Le soluzioni di eq:cbc (2.4) sono le $u = v(x^2 + y^2)$, con $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$.

ESEMPIO 2.8. Sia ancora $\Omega = \mathbb{R}^2_{x,y}$ e sia:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

sono le curve:

$$\begin{cases} x = x_0 \cdot e^t \\ y = y_0 \cdot e^t \\ \quad t \in \mathbb{R}, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

cioè l'origine, unico punto critico di X, e le semirette aperte uscenti dall'origine. Le soluzioni di (2.4) devono essere costanti su ciascuna componente connessa dell'intersezione del suo dominio di definizione con una qualsiasi semiretta uscente dall'origine. In particolare, le uniche soluzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ di (2.5) su un dominio stellato rispetto all'origine sono le costanti. In generale, se $\phi \in \mathcal{E}(A)$ per un aperto $A \subset \mathbb{R}$, allora le funzioni della forma $u(x,y) = \phi(x/y)$ e $v(x,y) = \phi(y/x)$ sono soluzioni di (2.4), rispettivamente su $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0,\ (x/y) \in A\}$ e su $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0,\ (y/x) \in A\}$.

ESEMPIO 2.9. Sia $\Omega = \mathbb{R}^2_{x,y}$ e:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

sono le curve:

$$\begin{cases} x = x_0 \cdot e^t \\ y = y_0 \cdot e^{-t} \\ \quad t \in \mathbb{R}, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

cioè l'origine, unico punto critico di X, e le componenti connesse delle iperboli equilatere aventi per asintoti gli assi coordinati. Le soluzioni di (2.5) sono della forma $u = v(xy)$, ove $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$.

3. Gruppi locali a un parametro associati ai campi di vettori

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ un campo di vettori. Poniamo:

eq:dbacaaa
$$\tilde{\Omega} = \{(t;x) \in \mathbb{R} \times \Omega \mid t \in I_{X,x}\}. \tag{3.1}$$

Possiamo precisare ulteriormente la Proposizione 2.4 nella forma seguente:

tm:dbaca

TEOREMA 3.1. *L'insieme $\tilde{\Omega}$ è un intorno aperto di $\{0\} \times \Omega$ in $\mathbb{R}^{n+1}$. La:*

eq:dbacaab

$$\alpha_X : \tilde{\Omega} \ni (t;x) \to \alpha_X(t;x) \in \Omega \tag{3.2}$$

definita dalle:

$$\frac{\partial \alpha_X(t;x)}{\partial t} = X_{\alpha_X(t,x)} \quad \forall (t,x) \in \tilde{\Omega} \tag{3.3}$$

$$\alpha_X(0;x) = x \qquad \forall x \in \Omega \tag{3.4}$$

gode delle proprietà:

eq:dbacb

$$\begin{cases} \alpha_X(t_1+t_2,x) = \alpha_X(t_1,\alpha_X(t_2;x)) \\ \qquad\qquad se \quad (t_2;x),(t_1;\alpha_X(t_2;x)),(t_1+t_2,x) \in \tilde{\Omega}; \end{cases} \tag{3.5}$$

eq:dbacc

$$(t,x) \in \tilde{\Omega} \Rightarrow (-t,\alpha_X(t;X)) \in \tilde{\Omega} \quad e \quad \alpha_X(-t,\alpha_X(t;x)) = x. \tag{3.6}$$

DIMOSTRAZIONE. Basta solo verificare le (3.5) e (3.6). La (3.5) è conseguenza del fatto che, se consideriamo i due membri dell'uguaglianza come funzioni di t_1, essi soddisfano lo stesso problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = X_{\psi(t)} \\ \psi(0) = \alpha_X(t_2;x). \end{cases}$$

La (3.6) è conseguenza della (3.5). □

Osserviamo che la (3.5) ci dice in particolare che, se $(t;x) \in \tilde{\Omega}$, allora esiste un intorno aperto U di x in Ω ed un $\epsilon > 0$ tale che, per $|t| < \epsilon$, la $x \to \alpha_X(t,x)$ è un diffeomorfismo tra l'aperto U e l'aperto $\alpha_X(t;U)$ di Ω.

Scriveremo anche α_X^t per l'applicazione $x \to \alpha_X(t,x)$. Osserviamo che in generale essa non è definita su tutto l'aperto Ω. La (3.5) si può comunque riscrivere nella forma:

eq:dbacd

$$\alpha_X^{t_1} \circ \alpha_X^{t_2} = \alpha_X^{t_1+t_2}, \tag{3.7}$$

intendendo con questo che l'uguaglianza è verificata per tutti gli $x \in \Omega$ per cui entrambi i membri della (3.7) siano definiti.

Introduciamo per funzioni di questo tipo la seguente:

df:dbacc

DEFINIZIONE 3.2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\{\Omega_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ una famiglia di sottoinsiemi aperti di Ω con le proprietà:

$$\Omega_{t_1} \subset \Omega_{t_2} \quad \text{se} \quad \begin{cases} t_1 < t_2 \le 0 \\ \qquad \text{oppure} \\ 0 \le t_2 \le t_1, \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\bigcup_{t<0} \Omega_t = \bigcup_{t>0} \Omega_t = \Omega_0 = \Omega, \tag{3.9}$$

$$\tilde{\Omega} = \{(t;x) \in \mathbb{R} \times \Omega \mid x \in \Omega_t\} \quad \text{è aperto in } \mathbb{R}^{n+1}. \tag{3.10}$$

Sia poi $\{\phi^t \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_t, \Omega) \mid t \in \mathbb{R}\}$ una famiglia di funzioni che godono delle seguenti proprietà:

$$\phi^0 = \mathrm{id}_X, \tag{3.11}$$

eq:dback
$$\phi^{t_1} \circ \phi^{t_2} = \phi^{t_1+t_2} \quad \text{su} \quad \Omega_{t_1} \cap \Omega_{t_2} \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

$$\{\tilde{\Omega} \ni (t; x) \to \phi^t(x) \in \Omega\} \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{\Omega}, \Omega). \tag{3.13}$$

Allora la famiglia $\{\phi^t\}$ si dice un *gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di* Ω.

Il Teorema 3.1 tm:dbaca ci dice che:

PROPOSIZIONE 3.3. *Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ definisce un gruppo locale a un parametro $\{\alpha_X^t\}$ di diffeomorfismi di Ω.*

DEFINIZIONE 3.4. Il gruppo locale a un parametro $\{\alpha_X^t\}$ si dice anche il *flusso* del campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$.

Naturalmente l'aperto $\tilde{\Omega}$ nella Definizione 3.2 df:dbacc può in generale essere più piccolo dell'aperto massimale considerato nell'enunciato del Teorema 3.1 tm:dbaca. Abbiamo viceversa:

TEOREMA 3.5. *Se $\{\phi_t \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_t, \Omega)\}$ è un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di Ω, risulta univocamente determinato un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tale che:*

eq:dbacf
$$\frac{\partial \phi^t(x)}{\partial t} = X_{\phi^t(x)} \quad \forall x \in \Omega_t. \tag{3.14}$$

DIMOSTRAZIONE. Definiamo X mediante $X_x = \left.\dfrac{\partial \phi^t(x)}{\partial t}\right|_{t=0}$, per ogni $x \in \Omega$. Allora, per la (3.12) eq:dback, vale anche la (3.14) eq:dbacf. □

DEFINIZIONE 3.6. Il campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ che soddisfa la (3.14) eq:dbacf si dice il *generatore infinitesimale* del gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi $\{\phi^t\}$.

DEFINIZIONE 3.7. Chiamiamo *gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di* Ω una famiglia di applicazioni differenziabili $\phi^t : \Omega \to \Omega$, per $t \in \mathbb{R}$, tali che:

$$\phi^0 = \mathrm{id}_X, \tag{3.15}$$

$$\phi^{t_1} \circ \phi^{t_2} = \phi^{t_1+t_2} \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \tag{3.16}$$

$$\{\mathbb{R} \times \Omega \ni (t, x) \to \phi^t(x) \in \Omega\} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \Omega, \Omega). \tag{3.17}$$

Chiaramente un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di Ω è anche un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di Ω.

DEFINIZIONE 3.8. Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ si dice *completo* se è generatore infinitesimale di un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di Ω.

Si dimostra facilmente il seguente:

tm:dbach

TEOREMA 3.9. *Ogni campo di vettori a supporto compatto in Ω è completo.*

4. Campi di vettori e cambiamenti di coordinate

sec:ccoordcvect

Sia $\phi : \Omega \to \Omega'$ un diffeomorfismo tra due aperti di $\mathbb{R}^n$. Ad esso corrisponde un isomorfismo lineare:

eq:cda

$$\phi_* : \mathfrak{X}(\Omega) \to \mathfrak{X}(\Omega'), \tag{4.1}$$

univocamente determinato dalla proprietà che:

eq:cdb

$$(\phi_* X)f = X(\phi^* f) = X(f \circ \phi) \quad \forall f \in \mathcal{E}(\Omega'). \tag{4.2}$$

Se $X = \sum_{j=1}^n a^j(x)\dfrac{\partial}{\partial x^j}$, applicando alla (4.2) il teorema della derivazione della funzione composta, ricaviamo:

eq:cdbx

$$\phi_* X = \sum\nolimits_{j,h=1}^n a^h(x)\frac{\partial \phi^j(x)}{\partial x^h}\frac{\partial}{\partial y^j} \quad \text{per} \quad y = \phi(x). \tag{4.3}$$

Possiamo interpretare la ϕ come un *cambiamento di coordinate* in Ω, e quindi la (4.3) come l'espressione del campo di vettori X nelle nuove coordinate y.

Abbiamo:

PPcda

PROPOSIZIONE 4.1. *Sia x_0 un punto regolare per il campo di vettori $x \in \mathfrak{X}(\Omega)$. Possiamo allora trovare un intorno aperto U di x_0 in Ω ed un cambiamento di coordinate $\phi : U \ni x \to y = \phi(x) \in U'$ tale che:*

eq:cdc

$$\phi_* X = \frac{\partial}{\partial y^1}. \tag{4.4}$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre, per fissare le idee, che X sia descritto dalla (2.1) e che sia $a^1(x_0) \neq 0$. Indichiamo allora con $\psi = \psi(y^1, \dots, y^n)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y^1}\psi^j(y^1, y^2, \dots, y^n) = a^j(\psi(y)) \quad (j = 1, \dots, n) \\ \psi^1(0, y^2, \dots, y^n) = x_0^1 \\ \psi^j(0, y^2, \dots, y^n) = x_0^j + y^j \qquad\qquad (j = 2, \dots, n). \end{cases}$$

Per il teorema di esistenza e unicità, esso definisce una funzione ψ di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno di 0 in $\mathbb{R}^n_y$. Il suo Jacobiano in 0 è:

$$\frac{\partial \psi(0)}{\partial y} = \begin{pmatrix} a^1(x_0) & a^2(x_0) & \dots & a^n(x_0) \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(sono nulli tutti i termini fuori dalla prima riga e dalla diagonale principale). Quindi la ψ definisce un diffeomorfismo tra un intorno U' di 0 in $\mathbb{R}^n_y$ e un intorno U di x_0 in Ω. Abbiamo:

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial y^1} \right) f = \frac{\partial}{\partial y^1} f(\psi(y^1, y^2, \dots, y^n)) \\ = \sum\nolimits_{j=1}^n \frac{\partial \psi^j}{\partial y^1} \frac{\partial f}{\partial x^j} = \sum\nolimits_{j=1}^n a^j(x) \frac{\partial f}{\partial x^j},$$

ed otteniamo quindi la tesi con $\phi = \psi^{-1}$. □

5. Derivata di Lie rispetto a un campo di vettori

PROPOSIZIONE 5.1. *Sia Ω un aperto di $\mathcal{R}^n$ e sia $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ un campo di vettori in Ω. L'applicazione:*

eq:cga (5.1) $$\mathfrak{L}_X : \mathfrak{X}(\Omega) \ni Y \to [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \in \mathfrak{X}(\Omega)$$

è una derivazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{X}(\Omega)$. È cioè $\mathbb{R}$-lineare e soddisfa:

eq:cgb (5.2) $$\mathfrak{L}_X([Y, Z]) = [\mathfrak{L}_X(Y), Z] + [Y, \mathfrak{L}_X(Z)] \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(\Omega).$$

Vale inoltre la:

eq:cgc (5.3) $$\mathfrak{L}_X(fY) = (Xf)Y + f\mathfrak{L}_X(Y) \quad \forall f \in \mathcal{E}(\Omega), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(\Omega).$$

DIMOSTRAZIONE. La verifica delle diverse proprietà è immediata. Osserviamo che la (5.2) è una scrittura equivalente dell'identità di Jacobi. □

DEFINIZIONE 5.2. La $\mathfrak{L}_X : \mathfrak{X}(\Omega) \to \mathfrak{X}(\Omega)$ si dice *la derivata di Lie* rispetto al campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$.

Diamo ora un'interpretazione geometrica della derivata di Lie di un campo di vettori, che illustra anche il significato dell'operazione di commutazione di campi di vettori.

TEOREMA 5.3. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e siano $X, Y \in \mathfrak{X}(\Omega)$. Allora*

eq:ccy (5.4) $$\mathfrak{L}_X(Y)(x) = [X, Y](x) = \left[\frac{d}{dt} \right]_{t=0} \left(\left[\alpha_X^{-t} Y \right](x) \right).$$

DIMOSTRAZIONE. La formula che vogliamo dimostrare è di carattere locale ed è invariante rispetto a cambiamenti di coordinate. Quindi, se $X_{x_0} \neq 0$, per dimostrare che essa è valida nel punto $x_0 \in \Omega$, potremo ricondurre la verifica al caso in cui $X = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$. Allora $\alpha_X^t(x) = x + te_1$ ove $e_1 = (1, \dots, 0)$ è il primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Se $Y = \sum\nolimits_{i=1}^n b^i(x) \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(\Omega)$, abbiamo

$$d\alpha_X^t(Y)(x) = \sum\nolimits_{i=1}^m b^i(x - te_i) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

e quindi

$$\left[\frac{d}{dt}\right]_{t=0} d\alpha_X^t(Y)(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial b^i(x)}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^i} = -[X,Y].$$

Questo dimostra la (6.4) fuori dai punti critici di X. Osserviamo che, per la dipendenza continua della soluzione del problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali ordinarie dai parametri, se $X' \in \mathfrak{X}(\Omega)$ è un altro campo di vettori, la derivata di Lie $\mathfrak{L}_{X+\epsilon X'}(Y)$ dipende con continuità dal parametro ϵ. Possiamo così ottenere la (6.4) anche in un punto critico x_0 di X, sostituendo ad X il campo di vettori $X + \epsilon X'$, con X' non singolare in x_0, applicando la prima parte della dimostrazione e poi passando al limite, nella $\mathfrak{L}_{X+\epsilon X'}(Y)(x_0) = [X + \epsilon X', Y](x_0)$, per $\epsilon \to 0$, in modo da ottenere la ancora la (6.4). □

6. Spazio tangente a un aperto di $\mathbb{R}^n$

sec:sptanrn

DEFINIZIONE 6.1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed x_0 un punto di Ω. Un *vettore tangente* ad Ω in x_0 (o *applicato* in x_0) è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare:

eq:cca (6.1) $$\vec{v} : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

che soddisfa l'identità

eq:ccb (6.2) $$\vec{v}(fg) = f(x_0)\vec{v}(g) + g(x_0)\vec{v}(f) \quad \forall f, g \in \mathcal{E}(\Omega).$$

Indicheremo con $T_{x_0}\Omega$ lo spazio tangente ad Ω in x_0.

Ripetendo i ragionamenti svolti nei paragrafi precedenti pei campi di vettori otteniamo:

PROPOSIZIONE 6.2. *Per ogni $x_0 \in \Omega$ lo spazio tangente $T_{x_0}\Omega$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione n; i vettori $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{x_0}$, per $1 \le j \le n$, ne costituiscono una base.* □

DEFINIZIONE 6.3. L'unione disgiunta $T\Omega = \bigsqcup_{x\in\Omega} T_x\Omega$ si dice lo *spazio tangente* di Ω. L'applicazione

eq:ccc (6.3) $$\Omega \times \mathbb{R}^n \ni (x;\xi) \to \sum_{j=1}^n \xi^j \left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right]_x \in T\Omega$$

è una bigezione, con cui identifichiamo $T\Omega$ al prodotto cartesiano $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Indichiamo con $\pi : T\Omega \to \Omega$ l'applicazione che associa ad ogni vettore tangente il suo punto d'applicazione.

OSSERVAZIONE 6.4. La $T\Omega \xrightarrow{\pi} \Omega$ definisce un *fibrato vettoriale banale* su Ω.

PPccx DEFINIZIONE 6.5. *I campi di vettori in $\mathfrak{X}(\Omega)$ sono in corrispondenza biunivoca con le sezioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ del fibrato $T\Omega \xrightarrow{\pi} \Omega$. La corrispondenza: $\mathfrak{X}(\Omega) \leftrightarrow \Gamma(\Omega, T\Omega)$ associa ad $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ la sezione $\Omega \ni x \to X_x \in T_x\Omega$ ove $X_x(f) = X(f)(x)$ per ogni $x \in \Omega$ ed $f \in \mathcal{E}(\Omega)$.*

DEFINIZIONE 6.6. Se $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ ed $x \in \Omega$, il vettore tangente $X_x \in T_x\Omega$ definito nella Proposizione PPccx 6.5 si dice la *valutazione di X in x*.

DEFINIZIONE 6.7. Il *differenziale* di un'applicazione $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$, di classe $\mathcal{C}^1$ su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, è l'applicazione

eq:cde (6.4) $$F_* = dF : T\Omega \to T\mathbb{R}^m$$

definita da

eq:cdf (6.5) $$dF(\vec{v})(f) = F_*(\vec{v})(f) = \vec{v}(F^* f) = \vec{v}(f \circ F) \quad \forall \vec{v} \in T\Omega,\ \forall f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m).$$

In coordinate, abbiamo:

eq:cdg (6.6) $$dF\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} a^j \left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right]_{x_0}\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{m}\sum\nolimits_{j=1}^{n} a^j \frac{\partial F^i(x_0)}{\partial x^j} \left[\frac{\partial}{\partial y^i}\right]_{f(x_0)}.$$

7. Spazio tangente a una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$

sec:sptansvrn

DEFINIZIONE 7.1. Sia S una sottovarietà differenziabile di dimensione m di $\mathbb{R}^n$. Sia $x_0 \in S$. Un vettore $\vec{v} \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$ si dice *tangente ad S* se $\vec{v}(f) = 0$ per ogni funzione f, definita e di classe $\mathcal{C}^\infty$ su un intorno di U di x_0, che si annulla su un intorno di x_0 in $S \cap U$.

Indichiamo con $T_{x_0}S$ lo spazio dei vettori tangenti ad S in x_0.

PROPOSIZIONE 7.2. *Sia S una sottovarietà differenziabile di dimensione m di $\mathbb{R}^n$. Per ogni $x \in S$, T_xS è uno spazio vettoriale reale di dimensione m. L'insieme:*

eq:cfa (7.1) $$TS = \{(x, \vec{v}) \mid x \in S\,,\ \vec{v} \in T_xS\}$$

è una sottovarietà differenziabile di dimensione $2m$ di $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Se $\alpha : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^n$ è una parametrizzazione di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$, di S in un intorno di $x_0 \in S$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^m$ e $y_0 = \alpha^{-1}(x_0)$, allora

eq:cfaa (7.2) $$T_{x_0}S = d\alpha(x_0)(T_{y_0}\Omega).$$

Se S è localmente chiusa in $\mathbb{R}^n$, allora anche TS è localmente chiusa in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE. Sia U un intorno aperto di $x_0 \in S$ e fissiamo funzioni $f_1, \ldots, f_{n-m} \in \mathcal{E}(U)$ in modo che

$$\{x \mid f_j(x) = 0,\ \text{per } j = 1, \ldots, n-m\} \cap U$$

sia un intorno aperto di x_0 in S per la topologia di sottovarietà. Osserviamo che:

$$\vec{v} = \sum\nolimits_{j=1}^{n} v^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{x_0} \in T_{x_0}S \iff \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-m})(x_0)}{\partial x} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = 0$$

Da questo segue che $T_{x_0}S$ ha dimensione m. Abbiamo poi:

$$(x,\vec{v}) \in TS \cap (U \times \mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \begin{cases} F_j(x,\vec{v}) = f_j(x) = 0, \\ F_{n-m+j}(x,\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_j(x)}{\partial x^i} v^i = 0, \\ \text{per } j = 1,\dots,n-m, \end{cases}$$

e la matrice Jacobiana di $F = (F_1,\dots,F_{2(n-m)})$ è della forma:

$$\frac{\partial F(x,\vec{v})}{\partial(x,\vec{v})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1,\dots,f_{n-m})(x)}{\partial x} & * \\ 0 & \frac{\partial(f_1,\dots,f_{n-m})(x)}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Essa ha quindi rango $2(n-m)$ e ciò dimostra che TS è una varietà sottovarietà di $\mathbb{R}^{2n}$ di dimensione $2m$; chiaramente essa è localmente chiusa se S è localmente chiusa.

Se $\alpha : \Omega \to S$ è una parametrizzazione locale di classe $\mathcal{C}^1$ di S, abbiamo $d\alpha(y)(T_y\Omega) \subset T_{\alpha(y)}S$ per ogni $y \in \Omega$. Poiché α è un'immersione differenziabile, il sottospazio vettoriale $d\alpha(y)(T_y\Omega)$ ha dimensione m e quindi coincide con $T_{\alpha(y)}S$. □

DEFINIZIONE 7.3. Data una sottovarietà differenziabile S di $\mathbb{R}^n$ e un intorno aperto Ω di S in $\mathbb{R}^n$ un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ si dice *tangente* ad S se, per ogni $x \in X$, la valutazione X_x di X in x è un vettore tangente ad S in x.

Si verifica facilmente il seguente:

LEMMA 7.4. *Sia S una sottovarietà differenziabile localmente chiusa di $\mathbb{R}^n$ ed Ω un intorno aperto di S in $\mathbb{R}^n$. Allora i campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ che sono tangenti ad S formano una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se f è una funzione reale di classe $\mathcal{C}^\infty$ definita in Ω e nulla su S, ed $X, Y \in \mathfrak{X}(\Omega)$ sono tangenti ad S, allora:

$$[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf) = 0 \quad \text{su } S$$

perché Xf e Yf sono ancora funzioni reali di classe $\mathcal{C}^\infty$ definite in Ω e nulle su S. □

8. Campi di vettori F-correlati

Un'applicazione differenziabile $F : \Omega \to \Omega'$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ tra un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ed un aperto $\Omega' \subset \mathbb{R}^{n'}$ definisce un'applicazione, anch'essa di classe $\mathcal{C}^\infty$, $dF : T\Omega \to T\Omega'$. In generale però, ad un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ la F non fa corrispondere un campo di vettori su Ω'.

Introduciamo perciò la nozione seguente:

DEFINIZIONE 8.1. Sia $F : \Omega \to \Omega'$ un'applicazione differenziabile tra due aperti Ω di $\mathbb{R}^n$ ed Ω' di $\mathbb{R}^{n'}$. Due campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ ed $X' \in \mathfrak{X}(\Omega')$ si dicono F-*correlati* se:

eq:cgd (8.1) $$dF(x)(X_x) = X'_{F(x)} \quad \forall x \in \Omega.$$

OSSERVAZIONE 8.2. Ad esempio, se F è un diffeomorfismo, allora $X' = F_*(X)$ è F-correlato ad X ed è l'unico campo di vettori F-correlato ad X. Se F non è un diffeomorfismo, non è detto che ad un assegnato campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ si possa far corrispondere un campo di vettori $X' \in \mathfrak{X}(\Omega')$ che sia F-correlato ad X. Chiaramente, se ve n'è uno, esso è completamente determinato nei punti di $F(\Omega)$.

PROPOSIZIONE 8.3. *Sia $F : \Omega \to \Omega'$ un'applicazione differenziabile tra due aperti Ω di $\mathbb{R}^n$ ed Ω' di $\mathbb{R}^{n'}$. Se $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\Omega)$, $X_1', X_2' \in \mathfrak{X}(\Omega)$, ed X_j' è F-correlato a X_j per $j = 1, 2$, allora anche $[X_1', X_2']$ è F-correlato a $[X_1, X_2]$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano

$$X_j = \sum\nolimits_{h=1}^{n} a^h(x) \frac{\partial}{\partial x^h}$$
$$X_j' = \sum\nolimits_{k=1}^{n'} b^k(y) \frac{\partial}{\partial y^k}$$

per $j = 1, 2$. Il fatto che X_j' sia F-correlato ad X_j significa che:

$$b_j^k(F(x)) = \sum\nolimits_{h=1}^{n} a_j^h(x) \frac{\partial F^k(x)}{\partial x^h} \quad \text{per} \quad j = 1, 2, \quad k = 1, \dots, n' \quad x \in \Omega.$$

Differenziando, otteniamo:

$$\sum\nolimits_{r=1}^{n'} \frac{\partial b_j^k(F(x))}{\partial y^r} \frac{\partial F^r(x)}{\partial x^\ell} = \sum\nolimits_{h=1}^{n} \frac{\partial a_j^h(x)}{\partial x^\ell} \frac{\partial F^k(x)}{\partial x^h} + \sum\nolimits_{h=1}^{n} a_j^h(x) \frac{\partial^2 F^k(x)}{\partial x^h \partial x^\ell}$$

Abbiamo, per i coefficienti di $[X_1', X_2']$:

$$\begin{aligned} b_1^r \frac{\partial b_2^k}{\partial y^k} - b_2^r \frac{\partial b_1^k}{\partial y^k} =& a_1^h \frac{\partial F^k}{\partial x^h} \frac{\partial b_2^k}{\partial y^r} - a_2^h \frac{\partial F^k}{\partial x^h} \frac{\partial b_1^k}{\partial y^r} \\ =& a_1^h \frac{\partial a_2^s}{\partial x^h} \frac{\partial F^k}{\partial x^s} + a_1^h a_2^s \frac{\partial^2 F^k}{\partial y^s \partial x^k} \\ & - a_2^h \frac{\partial a_1^s}{\partial x^h} \frac{\partial F^k}{\partial x^s} - a_2^h a_1^s \frac{\partial^2 F^k}{\partial y^s \partial x^k} \\ =& \left(a_1^h \frac{\partial a_2^s}{\partial x^h} - a_2^h \frac{\partial a_1^s}{\partial x^h} \right) \frac{\partial F^k}{\partial x^s} \end{aligned}$$

dove abbiamo calcolato per $y = F(x)$ ed abbiamo utilizzato per brevità la convenzione per cui gli indici ripetuti in alto e in basso si intendono sommati per tutti i valori per cui sono definiti. Questa relazione ci dà la tesi. □

sec:frobtm

9. Il teorema di Frobenius

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed X un campo di vettori in Ω. Per ogni punto regolare di X passa una ed una sola sua curva integrale. Quindi, se X è regolare in tutti i punti di Ω, la famiglia $\mathfrak{F}$ delle curve integrali di X in Ω è una famiglia di sottovarietà differenziabili di dimensione 1 di Ω ed ogni punto x di Ω appartiene ad una ed un solo elemento di $\mathfrak{F}$.

Chiaramente la famiglia delle curve integrali di fX, se f è una qualsiasi funzione differenziabile che non si annulla in nessun punto di Ω, coincide con la $\mathfrak{F}$. Se quindi siamo interessati a studiare la famiglia di curve $\mathfrak{F}$, sarà naturale considerare non un singolo campo di vettori X, ma l'$\mathcal{E}(\Omega)$-modulo $\mathcal{E}(\Omega)\cdot X$ generato da X, ovvero l'$\mathcal{E}(\Omega)$-modulo formato da tutti quei campi di vettori che sono tangenti a tutte le curve della famiglia $\mathfrak{F}$.

Estendiamo questa nozione mediante la definizione:

DEFINIZIONE 9.1. Si dice *distribuzione vettoriale su* Ω, o *sistema differenziale in* Ω, un qualsiasi sotto-$\mathcal{E}(\Omega)$-modulo $\mathfrak{D}(\Omega)$ di $\mathfrak{X}(\Omega)$. Per ogni $x\in\Omega$, l'insieme $\mathfrak{D}_x=\{X_x \mid X\in\mathfrak{D}(\Omega)\}$ è un sottospazio vettoriale di $T_x\Omega$. La sua dimensione si dice *dimensione* di $\mathfrak{D}(\Omega)$ in x. Se tale dimensione è costante ed uguale a p in tutti i punti di Ω, diciamo che $\mathfrak{D}(\Omega)$ è una *distribuzione vettoriale regolare* di dimensione p, o *una distribuzione di p-piani in* Ω.

Se U è un sottoinsieme aperto di Ω, indicheremo con $\mathfrak{D}(U)$ l'$\mathcal{E}(U)$-modulo generato dalle restrizioni ad U dei campi di vettori di $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Il sistema differenziale $\mathfrak{D}(\Omega)$ si dice *completamente integrabile* se:

eq:cha
$$[\mathfrak{D}(\Omega),\mathfrak{D}(\Omega)]\subset\mathfrak{D}(\Omega). \tag{9.1}$$

Abbiamo indicato con $[\mathfrak{D}(\Omega),\mathfrak{D}(\Omega)]$ l'$\mathcal{E}(\Omega)$-modulo generato dai commutatori $[X,Y]$, al variare di X,Y in $\mathfrak{D}(\Omega)$.

ESchb
ESEMPIO 9.2. Sia $\Omega=\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, con $n\geq 2$, e consideriamo la distribuzione vettoriale $\mathfrak{D}(\Omega)$ generata dai campi di vettori:

$$X_{i,j}=x^i\frac{\partial}{\partial x^j}-x^j\frac{\partial}{\partial x^i}\quad\text{per}\quad 1\leq i<j\leq n.$$

Questa è una distribuzione regolare di iperpiani in Ω ed è completamente integrabile.

ESchc
ESEMPIO 9.3. Sia $\Omega=\mathbb{R}^{n+1}_{x^0,x^1,\dots,x^n}$, sia $\phi\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_{x^1,\dots,x^n})$ e sia $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ la distribuzione vettoriale generata da:

$$X_j=\frac{\partial}{\partial x^j}+\frac{\partial\phi(x^1,\dots,x^n)}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^0}\quad\text{per}\quad j=1,\dots,n.$$

Allora $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ è una distribuzione completamente integrabile di iperpiani in $\mathbb{R}^{n+1}$.

ESchd
ESEMPIO 9.4. Sia $\Omega=\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_y$. I campi di vettori:

$$X_j=\frac{\partial}{\partial x^j}-x^jy^j\frac{\partial}{\partial y^j}$$

generano una distribuzione completamente integrabile di n-piani in $\mathbb{R}^{2n}$.

DEFINIZIONE 9.5. Dato una distribuzione vettoriale $\mathfrak{D}(\Omega)$, una sottovarietà differenziabile S di Ω si dice una *varietà integrale* di $\mathfrak{D}(\Omega)$ se $T_xS\subset\mathfrak{D}_x$ per ogni $x\in S$.

ESempio 9.6. Nel caso dell'Esempio 9.2, tutte le sfere $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r\}$, con $r > 0$, sono varietà integrali di $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Nel caso dell'Esempio 9.3, tutte le ipersuperficie $\{x^0 = \phi(x^1, \dots, x^n) + k\}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, sono varietà integrali di $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^{2n+1})$.

Nel caso dell'Esempio 9.4, tutte le sottovarietà n dimensionali $\{y^j = k_j \exp(-[x^j]^2/2)\}$, al variare di $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$, sono sottovarietà integrali di $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^{2n})$.

Vale il:

TMchg

Teorema 9.7 (Frobenius). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathfrak{D}(\Omega)$ una distribuzione vettoriale regolare completamente integrabile di p-piani in Ω. Per ogni punto $x_0 \in \Omega$ possiamo trovare un intorno aperto U di x_0 in Ω ed un'unica varietà integrale connessa S di dimensione p di $\mathfrak{D}(\Omega)$ che contenga x_0 e sia una sottovarietà chiusa di U.*

La dimostrazione del Teorema di Frobenius è conseguenza della seguente:

Proposizione 9.8. *Sia $\mathfrak{D}(\Omega)$ una distribuzione vettoriale regolare completamente integrabile di p-piani in Ω. Allora, per ogni $x_0 \in \Omega$ possiamo trovare un intorno aperto U di x_0 in Ω ed un diffeomorfismo $\phi : U \to V$ di U su un intorno aperto V di 0 in $\mathbb{R}^n_y$ tale che $\phi_*(\mathfrak{D}(U))$ sia generato da $\dfrac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial y^p}$.*

Dimostrazione. Ragioniamo per ricorrenza su p. Nel caso $p = 1$ ci si riduce alla Proposizione 4.1. Supponiamo quindi che $p > 1$ e che il teorema sia vero per distribuzioni totalmente integrabili di $(p-1)$-piani. Fissiamo p campi di vettori $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{D}(\Omega)$ tali che $X_{1,x_0}, \dots, X_{p,x_0}$ generino $\mathfrak{D}_{x_0}$. Sia $X_j = \sum_{i=1}^n a_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, per $j = 1, \dots, p$. A meno di cambiare gli indici delle coordinate, possiamo supporre che la matrice $A(x_0) = (a_j^i(x_0))_{1 \le i,j \le p}$ sia invertibile. Fissiamo un intorno aperto U di x_0 in cui $A(x) = (a_j^i(x))_{1 \le i,j \le p}$ sia invertibile. Allora i campi di vettori $Y_1, \dots, Y_d$, definiti da:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_p \end{pmatrix} = [A(x)]^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$$

generano $\mathfrak{D}(U)$ come $\mathcal{E}(U)$-modulo. Essi sono della forma:

$$Y_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum\nolimits_{h=p+1}^n b_j^h \frac{\partial}{\partial x^h} \quad \text{per} \quad j = 1, \dots, p.$$

La condizione che $\mathfrak{D}(U)$ sia completamente integrabile, ci dice che i commutatori $[Y_j, Y_k]$, per $1 \le j < k \le p$, sono combinazioni lineari di $Y_1, \dots, Y_p$ con coefficienti in $\mathcal{E}(U)$. Ma:

$$[Y_j, Y_k] = \sum\nolimits_{h=p+1}^n c_{j,k}^h \frac{\partial}{\partial x^h}$$

implica allora che:

$$[Y_j, Y_k] = 0 \quad \forall 1 \leq j < k \leq p.$$

In particolare, l'$\mathcal{E}(U)$-modulo $\mathfrak{D}_{d-1}(U)$ generato da $Y_1, \ldots, Y_{p-1}$ è una distribuzione di $(p-1)$-piani in U completamente integrabile. Per l'ipotesi induttiva, possiamo allora trovare un intorno aperto U' di x_0 in U e un diffeomorfismo $\psi' : U' \to V'$ su un intorno aperto V' di 0 in $\mathbb{R}^n_\xi$ tale che $\psi'_*(\mathfrak{D}_{p-1}(U'))$ sia generato da $\frac{\partial}{\partial \xi^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi^{p-1}}$. Quindi $\psi'_*(\mathfrak{D}(U'))$ è generato da campi di vettori:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi^{p-1}}, \Xi_d = \sum\nolimits_{h=p}^{n} \alpha^h(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi^h},$$

dove possiamo supporre che $\alpha^p(0) \neq 0$ e quindi, a meno sostituire ad U' un intorno aperto più piccolo di x_0, che $\alpha^p(\xi) \neq 0$ per $\xi \in V'$. Poiché $\psi'_*(\mathfrak{D}(U'))$ è un $\mathcal{E}(V')$-modulo, a meno di dividere Ξ_p a sinistra per $\alpha^p(\xi)$, possiamo supporre sia:

$$\Xi_p = \frac{\partial}{\partial \xi^p} + \sum\nolimits_{h=p+1}^{n} \alpha^h(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi^h}.$$

Il fatto che $\psi'_*(\mathfrak{D}(U'))$ sia completamente integrabile ci dà allora:

$$\frac{\partial \alpha^h(\xi)}{\partial \xi^j} = 0 \quad \text{per} \quad j = 1, \ldots, p-1.$$

Questo ci dice che le α^h sono localmente costanti rispetto alle variabili $\xi^1, \ldots, \xi^{p-1}$. Possiamo supporre che l'aperto V' sia della forma $V' = V'_1 \times V'_2$, con V'_1 intorno aperto di 0 in $\mathbb{R}^{p-1}_{\xi^1,\ldots\xi^{p-1}}$ e V'_2 intorno aperto di 0 in $\mathbb{R}^{n-p+1}_{\xi^p,\ldots,\xi^n}$. Applichiamo la Proposizione 4.1 al campo di vettori $\frac{\partial}{\partial \xi^p} + \sum_{h=p+1}^{n} \alpha^h(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi^h}$ in V'_2. Esiste quindi un diffeomorfismo $\tau : V''_2 \to W_2$ di un intorno aperto V''_2 di 0 in $\mathbb{R}^{n-p+1}$ su un intorno W_2 di 0 in $\mathbb{R}^{n-p+1}_{\eta^p,\ldots,\eta^n}$ per cui risulti $\tau_*(\frac{\partial}{\partial \xi^p} + \sum_{h=p+1}^{n} \alpha^h(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi^h}) = \frac{\partial}{\partial \eta^d}$.

Consideriamo ora l'intorno aperto $U'' = \psi^{-1}(V'_1 \times V''_2)$ e l'applicazione $\phi : U'' \ni x \to y \in V'_1 \times W_2 \subset \mathbb{R}^n$ definita da:

$$\begin{cases} y^i = \psi^i(x) & \text{se} \quad 1 \leq i \leq p-1 \\ y^i = \tau^i(\psi^d(x), \ldots, \psi^n(x)) & \text{se} \quad p \leq i \leq n. \end{cases}$$

Quest'applicazione verifica la tesi della Proposizione. □

Dimostrazione del Teorema 9.7. Sia $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo che trasforma un intorno aperto di x_0 in Ω in un intorno di 0 in $\mathbb{R}^n$ della forma $V = \{|y'| < r',\ |y''| < r''\}$, ove $y' = (y^1, \ldots, y^p)$, $y'' = (y^{p+1}, \ldots, y^n)$, ed r', r'' sono numeri reali positivi, e per cui $\phi_*(\mathfrak{D}(U)) = \mathcal{E}(V)[\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^p}]$. Allora le $\{\phi^{p+1}(x) = k_{p+1}, \ldots, \phi^n(x) = k_n\}$, al variare di $(k_{p+1}, \ldots, k_n)$ nella palla di centro 0 e raggio r'' di $\mathbb{R}^{n-p}$, sono le varietà integrali di $\mathfrak{D}(U)$ in U. □

10. Integrali primi

sec:intprim

Discutiamo in questo paragrafo una generalizzazione del teorema di Frobenius, che ci sarà utile nel seguito.

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathfrak{D}(\Omega)$ una distribuzione regolare di p-piani in Ω.

DEFINIZIONE 10.1. Sia $F : \Omega \ni x \to (F^1(x), \dots, F^k(x)) \in \mathbb{R}^k$ una funzione differenziabile. Diciamo che $F = 0$ è un *integrale primo* di $\mathfrak{D}(\Omega)$ se:

$$XF(x) = 0 \quad \text{se} \quad X \in \mathfrak{D}(\Omega), \quad x \in \Omega \quad \text{e} \quad F(x) = 0; \tag{10.1}$$

$$\text{lo Jacobiano} \quad \frac{\partial F(x)}{\partial x} \quad \text{ha rango } k \text{ se } x \in \Omega \text{ ed } F(x) = 0. \tag{10.2}$$

Vale il:

TEOREMA 10.2. *Sia $F = 0$ un integrale primo di $\mathfrak{D}(\Omega)$. Se:*

eq:ciia

$$[X, Y](x) \in \mathfrak{D}_x \quad \forall X, Y \in \mathfrak{D}(\Omega), \quad \forall x \in \{F(x) = 0\} \cap \Omega, \tag{10.3}$$

allora ogni punto $x_0 \in \{F(x) = 0\} \cap \Omega$ è contenuto in una varietà differenziabile di dimensione p di $\mathfrak{D}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $x_0 \in \Omega$ un punto in cui $F(x_0) = 0$. Per il Lemma 6.2 del Capitolo 9, PPcea cdiffeu possiamo trovare un intorno aperto U di x_0 in Ω, un intorno V di 0 in $\mathbb{R}^n$, e un diffeomorfismo $\phi : U \to V$ con $\phi(x_0) = 0$ tale che $\phi(\{F(x) = 0\} \cap U) = \{y^j = 0 \mid 1 \le j \le k\} \cap V$. Consideriamo $\tilde{\mathfrak{D}}(V) = \phi_*(\mathfrak{D}(U))$. Se $Y = \sum_{j=1}^n a_Y^j(y) \frac{\partial}{\partial y^j}$, abbiamo per ipotesi:

$$a_Y^j = Y(y^j) = 0 \quad \text{per } 1 \le j \le k \text{ se } Y \in \tilde{\mathfrak{D}}(V) \text{ e } y^i = 0 \text{ per } 1 \le i \le k.$$

Consideriamo ora l'aperto $G = \{z \in \mathbb{R}^{n-p} \mid (0, z) \in V\}$ di $\mathbb{R}^{n-p}$. I campi di vettori $\sum_{j=1}^{n-k} a_Y^{k+h} \frac{\partial}{\partial z^h}$, al variare di Y in $\tilde{\mathfrak{D}}(V)$, definiscono una distribuzione completamente integrabile $\hat{\mathfrak{D}}(G)$ di p-piani di G. Per il Teorema 9.7 TMchg esiste una varietà integrale $\hat{S}$ di dimensione p di $\hat{\mathfrak{D}}(G)$ passante per 0. Allora $\tilde{S} = \{(0, z) \mid z \in \hat{S}\}$ è una varietà integrale di dimensione p di $\tilde{\mathfrak{D}}(V)$ passante per l'origine e contenuta in $\{y^j = 0 \mid 1 \le j \le k\}$. Infine, $S = \phi^{-1}(\tilde{S})$ è una varietà integrale di $\mathfrak{D}(\Omega)$, di dimensione p, passante per x_0 e contenuta in $\{F = 0\}$. □

chap:dba

CAPITOLO 11

Varietà topologiche e varietà differenziabili

1. Paracompattezza e partizione dell'unità

Sia X uno spazio topologico.

DEFINIZIONE 1.1. Se $\mathcal{U} = \{U_i \,|\, i \in I\}$ e $\mathcal{V} = \{V_j \,|\, j \in J\}$ sono due ricoprimenti di X, diciamo che $\mathcal{V}$ è un *raffinamento* di $\mathcal{U}$ se esiste una funzione $J \ni j \to i(j) \in I$ tale che $V_j \subset U_{i(j)}$ per ogni $j \in J$.

Una famiglia $\mathcal{F} = \{A_i \,|\, i \in I\}$ di sottoinsiemi di X si dice *localmente finita* se per ogni punto x di X esiste un intorno aperto U_x di x in X tale che $\{i \in I \,|\, A_i \cap U_x \neq \emptyset\}$ sia finito.

DEFINIZIONE 1.2. Lo spazio topologico X si dice *paracompatto* [1] se verifica l'assioma di separazione di Hausdorff, e se ogni suo ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{A_i \,|\, i \in I\}$ ammette un raffinamento aperto $\mathcal{V} = \{V_j \,|\, j \in J\}$ localmente finito.

Ricordiamo, senza darne la dimostrazione, [2] le principali proprietà degli spazi paracompatti:

TEOREMA 1.3. *Ogni spazio paracompatto è normale.*

Ciò significa che, se X è paracompatto valgono le due proprietà di separazione:

(1) Se $x \neq y$ sono due punti distinti di X, allora esistono due intorni aperti, U_x di x e U_y di y, tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$;
(2) Se A, B sono due chiusi di X con $A \cap B = \emptyset$, allora esistono due aperti U, V di X tali che $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

TEOREMA 1.4. *Ogni sottospazio chiuso di uno spazio paracompatto è paracompatto.*

DEFINIZIONE 1.5. Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Una *partizione continua dell'unità su X subordinata a $\mathcal{U}$* è una famiglia $\{\phi_i : X \to \mathbb{R}\}$ di funzioni continue che godono delle seguenti proprietà:

[1] Questo concetto fu introdotto nel 1944 da J. Dieudonné (*Une généralization des espaces compacts*, *J. Math. Pures Appl.* **23**, *pp. 65-76*).

[2] cf. Cap. 2-§11 di J.G.Hocking, G.S.Joung *Topology*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading, Massachusetts, 1961, oppure Cap IX-§4.3,4.4 di N.Bourbaki *General Topology* Hermann, Paris, 1966.

(*i*) $\phi_i(x) \geq 0$ per ogni $x \in X$, per ogni $i \in I$;
(*ii*) Per ogni $i \in I$ esiste un aperto $U \in \mathcal{U}$ tale che

$$\operatorname{supp} \phi_i = \overline{\{x \in X \mid \phi_i(x) \neq 0\}} \subset U\,.$$

(*iii*) La famiglia di chiusi $\{\operatorname{supp} \phi_i\}$ è localmente finita.
(*iv*) $\sum_{i \in I} \phi_i(x) = 1$ per ogni $x \in X$. Osserviamo che la somma è ben definita perché per la (*iii*) per ciascun punto $x \in X$ vi è un intorno aperto U_x in cui solo un numero finito di termini sono $\neq 0$.

TEOREMA 1.6. *Sia X uno spazio di Hausdorff. Sono equivalenti:*
(*A*) *X è paracompatto.*
(*B*) *Per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X esiste una partizione continua dell'unità su X subordianta a $\mathcal{U}$.*

TEOREMA 1.7. *Sia X uno spazio di Hausdorff, localmente compatto.*
(*a*) *Se X è unione numerabile di compatti, allora X è paracompatto.*
(*b*) *Se X è connesso e paracompatto, allora X è unione numerabile di compatti.*

TEOREMA 1.8. *Ogni spazio di Hausdorff, localmente compatto e a base numerabile, è paracompatto.*

TEOREMA 1.9 (Stone [3]). *Ogni spazio topologico metrizzabile è paracompatto.*

2. Varietà topologiche

vartop

DEFINIZIONE 2.1. Uno spazio topologico X si dice *localmente euclideo di dimenisone n* se ogni punto x di X ammette un intorno U omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$.

Poiché ogni punto di $\mathbb{R}^n$ ha un sistema fondamentale di intorni aperti che sono omeomorfi ad $\mathbb{R}^n$, dire che un punto x di X ammette un intorno omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$ è equivalente a dire che esso ammette un intorno omeomorfo ad un qualsiasi aperto di $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE 2.2. Una *carta locale di dimensione n* di X è il dato di un aperto U di X, di un aperto V di $\mathbb{R}^n$, e di un omeomorfismo $\phi : U \to V$.

Se $0 \in V$ ed $x_0 \in U$ è il punto per cui $\phi(x_0) = 0$, chiameremo x_0 il *centro* della carta locale $U \xrightarrow{\phi} V$.

DEFINIZIONE 2.3. Una *varietà topologica di dimensione n* è uno spazio topologico X paracompatto e localmente Euclideo di dimensione n.

La paracompattezza si può descrivere in modo equivalente richiedendo che X sia uno spazio di Hausdorff e che ogni sua componente connessa sia *numerabile all'infinito*. Ciò significa che, per ogni componente connessa Y

[3] *Paracompactness and product spaces* in Bull. A.M.S. **54** (1948), pp. 977-982. Osserviamo che il prodotto di due spazi paracompatti può non essere paracompatto.

di X, si può trovare una successione $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi compatti di Y tali che $K_n \subset \mathrm{int}(K_{n+1})$ per ogni intero $n \geq 0$ ed $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

DEFINIZIONE 2.4. Sia M una varietà topologica di dimensione n ed $U_i \xrightarrow{\phi_i} V_i \subset \mathbb{R}^n$, per $i = 1, 2$, due carte locali in M. Se $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, allora $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ e $\phi_2(U_1 \cap U_2)$ sono aperti di $\mathbb{R}^n$ e

$$\phi_{1,2} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \ni x \to \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x) \in \phi_2(U_1 \cap U_2) \tag{2.1}$$

è un omeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^n$. Esso si dice la *funzione di transizione* dalla carta $U_1 \xrightarrow{\phi_1} V_1$ alla carta $U_2 \xrightarrow{\phi_2} V_2$.

DEFINIZIONE 2.5. Un *atlante* su M è una famiglia di carte locali $\mathcal{A} = \left(U_i \xrightarrow{\phi_i} V_i \subset \mathbb{R}^n\right)_{i\in I}$ tale che $\bigcup_{i\in I} U_i = M$. Poniamo:

$$V_{i,j} = \phi_j(U_i \cap U_j) \subset V_j \qquad \text{e} \tag{2.2}$$

$$\phi_{i,j} : V_{i,j} \ni x \to \phi_i \circ \phi_j^{-1}(x) \in V_{j,i}\,. \tag{2.3}$$

Le $(\phi_{i,j})$ così definite si dicono *le funzioni di transizione* dell'atlante $\mathcal{A}$.

Le funzioni di transizione soddisfano le relazioni di compatibilità

eq:Kbc
$$\phi_{i,i} = \mathrm{id}_{U_i}, \quad \phi_{i,j} \circ \phi_{j,k}(x) = \phi_{i,k}(x),\ \forall x \in \phi_k(U_i \cap U_j \cap U_k). \tag{2.4}$$

ESEMPIO 2.6. Ogni sottoinsieme aperto X di $\mathbb{R}^n$ è una varietà topologica di dimensione n.

ESEMPIO 2.7. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, con $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}^n$ e sia X il quoziente di $\mathbb{R}^n \times \{0, 1\}$ che si ottiene identificando i punti $(x, 0)$ ed $(x, 1)$ se $x \in A$. Lo spazio topologico X è localmente Euclideo di dimensione n, ma non è una varietà topologica perché non è di Hausdorff: i punti $(x, 0)$ ed $(x, 1)$, per x sulla frontiera $\mathrm{b}A$ di A, definiscono nel quoziente X elementi che non ammettono intorni disgiunti.

ESEMPIO 2.8. Su $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ consideriamo la relazione di equivalenza che identifica due punti $(x, 0)$ ed $(x, 1)$ se $x \leq 0$. Il quoziente X è uno spazio di Hausdorff, ma non è localmente Euclideo, perché il punto x_0 di X corrispondente a $\{(0, 0), (0, 1)\}$ non ha un intorno omeomorfo ad $\mathbb{R}$. Infatti, se U è un intorno aperto di x_0 in X, allora $U \setminus \{x_0\}$ ha almeno tre componenti connesse.

ESEMPIO 2.9. Sia X lo spazio topologico ottenuto considerando su $\mathbb{R}^2$ la topologia definita dall'ordine lessicografico:

$$(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x_2, & \text{oppure} \\ x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 < y_2\,. \end{cases}$$

Ogni componente connessa di X è omeomorfa ad $\mathbb{R}$ e quindi X è uno spazio localmente Euclideo di dimensione 1. La topologia dell'ordine lessicografico

è indotta dalla distanza:

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x_1 \neq x_2 \\ \dfrac{|y_1-y_2|}{1+|y_1-y_2|} & \text{se} \quad x_1 = x_2\,. \end{cases}$$

Quindi X, essendo metrizzabile, è paracompatto e dunque una varietà topologica di dimensione 1 (non separabile).

ESEMPIO 2.10. Sia $X =]0,1]\times]0,1[$, ed "$\prec$" un buon ordinamento su $]0,1[$, rispetto al quale $]0,1[$ non ammetta massimo: in particolare per ogni $t \in]0,1[$ vi è un elemento $t' \in]0,1[$ (successivo di t) con $t \prec t'$ tale che $\{s \in]0,1[\,|\, t \prec s \prec t'\} = \emptyset$.

Consideriamo su X la topologia dell'ordine relativa all'ordinamento totale:

$$(x,t) < (y,s) \Leftrightarrow \begin{cases} t \prec s & \text{oppure} \\ t = s \quad \text{e} \quad x < y. \end{cases}$$

Chiaramente X è localmente euclideo di dimensione 1, è connesso e di Hausdorff, ma non è una varietà topologica perché non è paracompatto.

ESEMPIO 2.11. La sfera S^n è una varietà topologica di dimensione n. Siano

$$\phi_+ : U_+ : S^n \setminus \{e_0\} \ni (x_0,x_1,\dots,x_n) \to \left(\tfrac{x_1}{1-x_0},\dots,\tfrac{x_n}{1-x_0}\right) \in \mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

$$\phi : U_- = S^n \setminus \{-e_0\} \ni (x_0,x_1,\dots,x_n) \to \left(\tfrac{-x_1}{1+x_0},\dots,\tfrac{-x_n}{1+x_0}\right) \in \mathbb{R}^n \tag{2.6}$$

le proiezioni stereografiche rispetto al polo nord e_0 ed al polo sud $(-e_0)$, rispettivamente. Allora $\mathcal{A} = \{(U_+,\phi_+),\,(U_-,\phi_-)\}$ è un atlante di S^n, formato da due carte locali di dimensione n. Le sue funzioni di transizione sono $\phi_{+-} = \phi_{-+} : \mathbb{R}^n \setminus 0 \ni y \to y/|y|^2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

ESEMPIO 2.12. Lo spazio proiettivo reale di dimensione n è una varietà topologica di dimensione n. Un atlante $\mathcal{A}$ di $\mathbb{RP}^n$ è descritto nelle coordinate omogenee dagli aperti

$$U_i = \{(x_0,\,x_1,\,...,\,x_n)\,\big|\,x_i \neq 0\} \quad \text{per} \quad i = 0,1,...,n$$

e dagli omeomorfismi

$$\phi_i = \pi_{\hat{\imath}} \circ \psi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$$

ove

$$\psi_i(x_0,\,x_1,\,...,\,x_n) = \left(\tfrac{x_0}{x_i},\,\tfrac{x_1}{x_i},\,...,\,\tfrac{x_n}{x_i}\right) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\pi_{\hat{\imath}} : \mathbb{R}^{n+1} \ni \mathbf{x} = (x_0,\,x_1,\,...,\,x_n) \to \sum\nolimits_{j<i} x_j e_{j+1} + \sum\nolimits_{i<j} x_j e_j \in \mathbb{R}^n.$$

(Abbiamo indicato con $e_1,\,...,\,e_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$).

ESEMPIO 2.13. Analogamente, lo spazio proiettivo complesso di dimensione n è una varietà topologica di dimensione $2n$. Un atlante $\mathcal{A}$ di $\mathbb{CP}^n$ è descritto nelle coordinate omogenee dagli aperti

$$U_i = \{(z_0,\,z_1,\,...,\,z_n)\,\big|\,z_i \neq 0\} \quad \text{per} \quad i = 0,1,...,n$$

e dagli omeomorfismi

$$\phi_i = \pi_{\hat{\imath}} \circ \psi_i : U_i \to \mathbb{R}^{2n}$$

ove

$$\psi_i(z_0,\, z_1,\, ...,\, z_n) = \left(\frac{z_0}{z_i},\, \frac{z_1}{z_i},\, ...,\, \frac{z_n}{z_i}\right) \in \mathbb{C}^{n+1},$$

$$\pi_{\hat{\imath}} : \mathbb{C}^{n+1} \ni z = (z_0,\, z_1,\, ...,\, z_n) \to \sum\nolimits_{j<i} z_j e_{j+1} + \sum_{j\geq i} z_j e_j \in \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}.$$

(Abbiamo indicato con $e_1, ..., e_n$ la base canonica dello spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^n$.)

TEOREMA 2.14. *Ogni varietà topologica è localmente compatta e metrizzabile.*

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dal fatto che gli spazi Euclidei $\mathbb{R}^n$ sono localmente compatti. Per quanto riguarda la seconda, basta osservare che ogni componente connessa di una varietà topologica è a base numerabile: ogni spazio regolare a base numerabile è infatti metrizzabile; se indichiamo con X_i, $i \in I$ le componenti connesse di X e con $d_i : X_i \times X_i \to \mathbb{R}$ una distanza che definisce la topologia di X_i, allora la:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ e } y \text{ non appartengono alla stessa} \\ & \qquad \text{componente connessa di } X \\ \dfrac{d_i(x,y)}{1+d_i(x,y)} & se \quad x,y \in X_i, \quad i \in I \end{cases}$$

è una distanza che definisce la topologia di X. □

3. Definizione di varietà differenziabile

DEFINIZIONE 3.1. Sia M una varietà topologica di dimensione n. Un atlante $\mathcal{A}$ su M si dice *di classe* $\mathcal{C}^k$ (ove k è un intero non negativo, oppure ∞ od ω) se le sue funzioni di transizione sono diffeomorfismi di classe $\mathcal{C}^k$.

Due atlanti $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A}'$ di classe $\mathcal{C}^k$ di X si dicono $\mathcal{C}^k$-compatibili se $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ è ancora un atlante di classe $\mathcal{C}^k$.

Un atlante di classe $\mathcal{C}^0$ è semplicemente un atlante e tutti gli atlanti di classe $\mathcal{C}^0$ sono tra loro compatibili.

La relazione di compatibilità $\mathcal{C}^k$ è una relazione di equivalenza nella famiglia degli atlanti di una varietà topologica.

Se $\mathcal{A}$ è un atlante di classe $\mathcal{C}^k$ su una varietà topologica di dimensione n, l'unione di tutti gli atlanti $\mathcal{C}^k$–compatibili con $\mathcal{A}$ è ancora un atlante $\mathcal{C}^k$ compatibile con $\mathcal{A}$; esso è *massimale* nel senso che non è propriamente contenuto in nessun atlante di classe $\mathcal{C}^k$ con esso compatibile.

ESEMPIO 3.2. Un atlante formato da una sola carta è sempre di classe $\mathcal{C}^\omega$. Quindi i due atlanti $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, x)\}$ e $\mathcal{A}' = \{(\mathbb{R}, x^3)\}$ su $\mathbb{R}$ sono atlanti di classe $\mathcal{C}^\omega$ sulla varietà topologica $\mathbb{R}$. Essi sono compatibili di classe $\mathcal{C}^0$, ma

non di classe $\mathcal{C}^k$ per $k \geq 1$, perché la funzione di transizione $x \to \sqrt[3]{x}$ non è differenziabile in 0.

DEFINIZIONE 3.3. Una *varietà differenziabile di dimensione* n è il dato di una varietà topologica X di dimensione n e di un atlante massimale $\mathcal{A}$ di classe $\mathcal{C}^k$ di X.

OSSERVAZIONE 3.4. Una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^0$ è semplicemente una varietà topologica.

OSSERVAZIONE 3.5. Non tutte le varietà topologiche (anche se di Hausdorff e paracompatte) ammettono un atlante differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$.

HASSLER WHITNEY ha dimostrato che ogni varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$ paracompatta ammette un atlante di classe $\mathcal{C}^\omega$. Quando studiamo le proprietà *topologiche* di una varietà differenziabile M di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$, potremo quindi supporre, senza perdere in generalità, che essa sia di classe $\mathcal{C}^\omega$, o di una qualsiasi classe $\mathcal{C}^h$ con $h \geq 1$ che sia utile nella discussione.

Un atlante $\mathcal{A}$ di classe $\mathcal{C}^k$ su una varietà topologica M di dimensione n determina su M un'unica struttura di varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$. L'atlante massimale $\tilde{\mathcal{A}}$ corrispondente è formato da tutti e soli gli omeomorfismi $\varphi : U \longrightarrow V \subset \mathbf{R}^n$ di un aperto U di M su un aperto V di $\mathbf{R}^n$ tali che $\{(U, \varphi)\} \cup \mathcal{A}$ sia ancora un atlante di classe $\mathcal{C}^k$ (equivalente ad $\mathcal{A}$). Ogni carta di tale atlante massimale si dice un *sistema di coordinate* (o *carta locale*) *di classe* $\mathcal{C}^k$ sulla varietà differenziabile M.

Se (U, ϕ) è una carta locale di classe $\mathcal{C}^k$ con centro in p e $\Psi : V \to V'$ è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$ tra due intorni aperti di 0 in $\mathbb{R}^n$, con $\Psi(0) = 0$, allora anche $(U \cap \phi^{-1}(V), \Psi \circ \phi)$ è una carta locale di classe $\mathcal{C}^k$ con centro in p.

Se $0 \leq h < k$ ed M è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, un suo atlante $\mathcal{A}$ di classe $\mathcal{C}^k$ è anche un atlante di classe $\mathcal{C}^h$. Quindi definisce su M un'unica struttura di *varietà differenziabile di classe* $\mathcal{C}^h$. In particolare, possiamo considerare una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ come varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^h$ per ogni $h \leq k$.

ESEMPIO 3.6. Gli atlanti definiti nel paragrafo §2 per le varietà topologiche S^n, $\mathbb{RP}^n$, $\mathbb{CP}^n$ sono tutti di classe $\mathcal{C}^\omega$.

LEMMA 3.7. *Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ (con $0 \leq k \leq \omega$) ed A un aperto di M. Se $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \,|\, i \in I\}$ è un atlante di classe $\mathcal{C}^k$ su M, allora*

$$\mathcal{A}_A = \{(U_i \cap A, \phi_i|_{U_i \cap A} \,|\, i \in I,\ U_i \cap A \neq \emptyset\}$$

è un atlante di classe $\mathcal{C}^k$ su A.

Quindi, *su ogni aperto A di una varietà differenziabile M risulta definita un'unica struttura di varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ tale che ogni carta locale di classe $\mathcal{C}^k$ di A sia anche una carta locale di classe $\mathcal{C}^k$ di M.* Con

la struttura differenziabile così definita, diciamo che A è una *sottovarietà aperta* di M.

4. Applicazioni differenziabili

LEMMA 4.1. *Sia $f : M \longrightarrow N$ un'applicazione continua tra due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$ e sia $p \in M$. Sono equivalenti:*

(*i*) *Possiamo trovare una carta locale (U, φ) in p ed una carta locale (V, ψ) in $f(p)$ tali che*

$$\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \ni x \longrightarrow \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) \in \psi(V)$$

sia un'applicazione di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno di $\varphi(p)$.

(*ii*) *Per ogni carta locale (U, φ) in p e per ogni carta locale (V, ψ) in $f(p)$*

$$\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \ni x \longrightarrow \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) \in \psi(V)$$

è un'applicazione di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno di $\varphi(p)$.

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente $(ii) \Longrightarrow (i)$. L'implicazione opposta segue dal fatto che i cambiamenti di carte locali sono applicazioni di classe $\mathcal{C}^k$ e la composizione di applicazioni di classe $\mathcal{C}^k$ sono ancora applicazioni di classe $\mathcal{C}^k$. □

DEFINIZIONE 4.2. Un'applicazione continua $f : M \longrightarrow N$ che soddisfi le condizioni equivalenti del lemma, si dice *differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$* in p. Un'applicazione f si dice *differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ in M* se è tale in ogni punto di M.

L'insieme di tutte le applicazioni differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$ definite sulla varietà differenziabile M, a valori nella varietà differenziabile N, si indica con $\mathcal{C}^k(M, N)$.

Vale il seguente:

LEMMA 4.3. *Siano M, N varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$ (con $0 \leq k \leq \omega$ ed $f : M \longrightarrow N$ un'applicazione. Sia Γ un ricoprimento aperto di M. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ è che per ogni aperto $A \in \Gamma$ la restrizione $f|_A : A \longrightarrow N$ di f alla sottovarietà aperta A sia differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$.*

Consideriamo sulla retta reale $\mathbb{R}$ la struttura di varietà differenziabile di dimensione 1 definita dall'unica carta coordinata $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$. L'insieme $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$ delle applicazioni differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$, definite su una varietà differenziabile M di classe $\mathcal{C}^k$ e a valori in $\mathbb{R}$, si indica semplicemente con $\mathcal{C}^k(M)$. Se $k = \infty$, scriveremo a volte $\mathcal{E}(M)$ invece di $\mathcal{C}^\infty(M)$ e se $k = \omega$ (funzioni analitiche–reali), scriveremo a volte $\mathcal{A}(M)$ invece di $\mathcal{C}^\omega(M)$.

TEOREMA 4.4. *Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $0 \leq k \leq \omega$. L'insieme $\mathcal{C}^k(M)$ delle funzioni reali di classe $\mathcal{C}^k$ su M è un anello commutativo e unitario e un'algebra reale rispetto alle operazioni*

(1) *di somma:*

$$(f+g)(p) = f(p) + g(p) \qquad \forall f,\, g \in \mathcal{C}^k(M), \quad \forall p \in M;$$

(2) *di prodotto:*

$$(fg)(p) = f(p)g(p) \qquad \forall f,\, g \in \mathcal{C}^k(M), \quad \forall p \in M;$$

(3) *di prodotto per scalare:*

$$(kf)(p) = kf(p) \qquad \forall f \in \mathcal{C}^k(M)\,, \quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall p \in M.$$

TEOREMA 4.5 (di partizione dell'unità). *Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $0 \leq k \leq \infty$, paracompatta. Sia Γ un ricoprimento aperto di M. Allora esiste una partizione dell'unità $\{\phi_A \mid A \in \Gamma\}$, subordinata a Γ, mediante funzioni ϕ_A di $\mathcal{C}^k(M)$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\mathcal{U} = \{U_i \,|\, i \in I\}$ un raffinamento aperto localmente finito di Γ mediante aperti coordinati (U_i, x_i) di M e sia $\mathcal{V} = \{V_j \,|\, j \in J\}$ un raffinamento aperto localmente finito di $\mathcal{U}$. Indichiamo con $U_i \hookrightarrow A_i$ e $V_j \hookrightarrow U_{i(j)}$ le funzioni di raffinamento. Scegliamo il raffinamento $\mathcal{V}$ di $\mathcal{U}$ in modo che $V_j \Subset U_{i(j)}$ per ogni $j \in J$. Per ogni $j \in J$ fissiamo un aperto G_j con $V_j \Subset G_j \Subset U_{i(j)}$. Per la Proposizione 4.7 del Capitolo 9, esiste per ogni $j \in J$ una funzione $g_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\begin{cases} 0 \leq g_j(y) \leq 1 & \forall y \in \mathbb{R}^n\,, \\ g_j(y) = 1 & \forall y \in x_{i(j)}(\overline{V}_j)\,, \\ g_j(y) = 0 & \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus x_{i(j)}(G_j)\,. \end{cases}$$

Le funzioni

$$h_j(p) = \begin{cases} g_j(x_{i(j)}(p)) & \text{se} \quad p \in U_{i(j)}\,, \\ 0 & \text{se} \quad p \notin G_j \end{cases}$$

sono allora di classe $\mathcal{C}^k$ su M; i loro supporti formano un ricoprimento localmente finito di M e inoltre anche $\{h_j^{-1}(1) \,|\, j \in J\}$ è un ricoprimento chiuso localmente finito di M. Ne segue che

$$h(p) = \sum_{j \in J} h_j(p)\,, \quad p \in M$$

è una funzione di classe $\mathcal{C}^k$ e ≥ 1 su M e che le

$$\psi_j(p) = \frac{h_j(p)}{h(p)}\,, \quad p \in M$$

formano una partizione dell'unità di classe $\mathcal{C}^k$ su M. Per ogni $A \in \Gamma$ sia J_A l'insieme degli indici $j \in J$ tali che $A = A_{i(j)}$. Allora le

$$\phi_A(p) = \sum_{j \in J_A} \psi_j(p)$$

sono funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ che definiscono una partizione dell'unità su M subordinata a Γ. □

Come conseguenza dell'esistenza di partizioni dell'unità, otteniamo:

PROPOSIZIONE 4.6. *Sia F un chiuso di una varietà differenziabile M, di classe $\mathcal{C}^k$ con $0 \leq k \leq \infty$, paracompatta. Se U è un intorno aperto di F in M, esiste una funzione $f \in \mathcal{C}^k(M)$ tale che*

$$f(p) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad p \in F\,, \\ 0 & \text{se} \quad p \notin U\,. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché M è normale, possiamo fissare un intorno aperto V di F in U tale che $\overline{V} \subset U$. Sia Γ' l'insieme degli aperti di M che non intersecano $\overline{V}$ e sia $\Gamma = \Gamma' \cup \{U\}$. Per il teorema precedente, esiste una partizione dell'unità $\{\phi_A \,|\, A \in \Gamma\}$ di classe $\mathcal{C}^k$ subordinata a Γ. Allora $f = \phi_U$ soddisfa le proprietà richieste. □

OSSERVAZIONE 4.7. Il teorema di partizione dell'unità non vale nella classe $\mathcal{C}^\omega$: infatti una funzione analitica–reale che si annulli su un aperto di una varietà M si annulla sull'unione delle componenti connesse di M che intersecano tale aperto. Per questo motivo, nonostante per il teorema di Whitney ogni varietà M, differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$ e paracompatta, ammetta un atlante compatibile di classe $\mathcal{C}^\omega$, è conveniente considerare strutture di classe $\mathcal{C}^k$ con $1 \leq k \leq \infty$.

5. Immersioni, sommersioni, diffeomorfismi

Siano M, N varietà differenziabili di dimensione m, n, rispettivamente, di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$. Sia $f : M \to N$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$. Fissiamo un punto $p_0 \in M$ e sia $q_0 = f(p_0)$ il punto corrispondente di N. Fissiamo un intorno coordinato (V, y) di N con centro in q_0 e sia (U, x) un intorno coordinato in M con centro in p_0 tale che $f(U) \subset V$. La funzione

eq:Kea

$$\mathbb{R}^m \supset x(U) \ni x \to y(f(x)) \in y(V) \tag{5.1}$$

è di classe $\mathcal{C}^k$ ed in particolare, essendo $k \geq 1$, possiamo considerare il suo Jacobiano in 0

eq:Keb

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1(f(x))}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1(f(x))}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n(f(x))}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n(f(x))}{\partial x^m} \end{pmatrix}_{x=0} . \tag{5.2}$$

La scelta di una diversa coppia di carte coordinate in p_0 e q_0 definisce uno Jacobiano che differisce da quello in (5.2) per la moltiplicazione a destra di una matrice di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ e a sinistra per una matrice di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. In particolare

lem:Kea

LEMMA 5.1. *Il rango della matrice Jacobiana (5.2) non dipende dalla scelta delle carte coordinate (U, x) in p_0 e (V, y) in q_0.*

Possiamo dare quindi la seguente

DEFINIZIONE 5.2. L'applicazione differenziabile $f : M \to N$ di classe $\mathcal{C}^k$ in $p_0 \in M$ è in p_0

(1) un'*immersione differenziabile* in p_0 se la matrice Jacobiana (5.2) definisce una trasformazione lineare iniettiva, se cioè ha rango m uguale alla dimensione di M;
(2) una *sommersione differenziabile* in p_0 se la matrice Jacobiana (5.2) definisce un'applicazione lineare surgettiva, se cioè ha rango n uguale alla dimensione di N;
(3) un *diffeomorfismo locale* in p_0 se la matrice Jacobiana (5.2) definisce un isomorfismo lineare, se cioè la matrice Jacobiana è invertibile.

Per il teorema delle funzioni implicite vale la

prop:Keb

PROPOSIZIONE 5.3. *Sia $f : M \to N$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$, tra due varietà differenziabili M ed N di classe $\mathcal{C}^k$ e di dimensioni m, n, rispettivamente. Sia $p_0 \in M$ e $q_0 = f(p_0)$.*

(1) *Se f è un'immersione differenziabile in p_0, allora $m \leq n$ ed esiste un intorno aperto U di p_0 in M tale che la restrizione $f|_U : U \to N$ sia un'applicazione iniettiva.*
(2) *Se f è una sommersione differenziabile, allora $m \geq n$ ed esistono intorni aperti U di p_0 e V di q_0 tali che $f(U) = V$.*
(3) *Se f è un diffeomorfismo locale in p_0, allora $m = n$ ed f definisce un omeomorfismo di un intorno aperto U di p_0 su un intorno aperto V di q_0.*

6. Sottovarietà differenziabili

Supporremo in questo paragrafo che M sia un'assegnata varietà differenziabile, paracompatta, di dimensione m e di classe $\mathcal{C}^\infty$.

DEFINIZIONE 6.1. Una varietà differenziabile N di classe $\mathcal{C}^k$ si dice una *sottovarietà differenziabile* di M se:

(i) $N \subset M$ come insieme;
(ii) l'applicazione naturale di inclusione

$$\iota : N \ni p \to p \in M$$

è un'immersione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$.

LEMMA 6.2. *La topologia di una sottovarietà differenziabile è più fine della topologia di sottospazio topologico.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti la topologia di sottospazio su N è la meno fine tra quelle che rendono l'inclusione $\iota : N \to M$ continua; poiché ogni applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 0$, è in particolare continua, ne segue la tesi. □

ESEMPIO 6.3. Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ il sottoinsieme N definito da

$$N = \left\{ \tfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}(\cos t, \sin t) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} \cup S^1 .$$

Esso è una sottovarietà differenziabile di dimensione 1 di $\mathbb{R}^2$. La sua topologia di sottovarietà differenziabile è *strettamente più fine* della topologia di sottospazio: infatti $\left\{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}(\cos t, \sin t) \,|\, t \in \mathbb{R}\right\}$ è chiuso nella topologia di sottovarietà differenziabile (essendo una componente connessa), mentre è denso e quindi non chiuso in N per la topologia di sottospazio.

ESEMPIO 6.4. Consideriamo il toro $\mathbf{T}^2 = S^1 \times S^1$. Esso è una varietà differenziabile, con l'atlante definito dalle applicazioni inverse delle immersioni topologiche:

$$]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[\ni (t,s) \to \left(e^{i(t+\alpha)}, e^{i(s+\beta)}\right) \in S^1 \times S^1$$

al variare di α, β in $\mathbb{R}$. Sia

$$N = \left\{\left(e^{it}, e^{i\pi t}\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\},$$

con la struttura di varietà differenziabile definita dall'unica carta $N \ni \left(e^{it}, e^{i\pi t}\right) \to t \in \mathbb{R}$. Allora N è una sottovarietà differenziabile di $\mathbf{T}^2$, con una topologia che è strettamente più fine di quella di sottospazio: infatti per la topologia di sottospazio N non è localmente connesso, mentre lo è ovviamente con la topologia di sottovarietà differenziabile.

PROPOSIZIONE 6.5. *Sia N una sottovarietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$, e dimensione n di M. Per ogni punto $p \in N$ esiste un intorno aperto V di p in N ed un aperto coordinato (U, z) di classe $\mathcal{C}^k$ di p in M tali che:*

(i) $V = \{q \in M \,|\, z^i(q) = 0 \quad per \quad i = n+1, \ldots, m\}$;
(ii) $\left(V, (z^i)_{1\leq i\leq n}\right)$ *sia una carta locale di classe $\mathcal{C}^k$ di N.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una carta coordinata (V, y) con centro in p in N ed una carta coordinata (W, x) con centro in p in M. Per ipotesi, l'inclusione di N in M definisce un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$

$$y(V) \ni y \to x = f(y) \in x(U), \quad \text{con} \quad f(0) = 0,$$

la cui matrice Jacobiana $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)$ ha rango n in 0. A meno di riordinare gli indici, possiamo supporre che

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}_{y=0} \neq 0.$$

Per il teorema delle funzioni implicite, esistono aperti ω, ω' di 0 in $\mathbb{R}^n$ ed una funzione $g' : \omega' \to \omega$, differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ tale che $\omega \subset y(V)$ e, per ogni $x' = (x_1, \ldots, x_n) \in \omega'$, la matrice Jacobiana $\left(\frac{\partial g}{\partial x'}\right)$ abbia determinante diverso da 0 ed $y = g(x')$ sia l'unica soluzione in ω dell'equazione $f_i(y) = x_i$ per $i = 1, \ldots, n$. Allora $(x'_1, \ldots, x'_n) = (f_1(y(q)), \ldots, f_n(y(q)))$ definisce una carta locale in $V' = y^{-1}(\omega)$, essendo la composizione di un

diffeomorfismo di un intorno di 0 di $\mathbb{R}^n$ e di una carta locale con centro in $p \in N$. Analogamente, poiché la trasformazione

$$\begin{cases} z_i = x_i & \text{se} \quad 1 \leq i \leq n, \\ z_i = x_i - f_i \circ g(x_1, \ldots, x_n) & \text{se} \quad n < i \leq n, \end{cases}$$

per il teorema delle funzioni implicite, è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$ tra due intorni di 0 in $\mathbb{R}^m$, le funzioni

$$\begin{cases} z_i = f_i(y(q)) & \text{per } 1 \leq i \leq n, \\ z_i = x_i(q) - f_i(g(x'(q))) & \text{per } n < i \leq m, \end{cases}$$

definite in un intorno aperto di p in M, definiscono una carta locale di classe $\mathcal{C}^k$ che verifica le condizioni (i) ed (ii).

□

7. Diffeomorfismi

DEFINIZIONE 7.1. Un *diffeomorfismo* tra due varietà differenziabili è un'applicazione bigettiva $f : M \to N$ tale che sia f che la sua inversa f^{-1} siano differenziabili.

Osserviamo che l'insieme $\mathbf{Diff}(M)$ dei diffeomorfismi di una varietà differenziabile M in sé è un gruppo rispetto al prodotto di composizione.

Dimostriamo innanzi tutto il seguente:

LEMMA 7.2. *Siano $p, q \in \mathbb{R}^n$ e sia $R > \max\{|p|, |q|\}$. Possiamo allora trovare un diffeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che:*

eq:dcafa
$$\begin{cases} f(x) = x \quad \textit{per} \quad |x| > R \\ f(p) = q. \end{cases} \tag{7.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $v = (v^1, \ldots, v^n) = q - p \in \mathbb{R}^n$ e indichiamo con $\vec{v}$ il corrispondente campo di vettori a coefficienti costanti:

eq:dcafba
$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{7.2}$$

Esso definisce il gruppo a un parametro di diffeomorfismi di $\mathbb{R}^n$ delle traslazioni parallele a v: $\tau_v(t)(x) = x + tv$. Fissiamo ora una funzione $\chi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, a supporto compatto, che sia uguale a 1 su una palla $\{|x| < r_1\}$ con $|p|, |q| \leq r_1 < R$, e sia identicamente uguale a 0 fuori da una palla $\{|x| < r_2\}$, con $r_1 < r_2 < R$. Consideriamo il campo di vettori:

eq:dcafbb
$$X = \chi(x)\vec{v} = \chi(x) \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{7.3}$$

Per il Teorema tm:dbach 3.9 del Capitolo chap:dba 10, esso definisce un gruppo a un parametro di diffeomorfismi:

eq:dcafbc
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \to \phi_t(x) \in \mathbb{R}^n \tag{7.4}$$

con:

eq:dcafbd

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi_t(x)}{\partial t} = \chi(\phi_t(x))\vec{v} & \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ \phi_0(x) = x & \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{7.5}$$

Chiaramente abbiamo $\phi_t(x) = x$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ se $|x| \geq r_2$ e $\phi_1(p) = p + v = q$. □

Dimostriamo ora:

TEOREMA 7.3. *Se M è una varietà differenziabile connessa, allora per ogni coppia di punti $p, q \in M$ esiste un diffeomorfismo $\phi \in \mathbf{Diff}(M)$ che trasforma il punto p nel punto q.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p \in M$. Indichiamo con N l'insieme dei punti q di M per cui esiste un diffeomorfismo di M che trasforma p in q.

N è aperto. Sia $q = \gamma(p) \in N$, con $\gamma \in \mathbf{Diff}(M)$. Possiamo allora scegliere un intorno coordinato U di q con una carta locale $\psi : U \to \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| < 1\}$, che fa corrispondere a q l'origine delle coordinate. Se q' è un punto di U, fissiamo R con $0 \leq |\psi(q')| < R < 1$. Per il Lemma precedente, possiamo trovare un diffeomorfismo $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tale che $F(0) = \psi(q')$ e $F(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^m$ con $|x| > R$. Definiamo $\phi \in \mathbf{Diff}(M)$ ponendo:

$$\phi(y) = \begin{cases} y & \text{se} \quad y \notin U \\ \psi^{-1} \circ F(\psi(y)) & \text{se} \quad y \in U. \end{cases}$$

Questa formula definisce un diffeomorfismo di M che trasforma q in q'. Allora $\phi \circ \gamma \in \mathbf{Diff}(M)$ e trasforma p in q'. Quindi $U \subset N$ e questo dimostra che N è aperto.

N è chiuso. Sia q un punto della chiusura di N. Scegliamo una carta coordinata U con centro in q come nella prima parte della dimostrazione. Sia $q' \in U \cap N$ e siano F e ϕ come nella prima parte della dimostrazione. Poiché $q' \in N$, possiamo trovare $\gamma' \in \mathbf{Diff}(M)$ con $\gamma'(p) = q'$. Allora $\phi^{-1} \circ \gamma' \in \mathbf{Diff}(M)$ e $\phi^{-1} \circ \gamma'(p) = q$. Ciò dimostra che N è chiuso.

Poiché N è sia aperto che chiuso ed M è connesso, ed inoltre $p \in N \neq \emptyset$, ne segue che $N = M$. La dimostrazione è completa. □

CAPITOLO 12

Il Lemma di Sard

Il Lemma di Sard descrive alcune importanti proprietà delle applicazioni differenziabili. Esso ha conseguenze importanti sia nella geometria che nella topologia differenziale. Ad esempio, utilizzando il Lemma di Sard, dimostreremo in questo capitolo il teorema d'immersione di Whitney, che ci dice che ogni varietà differenziabile paracompatta di classe $\mathcal{C}^\infty$ e di dimensione m è diffeomorfa ad una sottovarietà, che è anche un sottospazio topologico chiuso, di $\mathbb{R}^{2m+1}$. Tra i diversi argomenti di cui il Lemma di Sard costituisce un'indispensabile premessa, citiamo la trasversalità, la teoria delle singolarità, la teoria di Morse.

Nei capitoli successivi lo utilizzeremo per discutere alcune proprietà di omotopia delle sfere, che ci permetteranno di introdurre la nozione di grado per applicazioni continue della sfera is sè e di ricavare il teorema di punto fisso di Brower.

Il *Lemma* fu dimostrato da Anthony P. Morse nel 1939 per funzioni a valori scalari e generalizzato da Arthur Sard al caso di funzioni a valori in una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ nel 1942. Per questo in letteratura il risultato è citato a volte come il *Teorema di Morse-Sard*.

1. Il lemma di Sard negli spazi Euclidei

Dimostriamo innanzi tutto il:

LMMABB

LEMMA 1.1. *Siano m, n, due interi positivi con $m < n$ ed $f : A \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$, definita su un aperto A di $\mathbb{R}^m$. Allora $f(A)$ è di prima categoria.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni intero positivo N ed ogni $\alpha \in \mathbf{Z}^m$ indichiamo con $Q(\alpha, N)$ il cubo m-dimensionale di lato $1/N$ e centro nel punto α/N:

$$Q(\alpha, N) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |Nx^i - \alpha^i| \leq 1/2 \text{ per } i = 1, \cdots, m\}.$$

La famiglia:

$$\{Q(\alpha, N) \mid \alpha \in \mathbf{Z}^m,\ N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

è numerabile e le sue sottofamiglie formate dai cubi di lato $1/N$ sono ricoprimenti chiusi localmente finiti (quadrettature) di $\mathbb{R}^m$. L'insieme A è l'unione numerabile $\bigcup_\nu Q_\nu$ della famiglia $\{Q_\nu = Q(\alpha_\nu, N_\nu) \subset A\}$ dei cubi $Q(\alpha, N)$ in esso contenuti. Allora

$$f(A) = \bigcup f(Q_\nu)$$

è una rappresentazione di $f(A)$ come unione numerabile di insiemi compatti. Basterà dunque dimostrare che ciascuno di questi insiemi $f(Q_\nu)$ ha parte interna vuota.

Supponiamo per assurdo che ciò non sia vero. A meno di sostituire ad f la funzione di classe $\mathcal{C}^1$

$$x \longrightarrow k\,(f(hx + \alpha/N) - f(\alpha/N))$$

(per opportuni numeri reali positivi k, h ed $\alpha \in \mathbf{Z}^m$) possiamo supporre che:

$$A \supset Q(m) = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, |x^i| \leq 1/2 \text{ per } i = 1, \cdots, m\}.$$

$$f(Q(m)) \supset Q(n) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |y^i| \leq 1/2 \text{ per } i = 1, \cdots, n\}.$$

Le derivate parziali prime di f sono uniformemente limitate su $Q(m)$. Per il teorema della media, abbiamo allora, per una costante L,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in Q(m).$$

La f trasforma perciò un sottoinsieme di $Q(m)$ contenuto in una palla di raggio δ in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ contenuto in una palla di raggio $L\delta$.

Fissato un intero positivo N, suddividiamo $Q(m)$ in N^m cubi di lato $1/N$. Ciascuno di questi cubi ha diametro $\sqrt{m}/N$ e la sua immagine mediante f è quindi un sottoinsieme di diametro minore o uguale ad $L\sqrt{m}/N$ e dunque contenuto in un cubo di $\mathbb{R}^n$ di lato $2L\sqrt{m}/N$. Il volume di $Q(n)$ dovrebbe essere allora inferiore alla somma dei volumi di tali cubi:

$$1 = vol\,(Q(n)) \leq (2L\sqrt{m})^n \cdot N^{m-n}.$$

Ma ciò non è possibile, perché il secondo membro tende a 0 per $N \to \infty$. Abbiamo quindi ottenuto una contraddizione, che prova che l'immagine di ciascun cubo ha parte interna vuota. La dimostrazione è completa. □

Osservazione 1.2. Segue dalla dimostrazione che, *se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$, definita su un aperto A di $\mathbb{R}^m$, ed $m < n$, allora $f(A)$ è contenuta in un insieme di misura di Lebesgue nulla*[1] *di $\mathbb{R}^n$.*

Definizione 1.3. Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile, di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$, definita su un aperto A di $\mathbb{R}^m$. Ricordiamo che un punto $x_0 \in A$ si dice *critico* per f se l'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $df(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ha rango $< n$. Il corrispondente punto $f(x_0) \in \mathbb{R}^n$ si dice *valore critico* di f. Indichiamo con $C(f)$ e $CV(f)$ rispettivamente l'insieme dei punti critici e dei valori critici di f. I punti di $f(A) \setminus CV(f)$ si dicono *valori regolari* di f.

Osservazione 1.4. I punti critici di f sono tutti e soli i punti $x \in A$ in cui f non è una sommersione ed i valori critici di f gli $y \in f(A)$ per cui $f^{-1}(y)$ non è una sottovarietà differenziabile di dimensione $m - n$ di A.

[1] Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^m$ ha *misura di Lebesgue nulla* se, per ogni $\epsilon > 0$, è possibile ricoprirlo con un'infinità numerabile di sottoinsiemi limitati A_h con $\sum_h d_h^m < \epsilon$, ove $d_h = \text{diam}(A_h) = \sup_{y,y' \in A_h} |y - y'|$. Chiaramente, un'unione numerabile di insiemi di misura di Lebesgue nulla, ha ancora misura di Lebesgue nulla.

Possiamo riformulare il teorema delle funzioni implicite utilizzando la nozione di punto critico:

TEOREMA 1.5 (delle funzioni implicite). *Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$, definita su un aperto A di $\mathbb{R}^m$. Se $x_0 \in A$ non è un punto critico di f possiamo trovare un intorno aperto V di $f(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$, un intorno aperto W di 0 in $\mathbb{R}^{m-n}$, un intorno U di x_0 in A ed un omeomorfismo*

$$g : V \times W \longrightarrow U$$

di classe $\mathcal{C}^k$ tale che g non abbia punti critici in $V \times W$ e

$$f(g(y, z)) = y \quad \forall (y, z) \in V \times W.$$

In particolare, se $m = n$, la g è un omeomorfismo di V su un aperto $g(V)$ di A. In questo caso diciamo che la f definisce un *sistema di coordinate* di classe $\mathcal{C}^k$ in $g(V)$.

Dal teorema delle funzioni implicite deduciamo immediatamente il seguente:

LEMMA 1.6. *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$. Se y è un valore regolare di f, allora $f^{-1}(y)$ è un sottospazio discreto di A.*

DIMOSTRAZIONE. Dal teorema delle funzioni implicite segue che ogni punto x di $f^{-1}(y)$ ha un intorno aperto U tale che $f^{-1}(y) \cap U = \{x\}$. □

TEOREMA 1.7 (Lemma di Sard). *Sia $f : A \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$, definita su un aperto A di $\mathbb{R}^m$. Allora $CV(f)$ è di prima categoria.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che $C(f)$ è un sottoinsieme chiuso di A. Essendo A unione numerabile di compatti, la tesi è equivalente al fatto che, per ogni compatto $K \subset A$, il compatto $f(K \cap C(f))$ sia privo di punti interni. L'enunciato del teorema è banalmente vero quando $n = 0$, perché in questo caso l'insieme dei punti critici di f è vuoto. Possiamo quindi supporre $n > 0$ ed il teorema vero per applicazioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ a valori in $\mathbb{R}^{n-1}$. Ancora, anche il caso $m = 0$ è banale; potremo quindi supporre $m \geq 1$ ed il teorema vero per applicazioni differenziabili di classe $\mathcal{C}^\infty$ definite su aperti di $\mathbb{R}^k$ con $k < m$.

Poniamo $C = C(f)$ e, per ogni intero positivo k, indichiamo con C_k il sottoinsieme di C in cui si annullano le derivate parziali di f fino all'ordine k:

$$C_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid D^\alpha f(x) = 0 \quad \text{se} \quad 0 < |\alpha| \leq k\}, \quad \text{e definiamo infine}$$

$$C_\infty = \bigcap C_k \,.$$

Gli insiemi C_k, per $0 < k \leq \infty$, sono sottoinsiemi chiusi di C. Dimostreremo separatamente che l'immagine di $C \setminus C_1$, di $C_k \setminus C_{k+1}$ e di C_∞ sono di prima categoria in $\mathbb{R}^n$. Poiché $CV(f) = f(C \setminus C_1) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} f(C_k \setminus C_{k+1}) \cup f(C_\infty)$,

da ciò seguirà che $CV(f)$ è anch'esso di prima categoria, perché unione numerabile d'insiemi di prima categoria.

Sia x_0 un punto di $C \setminus C_1$. Dimostriamo che esso ammette un intorno compatto B in A tale che $f(B \cap C)$ non abbia punti interni. Possiamo supporre, per semplicità, che $x_0 = 0$, $f(0) = 0$ e $\partial f^1/\partial x^1 \neq 0$ in 0. Mediante un cambiamento di coordinate di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno W di 0 in A, possiamo ricondurci al caso in cui la restrizione di f a W si possa scrivere nella forma[2]:

$$f(x) = f(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (x^1, f^2(x), \ldots, f^n(x)).$$

Sia B un intorno compatto di 0 in W della forma:

$$B = [-r, r] \times G$$

con $r > 0$, e G intorno compatto di 0 in $\mathbb{R}^{m-1}$. Supponiamo che $f(C \cap B)$ contenga un punto interno y_0.

La proiezione $\mathbb{R}^n \ni (y^1, y^2, ..., y^n) \longrightarrow (y^2, ..., y^n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ è aperta. Consideriamo l'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$

$$W \ni x \longrightarrow g(x) = (f^2(x), ..., f^n(x)) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Per l'ipotesi induttiva, l'insieme $g\,(C(g) \cap B)$ non ha punti interni.

Poiché $B \cap C \subset C(g)$, se ne deduce che l'intersezione di $f(C \cap B)$ con l'iperpiano $\mathcal{H} = \{y^1 = y_0^1\}$ non contiene un intorno di y_0 per la topologia di sottospazio di $\mathcal{H}$. Ciò contraddice l'ipotesi che y_0 fosse punto interno di $f(C \cap B)$ ed abbiamo quindi dimostrato che $f(C \cap B)$ è un compatto privo di punti interni.

Ripetendo questo ragionamento per i diversi punti di $C \setminus C_1$, dimostriamo che è possibile ricoprire $C \setminus C_1$ con una famiglia numerabile di compatti $\{B_\ell\}$ tali che $f(C \cap B_\ell)$ sia privo di punti interni e dunque

$$f(C \setminus C_1) = \bigcup\nolimits_\ell f(C \cap B_\ell)$$

sia di prima categoria in $\mathbb{R}^n$.

Sia ora $k \geq 1$ ed $x_0 \in C_k \setminus C_{k+1}$. A meno di una traslazione, possiamo, per semplificare le notazioni, supporre che x_0 sia l'origine $0 \in \mathbb{R}^m$. Indichiamo con φ una derivata parziale di f di ordine k, per cui sia $d\varphi(0) \neq 0$. Possiamo ancora supporre che $f(0) = 0$ e, a meno di restringerci a un intorno aperto W di $0 \in \mathbb{R}^m$, e di cambiare le coordinate in W ed in $\mathbb{R}^n$, che $\varphi(x) = x^1$.

Allora $C_k \cap W$ è contenuto in $\{x^1 = 0\}$ e quindi $f(C_k \cap W)$ è contenuto nell'insieme dei valori critici dell'applicazione

$$g(x^2, ..., x^m) = f(0, x^2, ..., x^m),$$

[2] Ciò si ottiene applicando il teorema delle funzioni impicite alla

$$f(x) = f(x^1, x^2, ..., x^n) = (x^1, f^2(x), ..., f^n(x)).$$

definita e di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno A' di 0 in $\mathbb{R}^{m-1}$. L'insieme $f(C_k \cap W)$ è allora di prima categoria per l'ipotesi induttiva su m.

Ricopriamo $C_k \setminus C_{k+1}$ con una famiglia numerabile di tali intorni W e dimostriamo così che $f(C_k \setminus C_{k+1})$ è di prima categoria perché unione numerabile di insiemi di prima categoria.

Sia ora K un compatto contenuto in C_∞. Poiché tutte le derivate parziali di f si annullano identicamente su K, per ogni intero positivo ℓ possiamo trovare un intorno aperto U di K in A tale che:

$$|\nabla f(x)| \leq \operatorname{dist}(x, K)^\ell \ \forall x \in U.$$

Supponiamo per assurdo che $f(K)$ contenga dei punti interni. Non è restrittivo allora supporre che $f(K)$ contenga il cubo:

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |y^i| \leq 1/2\}$$

e che K sia contenuto nel cubo:

$$Q' = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, |x^j| \leq 1/2\}.$$

Sia N un intero positivo, con $N \cdot \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^m - U) > 1$, e suddividiamo Q' in N^m cubi di lato $1/N$. Se uno di questi cubetti, chiamiamolo P, interseca K, esso è tutto contenuto in U e la sua immagine $f(P)$ è contenuta in un cubo di lato minore di $2(\sqrt{m}/N)^\ell$. Avremo dunque:

$$1 = vol(Q) \leq 2^n N^m (\sqrt{m}/N)^{ln}.$$

Scegliendo $ln > m$, otteniamo una contraddizione.

Ne segue che l'immagine $f(K \cap C)$, essendo un compatto di prima categoria in $\mathbb{R}^n$, ha parte interna vuota.

Poiché C_∞ è unione numerabile di compatti in esso contenuti, $f(C_\infty)$ è di prima categoria perché unione numerabile di insiemi di prima categoria.

La dimostrazione è completa. □

Osservazione 1.8. Dalla dimostrazione si può osservare come l'ipotesi del teorema che la f sia di classe $\mathcal{C}^\infty$ si possa indebolire a f di classe $\mathcal{C}^k$ con $kn > m$.

Osservazione 1.9. In modo analogo si può dimostrare la forma più classica del lemma di Sard:

Se $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione di classe $\mathcal{C}^k$ con $kn > m$, allora $CV(f)$ ha misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 1.10. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^m$, $m > n$ ed $f : A \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$. Se $y \in f(A)$ è un valore regolare di f, allora $M_y = f^{-1}(y)$ è una sottovarietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ di A, con l'atlante definito dai sistemi di carte locali:

eq:sardaa

$$M_y \supset U_{\xi,x_0} \ni x \longrightarrow \xi(x) = \left(\xi^1(x), ..., \xi^{m-n}(x)\right) \in \xi(U_{\xi,x_0}) \subset \mathbb{R}^{m-n} \tag{1.1}$$

al variare di x_0 in M_y e di $\xi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m-n})$ tra le applicazioni lineari tali che $A \ni x \to g(x) = (f(x), \xi(x)) \in \mathbb{R}^m$ sia regolare in x_0. Per definire l'aperto U_{ξ,x_0}, osserviamo che, per il teorema delle funzioni implicite, la

g definisce un omeomorfismo di un intorno V di x_0 su un aperto V' di $\mathbb{R}^m$: poniamo allora $U_{\xi,x_0} = V \cap M_y$. La $M_y = f^{-1}(y)$ è una sottovarietà *globalmente chiusa* in A.

ESEMPIO 1.11. Sia $\mathfrak{M}(m,n;\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a coefficienti reali e sia $k \leq \min\{m,n\}$. Allora l'inseme $\mathfrak{M}(m,n;k;\mathbb{R})$ delle matrici $m \times n$ di rango k è una sottovarietà differenziabile localmente chiusa di classe $\mathcal{C}^\omega$ di $\mathfrak{M}(m,n;\mathbb{R})$, di dimensione $k(m+n-k)$. Infatti $\mathfrak{M}(m,n;k;\mathbb{R})$ è l'intersezione del chiuso delle matrici che hanno nulli tutti i determinanti dei minori di ordine $(k+1)$ con l'aperto delle matrici che hanno almeno uno dei determinanti dei minori di ordine k diverso da zero.

Un atlante di $\mathfrak{M}(m,n;k;\mathbb{R})$ si può parametrizzare con la scelta di k colonne $X_{i_1},\dots,X_{i_k}$, con $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ della matrice $X \in \mathfrak{M}(m,n;k;\mathbb{R})$. L'aperto $U_{i_1,\dots,i_k}$ è formato dalle matrici X per cui $X_{i_1},\dots,X_{i_k}$ sono linearmente indipendenti. Le coordinate sono allora gli (mk) coefficienti della matrice $(X_{i_1},\dots,X_{i_k})$, che variano nell'aperto Ω di $\mathfrak{M}(m,k;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{mk}$ delle matrici che hanno un minore $k \times k$ con determinante diverso da 0, e i $k(n-k)$ coefficienti c_j^h che si ricavano dalla decomposizione $X_j = \sum_{h=1}^k c_j^h X_{i_h}$ della j-esima colonna $(j \neq i_1,\dots,i_k)$ di X rispetto alle colonne $X_{i_1},\dots,X_{i_k}$. Questa scelta delle coordinate definisce un diffeomorfismo di $U_{i_1,\dots,i_k}$ sul prodotto $\Omega \times \mathbb{R}^{k(n-k)} \subset \mathbb{R}^{k(m+n-k)}$.

2. Il teorema di Sard per varietà differenziabili

Siano M, N varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$, di dimensioni m, n rispettivamente, ed $f : M \longrightarrow N$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$. Un punto p che sia critico per la rappresentazione di f in un sistema di coordinate locali in p ed in $f(p)$, lo è anche per la sua rappresentazione rispetto a qualsiasi altro sistema di coordinate locali.

Possiamo quindi definire senza ambiguità l'insieme $C(f)$ dei punti critici di f in M e l'insieme $CV(f)$ dei valori critici di f in N.

DEFINIZIONE 2.1. Diciamo che un punto $p \in M$ è un *punto critico* di un'applicazione differenziabile $f : M \to N$, di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$, se, rispetto a coordinate locali x in un intorno U di p in M ed y in un intorno V di $f(U)$ in N, il punto $x(p)$ è critico per la

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^m \to y(V) \subset \mathbb{R}^n.$$

I *punti regolari* di f sono il complementare in M dei punti critici e i *valori regolari* di f il complementare in $f(M)$ dei valori critici. Se $q \in f(M) \subset N$ è un *valore regolare*, allora $f^{-1}(q)$ è una *sottovarietà (globalmente) chiusa* di M, differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, di dimensione $m-n$. Le (1.1), relative alle possibili scelte di sistemi di coordinate locali in $p \in f^{-1}(q)$ ed in $q \in f(M)$, definiscono un atlante e quindi una struttura differenziabile su $f^{-1}(q)$.

Usando atlanti formati da un insieme al più numerabile di elementi otteniamo immediatamente:

lm:ssarda

LEMMA 2.2. *Sia $f : M \to N$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$ tra due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$, di dimensioni m ed n, rispettivamente. Se $m < n$, allora $f(M)$ è un sottoinsieme di prima categoria di N.*

TEOREMA 2.3 (Lemma di Sard). *Siano M ed N varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^\infty$. Allora, per ogni applicazione $f : M \to N$ di classe $\mathcal{C}^\infty$, $CV(f)$ è un insieme di prima categoria in N.*

OSSERVAZIONE 2.4. Possiamo introdurre sulla varietà differenziabile N una *misura* positiva n dimensionale μ, con la condizione che il suo pull-back rispetto a ciascuna carta locale sia un multiplo di classe $\mathcal{C}^\infty$ della misura di Lebesgue. Un modo per costruire la μ è il seguente. Fissiamo un ricoprimento aperto localmente finito $\{U_i\}_{i\in I}$ di N mediante gli aperti di un atlante $\{(U_i, x_i)\}_{i\in I}$ di N di classe $\mathcal{C}^\infty$. Sia $\{\phi_i\}$ una partizione dell'unità su N, con funzioni $\phi_i \geq 0$, subordinata al ricoprimento $\{U_i\}_{i\in I}$. Definiamo la misura μ mediante l'integrale delle funzioni continue a supporto compatto, ponendo:

$$\int_N g\, d\mu \;=\; \sum_{i\in I} \int_{x_i(U_i)} g(x_i)\, \phi_i(x_i)\, d\lambda_n\,, \qquad \forall g \in \mathcal{C}^0_c(N, \mathbb{R})\,,$$

ove λ_n è la misura di Lebesgue n-dimensionale in $\mathbb{R}^n$.

Vale allora il Lemma di Sard nella formulazione:

Se $f : M \to N$ è un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$, allora l'insieme $CV(f)$ dei valori critici di f è μ-misurabile ed ha misura nulla.

3. Il teorema d'immersione di Whitney

Dimostriamo in questo paragrafo che ogni varietà differenziabile M di dimensione m è diffeomorfa a una sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Cominciamo dimostrando con alcuni risultati relativi ad applicazioni differenziabili tra spazi Euclidei. Ricordiamo che nello spazio vettoriale delle matrici A di tipo $n \times m$, a coefficienti reali o complessi, la $\|A\| = \sqrt{\text{traccia}(A^*A)}$ è una norma Euclidea.

LEMMBEA

LEMMA 3.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^m$, n un intero $\geq 2m$, ed $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^2$. Allora, per ogni $\epsilon > 0$ esiste una matrice reale $A = (a^i_j)$, di tipo $n \times m$, tale che: $\|A\| < \epsilon$ e l'applicazione $f_A\colon \Omega \ni x \to f_A(x) = f(x) + A\,x \in \mathbb{R}^n$ sia un'immersione in ogni punto x di Ω.*

DIMOSTRAZIONE. Se f_A non è un'immersione in $x \in \Omega$, allora la matrice $B = Jf(x) + A$ ha rango minore di m, cioè $A = B - Jf(x)$ per una matrice B di rango minore di m. Per ogni $0 \leq k < m$, le matrici $n \times m$ di rango k formano una sottovarietà differenziabile localmente chiusa $\mathfrak{M}(n, m; k; \mathbb{R})$ di dimensione $k(n + m - k)$ dello spazio Euclideo $\mathfrak{M}(n, m; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{mn}$ delle matrici reali $n \times m$. L'applicazione:

$$F_k : \Omega \times \mathfrak{M}(n, m; k; \mathbb{R}) \ni (x, B) \to A = B - Jf(x) \in \mathfrak{M}(n, m; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{mn}$$

è differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$, definita su una varietà differenziabile di dimensione $m + k(n + m - k)$ ed a valori in una varietà differenziabile di dimensione mn. La $k \to m + k(n + m - k)$ è crescente se $2k < n + m$, e quindi in particolare per $k < m$. Abbiamo perciò:

$$m + k(n + m - k) \leq m + (m - 1)(n + 1) = mn + 2m - n - 1 < mn$$

per ogni intero k con $0 \leq k < m$, per l'ipotesi che $n \geq 2m$. Per il Lemma 2.2, lm:ssarda l'immagine di F_k è di prima categoria in $\mathbb{R}^{mn}$. Quindi anche l'unione delle immagini delle F_k, per $0 \leq k < m$, è un sottoinsieme di prima categoria nello spazio delle matrici reali $m \times n$. Ne segue che le matrici $A \in \mathfrak{M}(n, m; \mathbb{R})$ per cui f_A è un immersione in ogni punto $x \in \Omega$ è di seconda categoria, ed in particolare diverso dall'insieme vuoto. □

LEMMBEB

LEMMA 3.2. *Sia Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^m$, n un intero $\geq m$, ed $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$.*

1. *Se f è un'immersione in tutti i punti di un compatto K di Ω, allora possiamo trovare un $\epsilon > 0$ tale che, per ogni applicazione differenziabile $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$ con $\sup_{x\in K} \|Jg(x)\| < \epsilon$, l'applicazione $x \to f(x) + g(x)$ sia ancora un'immersione in ogni punto $x \in K$.*
2. *Se inoltre $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva su un compatto $K' \subset K \subset \Omega$, allora esiste un numero reale $\epsilon' > 0$ tale che, se $g\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ soddisfa $|g(x) - g(y)| \leq \epsilon'|x - y|$ per $x, y \in K'$, allora $(f + g)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ sia ancora iniettiva su K'.*
3. *Sia $r < \operatorname{dist}(K, \complement\Omega)$. Esiste allora un numero reale positivo $\epsilon'' > 0$ tale che, se $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione di classe $\mathcal{C}^1$ e $|g(x)| < \epsilon''$ per $x \in K'$, $\|Jg(x)\| < \epsilon''$ per $x \in K \cup \{x \in \Omega \,|\, \operatorname{dist}(x, K') \leq r\}$, allora $f + g$ è un'immersione in tutti i punti di K ed è iniettiva su K'.*

DIMOSTRAZIONE. Data una matrice $A \in \mathfrak{M}(m, n; \mathbb{R})$, sia $A^{i_1,\dots,i_m}$ la matrice quadrata $m \times m$ formata dalle m righe corrispondenti agli indici $i_1, \dots, i_m$. La funzione

$$F(A) = \max_{1\leq i_1<\cdots<i_m\leq n} \left|\det(A^{i_1,\dots,i_m})\right|$$

è continua. Consideriamo sullo spazio vettoriale $X = \mathcal{C}^0(K, \mathfrak{M}(m, n; \mathbb{R}))$ la topologia definita dalla norma $\|A(x)\|_K = \sup_{x\in K} \|A(x)\|$. Poiché il determinante di una matrice reale è funzione continua dei suoi coefficienti, l'applicazione

$$K \ni x \to F(A(x)) \in \mathbb{R}$$

è continua per ogni $A \in X$. Ne segue che anche

$$\Phi : X \ni A \to \min_K F(A(x)) \in \mathbb{R}$$

è continua. Per ipotesi, $F(Jf) > 0$, perché la funzione continua $F(Jf(x))$, essendo positiva in ogni punto di K per l'ipotesi che f fosse un immersione in

ogni punto di K, ha su K un minimo positivo. Esisterà quindi un $\epsilon > 0$ tale che, se $A \in X$ ed $\|A\|_K < \epsilon$, allora $\Phi(Jf + A) > 0$, cioè $F(Jf(x) + A(x)) > 0$ per ogni $x \in K$. In particolare, $f + g$ è ancora un'immersione in ogni punto di K se $\|Jg\|_K < \epsilon$. Questo dimostra il punto (1).

Per dimostrare (2), osserviamo in primo luogo che, sotto l'ipotesi che f sia iniettiva sul compatto $K' \subset K$, esiste un numero reale positivo $c > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|$ se $x, y \in K'$. Dalla formula di Taylor abbiamo infatti che

$$f(y) - f(x) = Jf(x)(y - x) + o(|x - y|).$$

Per l'ipotesi che $Jf(x)$ abbia rango m in ogni punto x di K, per la compattezza di K abbiamo, con una costante $c_0 > 0$, la diseguaglianza $|Jf(x)v| \geq c_0|v|$ per ogni $x \in K$ ed ogni $v \in \mathbb{R}^m$. Fissato quindi un punto $x_0 \in K$, utilizzando la formula di Taylor, potremo trovare un intorno U_{x_0} di x_0 in Ω tale che $|f(y) - f(x)| \geq (c_0/2)|y - x|$ se $x, y \in U_{x_0}$. Quindi, se f è un'immersione iniettiva in ogni punto di K', la funzione

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} & \text{se} \quad x \neq y \\ \liminf\limits_{\substack{x', x'' \to x \\ x' \neq x''}} \dfrac{|f(x') - f(x'')|}{|x' - x''|} & \text{se} \quad x = y \end{cases}$$

è finita, semicontinua inferiormente e positiva in ogni punto del compatto $K' \times K'$, ed ha quindi su $K' \times K'$ un minimo positivo c.

Se $g \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ soddisfa $|g(x) - g(y)| < c|x - y|$ per $x, y \in K'$, avremo, per $x \neq y \in K'$:

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - [f(y) + g(y)]| &\geq |f(x) - f(y)| - |g(x) - g(y)| \\ &\geq c\,|x - y| - |g(x) - g(y)| > 0\,. \end{aligned}$$

Questo dimostra che $(f + g)$ è ancora iniettiva su K'.

Dimostriamo infine la (3). Fissati due numeri reali $\epsilon', r > 0$, con $r > \operatorname{dist}(K', \complement\Omega)$, possiamo trovare un $\epsilon'' > 0$ sufficientemente piccolo affinché ogni funzione $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$ che soddisfi $\|Jg(x)\| < \epsilon''$ se $\operatorname{dist}(x, K') \leq r$, soddisfi anche la diseguaglianza $|g(x) - g(y)| \leq \epsilon'|x - y|$ quando x, y appartengano alla stessa componente connessa di K'. Fisseremo inoltre ϵ'' in modo tale che $|f(x) - f(y)| > \epsilon''$ se x, y appartengono a diverse componenti connesse di K'. In questo modo anche l'ultima affermazione del Lemma risulterà verificata. □

Prima di enunciare e dimostrare il Teorema d'immersione di Whitney, è conveniente definire un'opportuna topologia sullo spazio vettoriale reale $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ delle applicazioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ delle applicazioni $f \colon M \to N$ differenziabili di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Definiamo innanzi tutto la topologia di $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ nel caso in cui Ω sia un aperto dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^m$. Per ogni compatto $K \subset \Omega$ ed ogni

intero non negativo m introduciamo la seminorma[3]:

$$\|f\|_{K,m} = \sup_{x\in K} \sup_{|\alpha|\le m} |D^\alpha f(x)|\,.$$

Sia ora $\{K_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ una successione di compatti con $K_\nu \subset \mathrm{int}(K_{\nu+1})$, $\bigcup_\nu K_\nu = \Omega$ e definiamo, per $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$:

$$\mathrm{dist}(f,g) = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \frac{\|f-g\|_{K_\nu,\nu}}{1+\|f-g\|_{K_\nu,\nu}}\,.$$

Si verifica che questa è una distanza su $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, che induce la topologia della convergenza uniforme della funzione con tutte le sue derivate parziali sui compatti di Ω, e che, con questa distanza, $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ è uno spazio metrico completo e quindi, in particolare, uno spazio di Baire.

Consideriamo ora il caso in cui M sia una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$. Fissiamo ancora una successione di compatti $\{K_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ di M con $K_\nu \subset \mathrm{int}(K_{\nu+1})$, $\bigcup_\nu K_\nu = M$ ed un atlante numerabile $\mathcal{A}_M = \{(U_a, x_a)\}_{a\in\mathbb{N}}$, con gli aperti U_a relativamente compatti in M. Per ogni $a \in \mathbb{N}$, fissiamo un aperto $U'_a \Subset U_a$, in modo tale che $\{U'_a\}_{a\in\mathbb{N}}$ sia una famiglia localmente finita e sia ancora un ricoprimento di M. Definiremo allora la distanza tra due applicazioni f e g di $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ mediante:

$$\mathrm{dist}(f,g) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{a=0}^{\infty} 2^{-\nu-a} \frac{\|f\circ x_a^{-1} - g\circ x_a^{-1}\|_{x_a(\bar U'_a\cap K_\nu),\nu}}{1+\|f\circ x_a^{-1} - g\circ x_a^{-1}\|_{x_a(\bar U'_a\cap K_\nu),\nu}}\,.$$

Si verifica che con questa distanza $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ è uno spazio metrico completo, e quindi di Baire. La topologia indotta dalla distanza è, per la rappresentazione della funzione in ogni carte locale, quella della convergenza uniforme con tutte le derivate.

Dimostriamo ora il:

Teorema 3.3 (Whitney). *Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$, paracompatta, numerabile all'infinito, di dimensione reale m. Esiste allora un'immersione differenziabile $f : M \to \mathbb{R}^{2m}$ ed un diffeomorfismo $g : M \to N \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ di M su una sottovarietà globalmente chiusa N di $\mathbb{R}^{2m+1}$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre per semplicità che M sia connessa. Fissiamo una successione di compatti $\{K_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ di M con $K_\nu \subset \mathrm{int}(K_{\nu+1})$, $\bigcup_\nu K_\nu = M$ ed un atlante numerabile e localmente finito $\mathcal{A}_M = \{(U_a, x_a)\}_{a\in\mathbb{N}}$, con gli aperti U_a relativamente compatti in M. Per ogni ν indichiamo con $\mathcal{F}_\nu$ l'insieme delle applicazioni differenziabili $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ che sono un'immersione in ogni punto di K_ν. Per il Lemma 3.2, $\mathcal{F}_\nu$ è un aperto di $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$. Per il Lemma 3.1, $\mathcal{F}_\nu$ è denso in $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$. Per il Teorema di Baire, $\mathcal{F} = \bigcap_\nu \mathcal{F}_\nu$ è un sottoinsieme denso di seconda categoria di

[3]Una *seminorma* su uno spazio vettoriale reale V è un'applicazione $p : V \to \mathbb{R}$ a valori non negativi, positivamente omogenea di grado uno e subadditiva. A differenza della norma, non si richiede a una seminorma la proprietà che $p(v) = 0$ implichi $v = 0$.

$\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}^n)$. Chiaramente le funzioni di $\mathcal{F}$ sono immersioni in ogni punto di M.

Se M è compatta, ogni applicazione differenziabile $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ è propria[4]. Se M non è compatta, consideriamo il sottoinsieme $\mathcal{T}$ delle funzioni $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}^n)$ che soddisfano $f(p) \geq \nu$ se $p \in K_\nu \setminus K_{\nu-1}$ per $\nu \geq 1$. Poiché $\mathcal{T}$ è chiuso, è uno spazio metrico completo per la restrizione della distanza su $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}^n)$ e quindi uno spazio di Baire. Ancora, si verifica facilmente che $\mathcal{F}_\nu \cap \mathcal{T}$ è un aperto denso di $\mathcal{T}$ per ogni ν. Quindi $\mathcal{F} \cap \mathcal{T}$ è un sottoinsieme denso di seconda categoria di $\mathcal{T}$ ed ogni $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{T}$ definisce un'immersione propria $f\colon M \to \mathbb{R}^n$.

Supponiamo ora che $n > 2m$. Sia $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile che è un'immersione differenziabile in ogni punto p si un compatto K di M. Sia $\mathcal{A} = \{(U_a, x_a)\}$ un atlante numerabile e localmente finito di M, con aperti U_a relativamente compatti in M ed U'_a aperti di M con $U'_a \Subset U_a$ e $\bigcup_a U'_a = M$. Per il teorema delle funzioni implicite, possiamo scegliere l'atlante $\mathcal{A}$ in modo che f sia iniettiva su $K \cap U_a$ per ogni aperto U_a dell'atlante $\mathcal{A}$. Sia $\{\chi_a\}$ una partizione dell'unità di classe $\mathcal{C}^\infty$ di M, subordinata al ricoprimento $\{U_a\}$, con $\chi_a(p) > 0$ se $p \in \bar{U}'_a$. Dico che, data una qualsiasi successione di numeri reali positivi $\{r_a\}$, è possibile determinare una successione di vettori $\{v_a\} \subset \mathbb{R}^n$ tale che per ogni intero positivo ν, $f_\nu = f + \sum_{a<\nu} v_a \chi_a$ sia un'immersione in ogni punto di $F_\nu = K \cap \bigcup_{a<\nu} \bar{U}'_a$ ed iniettiva su F_ν e su ogni sottoinsieme $K \cap U_a$, per $a \in \mathbb{N}$. Ragioniamo per ricorrenza su ν. Per $\nu = 0$, abbiamo $F_\nu = \emptyset$ e quindi non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo di aver costruito f_ν. L'insieme $D = \{(p,q) \in M \times M \mid \chi_\nu(p) \neq \chi_\nu(q)\}$ è un aperto di $M \times M$ e quindi una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ e di dimensione $2m$. Poiché $2m < n$, per il Lemma di Sard l'applicazione $D \ni (p,q) \to \frac{f(p)-f(q)}{\chi_\nu(p)-\chi_\nu(q)} \in \mathbb{R}^n$ ha immagine di prima categoria in $\mathbb{R}^n$ ed è dunque possibile trovare un b_ν arbitrariamente piccolo tale che $\frac{f_\nu(p)-f_\nu(q)}{\chi_\nu(p)-\chi_\nu(q)} \neq b_\nu$ se $(p,q) \in D$. Pur di scegliere b_ν sufficientemente piccolo, per il Lemma 3.2 la funzione $f_{\nu+1} = f_\nu + b_\nu \chi_\nu$ sarà ancora un'immersione differenziabile ed iniettiva su F_ν e su tutte le intersezioni $K \cap U_a$. Potremo ancora, per il Lemma 3.2, scegliere b_ν in modo che f_ν sia un'immersione differenziabile in ogni punto di $F_{\nu+1}$. Resta da verificare che $f_{\nu+1}$ sia iniettiva su $F_{\nu+1}$. Siano $p, q \in F_{\nu+1}$ con $f_{\nu+1}(p) = f_{\nu+1}(q)$. Quest'uguaglianza implica che $p = q$ se entrambi i punti non appartengono all'aperto $\{\chi_\nu > 0\}$. Infatti in questo caso $p, q \in F_\nu$ ed $f_\nu(p) = f_{\nu+1}(p) = f_{\nu+1}(q) = f_\nu(q)$. Si verifica ancora che $f_{\nu+1}(p) \neq f_{\nu+1}(q)$ se $\chi_\nu(p) \cdot \chi_\nu(q) = 0$ e $p \neq q$. Resta da considerare il caso in cui $\chi_\nu(p) \cdot \chi_\nu(q) \neq 0$. Allora $p, q \in K \cap U_a$ ed $f(p) \neq f(q)$ se $p \neq q$ per la scelta dell'atlante $\mathcal{A}$. Quindi: se $\chi_\nu(p) = \chi_\nu(q)$, da $f_{\nu+1}(p) = f_{\nu+1}(q)$ ricaviamo che $f_\nu(p) = f_\nu(q)$ e quindi $p = q$; se

[4] Chiamiamo propria un'applicazione continua $\Phi : X \to Y$ tra due spazi topologici X ed Y che trasformi chiusi di X in chiusi di Y e per cui $\Phi^{-1}(K)$ sia compatto per ogni compatto K di Y.

$\chi_\nu(p) \neq \chi_\nu(q)$ la $f_{\nu+1}(p) = f_{\nu+1}(q)$ implica che $p = q$ per la scelta di b_ν.

Sia ora $\{K_\nu\}$ una successione di compatti di M con $K_\nu \subset \text{int}(K_{\nu+1})$ e $\bigcup K_\nu = M$; sia $\mathcal{T} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n) \,|\, |f(p)| \geq \nu \text{ se } p \in K_\nu \setminus K_{\nu-1}\}$. Per quanto dimostrato sopra, se $n > 2m$, le $f \in \mathcal{T}$ che sono immersioni differenziabili iniettive su K_ν formano un aperto denso $\mathbf{T}_\nu$ di $\mathcal{T}$. Per il teorema di Baire, $\mathbf{T} = \bigcap_\nu \mathbf{T}_\nu$ è un sottoinsieme denso di seconda categoria di $\mathbf{T}$ e chiaramente i suoi elementi sono immersioni iniettive di M in $\mathbb{R}^n$. □

Osserviamo che, utilizzando il Teorema d'immersione di Whitney, è possibile definire una topologia metrizzabile sullo spazio $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ delle applicazioni differenziabili definite sulla varietà differenziabile M ed a valori nella varietà differenziabile N. Fissata un'immersione differenziabile iniettiva e propria $N \hookrightarrow \mathbb{R}^\ell$, che ci permetta di identificare N ad una sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^\ell$, potremo considerare $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ come il sottospazio chiuso di $\mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{R}^\ell)$ formato dalle f per cui $f(M) \subset N$.

CAPITOLO 13

Forme differenziali negli spazi Euclidei

1. Forme differenziali in $\mathbb{R}^n$

Indichiamo con $\Lambda^q\mathbb{R}^n$ lo spazio vettoriale reale di dimensione $\binom{n}{q}$ delle forme q-multilineari alternate su $\mathbb{R}^n$. Si dice *forma differenziale di grado q* e di classe $\mathcal{C}^k$ su un aperto A di $\mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$:

eq:FMAA (1.1) $$\eta : A \to \Lambda^q\mathbb{R}^n\,.$$

Indichiamo con $\Omega^q_k(A)$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle forme differenziali di grado q e di classe $\mathcal{C}^k$ sull'aperto A di $\mathbb{R}^n$. Sia dx^i la forma lineare su $\mathbb{R}^n$ definita da:

(1.2) $$dx^i(x) = x^i \ \ \forall x = {}^t(x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n\,.$$

Poiché le forme:

(1.3) $$dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_q} \qquad \text{con} \qquad 1 \le i_1 < ... < i_q \le n$$

definiscono una base di $\Lambda^q\mathbb{R}^n$, la forma (1.1) si scrive in modo unico come:

eq:FMAC (1.4) $$\sum_{1\le i_1<...<i_q\le n} \eta_{i_1...i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}$$

ed è di classe $\mathcal{C}^k$ se e soltanto se tutte le funzioni reali $\eta_{i_1,...,i_q}(x) = \eta(x)(e_{i_1}, ..., e_{i_q})$ sono di classe $\mathcal{C}^k$ su A. (Abbiamo indicato con $e_1, ..., e_n$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.)

2. Pull-back

Se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \ge 1$, definita sull'aperto A di $\mathbb{R}^n$, il suo differenziale è l'elemento di $\Omega^1_{k-1}(A)$ definito da:

(2.1) $$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^i\,.$$

Siano B un aperto di $\mathbb{R}^m$, A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\phi = {}^t(\phi^1, ..., \phi^n) : B \to A$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^{k+1}$, con $k \ge 0$. Data una forma differenziale $\eta \in \Omega^q_k(A)$, definita da (1.4), definiamo il suo *pull-back* $\phi^*\eta$ come la forma differenziale di $\Omega^q_k(B)$:

FMpb (2.2) $$\phi^*\eta = \sum_{i_1...i_q} \eta_{i_1...i_q}(\phi)\, d\phi^{i_1} \wedge ... \wedge d\phi^{i_q}\,.$$

Si verifica immediatamente che il pull-back di forme gode delle proprietà:

TEOREMA 2.1. *$\phi^* : \Omega_k^q(A) \to \Omega_k^q(B)$ è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare.*

Se $\eta_1 \in \Omega_k^{q_1}(A)$ ed $\eta_2 \in \Omega_k^{q_2}(A)$, allora $\eta_1 \wedge \eta_2 \in \Omega_k^{q_1+q_2}(A)$ e $\phi^*(\eta_1 \wedge \eta_2) = (\phi^*\eta_1) \wedge (\phi^*\eta_2)$.

Se $\psi : D \to B$ è un'applicazione di classe $\mathcal{C}^{k+1}$, definita su un aperto D di $\mathbb{R}^\ell$, allora $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$.

3. Differenziale di una forma

La definizione del differenziale di una funzione si può estendere a forme differenziali di ordine qualsiasi. Sia $\eta \in \Omega_{k+1}^q(A)$ una forma differenziale di grado q e di classe $\mathcal{C}^{k+1}$, con $k \geq 0$, definita su un aperto A di $\mathbb{R}^n$ dalla formula (1.4). Poniamo:

eq:FMACA

$$\begin{aligned} d\eta(x) &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} d\eta_{i_1 \ldots i_q}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} \frac{\partial \eta_{i_1 \ldots i_q}(x)}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Per ogni intero $q \geq 0$, il differenziale definisce un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare:

eq:FMACB

$$d : \Omega_{k+1}^q(A) \to \Omega_k^{q+1}(A)\,. \tag{3.2}$$

TEOREMA 3.1. *Il differenziale è l'unica applicazione $\mathbb{R}$-lineare (3.2), definita per ogni $q = 0, 1, \ldots, n$, che coincida con il differenziale definito sulle funzioni nel caso $q = 0$, e soddisfi le:*

eq:FMACC

$$d(\eta_1 \wedge \eta_2) = d\eta_1 \wedge \eta_2 + (-1)^{q_1} \eta_1 \wedge d\eta_2 \quad \forall \eta_1 \in \Omega_{k+1}^{q_1} \ , \forall \eta_2 \in \Omega_{k+1}^{q_2} \tag{3.3}$$

eq:FMACD

$$d \circ d : \Omega_{k+2}^q(A) \to \Omega_k^{q+2} \text{ è l'applicazione nulla, cioè } d \circ d = d^2 = 0\,. \tag{3.4}$$

DIMOSTRAZIONE. La (3.3), per il differenziale definito dalla (3.1), segue dalle proprietà del prodotto esterno e dalla regola di Leibnitz per la derivazione del prodotto di due funzioni. La (3.4) è allora conseguenza della:

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0\,,$$

valida per ogni funzione $f \in \mathcal{C}^2(A, \mathbb{R})$. Viceversa, se valgono (3.3) e (3.4) e il differenziale è $\mathbb{R}$-lineare, la sua espressione è data necessariamente dalla (3.1). □

Per ogni aperto A di $\mathbb{R}^n$, abbiamo un *complesso di operatori differenziali*:

eq:FRMCCB

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow\ & \Omega_{k+n}^0(A) \xrightarrow{d} \Omega_{k+n-1}^1(A) \longrightarrow \cdots \\ \xrightarrow{d}\ & \Omega_{k+n-h}^h(A) \xrightarrow{d} \Omega_{k+n-h-1}^{h+1}(A) \xrightarrow{d} \Omega_{k+n-h-2}^{h+2}(A) \longrightarrow \\ & \cdots \xrightarrow{d} \Omega_k^n(A) \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

TMACB TEOREMA 3.2 (Lemma di Poincaré-Volterra). *Sia $\eta \in \Omega^q_k(A)$ $(k \geq 1)$ una forma differenziale definita su un aperto A di $\mathbb{R}^n$, che soddisfa*

eq:FRMCCE
$$df = 0 \tag{3.6}$$

in un intorno aperto di un punto p di A. Se $q = 0$, allora f è costante in un intorno di p in A. Se $q > 0$, possiamo trovare un intorno aperto U di p in A e una forma differenziale $u \in \Omega^{(q-1)}_{k+1}(U)$ tale che:

eq:FRMCCF
$$du = \eta \ \text{ in } U. \tag{3.7}$$

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione nel caso $q = 0$ è conseguenza del teorema di Lagrange: se f è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ su un aperto convesso, allora $f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^n (x^i - y^i)\partial f(\xi)/\partial x^i$ per un punto ξ del segmento $[x, y]$ di estremi x, y. Quindi f è costante su un aperto convesso in cui si annullino tutte le sue derivate prime.

Sia ora $q > 0$. Ragioniamo per induzione, supponendo il teorema vero per forme differenziali che non contengano in un intorno di p i differenziali $dx^{i+1}, ..., dx^n$. Se η, definita da (eq:FMAC 11.4), ciò significa che, in un intorno U di p:

$$(\dagger[i]) \qquad \eta_{i_1 \dots i_q} = 0 \quad \text{se} \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_{q-1} \leq i < i_q \leq n\,.$$

Se inoltre $d\eta = 0$ allora, in un intorno U di p:

$$(\ddagger[i]) \qquad \frac{\partial \eta_{i_1 \dots i_q}}{\partial x^j} = 0 \quad \text{se} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq i < j \leq n\,.$$

Il caso $i = 0$ è banale perché allora η è identicamente nulla in un intorno U di p e possiamo risolvere (eq:FRMCCF 3.7) ponendo $u = 0$. Supponiamo quindi $i \geq 0$ e sia $\eta \in \Omega^q_k(A)$ una forma, con $d\eta = 0$, che soddisfi $(\dagger[i+1])$, e quindi anche $(\ddagger[i+1])$:

$$\eta = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq i+1} \eta_{j_1 \dots j_q} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$$

in un intorno U di p. Scriviamo in un intorno di p

$$\eta = dx^{i+1} \wedge \eta_1 + \eta_2$$

con η_1, η_2 che non contengono dx^{i+1}, cioè $\eta_1 \in \Omega^{q-1}_k(U)$ ed $\eta_2 \in \Omega^q_k(U)$ e soddisfano $(\dagger[i])$ e $(\ddagger[i+1])$. Possiamo supporre che $p = 0$ e che questa decomposizione valga in un intorno U di

$$W = [-R, R]^n$$

in $A \subset \mathbb{R}^n$, per $R > 0$ in cui $d\eta = 0$. Definiamo quindi una forma

$$\beta = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{q-1} \leq i} \beta_{j_1 \dots j_{q-1}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{q-1}}$$

ponendo

$$\beta_{j_1 \dots j_{q-1}}(x^1, ..., x^n) = \int_{-R}^{x^{i+1}} \eta_{j_1 \dots j_{q-1}}(x^1, \dots x^i, t, x^{i+2}, ..., x^n) dt.$$

Allora si verifica che

$$\eta - d\beta \in \Omega^q_k((-R, R)^n)$$

è indipendente da $dx^{i+1}, ..., dx^n$ e quindi per l'ipotesi induttiva

$$\eta - d\beta = dv$$

su un intorno aperto U di p contenuto in W e la tesi segue con

$$u = \beta + v.$$

□

Dalla formula dei differenziali, otteniamo immediatamente il:

TMACC

TEOREMA 3.3. *Se $\phi : B \to A$ è una applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^{k+2}$ definita su un aperto B di $\mathbb{R}^m$ e valori in un aperto A di $\mathbb{R}^n$, abbiamo, per ogni intero $q \geq 0$, il diagramma commutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^q_{k+2}(A) & \xrightarrow{d} & \Omega^{q+1}_{k+1}(A) \\ {\scriptstyle \phi^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi^*} \\ \Omega^q_{k+1}(B) & \xrightarrow{d} & \Omega^{q+1}_{k}(B) \end{array}$$

OSSERVAZIONE 3.4. I Teoremi TMACB 3.2 e TMACC 3.3 permettono di definire forme differenziali e il differenziale di forme su varietà differenziabili astratte, in quanto ci dicono che la definizione di differenziale e la differenziazione sono operazioni invarianti rispetto ai cambiamenti di carte locali.

4. Orientazione e sottovarietà di $\mathbb{R}^n$.

Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$. Un atlante $\mathcal{A}$ di classe $\mathcal{C}^k$ si dice *orientato* se i determinanti degli jacobiani delle sue funzioni di transizione sono positivi. Diremo che due atlanti orientati $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ sono compatibili se la loro unione è ancora un atlante orientato. Una varietà differenziabile che ammetta un atlante orientato si dice *orientabile*. La relazione di compatibilità è allora una relazione di equivalenza tra gli atlanti orientati su M che ne definiscono la struttura differenziabile. Se M è connessa e orientabile, ci sono esattamente due classi di equivalenza di atlanti orientati su M. La scelta di una delle due classi è una *orientazione* della varietà M. Nel caso di una varietà non connessa, un'orientazione di M sarà la scelta di una particolare orientazione su ciascuna delle sue componenti connesse.

OSSERVAZIONE 4.1. Non tutte le varietà sono orientabili. Ad esempio gli spazi proiettivi reali $\mathbb{RP}^n$ sono varietà orientabili se n è dispari, ma non se n è pari.

Consideriamo ora in particolare il caso di sottovarietà di $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che una sottovarietà localmente chiusa di $\mathbb{R}^n$, di classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) e di dimensione m, è un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^n$ tale che, per ogni punto $p \in S$, si possano trovare un intorno aperto U di p in $\mathbb{R}^n$ ed $n - m$ funzioni di classe $\mathcal{C}^k$:

$$f^i : U \to \mathbb{R} \;\; i = 1, ..., n - m$$

tali che:

eq:FMADH (4.1)
$$\begin{cases} S \cap U = \{x \in U | f^i(x) = 0 \;\; i = 1, ..., n-m\} \\ df^1(x) \wedge ... \wedge df^{n-m}(x) \neq 0 \;\; \forall x \in U. \end{cases}$$

Una *carta locale* su S è una *parametrizzazione* :

eq:FMADI (4.2)
$$\mathbf{r} : B \,\text{aperto} \; \subset \mathbb{R}^m \to S \subset \mathbb{R}^n$$

di classe $\mathcal{C}^k$, cioè un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, definita su un aperto B di $\mathbb{R}^m$, a valori in $\mathbb{R}^n$, *non singolare*, cioè con Jacobiano di rango massimo m in ogni punto di B, e la cui immagine $\mathbf{r}(B)$ sia contenuta in S. L'esistenza di un atlante ottenuto mediante parametrizzazioni è assicurata dal teorema delle funzioni implicite.

La scelta delle funzioni f^1, f^{n-m} determina un'*orientazione* su $S \cap U$: una parametrizzazione (4.2) con $\mathbf{r}(B) \subset S \cap U$ sarà una carta ammissibile se :

$$\det\left(\nabla f^1(\mathbf{r}), ..., \nabla f^{n-m}(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^m}\right) > 0\,.$$

Torniamo al caso generale. Sia M una varietà di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$ e sia D un aperto di M. È allora possibile definire un'applicazione continua $f : M \to \mathbb{R}$ che assuma valori negativi su D e positivi su $M \setminus \bar{D}$. Infatti M è uno spazio topologico regolare e a base numerabile e dunque metrizzabile. Se d è una distanza che definisce la topologia di M, e bD è la frontiera di D, basterà porre

$$f(x) = \begin{cases} -d(x, bD) & \text{se } \; x \in \bar{D} \\ d(x, bD) & \text{se } \; x \in M - D. \end{cases}$$

Diciamo che D è regolare di classe $\mathcal{C}^k$ se è possibile scegliere una tale funzione f in modo che sia di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno U di bD in M e non abbia punti critici su bD; diciamo allora che la f *definisce* D. Se M è orientata, possiamo definire sulla frontiera di un suo aperto D di classe $\mathcal{C}^k$ una struttura di varietà orientata di dimensione $n-1$. Se f è una funzione che definisce D, costruiamo un atlante orientato su bD nel modo seguente: ogni punto p di bD ammette un intorno coordinato (U, ϕ), compatibile con l'orientazione di M, della forma

$$\phi = (f, \phi^1, ..., \phi^{n-1}).$$

Considereremo allora la

$$(bD \cap U, (\phi^1, ..., \phi^{n-1}))$$

come una carta dell'atlante che definisce l'orientazione di bD. La frontiera di D, pensata come varietà orientata nel modo che abbiamo precisato, si indica con ∂D e si dice il bordo o la frontiera orientata di D.

Questa nozione è molto importante per la teoria dell'integrazione delle forme differenziali.

5. Integrazione e formule di Stokes

Sia A un dominio di $\mathbb{R}^n$. Una n-forma $\eta \in \Omega^n_0(A)$ si scrive

$$\eta = \eta_{1,\dots,n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \,,$$

ove $\eta_{1,\dots,n}$ è una funzione reale, continua in A. Sia D un sottoinsieme misurabile contenuto in A. Se $\eta_{1,\dots,n}$ è integrabile su D, possiamo definire

$$\int_D \eta = \int_D \eta_{1\dots n} dx \,.$$

Sia $\mathbf{r} = (\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^n) : B \to A \subset \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile definita su un aperto $B \subset \mathbb{R}^q$, iniettiva e senza punti singolari. Diciamo che $\mathbf{r}(B)$ è una *sottovarietà parametrica di $A \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione q.* Se $\eta \in \Omega^q(A)$, il suo pull-back $\mathbf{r}^*\eta$ è una q-forma continua su B. Se D è un dominio misurabile di B, e $\mathrm{supp}(\mathbf{r}^*\eta) \cap \bar{D}$ è un compatto contenuto in B, possiamo integrare su D la forma $\mathbf{r}^*\eta$, e porre:

$$\int_{\mathbf{r}(D)} \eta = \int_D \mathbf{r}^*\eta.$$

La formula di cambiamento di variabili negli integrali multipli ci dice che un cambiamento di parametrizzazione di $\mathbf{r}(D)$ che non ne cambi l'orientazione, ottenuto cioè mediante un diffeomorfismo

$$\sigma : B' \to B \quad \text{tra aperti} \quad B', B \subset \mathbb{R}^q \quad \text{con} \quad \det\left(\frac{\partial \sigma^i}{\partial y^j}\right)_{1 \le i,j \le q} > 0$$

non cambia il valore dell'integrale:

$$\int_{\sigma^{-1}(D)} (\mathbf{r} \circ \sigma)^* \eta = \int_D \mathbf{r}^* \eta \,.$$

Possiamo quindi integrare una q-forma su sottoinsiemi compatti di sottovarietà orientate di dimensione q, usando l'additività dell'integrale e riducendoci, per partizione dell'unità, a considerare soltanto il caso di varietà parametriche (carte locali).

Riconsideriamo ora il concetto di *bordo* di un dominio di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che D sia un aperto relativamente compatto di $\mathbb{R}^n$. Sia d la distanza euclidea in $\mathbb{R}^n$ e consideriamo la funzione continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ negativa in D e positiva su $\mathbb{R}^n - \bar{D}$:

$$f(x) = \begin{cases} -d(x, bD) & \text{se } x \in \bar{D} \\ d(x, bD) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n - D. \end{cases}$$

Allora bD è di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \ge 1$ in un punto $p \in bD$ se soltato se la funzione f così definita è di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno di p e $\nabla f(p) \neq 0$.

Se bD è di classe $\mathcal{C}^k$ in un punto p, per il teorema delle funzioni implicite potremo trovare un intorno U di p in $\mathbb{R}^n$ tale che $bD \cap U$ sia una sottovarietà

chiusa di classe $\mathcal{C}^k$ e di dimensione $n-1$ dell'aperto U. L'orientazione di ∂D è definita dalle rappresentazioni parametriche

$$\mathbf{r} : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \to U$$

con $\mathbf{r}(V) = bD \cap U' \subset U$ che soddisfano la condizione:

$$\det\left(\nabla f(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^{n-1}}\right) > 0.$$

Se la frontiera di un un aperto relativamente compatto D è differenziabile in tutti i punti, indichiamo con ∂D la sua frontiera come sottovarietà differenziabile orientata di dimensione $n-1$, con l'orientazione definita nel modo precisato sopra.

TEOREMA 5.1 (Formula di Green). *Sia D un aperto relativamente compatto con frontiera differenziabile e sia $\eta \in \Omega_1^{n-1}(A)$ una forma differenziale definita in un intorno A di $\bar{D}$. Allora*

$$\int_{\partial D} \eta = \int_D d\eta.$$

DIMOSTRAZIONE. Ci limitiamo a dare un'idea della dimostrazione. Osserviamo in primo luogo che la formula vale se η è nulla fuori da un compatto contenuto in D. In questo caso infatti ci riconduciamo a un integrale su un compatto $[-R, R]^n$ che contiene $\bar{D}$ e per il teorema di Fubini la formula è ridotta all'integrazione per parti per funzioni di una variabile reale.

Per il teorema delle funzioni implicite e per la compattezza di ∂D, possiamo ricoprire ∂D con un numero finito di aperti U_i, per $i = 1, \ldots, k$, in cui siano definite coordinate $y_i = y_i(x)$ tali che:

$$D \cap U_i = \{-R_i < y_i^1 < 0\,, -R_i < y_i^h < R_i \text{ per } 2 \le h \le n\}\,, \qquad \text{con } R_i > 0.$$

Sia $U_0 \Subset D$ un intorno di $D \setminus \bigcup_{i=1}^m U_i$, con chiusura compatta in D. Sia $\{\chi_i\}_{0 \le i \le m}$ una partizione dell'unità di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $\bar{D}$, subordinata al ricoprimento $\{U_i\}$. Abbiamo allora

$$\int_D d\eta = \sum_{i=0}^m \int_{U_i} d(\chi_i \eta)\,.$$

Poiché χ_0 ha supporto compatto contenuto in U_0, $\int_{U_0} d(\chi_0 \eta) = 0$. Per $i > 0$, scriviamo in U_i:

$$\chi_i \eta = \eta_1^{(i)} dy_i^2 \wedge \cdots \wedge y_i^n + \cdots + (-1)^{h+1} \eta_h^{(i)} dy_i^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_i^h} \wedge \ldots \wedge dy_i^n + \cdots + (-1)^{n+1} \eta_n^{(i)} dy_i^1 \wedge \cdots \wedge dy_i^{n-1}\,.$$

Abbiamo allora:

$$d(\chi_i \eta) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \eta_h^{(i)}}{\partial y_i^h} dy_i^1 \wedge \cdots \wedge dy_i^h\,,$$

$$\int_{U_i} d(\chi_i\eta) = \sum_{h=1}^{n} \int_{-R_i}^{0} dy_i^1 \int_{-R_i}^{R_i} dy_i^2 \cdots \int_{-R_i}^{R_i} dy_i^n \frac{\partial \eta_h^{(i)}}{\partial y_i^h}$$
$$= \int_{-R_i}^{R_i} dy_i^2 \cdots \int_{-R_i}^{R_i} dy_i^n \eta_1^{(i)}(0, y_i^2, \ldots, y_i^n) = \int_{\partial D} \chi_i\eta$$

perché $\int_{-R_i}^{0} \frac{\partial \eta_1^{(i)}}{\partial y_i^1} dy_i^1 = \eta_1^{(i)}(0, y_i^2, \ldots, y_i^n)$, mentre $\int_{-R_i}^{R_i} \frac{\partial \eta_h^{(i)}}{\partial y_i^h} dy_i^h = 0$ per $i > 1$. Poiché $\{\chi_i\}$ è una partizione dell'unità in un intorno di ∂D, otteniamo la tesi. □

Sia ora S una sottovarietà differenziabile orientata di dimensione q e di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$, di un aperto A di $\mathbb{R}^n$. Ciò significa che, per ogni punto $p \in S$, possiamo trovare un intorno U_p di p ed $n - q$ funzioni differenziabili f^i per $i = 1, ..., n - q$ definite in U_p e tali che:

$$\begin{cases} S \cap U_p = \{x \in U_p | f^i(x) = 0 \ \ \forall i = 1, ..., n - q\}, \\ df^1(x) \wedge ... \wedge df^{n-q}(x) \neq 0 \ \ \forall x \in S \cap U_p. \end{cases}$$

e inoltre l'orientazione di S è definita dall'atlante in cui sono carte ammissibili in $S \cap U_p$ le parametrizzazioni:

$$\mathbf{r} : V \subset \mathbb{R}^q \to S \cap U_p \subset \mathbb{R}^n$$

per cui

$$\det\left(\nabla f^1(\mathbf{r}), ..., \nabla f^{n-q}(\mathbf{r}), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^q}\right) > 0.$$

Dato un aperto relativamente compatto D di S, diremo che la sua frontiera è di classe $\mathcal{C}^k$ se possiamo trovare una funzione ϕ di classe $\mathcal{C}^k$ con:

$$\begin{cases} D = \{x \in S | \phi(x) < 0\} \\ d\phi(x) \wedge df^{q+1}(x) \wedge ... \wedge df^n(x) \neq 0 \ \ \forall x \in bD, \end{cases}$$

dove bD è la frontiera di D in S e le $f^1, \ldots, f^{n-q}$ definiscono l'orientazione di S in un intorno x. Su bD consideriamo allora l'orientazione definita dalle funzioni $f^{q+1}, ..., f^n, \phi$. La sottovarietà bD, con questa orientazione, si dice il *bordo* di D e si indica con ∂D. Otteniamo allora, per la definizione di integrale di una q-forma su una sottovarietà orientata q-dimensionale e la formula di Green:

Teorema 5.2 (Formula di Stokes). *Sia D un dominio relativamente compatto con frontiera di classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) di una sottovarietà orientata S di dimensione q di $\mathbb{R}^n$ (con $q \geq 1$). Sia $\eta \in \Omega_1^{q-1}(U)$ per un intorno U di $\bar{D}$ in $\mathbb{R}^n$. Allora:*

$$\int_{\partial D} \eta = \int_D d\eta.$$

Osservazione 5.3. Le formule di Green e di Stokes si estendono al caso in cui la frontiera dell'aperto relativamente compatto D sia di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, cioè D si possa ottenere mediante unioni e intersezioni finite di aperti con frontiera regolare di classe $\mathcal{C}^1$. In questo caso ∂D risulta un'unione finita di sottoinsiemi chiusi di sottovarietà orientate, due a due senza punti interni comuni e l'integrale sulla frontiera deve intendersi come la somma finita degli integrali effettuati su ciascuno di tali sottoinsiemi.

Osservazione 5.4. Concludiamo con alcune osservazioni che collegano le formule di Green-Stokes al lemma di Poincaré-Volterra. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\eta \in \Omega^q_k(A)$, $(k, q \geq 1)$ con

$$d\eta = 0 \text{ in } A.$$

Una tale forma si dice *chiusa*. Allora:

(i) L'integrale della η su sottovarietà compatte di A di dimensione q è invariante per omotopia e la sua definizione si può estendere fino a definire applicazioni:

$$\pi(S^q, A) \to \mathbb{R}\,, \qquad \pi_\ell(D^q, S^{q-1}; A) \to \mathbb{R}.$$

Ciò dipende dal fatto che le applicazioni continue $S^n \to A$ si possono approssimare mediante applicazioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ e queste, per il lemma di Sard, hanno luogo di valori critici di misura q-dimensionale nulla.

(ii) Condizione necessaria e sufficiente affinché si possa trovare una forma $u \in \Omega^{q-1}_{k+1}(A)$ tale che

$$du = \eta \text{ in } A$$

(in questo caso diciamo che η è *esatta* in A) è che l'integrale di η su ogni sottovarietà compatta orientata di dimensione q di A sia 0.

Osservazione 5.5. Sia $A = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Consideriamo su A la forma chiusa

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Essa non è esatta in quanto il suo integrale su una qualsiasi circonferenza

$$[0, 2\pi] \ni t \to {}^t(R\cos t, R\sin t) \in A$$

$(R > 0)$ è uguale a 2π. L'integrale della forma $d\theta$ su un laccetto in A, diviso per 2π si dice l' *indice* del laccetto rispetto a 0 e l'annullarsi dell'indice del laccetto è condizione necessaria e sufficiente affinché esso sia omotopo al laccetto costante. Intuitivamente l'indice rispetto a 0 di un laccetto in A misura quante volte esso si avvolge intorno all'origine. In generale, dato un laccetto in $\mathbb{R}^2$, è possibile definire l'indice del laccetto rispetto a qualsiasi punto di $\mathbb{R}^2$ che non appartenga al laccetto, considerando le forme:

$$\frac{(x - x_0)dy - (y - y_0)dx}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Nel caso di laccetti semplici, l'indice rispetto al laccetto di ciascun punto che non sia nel suo supporto può assumere solo due valori tra i numeri $0, 1, -1$.

I punti in cui l'indice è diverso da 0 formano un aperto limitato che ha il laccetto come frontiera (Teorema di Jordan).

L'indice rispetto a 0 della frontiera orientata di un dominio regolare connesso e semplicemente connesso che contenga 0 come suo punto interno è 1, mentre la somma degli indici dei laccetti che compongono la frontiera di un dominio regolare che non contenga 0 nella sua chiusura è uguale a 0.

CAPITOLO 14

Fibrati vettoriali e fibrati principali

1. Campi di vettori e curve integrali sulle varietà

Sia M una fissata varietà differenziabile di dimensione m, e di classe $\mathcal{C}^\infty$, numerabile all'infinito. Denotiamo con $\mathcal{E}(M)$ l'algebra reale ed anello commutativo unitario delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$, a valori reali, definite su M.

DEFINIZIONE 1.1. Si dice *campo di vettori* su M una *derivazione* dell'algebra $\mathcal{E}(M)$, cioè un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare:

$$X : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$$

che soddisfi l'identità di Leibnitz:

$$X(fg) = gX(f) + fX(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{E}(M)\,. \tag{1.1}$$

Indichiamo con $\mathfrak{X}(M)$ l'insieme di tutti i campi di vettori su M. Essi formano un $\mathcal{E}(M)$-modulo unitario, per il prodotto definito da $(fX)(g) = f(X(g))$ (se $f, g \in \mathcal{E}(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, ed un'*algebra di Lie reale* per il prodotto di commutazione :

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \qquad \text{per} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)\,,\ f \in \mathcal{E}(M)\,. \tag{1.2}$$

LEMMA 1.2. *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, allora X si annulla su tutte le funzioni costanti.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con c, per $c \in \mathbb{R}$, la funzione costante che vale c su M. Abbiamo:

$$cX(1) = X(c) = X(c \cdot 1) = c \cdot X(1) + 1 \cdot X(c) = 2 \cdot X(c)$$

e quindi $X(c) = 0$. □

LEMMA 1.3. *Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se $f \in \mathcal{E}(M)$ e $f(p) = 0$ per tutti i punti p di un aperto A di M, allora $X(f)(p) = 0$ per ogni $p \in A$. Abbiamo quindi :*

$$\operatorname{supp}(X(f)) \subset \operatorname{supp}(f) \qquad \forall f \in \mathcal{E}(M)\,,\ \forall X \in \mathfrak{X}(M)\,. \tag{1.3}$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato un punto $p \in A$, siano U e V due aperti di M con $p \in U \Subset V \Subset A$ ϕ una funzione di $\mathcal{E}(M)$ uguale a 0 in $\overline{U}$ e uguale a 1 su $M \setminus V$. Allora $f = \phi f$ e quindi:

$$X(f)(p) = X(\phi f)(p) = \phi(p)X(f)(p) + f(p)X(\phi)(p) = 0.$$

□

Da questo lemma si ricava immediatamente:

LEMMA 1.4. *Sia X un campo di vettori su M; se f, g sono due funzioni di $\mathcal{E}(M)$ che assumono gli stessi valori su tutti i punti di un aperto A di M, allora:*

$$X(f)(p) = X(g)(p) \quad \forall p \in A\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti $f - g$ si annulla su A e quindi:

$$X(f)(p) - X(g)(p) = X(f-g)(p) = 0 \quad \forall p \in A\,.$$

□

COROLLARIO 1.5. *Se A è un aperto di M, per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ vi è uno ed un solo campo di vettori $X\,|_A \in \mathfrak{X}(A)$ tale che $X\,|_A\, f\,|_A = (Xf)\,|_A$ per ogni $f \in \mathcal{E}(M)$.*

Ad ogni carta locale (U, x) in M possiamo associare campi di vettori $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^m$ in $\mathfrak{X}(U)$, definiti da:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f = \frac{\partial[f \circ x^{-1}]}{\partial x^i} \circ x \qquad \forall f \in \mathcal{E}(U)\,. \tag{1.4}$$

Vale il:

LEMMA 1.6. *Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$ e sia (U, x) una carta locale in M. Allora:*

$$X\,|_U = \sum_{i=1}^{m} X(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right). \tag{1.5}$$

DIMOSTRAZIONE. Data $f \in \mathcal{E}(U)$, sia $f^* = f \circ x^{-1} \in \mathcal{E}(x(U))$. Se $x_0 \in x(U)$, per ogni punto x di un intorno aperto $V_{x_0} \subset x(U)$ di x_0, stellato rispetto ad x_0:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f^*(x_0) + \int_0^1 \frac{df^*(x_0 + t(x - x_0))}{dt} dt \\ &= f^*(x_0) + \sum_{i=1}^{m} (x^i - x_0^i) f_i^*(x), \qquad \text{con} \\ f_i^*(x) &= \int_0^1 \frac{\partial f^*}{\partial x^i}(x_0 + t(x - x_0))\, dt \in \mathcal{E}(V_{x_0})\,. \end{aligned}$$

Con $x_0 = x(p_0)$ abbiamo $f_i^*(x_0) = \frac{\partial f^*(x_0)}{\partial x^i} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f\right](p_0)$. e quindi:

$$\begin{aligned} [X\,|_U f\,](p_0) &= \left[X\,\big|_{V_{x_0}} f\right](p_0) \\ &= \left[X\,\big|_{V_{x_0}} f(p_0)\right](p_0) + \left[X\,\big|_{V_{x_0}} \sum_{i=1}^{m} (x^i - x_0^i) f_i^* \circ x\right](p_0) \\ &= \sum_{i=1}^{m} f_i^*(x_0)\left[X\,\big|_{V_{x_0}}\,(x^i - x_0^i)\right](p_0) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left[X(x^i)\right](p_0) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f\right](p_0) \end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE 1.7. Dato un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed un punto $p \in M$, indichiamo con X_p la derivazione:

$$\mathcal{E}(M) \ni f \to X_p f := (Xf)(p) \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

dell'algebra reale $\mathcal{E}(M)$. Diciamo anche che X_p è un *vettore tangente ad M nel punto p.*

Una curva $\phi : (a,b) \to M$ di classe $\mathcal{C}^1$ è una *curva integrale del campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$* se:

FRMDAG
$$\frac{df \circ \phi(t)}{dt} = X_{\phi(t)} f \quad \forall f \in \mathcal{E}(M)\,, \quad \forall t \in (a,b)\,. \tag{1.7}$$

Se (U,x) è una carta locale in M ed $X = \sum_{i=1}^m a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ in U, allora gli integrali ϕ in U del campo di vettori X sono soluzioni $x(t) = x(\phi(t))$ del sistema autonomo di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine:

FRMDAH
$$\dot{x}^i = a^i(x) \quad \text{per } i = 1, \dots, m\,. \tag{1.8}$$

Dai teoremi di esistenza e unicità per sistemi di equazioni differenziali ordinarie abbiamo allora:

TEOREMA 1.8. *Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo di vettori in M e sia p_0 un qualsiasi punto di M. Esiste allora un'unica curva integrale $\phi\colon (a,b) \to M$ di X, con $-\infty \le a < 0 < b \le +\infty$, con $\phi(0) = p_0$, tale che, se $a > -\infty$, allora $\phi(t)$ non ha limite in M per $t \to a$; se $b < +\infty$, allora $\phi(t)$ non ha limite in M per $t \to b$.*

2. Vettori tangenti e fibrato tangente

DEFINIZIONE 2.1. Fissato un punto $p \in M$, chiamiamo *vettore tangente* ad M in p un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $v\colon \mathcal{E}(M) \to \mathbb{R}$ che soddisfi l'uguaglianza di Leibnitz:

$$v(fg) = (v(f))g(p) + f(p)(v(g)) \qquad \forall f, g \in \mathcal{E}(M)\,. \tag{2.1}$$

I vettori tangenti in un punto $p \in M$ formano uno spazio vettoriale reale, che indicheremo con T_pM. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, o più in generale $X \in \mathfrak{X}(U)$ per un intorno aperto U di p in M, allora X_p è un vettore tangente ad M in p. Abbiamo:

TEOREMA 2.2. *Per ogni punto $p \in M$ l'applicazione lineare*

$$\mathfrak{X}(M) \ni X \to X_p \in T_pM \tag{2.2}$$

è surgettiva.

Se (U,x) è una carta locale in p, allora i vettori tangenti $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p$, …, $\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$ formano una base di T_pM.

DEFINIZIONE 2.3. Indichiamo con TM l'unione disgiunta degli spazi vettoriali T_pM, al variare di p in M e con $\pi : TM \to M$ che fa corrispondere al vettore tangente $v \in T_pM$ il suo *punto di applicazione* p. Possiamo definire su TM una struttura di varietà differenziabile nel modo seguente.

Per ogni carta locale (U, x) di M, definiamo una carta locale $(\pi^{-1}(U), x \times dx)$ di TM ponendo:

$$\begin{aligned} &\pi^{-1}(U) \ni v \to (x(\pi(v)), v(x)) \in x(U) \times \mathbb{R}^m \\ &\qquad\qquad \text{con} \quad v(x) = (v(x^1), \dots, v(x^n)) \in \mathbb{R}^m \,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Se (V, y) è un'altra carta locale di M, per $p \in U \cap V$ abbiamo:

$$v(y^i) = \sum_{h=1}^{m} v(x^h) \frac{\partial y^j}{\partial x^h} \,, \tag{2.4}$$

cioè $v(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) v(x)$. Questa relazione si esprime anche dicendo che *le componenti di un vettore tangente sono covarianti rispetto ai cambiamenti di coordinate*.

Quindi, se $y = \phi(x)$, per $x \in x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ è la funzione di transizione delle due carte (U, x) e (V, y), il cambiamento di coordinate dalla carta $(\pi^{-1}U, x \times dx)$ alla carta $(\pi^{-1}(V), y \times dy)$ è $(\phi \times d\phi)$.

Abbiamo perciò:

PROPOSIZIONE 2.4. *Dato un atlante $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i)\}$ di M, con funzioni di transizione $x_{i,j}$ (abbiamo cioè $x_{i,j} = x_i \circ x_j^{-1}$ su $x_j(U_j \cap U_i)$), allora $T\mathcal{A} = \{\pi^{-1}(U_i), x_i \times dx_i)\}$ è un atlante di TM, con funzioni di transizione $x_{i,j} \times dx_{i,j}$.*

DEFINIZIONE 2.5. Un *gruppo a un parametro di diffeomorfismi di M* è un'applicazione differenziabile

$$\Phi \colon M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \to \Phi(p, t) \in M \tag{2.5}$$

che gode delle proprietà:

$$\begin{aligned} &(i) \qquad \Phi(p, 0) = p \quad \forall p \in M \\ &(ii) \qquad \Phi(p, t + s) = \Phi(\Phi(p, t), s) \quad \forall p \in M \,,\ \forall t, s \in M \,. \end{aligned}$$

Chiamiamo *gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M* il dato di un intorno U^* di $M \times \{0\}$ in $M \times \mathbb{R}$ e di un'applicazione

$$\Phi \colon U^* \subset M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \to \Phi(p, t) \in M \tag{2.6}$$

che gode delle proprietà:

$$\begin{aligned} &(i) \qquad \Phi(p, 0) = p \quad \forall p \in M \\ &(ii) \qquad \Phi(p, t + s) = \Phi(\Phi(p, t), s) \quad \text{se } (p, t + s) \text{ e } (\Phi(p, t), s) \in U^* \,. \end{aligned}$$

Vale il:

TEOREMA 2.6. *A un gruppo locale a un parametro $\Phi : U^* \to M$ di diffeomorfismi di M corrisponde un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ tale che*

FRMDBG
$$(Xf)(p) = \left.\frac{df(\Phi(p, t))}{dt}\right|_{t=0} \qquad \forall f \in \mathcal{E}(M) \,,\ \forall p \in M \,. \tag{2.7}$$

Viceversa, dato un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ esiste un gruppo locale di diffeomorfismi di $\Phi : U^* \to M$ di M per cui (2.7) è verificata. Due gruppi a un parametro $\Phi_1 : U_1^* \to M$ e $\Phi_2 : U_2^* \to M$ per cui sia verificata (2.7) per lo stesso campo X coincidono su tutte le componenti connesse di $U_1^* \cap U_2^*$ che intersecano $M \times \{0\}$.

DIMOSTRAZIONE. L'esistenza e unicità di un gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi associato ad un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ è conseguenza del teorema d'esistenza locale, unicità e dipendenza $\mathcal{C}^\infty$ dai dati iniziali per il sistema di equazioni differenziali ordinarie (1.8). Il fatto che la soluzione generale del problema di Cauchy definisca un gruppo locale a un parametro è conseguenza del fatto che il sistema (1.8) è *autonomo*, che cioè le funzioni a secondo membro in (1.8) non dipendono dalla variabile t e quindi che, se $t \to \Phi(p,t)$ è soluzione in un intervallo $t \in (a,b)$, con $a < 0 < b$, con dato iniziale $\Phi(p,0) = p$, allora, per ogni $t_0 \in (a,b)$ fissato, $t \to \Phi(p, t + t_0)$ è soluzione nell'intervallo $(a - t_0, b - t_0)$, con dato iniziale $\Phi(p,t_0)$, e coincide quindi con $\Phi(\Phi(p,t_0),t)$.

Si verifica poi facilmente, utilizzando la formula di Leibnitz per la derivata del prodotto di funzioni reali di una variabile reale, che la (2.7) definisce un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$. □

DEFINIZIONE 2.7. Siano M ed N due varietà differenziabili ed $f : M \to N$ un'applicazione di classe $\mathcal{C}^\infty$. Essa induce un'applicazione (il *pull-back di funzioni*) :

$$f^* \colon \mathcal{E}(N) \ni \phi \to f^*(\phi) = \phi \circ f \in \mathcal{E}(M)\,. \tag{2.8}$$

Utilizzando il pull-back di funzioni definiamo il *differenziale* di f in un punto $p \in M$:

$$\begin{gathered} f_*(p) = df_p : T_pM \to T_{f(p)}N \qquad \text{mediante}: \\ f_*(p)(v)(\phi) = df_p(v)(\phi) = v(f^*(\phi)) = v(f \circ \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{E}(N)\,. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Se (U,x) e (V,y) sono carte locali in M ed N rispettivamente, con $p \in U$ ed $f(p) \in V$, abbiamo :

$$f_*(p)\left(\sum_{i=1}^m v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{f(p)}\,. \tag{2.10}$$

Possiamo definire in questo modo un'applicazione differenziabile :

$$f_* = df \colon TM \ni v \to df_{\pi(v)}(v) \in TN\,, \tag{2.11}$$

ove abbiamo indicato con $\pi : TM \to M$ la proiezione canonica. Essa si dice il *differenziale* dell'applicazione f, o il suo *sollevamento* allo spazio tangente.

3. Fibrati vettoriali

DEFINIZIONE 3.1. Siano E ed M due varietà differenziabili. Una *fibrazione differenziabile* di E su M è una sommersione differenziabile surgettiva $\varpi : E \to M$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Un *atlante di trivializzazione* di $E \xrightarrow{\varpi} M$, come fibrato vettoriale con base M e fibra tipica V, è il dato di un ricoprimento aperto $\{U_a\}_{a\in A}$ di M e, per ogni $a \in A$, di una sommersione differenziabile $\psi_a : \varpi^{-1}(U_a) \to V$ tale che:

$$(i)\ \varpi^{-1}(U_a) \ni \xi \to (\varpi(\xi), \psi_a(\xi)) \in U_a \times V \text{ è un diffeomorfismo } \forall a \in A$$

$$(ii)\ V \ni v \xrightarrow{\psi_{a,b}} \psi_b(\psi_a^{-1}(p, v)) \in V \text{è un isomorfismo lineare } \forall p \in U_a \cap U_b.$$

La famiglia $\mathcal{A}(E, M, V) = \{(U_a, \psi_a) \,|\, a \in A\}$ si dice un *atlante di trivializzazione come fibrato vettoriale* $E \xrightarrow{\varpi} M$ e le funzioni $\psi_{a,b} : U_a \cap U_b \to \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ le sue *funzioni di transizione*.

Due atlanti di trivializzazione $\mathcal{A}_1(E, M, V)$ e $\mathcal{A}_2(E, M, V)$ come fibrati vettoriali $E \xrightarrow{\varpi} M$ sono equivalenti se $\mathcal{A}_1(E, M, V) \cup \mathcal{A}_2(E, M, V)$ è ancora un atlante di trivializzazione come fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\varpi} M$.

Defininiamo *struttura di fibrato vettoriale reale con base M e fibra tipica E* una fibrazione differenziabile $E \xrightarrow{\varpi} M$ e una classe di equivalenza di atlanti di trivializzazione come fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\varpi} M$. Fissata una tale struttura, diremo che $E \xrightarrow{\varpi} M$ è un fibrato vettoriale reale differenziabile con base M e fibra tipica V.

Lo spazio tangente TM, definito nel paragrafo precedente, è un esempio di fibrato vettoriale differenziabile, con base M e fibra tipica $\mathbb{R}^m$.

Il prodotto cartesiano $M \times V$, con la proiezione sul primo fattore, è un altro esempio di fibrato vettoriale. Esso si dice *banale* o *triviale* e un fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\varpi} M$ si dice *trivializzabile* se ammette una carta di trivializzazione (M, ψ).

Indicheremo con $E_p = \varpi^{-1}(p)$ la *fibra* su $p \in M$. Essa ha una struttura naturale di spazio vettoriale.

Siano $E_1 \xrightarrow{\varpi_1} M_1$ ed $E_2 \xrightarrow{\varpi_2} M_2$ due fibrati vettoriali reali differenziabili. Un'applicazione differenziabile $F\colon E_1 \to E_2$ si dice un *morfismo di fibrati vettoriali reali differenziabili* se conserva le fibre, se cioè esiste un'applicazione differenziabile $f\colon M_1 \to M_2$ tale che $F(E_{1p}) \subset E_{2\,f(p)}$ per ogni p e la sua restrizione F_p a ciascuna fibra E_{1p} è lineare:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{F} & E_2 \\ {\scriptstyle\varpi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varpi_2} \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array} \quad \text{è commutativo ed}$$

$$F_p\colon E_{1p} \to E_{2\,f(p)} \quad \text{è lineare} \quad \forall p \in M_1\,.$$

Se inoltre la $F\colon E_1 \to E_2$ è un diffeomorfismo, allora anche la sua inversa $F^{-1}\colon E_2 \to E_1$ è un morfismo di fibrati differenziabili reali e si dirà un *isomorfismo di fibrati vettoriali reali differenziabili*.

Un fibrato differenziabile $E \xrightarrow{\varpi} M$ è quindi trivializzabile se è isomorfo al fibrato differenziale triviale $M \times V$, per qualche spazio vettoriale reale V.

Le costruzioni dell'algebra lineare si estendono in modo naturale ai fibrati vettoriali.

In particolare, se $E \xrightarrow{\varpi} M$ è un fibrato vettoriale differenziabile con fibra tipica V, consideriamo l'insieme E^* formato dall'unione disgiunta degli spazi vettoriali duali E_p^*. Indichiamo ancora con $\varpi^* : E^* \to M$ l'applicazione che associa il punto $p \in M$ ad $\eta \in E_p^* \subset E^*$. Se $\{(U_a, \psi_a)\}$ è un atlante del fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\varpi} M$, per ogni punto $p \in M$ la $\psi_a(p) : E_p \to V$ è un isomorfismo lineare. Definiamo $[\psi_a^*]^{-1} : [\varpi^*]^{-1}(U_a) \to V^*$ ponendola uguale a $[\psi_a^*(p)]^{-1}$ su ciascuna fibra E_p^*. In questo modo otteniamo un atlante di trivializzazione $\{(U_a, [\psi_a^*]^{-1})\}$, che definisce su $E^* \xrightarrow{\varpi^*} M$ una struttura di fibrato vettoriale reale differenziabile.

Con questa struttura differenziabile, chiamiamo $E^* \xrightarrow{\varpi^*} M$ il *fibrato duale* di $E \xrightarrow{\varpi} M$.

Siano $E_1 \xrightarrow{\varpi_1} M$ ed $E_2 \xrightarrow{\varpi_2} M$ due fibrati vettoriali reali, con fibre tipiche V_1 e V_2, sulla stessa base M. Definiamo:

$$E_1 \oplus_M E_2 = \{(\xi_1, \xi_2) \in E_1 \times E_2 \,|\, \varpi_1(\xi) = \varpi_2(\xi)\}\,. \tag{3.1}$$

Si verifica facilmente che $E_1 \oplus_M E_2 \xrightarrow{\varpi} M$, ove $\varpi(\xi_1, \xi_2) = \varpi_1(\xi_1) = \varpi_2(\xi_2)$ è un fibrato vettoriale reale differenziabile con fibra tipica $V_1 \oplus V_2$. Esso si dice la *somma di Whitney* dei fibrati $E_1 \xrightarrow{\varpi_1} M$ ed $E_2 \xrightarrow{\varpi_2} M$. Osserviamo che $E_1 \oplus_M E_2$ s'identifica in modo naturale all'unione disgiunta degli spazi vettoriali $E_{1p} \oplus E_{2p}$.

Siano $\mathcal{A}_1(E_1, M, V_1) = \{(U_a, \psi_{1a})\}$ e $\mathcal{A}_2(E_2, M, V_2) = \{(U_a, \psi_{2a})\}$ due atlanti di trivializzazione, corrispondenti allo stesso ricoprimento aperto $\{U_a\}$ di M. Definiamo $E_1 \otimes_M E_2$ come l'unione disgiunta degli spazi vettoriali $E_{1p} \otimes E_{2p}$, al variare di p in M. Se $\xi_1^{(h)} \in E_{1p}$, $\xi_2^{(h)} \in E_{2p}$, per $h = 1, \dots, \mu$, porremo $\varpi(\sum_{h=1}^{\mu} \xi_1^{(h)} \otimes \xi_2^{(h)}) = p$. Definiamo allora una struttura di fibrato vettoriale reale differenziabile su $E_1 \otimes_M E_2 \xrightarrow{\varpi} M$ mediante $\{U_a, \psi_{1a} \otimes \psi_{2a}\}$ con $(\psi_{1a} \otimes \psi_{2a})(p)\colon E_{1p} \otimes E_{2p} \to V_1 \otimes V_2$ uguale al prodotto tensoriale delle applicazioni lineari $\psi_{1a}(p)$ e $\psi_{2a}(p)$.

In particolare, fissati due interi non negativi r, s possiamo definire, a partire dal fibrato vettoriale reale differenziabile $E \xrightarrow{\varpi} M$, con fibra tipica V, un fibrato vettoriale differenziabile $\mathcal{T}^{r,s}(E) \xrightarrow{\varpi_{r,s}} M$, con fibra tipica $\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s \text{ volte}}$. La fibra sopra il punto p è $\underbrace{E_p \otimes \cdots \otimes E_p}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{E_p^* \otimes \cdots \otimes E^*}_{s \text{ volte}}$ e, se (U, ψ) è una carta di trivializzazione di $E \xrightarrow{\varpi} M$, la

$\left(U, \psi^{\otimes^r} \otimes [\psi^{*-1}]^{\otimes^s}\right)$ è una carta di trivializzazione di $\mathcal{T}^{r,s}(E) \xrightarrow{\varpi_{r,s}} M$. Chiamiamo il fibrato vettoriale $\mathcal{T}^{r,s}(E) \to M$ la *potenza tensoriale r-covariante ed s-controvariante* di $E \to M$.

In modo perfettamente analogo possiamo definire un *fibrato vettoriale complesso differenziabile*, richiedendo che la fibra tipica V sia uno spazio vettoriale complesso e che le funzioni di transizione degli atlanti di trivializzazione ammissibili siano $\mathbb{C}$-lineari.

Sia $E \xrightarrow{\varpi} M$ un fibrato differenziabile e sia A un aperto di M. Si dice *sezione differenziabile* di E su A un'applicazione $s \in \mathcal{C}^\infty(A, E)$ con $\varpi \circ s(p) = p$ per ogni $p \in A$.

Osserviamo che $\mathfrak{X}(A)$ si identifica in modo naturale a $\mathcal{C}^\infty(A, TM)$.

4. Fibrato cotangente e tensori

DEFINIZIONE 4.1. Indichiamo con T^*M il duale del fibrato tangente TM della varietà M. Esso si dice il *fibrato cotangente* di M ed i suoi elementi *vettori cotangenti* o *covettori* in M.

Se $f \in \mathcal{E}(M)$, per ogni $p \in M$ l'applicazione $T_p \ni v \to v(f) \in \mathbb{R}$ è un funzionale lineare su T_pM ed è dunque un elemento di T_p^*M. Associamo in questo modo ad ogni $f \in \mathcal{E}(M)$ una sezione differenziabile $\widetilde{df}$ del fibrato $T * M$. Con la definizione di differenziale data nel paragrafo precedente, identifichiamo $T\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, abbiamo:

$$df(v) = \widetilde{df}(v) \left(\frac{d}{dt}\right)_{f(\pi(v))}$$

avendo indicato con t la coordinata canonica di $\mathbb{R}$. Nel seguito scriveremo per semplicità df invece di $\widetilde{df}$, identificando il differenziale di una funzione reale alla corrispondente sezione del fibrato cotangente.

Indichiamo con $\mathfrak{X}^*(M)$ l'$\mathcal{E}(M)$-modulo delle sezioni differenziabili del fibrato T^*M.

Una sezione differenziabile X di TM su M è un elemento di $\mathfrak{X}(M)$ e possiamo farla agire su $\mathfrak{X}^*(M)$ mediante $[X(\xi)](p) = \xi_p(X_p)$ per ogni $p \in M$. Analogamente, possiamo interpretare la stessa uguaglianza come l'azione di $\xi \in \mathfrak{X}^*(M)$ su $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Sia $\mathcal{T}^{r,s}(TM)$ la potenza tensoriale r-covariante ed s-controvariante di TM. Essa è un fibrato vettoriale con fibra $[T_pM]^{\otimes^r} \otimes [T_p^*M]^{\otimes^s}$. Le sue sezioni si dicono *tensori r-covarianti ed s-controvarianti*.

Estendendo al prodotto tensoriale l'accoppiamento di dualità:

(4.1)
$$\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \ni (X, \xi) \to \langle X, \xi \rangle \in \mathcal{E}(M), \quad \langle X, \xi \rangle(p) = \xi_p(X_p)\ \forall p \in M,$$

una sezione $\tau \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{T}^{r,s}(TM))$ definisce un'applicazione:

RFMLDDB (4.2)
$$\tau : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{X}^*(M)}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{\mathfrak{X}(M) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ volte}} \longrightarrow \mathcal{E}(M)$$

Si verifica senza difficoltà il seguente criterio:

PROPOSIZIONE 4.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione $\mathbb{R}$-multilineare (4.2) sia associata ad un tensore è che sia $\mathcal{E}(M)$-multilineare.*

5. Forme differenziali su una varietà

Indichiamo con $\Omega^h(M)$ lo spazio dei tensori alternati h-controvarianti su M. Gli elementi di $\Omega^h(M)$ sono i tensori $\tau \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{T}^{0,h}(TM))$ tali che $\tau(X_1, \dots, X_h) = 0$ quando due dei campi di vettori $X_1, \dots, X_h$ sono uguali. Questa proprietà è equivalente a:

FRMDalt (5.1) $\tau(v_1, \dots, v_h) = 0$ se $v_1, \dots v_h \in T_pM$ sono linearmente dipendenti.

Ancora, questa è equivalente a:

$$\tau(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_h}) = \varepsilon(\sigma)\tau(v_1, \dots, v_h) \quad \text{se } v_1, \dots v_h \in T_pM \text{ e } \sigma \in \mathfrak{S}_h\,. \tag{5.2}$$

Gli elementi di $\Omega^h(M)$ si chiamamo h-forme alternate. Definiamo il *differenziale* di una h-forma alternata $\tau \in \Omega^h(M)$ come la $(h+1)$-forma alternata $d\tau$ definita da:

FRMLDEB
$$\begin{aligned} d\tau(X_0,X_1, \dots, X_h) = &\sum_{i=0}^{h} (-1)^i X_i[\tau(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_h)] \\ &+ \sum_{0\le i<j\le h} (-1)^{i+j} \tau([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_h) \\ &\forall X_0, X_1, \dots, X_h \in \mathfrak{X}(M)\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Verifichiamo che la (5.3) definisce una $(h+1)$-forma alternata. Se, per due indici $0 \le r < s \le h$, è $X_r = X_s = Y$, si verifica facilmente che ciascuna delle due somme a secondo membro di (5.3) si annulla. Per dimostrare la $\mathcal{E}(M)$-multilinearità, è allora sufficiente verificare che:

$$d\tau(fX_0, X_1, \dots, X_h) = f d\tau(X_0, X_1, \dots, X_h) \quad \forall f \in \mathcal{E}(M),\ \forall X_0, \dots, X_h \in \mathfrak{X}(M)\,.$$

Ciò segue da:

$$[fX_0, X_i] = f[X_0, X_i] - (X_i f)X_0$$

e quindi:

$$\begin{aligned} d\tau(fX_0,X_1,\dots,X_h) &= f\sum_{i=0}^{h}(-1)^i(X_i)\tau(X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_h)] \\ &+\sum_{i=1}^{h}(-1)^i(X_if)\tau(X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_h)] \\ &+ f\sum_{0\le i<j\le h}(-1)^{i+j}\tau([X_i,X_j],X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,\widehat{X_j},\dots,X_h) \\ &-\sum_{i=1}^{h}(-1)^i(X_if)\tau(X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_h)] \\ &= fd\tau(X_0,X_1,\dots,X_h) \\ &\qquad\qquad \forall f\in\mathcal{E}(M)\ \forall X_0,X_1,\dots,X_h\in\mathfrak{X}(M)\,. \end{aligned}$$

Poiché $\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0$ se $x^1,\dots,x^m$ sono coordinate locali, questa definizione del differenziale di una forma è equivalente a quella che avevamo data nel caso di forme differenziali su aperti degli spazi Euclidei. In particolare otteniamo:

Teorema 5.1. *Se M è una varietà differenziabile di dimensione m, il differenziale definisce un complesso di operatori differenziali del prim'ordine:*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Omega^0(M) &\xrightarrow{d} \Omega^1(M) \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\xrightarrow{d} \Omega^{m-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^m(M) \longrightarrow 0\,. \end{aligned} \tag{5.4}$$

È $\Omega^0(M)=\mathcal{E}(M)$ e, per ogni aperto connesso U di M, le funzioni $f\in\mathcal{E}(U)$ con $df=0$ su U sono costanti su U. Ogni punto $p\in M$ ha un sistema fondamentale di intorni aperti U tali che, se $1\le h\le m$ e $\tau\in\Omega^h(U)$ soddisfa $d\tau=0$ in U, allora esiste una $\eta\in\Omega^{h-1}(U)$ tale che $d\eta=\tau$ in U.

Dimostrazione. Il Teorema segue dal teorema analogo (Lemma di Poincaré-Volterra) dimostrato per le forme differenziali definite sugli aperti degli spazi Euclidei. □

Un aperto U di M si dice *contrattile* se esiste un'applicazione differenziabile $\Phi: U\times[0,1]\to U$ con $\Phi(p,0)=p_0$ costante e $\Phi(p,1)=p$ per ogni $p\in U$. Abbiamo:

Teorema 5.2 (Poincaré-Volterra). *Se U è un aperto contrattile di M ed $h\ge 1$, allora per ogni $\alpha\in\Omega^h(U)$ che soddisfa $d\alpha=0$ in U esiste una $u\in\Omega^{h-1}(U)$ tale che $du=\alpha$.*

Dimostrazione. Sia $\Phi: U\times[0,1]\to U$ un'applicazione differenziabile con $\Phi(p,0)=p_0$ costante e $\Phi(p,1)=p$ per ogni $p\in U$.

Sia $\alpha \in \Omega^h(U)$ una forma chiusa e poniamo:

$$\Phi^*(\alpha) = \alpha_0 + dt \wedge \alpha_1$$

con α_0, α_1 indipendenti da dt. Allora:

$$d(\Phi^*(\alpha)) = \Phi^*(d\alpha) = 0 \implies d_M\alpha_0 = 0\,,\ \frac{\partial \alpha_0}{\partial t} = d_M\alpha_1$$

dove abbiamo indicato con d_M la restrizione del differenziale su $U \times [0,1]$ ai vettori *orizzontali*, cioè ai vettori tangenti annullati da dt. Definiamo:

$$\beta(t) = \int_0^t \alpha_1(s)ds\,.$$

Otteniamo allora, poiché $\alpha_0(0) = 0$:

$$d_M\beta(t) = \int_0^t d_M\alpha_1(s)ds = \int_0^t \frac{\partial \alpha_0}{\partial t}(s)ds = \alpha_0(t)\,.$$

Con $u = \beta(\,\cdot\,, 1) \in \Omega^{h-1}(U)$, otteniamo $du = \alpha_0(1) = \alpha$ in U. □

6. Derivata di Lie di un tensore.

Un diffeomorfismo $\psi : M \to N$ definisce isomorfismi:

$(\psi^{-1})^* : \mathcal{E}(M) \ni f \to f_\psi = f \circ \psi^{-1} \in \mathcal{E}(N)$

$\psi_* : \mathfrak{X}(M) \ni X \to X^\psi = \psi_*(X) \in \mathfrak{X}(N)$ ove $\psi_*(X)(q) = d\psi(X_{\psi^{-1}(q)})$ $\forall q \in N$

$(\psi^{-1})^* : \mathfrak{X}^*(M) \ni \xi \to \xi_\psi \in \mathfrak{X}^*(N)$ ove $\xi_\psi(X^\psi) = \xi(X)$ $\forall X \in \mathfrak{X}(M)\,.$

Questi isomorfismi si estendono agli isomorfismi degli spazi tensoriali:

$$\mathcal{T}^{r,s}(M) \ni \tau \to \tau^\psi \in \mathcal{T}^{r,s}(N)\,,$$

definiti da:

$$\tau^\psi({\xi^1}_\psi, \dots, {\xi^r}_\psi, X_1^\psi, \dots, X_s^\psi) = \tau(\xi^1, \dots, \xi^r, X_1, \dots, X_s)$$
$$\forall \xi^1, \dots, \xi^r \in \mathfrak{X}^*(M),\ \forall X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)\,.$$

Sia $\Phi_X = \Phi_X(t)$ il gruppo locale a un parametro di diffeomorfismi di M, con generatore infinitesimale $X \in \mathfrak{X}(M)$. Per ogni aperto U relativamente compatto in M esiste un $\epsilon > 0$ tale che, per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\Phi_X(p,t)$ sia definita per ogni $p \in U$. Quindi, per ogni $\tau \in \mathcal{T}^{r,s}(M)$, utilizzando il diffeomorfismo $\Phi_X(t)^{-1}(U) \ni p \to \Phi_X(p,t) \in U$, possiamo definire $\tau_X(t) = \tau^{\Phi_X(\,\cdot\,,t)} \in \mathcal{T}^{r,s}(U)$. Questo ci permette di ottenere un nuovo tensore $L_X(\tau) \in \mathcal{T}^{r,s}(M)$, ponendo:

$$L_X(\tau) = -\left.\frac{d\tau_X(t)}{dt}\right|_{t=0}\,. \tag{6.1}$$

Il tensore $L_X(\tau)$ è la *derivata di Lie del tensore τ rispetto al campo di vettori X*.

PROPOSIZIONE 6.1. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora $L_X(Y) = [X, Y]$.*

DIMOSTRAZIONE. In una carta coordinata (U, x) siano $X = \sum_{i=1}^m a^i \partial/\partial x^i$, $Y_i = \sum b^i \partial/\partial x^i$. Il gruppo locale a un parametro $\Phi(t)$ è allora definito dalle equazioni:

$$\dot{\Phi}^i(x,t) = a^i(\Phi(x,t)) \qquad i = 1, \dots, m\,.$$

Scriviamo $\Psi(x,t)$ per l'inversa della $\Phi(t)$. Abbiamo cioè $\Phi(\Psi(x,t),t) = x$ per ogni t e x nel dominio di definizione. Abbiamo allora:

$$Y(t) = \sum_{i,j=1}^m b^i(\Psi(x,t))(\partial\Phi^j/\partial x^i)(\Psi(x,t))(\partial/\partial x^j)\,.$$

Otteniamo allora:

$$\frac{\partial Y(t)}{dt} = \sum_{i,j=1}^m \left(\sum_{h=1}^m \frac{\partial b^i}{\partial x^h}\frac{\partial \Psi^h}{\partial t}\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i} + b^i \left[\frac{\partial^2 \Phi^j}{\partial x^i \partial x^k}\frac{\partial \Psi^k}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi^j}{\partial x^i \partial t} \right] \right) \frac{\partial}{\partial x^j}\,.$$

Da $\Psi(\Phi(x,t),t) = x$, abbiamo:

$$\frac{\partial \Psi^h}{\partial t} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Psi^h}{\partial x^k}\frac{\partial \Phi^k}{\partial t} = 0\,.$$

Poiché $\partial\Phi/\partial x$ e $\partial\Psi/\partial x$ sono entrambi l'identità per $t = 0$, abbiamo:

$$\sum_{i,j,h=1}^m \frac{\partial b^i}{\partial x^h}\frac{\partial \Psi^h}{\partial t}\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}\bigg|_{t=0} = -\sum_{h=1}^m a^h \frac{\partial b^j}{\partial x^h}\,.$$

Per $t = 0$ è $\partial^2\Phi^j/\partial x^i \partial x^k = 0$, mentre $\partial^2\Phi^j/\partial x^i \partial t = \partial a^j/\partial x^i$ ed otteniamo quindi la formula desiderata. □

Si verifica facilmente che:

PROPOSIZIONE 6.2. *Se $f \in \mathcal{T}^{0,0}(M) = \mathcal{E}(M)$, allora $L_X f = Xf$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Dati numeri positivi h, k, r, s con $h \le r$, $k \le s$, definiamo sui tensori l'operazione di *contrazione degli indici* (h,k):

$$\mathbf{c}_k^h \mathcal{T}^{r,s}(M) \to \mathcal{T}^{r-1,s-1}(M)$$

nel modo seguente: siano $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}(M)$ campi di vettori che definiscono un sistema di riferimento su un aperto U di M, tali cioè che $X_1(p), \dots, X_m(p) \in T_pM$ sia una base di T_pM per ogni $p \in U$. Definiamo il sistema di riferimento duale $\xi^1, \dots, \xi^m \in \mathfrak{X}^*(U)$ mediante $\langle X_i, \xi^j \rangle(p) = \delta_i^j$ (delta di Kronecker) per ogni $p \in U$. Allora, su U, poniamo:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{c}_k^h(\tau)(\eta^1, \dots, \eta^{r-1}, Y_1, \dots, Y_{s-1}) \\
&\quad = \sum_{j=1}^m \tau(\eta^1, \dots, \eta^{k-1}, \underset{\hat{k}}{\xi^j}, \eta^k, \dots \eta^{r-1}, Y_1, \dots, Y_{h-1}, \underset{\hat{h}}{X_j}, Y_h, \dots Y_{s-1}) \\
&\qquad \forall \eta^i \in \mathfrak{X}^*(M),\ Y_i \in \mathfrak{X}(M)\,.
\end{aligned}$$

Si verifica che la contrazione è ben defininta, che cioè non dipende dalla scelta del sistema di riferimento su U.

Abbiamo:

PROPOSIZIONE 6.3. *La derivata di Lie commuta con le contrazioni.*

Utilizzando questa proposizione possiamo calcolare la derivata di Lie dei diversi tensori a partire dalla definizione della derivata di Lie dei campi di vettori. Ad esempio, se $\alpha \in \Omega^1(M)$, abbiamo:

$$L_X(\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha([X,Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{6.2}$$

e, più in generale:

PROPOSIZIONE 6.4. *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\alpha \in \Omega^h(M)$, allora:*

$$\begin{aligned} L_X(\alpha)(X_1, \dots, X_h) &= X(\alpha(X_1, \dots, X_h)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{h} (-1)^i \alpha([X, X_i], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_h)\,, \\ &\qquad \forall X_1, \dots, X_h \in \mathfrak{X}(M)\,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

DEFINIZIONE 6.5. Dato un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$, definiamo il *prodotto interno* rispetto ad $X \in \mathfrak{X}(M)$ mediante:

$$\begin{aligned} &\imath_X : \mathcal{T}^{r,s}(M) \ni \tau \to \imath_X(\tau) \in \mathcal{T}^{r,s-1}(M) \\ &\imath_X(\tau)(\xi^1, \dots, \xi^r, X_1, \dots, X_{s-1}) = \tau(\xi^1, \dots, \xi^r, X, X_1, \dots, X_{s-1}) \\ &\quad \forall \xi^1, \dots, \xi^r \in \mathfrak{X}^*(M)\,,\ \forall X_1, \dots, X_{s-1} \in \mathfrak{X}(M) \end{aligned}$$

quando $s \geq 1$, porremo $\imath_X(\tau) = 0$ per ogni tensore 0-controvariante.

TEOREMA 6.6. *Valgono le formule:*

$$L_X(\alpha) = d(\imath_X \alpha) + \imath_X(d\alpha) \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M)\,,\ \forall \alpha \in \Omega^h(X)\,, \tag{6.4}$$

(6.5)

$$[L_X, \imath_Y](\tau) = L_X(\imath_Y(\tau)) - \imath_Y(L_X(\tau)) = \imath_{[X,Y]}(\tau) \quad \begin{cases} \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \\ \forall \tau \in \mathcal{T}^{r,s}(M)\,. \end{cases}$$

7. Distribuzioni vettoriali

Una *distribuzione vettoriale* sulla varietà differenziabile M è un sotto-$\mathcal{E}(M)$-modulo $\mathfrak{W}$ di $\mathfrak{X}(M)$. Ciò singifica che $fX + gY \in \mathfrak{W}$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{W}$ e per ogni $f, g \in \mathcal{E}(M)$. Per ogni $p \in M$ poniamo $\mathfrak{W}_p = \{X_p \,|\, X \in \mathfrak{W}\} \subset T_pM$. La dimensione di $\mathfrak{W}_p$ è il *rango* di $\mathfrak{W}$ in p. Se il rango di $\mathfrak{W}$ è costante, allora gli elementi di $\mathfrak{W}$ sono le sezioni di un sottofibrato vettoriale $W \to M$ del fibrato tangente e, viceversa, se $W \to M$ è un sottofibrato vettoriale del fibrato tangente, lo spazio $\mathfrak{W} = \mathcal{C}^\infty(M, W)$ delle sezioni di W su M è una distribuzione vettoriale su M.

Sia $\Omega^*(M) = \bigoplus_{h=0}^m \Omega^h(M)$ l'algebra delle forme differenziali alternate su M. Indichiamo con $\Omega^*_+(M) = \bigoplus_{h=1}^m \Omega^h(M)$ l'ideale delle forme di grado positivo, che non contengono cioè componenti di grado 0.

Associamo alla distribuzione vettoriale $\mathfrak{W}$ il *sistema differenziale*:

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{W}} = \{\alpha \in \Omega^*_+(M) \,|\, \alpha|_{\mathfrak{W}} = 0\}.$$

Osserviamo che $\mathcal{I}_{\mathfrak{W}}$ è un *sotto-$\mathcal{E}(M)$-modulo graduato* di $\Omega^*(M)$ ed un ideale generato dai suoi elementi di grado uno.

In generale, chiamiamo *sistema differenziale* su M un qualsiasi ideale $\mathcal{I}$ di $\Omega^*(M)$ con $\mathcal{I} \cap \Omega^0(M) = \{0\}$. Ad esso associamo la distribuzione vettoriale:

$$\mathfrak{W}_{\mathcal{I}} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \,|\, \imath_X(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}\}\,, \tag{7.1}$$

che si dice la sua *distribuzione caratteristica*.

La distribuzione $\mathfrak{W}$ coincide con la distribuzione caratteristica del sistema differenziale $\mathcal{I}_{\mathfrak{W}}$ ad essa associato, è cioè $\mathfrak{W}_{\mathcal{I}_{\mathfrak{W}}} = \mathfrak{W}$. Viceversa, in generale il sistema differenziale $\mathcal{I}_{\mathfrak{W}_{\mathcal{I}}}$ associato alla distribuzione caratteristica di un sistema differenziale $\mathcal{I}$ può essere più grande di $\mathcal{I}$.

ESEMPIO 7.1. Sia $\mathcal{I}$ il sistema differenziale $\Omega(\mathbb{R}^n) \wedge (dx^1 + dx^2 \wedge dx^3)$ in $\mathbb{R}^m$, con $m \geq 3$. Allora $\mathfrak{W}_{\mathcal{I}} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)\left[\frac{\partial}{\partial x^4}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right]$ e $\mathcal{I}_{\mathfrak{W}_{\mathcal{I}}}$ è l'ideale di $\Omega^*(M)$ generato da dx^1, dx^2, dx^3.

Una sottovarietà N di M si dice una *sottovarietà integrale* di $\mathfrak{W}$ se $T_pN \subset \mathfrak{W}_p$ per ogni $p \in N$.

Una distribuzione vettoriale $\mathfrak{W}$ si dice *totalmente integrabile* se per ogni punto $p \in M$ esiste una sottovarietà integrale N di $\mathfrak{W}$ con $p \in N$ e $T_pN = \mathfrak{W}_p$.

Diciamo che $\mathfrak{W}$ è *formalmente integrabile* se

$$[\mathfrak{W}, \mathfrak{W}] \subset \mathfrak{W}\,. \tag{7.2}$$

Abbiamo il:

TEOREMA 7.2 (Frobenius). *Sia $\mathfrak{W}$ una distribuzione vettoriale di rango costante k. Sono allora equivalenti:*

(i) $\mathfrak{W}$ *è totalmente integrabile;*

(ii) $\mathfrak{W}$ *è formalmente integrabile;*

(iii) $d\mathcal{I}_{\mathfrak{W}} \subset \mathcal{I}_{\mathfrak{W}}$

DIMOSTRAZIONE. (ii) $\Longrightarrow$ (i) Sia $p \in M$. Poiché $\mathfrak{W}_p$ ha rango k, possiamo fissare k campi vettoriali $X_1, \ldots, X_k \in \mathbf{W}$ con $X_{1p}, \ldots, X_{kp}$ linearmente indipendenti in T_pM. Possiamo allora trovare una carta locale (U, x) per cui:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^m a_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{con} \quad a_i^j(0) = 0 \quad i = 1, \ldots, k\,,\ j = 1, \ldots m\,.$$

A meno di sostituire ad U con un intorno più piccolo di p, possiamo supporre che la matrice:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 + a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1k}(x) \\ a_{21}(x) & 1 + a_{22}(x) & \cdots & a_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{k1}(x) & a_{k2}(x) & \cdots & a_{kk}(x) \end{pmatrix}$$

sia invertibile in $x(U)$. Sia $B(x) = (b^i_j(x))$ la sua inversa. Allora i campi di vettori

$$Y_i = \sum_{j=1}^{k} b^j_i(x) X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=k+1}^{m} c^h_i(x) \frac{\partial}{\partial x^h} \quad (i = 1, \ldots, k)$$

generano $\mathfrak{W}_q$ in ogni punto $q \in U$. La condizione (ii) implica che $[Y_i, Y_j]_q \in \langle Y_{1q}, \ldots, Y_{kq} \rangle$ per ogni $q \in U$. Poiché $Y_1, \ldots, Y_k, \frac{\partial}{\partial x^{k+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ definisce una base di T_pM in ogni punto $q \in U$, e $[Y_i, Y_j]_q \in \langle \left(\frac{\partial}{\partial x^{k+1}}\right)_q, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_q \rangle$, otteniamo che $[Y_i, Y_j] = 0$ in U per ogni $1 \leq i, j \leq k$.

Per concludere la dimostrazione, dimostriamo il seguente:

LEMMA 7.3. *Siano $Y_1, \ldots, Y_k$ campi di vettori definiti e linearmente indipendenti in tutti i punti di un intorno aperto U di $p \in M$. Se $[Y_i, Y_j] = 0$ in U per ogni $1 \leq i < j \leq k$, allora esite una carta locale (U', y) con $p \in U' \subset U$ per cui $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ in U' per $i = 1, \ldots, k$.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che (U, x) sia una carta locale in p. Ragioniamo per induzione su k.

Sia $k = 1$. Possiamo supporre che $Y_{1p} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p$. Il campo di vettori Y_1 definisce un gruppo locale a un parametro di diffeomorismi $x(U) \times \mathbb{R} \supset \tilde{U} \ni (x, t) \to \Phi(x, t) \in \mathbb{R}^m$, ove $\tilde{U}$ è un intorno di $x(U) \times \{0\}$ in $x(U) \times \mathbb{R}$. Abbiamo $\frac{\partial \Phi^1(x,t)}{\partial t} = 1$ per $x = 0$, $t = 0$ e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, $x = \Phi(0, y^2, \ldots, y^m; y^1)$ definisce coordinate in un intorno U' di p in U, per cui $Y_1 = \frac{\partial}{\partial y^1}$.

Supponiamo ora che $k > 1$ e che il lemma sia dimostrato per un numero inferiore di campi di vettori linearmente indipendenti che commutano tra loro. Per la prima parte della dimostrazione, possiamo fissare coordinate locali (U, x) tali che:

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad Y_i = \sum_{j=1}^{m} a^j_i(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{per } 2 \leq j \leq k.$$

Abbiamo:

$$[Y_1, Y_i] = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a^j_i(x)}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{per } 2 \leq j \leq k.$$

Quindi $[Y_1, Y_i] = 0$ implica che i coefficienti a^j_i sono indipendenti da x^1 in un intorno $\{-\epsilon < x^i < \epsilon\} \subset x(U)$. Poniamo $Z_j = \sum_{j=2}^{m} a^j_i(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$ per $2 \leq$

$j \leq k$. Con un cambiamento delle coordinate $x^2, \ldots, x^m$ possiamo allora supporre, per l'ipotesi induttiva, che $Z_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$ per $2 \leq j \leq k$. Otteniamo perciò nelle nuove coordinate $x^1, \ldots, x^m$:

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \;\; Y_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + a_i^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1} \quad \text{per} \quad 2 \leq i \leq k\,.$$

Da $[Y_i, Y_j] = 0$ per ogni $1 \leq i, j \leq k$ otteniamo allora che le a_i^1 sono indipendenti da x^1 e $\partial a_i^1/\partial x^j = \partial a_j^1/\partial x^i$ per $2 \leq i, j \leq k$. Possiamo quindi trovare una funzione ϕ, indipendente da x^1, tale che $a_i^1 = \partial\phi/\partial x^i$ per $2 \leq i \leq k$. Nelle nuove variabili:

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + \phi(x^2, \ldots, x^m) & \\ y^i = x^i & \text{per } 2 \leq i \leq m \end{cases}$$

abbiamo $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ per $1 \leq i \leq k$. □

Completiamo ora la dimostrazione dell'implicazione (ii) $\Longrightarrow$ (i). Fissata una carta locale (U', y) con centro in p per cui $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$, la $N = \{y^{k+1} = 0, \ldots, y^m = 0\}$ è una sottovarietà di M, contenuta in U', contenente p e tale che $T_qN = \mathfrak{W}_q$ per ogni $q \in N$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Se $\alpha \in \mathcal{X}^*(M)$ si annulla su tutti i campi di $\mathfrak{W}$, abbiamo:

$$(*) \qquad d\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{W}$$

perché $\alpha(Y) = 0$, $\alpha(X) = 0$ ed anche $\alpha([X,Y]) = 0$ perché $[X,Y] \in \mathfrak{W}$. Si ragiona in modo analogo per forme di grado maggiore di uno.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Abbiamo $\mathfrak{W} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \,|\, \alpha(X) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{I}_{\mathfrak{W}} \cap \mathfrak{X}^*(M)\}$. L'implicazione è allora una facile conseguenza della $(*)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Segue dal fatto che il commutatore di due campi di vettori tangenti a una sottovarietà N in tutti i suoi punti è ancora tangente alla sottovarietà N in tutti i suoi punti. □

Osserviamo infine che vale la:

PROPOSIZIONE 7.4. *Se $\mathcal{I}$ è un sistema differenziale in M e $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$, allora $\mathfrak{W}_{\mathcal{I}}$ è formalmente integrabile.*

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{W}_{\mathcal{I}}$ e $\alpha \in \mathcal{I}$, allora:

$$L_X(\alpha) = d(\imath_X(\alpha)) + \imath_X(d\alpha) \in \mathcal{I}$$

per l'ipotesi che $d\alpha \in d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$. Poiché la derivata di Lie commuta con la contrazione, abbiamo, per $X, Y \in \mathfrak{W}_{\mathcal{I}}$ ed $\alpha \in \mathcal{I}$:

$$\imath_{[X,Y]}(\alpha) = \imath_{L_X(Y)}(\alpha) = L_X(\imath_Y(\alpha)) - \imath_Y(L_X(\alpha)) \in \mathcal{I}\,.$$

Questo vale per ogni $\alpha \in \mathcal{I}$ e quindi anche $[X,Y] \in \mathfrak{W}_{\mathcal{I}}$. □

8. Gruppi di Lie

Un *gruppo di Lie* è un gruppo $\mathbf{G}$ su cui è fissata una struttura di varietà differenziabile per cui l'operazione di gruppo $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (a, b) \to ab^{-1} \in \mathbf{G}$ sia differenziabile.

Poiché $\mathbf{G}$ è localmente connesso, la componente connessa dell'identità $\mathbf{G}^0$ di $\mathbf{G}$ è un sottogruppo normale ed è aperta e chiusa in $\mathbf{G}$. Osserviamo che $\mathbf{G}^0$ è numerabile all'infinito e quindi condizione necessaria e sufficiente affinché lo sia anche $\mathbf{G}$ è che il quoziente $\mathbf{G}/\mathbf{G}^0$ sia al più numerabile.

Per ogni elemento a di $\mathbf{G}$, le traslazioni a sinistra $L_a : \mathbf{G} \ni g \to ag \in \mathbf{G}$ e a destra $R_a : \mathbf{G} \ni g \to ga \in \mathbf{G}$ e l'automorfismo interno $\mathrm{ad}(a) : \mathbf{G} \ni g \to aga^{-1} \in \mathbf{G}$ sono diffeomorfismi di $\mathbf{G}$ in sé.

Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$ si dice *invariante a sinistra* se $L_{a*}(X) = X$. I campi di vettori invarianti a sinistra formano una sottoalgebra di Lie reale $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$ di $\mathfrak{X}(M)$. L'applicazione:

$$(*) \qquad T_e\mathbf{G} \ni X_e \to \{X_a = L_{a*}(X_e) \,|\, a \in \mathbf{G}\} \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$$

è un isomorfismo lineare. Indichiamo con $\mathfrak{g}$ lo spazio vettoriale $T_e\mathbf{G}$ con la struttura di algebra di Lie reale che rende $(*)$ un isomorfismo di algebre di Lie.

Indichiamo con la stessa lettera X l'elemento di $\mathfrak{g}$ e il corrispondente campo di vettori invarianti a sinistra. Esso genera un gruppo a un parametro $\phi_X(t)$ di diffeomorfismi di $\mathbf{G}$. Il fatto che ϕ_X sia definita su $\mathbf{G} \times \mathbb{R}$ è conseguenza del fatto che:

$$\phi_X(a, t) = ab^{-1}\phi_X(b, t) \qquad \forall a, b \in \mathbf{G}$$

ed, a priori, per $|t|$ sufficientemente piccolo. Questa formula ci permette di estendere la definizione di $\phi_X(a, t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Si pone $\phi_X(e, t) = \exp(tX)$. Abbiamo:

$$\exp((t_1 + t_2)X) = \exp(t_1X)\exp(t_2X) \qquad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{8.1}$$

Chiamiamo $\{\exp(tX) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ un *sottogruppo a un parametro di* $\mathbf{G}$. L'applicazione $\mathfrak{g} \ni X \to \phi_X(e, 1) \in \mathbf{G}$ si dice l' *applicazione esponenziale*. Il suo differenziale in e è l'identità e quindi per il teorema delle funzioni implicite essa definisce un diffeomorfismo di un intorno di 0 in $\mathfrak{g}$ su un intorno di e in $\mathbf{G}$. In particolare, la dimensione della varietà differenziabile $\mathbf{G}$ è uguale alla dimensione di $\mathfrak{g}$ come spazio vettoriale reale.

Esempio 8.1. Il gruppo delle matrici reali $n \times n$ invertibili $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie, di dimensione n^2. La sua algebra di Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali $n \times n$ e l'esponenziale coincide con quello definito per le matrici:

$$\exp(X) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} X^h\,. \tag{8.2}$$

Il suo sottogruppo $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R})$ delle matrici con determinante 1 è anch'esso un gruppo di Lie di dimensione (n^2-1) con algebra di Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ formata dalle matrici reali con traccia nulla.

ESEMPIO 8.2. Il gruppo ortogonale $\mathbf{O}(n)$ è formato dalle matrici $a \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ tali che ${}^t a = a^{-1}$. Esso è un gruppo di Lie con algebra di Lie $\mathfrak{o}(n)$ formata dalle matrici reali antisimmetriche. La sua dimensione è $n(n-1)/2$.

Un sottogruppo $\mathbf{H}$ di $\mathbf{G}$ è un suo *sottogruppo di Lie* se è anche una sottovarietà differenziabile di $\mathbf{G}$, e con tale struttura differenziabile è un gruppo di Lie.

L'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ di un sottogruppo di Lie $\mathbf{H}$ di $\mathbf{G}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{g}$. Infatti i campi di vettori invarianti a sinistra su $\mathbf{H}$ sono restrizioni a $\mathbf{H}$ di campi di vettori invarianti a sinsitra di $\mathbf{G}$.

Viceversa, per ogni sottoalgebra di Lie $\mathfrak{h}$ di $\mathbf{G}$ il sottogruppo $\mathbf{H}$ di $\mathbf{G}$ generato da $\exp(\mathfrak{h})$ è un un sottogruppo di Lie connesso di $\mathbf{G}$. Questo è conseguenza del fatto che i campi di vettori invarianti a sinistra corrispondenti agli elementi di $\mathfrak{h}$ generano una distribuzione vettoriale di rango costante formalmente (e quindi totalmente) integrabile in $\mathbf{G}$.

Ogni omorfismo differenziabile $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ di gruppi di Lie determina un omomorfismo $d\phi(e) : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ delle loro algebre di Lie. Il viceversa non è sempre vero; lo è quando $\mathbf{G}_2$ è semplicemente connesso.

In particolare, la $\mathbf{G} \ni a \to \mathrm{ad}(a) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{G})$ definisce un'applicazione $\mathbf{G} \ni a \to \mathrm{Ad}(a) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, che si dice la *rappresentazione lineare aggiunta* di $\mathbf{G}$.

Una forma differenziale $\omega \in \Omega(\mathbf{G})$ si dice *invariante a sinistra* se $L_a^* \omega = \omega$ per ogni $a \in \mathbf{G}$. In modo equivalente, ω è invariante a sinistra se (e solo se) $\omega(X) =$ costante se $X \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$, cioè se è costante sui campi di vettori invarianti a sinistra.

È conveniente considerare nel seguito anche *forme differenziali a valori in spazi vettoriali*: se V è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita ed M una varietà differenziabile, indichiamo con $\Omega^h(M,V)$ le forme differenziali di grado h a valori in V. Esse sono le applicazioni $\mathcal{E}(M)$-multilineari alternate:

$$\alpha \colon \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{h \text{ volte}} \to \mathcal{C}^\infty(M,V)\,.$$

Possiamo estendere in modo standard la definizione del differenziale al caso di forme alternate a valori in uno spazio vettoriale V.

Inoltre, quando $V = \mathfrak{a}$ è anche un'algebra di Lie reale, possiamo definire il *prodotto esterno* di due forme differenziali a valori in $\mathfrak{a}$. Per due forme omogenee poniamo:

$$\begin{cases} [\alpha \wedge \beta](X_1,\dots,X_{p+q}) = \displaystyle\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q} \\ 1 \le \sigma_1 < \cdots < \sigma_p \le p+q \\ 1 \le \sigma_{p+1} < \cdots < \sigma_{p+q} \le p+q}} \varepsilon(\sigma)[\alpha(X_{\sigma_1},\dots,X_{\sigma_p}), \beta(X_{\sigma_{p+1}},\dots,X_{\sigma_{p+q}})] \\ \text{per} \quad \alpha \in \Omega^p(M,\mathfrak{a}),\ \beta \in \Omega^q(M,\mathfrak{a}),\ X_1,\dots,X_{p+q} \in \mathfrak{X}(M) \end{cases}$$

ed estendiamo il prodotto così definito per bilinearità. In particolare, se α e β sono 1-forme a valori in $\mathfrak{a}$, abbiamo:

$$\begin{aligned}[\alpha \wedge \beta](X,Y) &= [\alpha(X),\beta(Y)] - [\alpha(Y),\beta(X)]\\ [\alpha \wedge \alpha](X,Y) &= 2[\alpha(X),\alpha(Y)]\\ &\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)\,.\end{aligned}$$

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie con algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Per ogni $a \in \mathbf{G}$ abbiamo isomorfismi lineari:

$$\mathfrak{g} \ni X_e \longleftarrow X \in \mathfrak{L}(\mathbf{G}) \ni X \to X_a \in T_a\mathbf{G}\,. \tag{8.3}$$

Otteniamo una forma differenziale invariante a sinistra $\omega \in \Omega^1(\mathbf{G},\mathfrak{g})$ associando ad ogni $X_a \in T_a\mathbf{G}$ l'elemento $X_e \in \mathfrak{g} = T_e\mathbf{G}$ tale che X_e ed X_a siano i valori assunti in e ed a da uno stesso campo di vettori invariante a sinistra $X \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$. La forma ω si dice la *forma di Cartan* del gruppo di Lie $\mathbf{G}$.

Proposizione 8.3. *La forma di Cartan ω di un gruppo di Lie $\mathfrak{g}$ è una forma invariante a sinistra e soddisfa l'equazione di Maurer-Cartan:*

$$d\omega + \frac{1}{2}\,[\omega \wedge \omega] = 0\,. \tag{8.4}$$

Dimostrazione. Siano $X, Y \in \mathfrak{L}((G))$. Allora:

$$\begin{aligned}d\omega(X,Y) &= X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y])\\ &= -[\omega(X),\omega(Y)]\\ &= -\frac{1}{2}\,[\omega \wedge \omega]\,(X,Y)\,.\end{aligned}$$

Poiché $\mathfrak{X}(M)$ è generato, come $\mathcal{E}(\mathbf{G})$-modulo, da $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$, otteniamo la tesi. □

Lemma 8.4. *La forma di Cartan ω di $\mathbf{G}$ soddisfa:*

$$R_a^*\omega = \mathrm{Ad}(a^{-1}) \circ \omega\,. \tag{8.5}$$

Ogni forma differenziale $\eta \in \Omega^1(\mathbf{G},V)$, invariante a sinistra su $\mathbf{G}$ è della forma $\eta = T \circ \omega$, per un'applicazione linerare $T : \mathfrak{g} \to V$.

Dimostrazione. Se $X \in \mathfrak{g}$, abbiamo:

$$R_{a*}(X^*) = R_{a*} \circ L_{a^{-1}*}(X^*) = \mathrm{Ad}(a^{-1})_*(X^*) = \big(\mathrm{Ad}(a^{-1})(X)\big)^*\,,$$

cioè, se $X \in \mathfrak{g}$, il campo di vettori $R_{a*}(X^*)$ è ancora invariante a sinistra (perché le traslazione a sinistra commutano con le traslazioni a destra) e coincide quindi con il campo di vettori invariante a sinistra corrispondente ad $\mathrm{Ad}(a^{-1})(X)$.

Se $\eta \in \Omega^1(\mathbf{G},V)$ è invariante a sinistra, abbiamo $\eta = T \circ \omega$ con $T = \eta(e) : \mathfrak{g} = T_e\mathbf{G} \to V$. □

9. Fibrati principali

Sia $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie e P una varietà differenziabile. Chiamiamo *azione differenziabile a destra* di $\mathbf{G}$ su P un'applicazione differenziabile:

FRMAA (9.1) $$P \times \mathbf{G} \ni (p, g) \to p \cdot g \in P$$

tale che, per ogni $g \in \mathbf{G}$ l'applicazione (*traslazione a destra*) :

FRMA (9.2) $$R_g : P \ni p \to p \cdot g \in P$$

sia un diffeomorfismo di P in sè e

FRMB (9.3) $$(p \cdot g_1) \cdot g_2 = p \cdot (g_1 g_2) \quad \forall p \in P, \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}.$$

Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di $\mathbf{G}$. Allora, per ogni $X \in \mathfrak{g}$, l'applicazione

(9.4) $$P \times \mathbb{R} \ni (p, t) \to p \cdot \exp(tX) \in P$$

definisce un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di P e quindi un campo di vettori $X^* \in \mathfrak{X}(P)$.

TEOREMA 9.1. *L'applicazione*

eq:cinque (9.5) $$\mathfrak{g} \ni X \to X^* \in \mathfrak{X}(P)$$

è un omomorfismo $\mathbb{R}$-lineare. Per ogni $g \in \mathbf{G}$ abbiamo

(9.6) $$(R_g)^* (X^*) = (\mathrm{ad}(g)X)^* \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che l'applicazione (9.5) sia $\mathbb{R}$-lineare segue dalla formula

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(t(X+Y) + o(t^2)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sia ora $f \in \mathcal{E}(P)$. Allora, se $g \in \mathbf{G}$, $p \in P$,

$$\begin{aligned}((R_g)^*(X^*))f(p) = X^*(f(q \cdot g^{-1}))|_{q=p\cdot g} &= \frac{d}{dt} f(q \cdot \exp(tX) g^{-1})|_{q=p\cdot g,\, t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(p \cdot g \exp(tX) g^{-1})|_{t=0} = (\mathrm{ad}(g)X)^* f(p)\end{aligned}$$

ed otteniamo così la (9.2). □

Si dice *fibrato principale* con *gruppo strutturale* $\mathbf{G}$ e *base* M il dato di due varietà differenziabili P ed M, un gruppo di Lie $\mathbf{G}$, un'azione differenziabile a destra

(9.7) $$P \times \mathbf{G} \ni (p, g) \to p \cdot g \in P$$

e una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbf{G}$:

(9.8) $$\pi : P \to M$$

tali che:

(1) L'azione di $\mathbf{G}$ su P è libera, ovvero R_g non ha punti fissi se $e \neq g \in \mathbf{G}$.

(2) $\mathbf{G}$ agisce transitivamente sulle fibre di π: se $p_1, p_2 \in P$, allora:

$$\pi(p_1) = \pi(p_2) \Longleftrightarrow p_1 = p_2 \cdot g \quad \text{per qualche} \quad g \in \mathbf{G}. \tag{9.9}$$

Sia $P \xrightarrow[\mathbf{G}]{\pi} GM$ un fibrato principale con gruppo strutturale $\mathbf{G}$. Indichiamo con $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(P)$ la distribuzione vettoriale dei campi di vettori verticali su P:

$$\mathfrak{V} = \{X \in \mathfrak{X}(P) \,|\, \pi_*(X) = 0\}. \tag{9.10}$$

Essa è formalmente integrabile, in quanto la $\pi : P \to M$ è una foliazione globale di $\mathfrak{V}$. Infatti, per ogni $p \in M$, la $V_p = \pi^{-1}(p)$ è una sottovarietà differenziabile chiusa di P con $T_\xi V_p = \mathfrak{V}_\xi$ per ogni $\xi \in V_p$.

Indichiamo con $V = VP$ il corrispondente sotto-fibrato vettoriale di TP.

LEMMA 9.2. *Per ogni $X \in \mathfrak{g}$, il campo di vettori X^* è verticale. Per ogni punto $p \in P$, l'applicazione:*

$$\mathfrak{g} \ni X \to X^*_p \in V_p P \tag{9.11}$$

è un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineare. Il fibrato VP è globalmente banale su P, in quanto la

$$P \times \mathfrak{g} \ni (p, X) \to X^*_p \in VP \tag{9.12}$$

è un isomorfismo di fibrati vettoriali.

La distribuzione $\mathfrak{V}(P)$ è il sotto-$\mathcal{E}(P)$-modulo libero di $\mathfrak{X}(P)$ generato dai campi di vettori X^* al variare di X in $\mathfrak{g}$.

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{g}$, allora

$$\pi(p \cdot \exp(tX)) = \pi(p) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall p \in P$$

implica che

$$\pi_*(X^*) = 0.$$

Poichè per ipotesi, fissato $p \in P$, l'applicazione

$$\mathbf{G} \ni g \to p \cdot g \in \pi^{-1}(p)$$

è un diffeomorfismo, essa induce un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineare

$$\mathfrak{g} \ni X \to X^*_p \in T_p\left(\pi^{-1}(p)\right) = V_p P.$$

□

Dato un vettore tangente verticale $V \in VP$ applicato in un punto p di P, vi è per il lemma precedente un'unico elemento X dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di $\mathbf{G}$ tale che $X^*_p = V$. Risulta allora definita un'unica applicazione

$$\theta : VP \to \mathfrak{g} \tag{9.13}$$

tale che $\theta(X) \in \mathcal{E}(P)$ per ogni $X \in \mathfrak{V}(P)$. La

$$\theta : \mathfrak{V}(P) \to \mathcal{E}(P) \tag{9.14}$$

è un'applicazione $\mathcal{E}(P)$-lineare. Diremo quindi che è una *forma differenziale sulla distribuzione verticale*, a valori nell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Nota che la θ gode della proprietà:

$$(R_g)^*\theta = \mathrm{ad}(g) \circ \theta \quad \forall g \in \mathbf{G}. \tag{9.15}$$

ESEMPIO 9.3. Indichiamo con $\mathcal{F}(M)$ il fibrato dei *sistemi di riferimento* di M. Per ogni punto $p \in M$, la fibra $\mathcal{F}_p(M)$ è costituita da tutte le basi $(v_1, \dots, v_m)$ di T_pM. Una *carta di trivializzazione* del fibrato $\mathcal{F}(M)$ è il dato di un aperto $U \subset M$ e di m campi di vettori $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}(U)$ che definiscano una base di T_pM per ogni punto $p \in U$. Il gruppo strutturale è $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$, con l'azione naturale $(v_1, \dots, v_m) \cdot a = (\sum_{i=1}^m a_{i,1} v_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{i,m} v_i)$ se $(v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{F}_p(M)$, $a = (a_{i,j}) \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. Se $\mathcal{F}(M)$ ammette una trivializzazione globale, diciamo che M è *parallelizzabile*. Il fatto che M sia parallelizzabile è anche equivalente al fatto che TM ammetta una trivializzazione globale. Ad esempio, tutti i gruppi di Lie sono varietà parallelizzabili, e possiamo utilizzare la forma di Cartan per definire la trivializzazione globale:

$$(\pi \times \omega) : T(\mathbf{G}) \ni v \to (\pi(v), \omega(v)) \in \mathbf{G} \times \mathfrak{g}.$$

10. Il fibrato dei sistemi di riferimento

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m, numerabile all'infinito. Indichiamo con $\mathfrak{F}(M)$ il *fibrato dei sistemi di riferimento su M*. I punti ξ di $\mathfrak{F}(M)$ che appartengono alla sua fibra sul punto $p \in M$ sono le *basi* di T_pM come spazio vettoriale reale. Indichiamo con $\pi : \mathfrak{F}(M) \to M$ la proiezione sulla base. La fibra $\mathfrak{F}_p(M)$ si può identificare all'insieme di tutte le applicazioni $\mathbb{R}$-lineari invertibili $\xi : \mathbb{R}^m \to T_pM$. Abbiamo quindi un'azione naturale a destra del gruppo $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ su $\mathfrak{F}(M)$, definita mediante $\xi \cdot a = \xi \circ a$ per ogni $\xi \in \mathfrak{F}(M)$ ed $a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. La struttura differenziabile su $\mathfrak{F}(M)$ è definita nel modo seguente. Se $X_1, \dots, X_m$ sono campi di vettori definiti, differenziabili e linearmente indipendenti in tutti i punti di un aperto $U \subset M$, allora:

eq:fibla

$$U \times \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \ni (x, a) \to (X_1(x), \dots, X_m(x)) \circ a \in \pi^{-1}(U) \tag{10.1}$$

è un diffeomorfismo. Le (10.1) definiscono anche la struttura di *fibrato principale* con gruppo strutturale $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ di $\mathfrak{F}(M)$.

11. Fibrati vettoriali associati a fibrati principali

Sia $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\pi} M$ un fibrato principale su M, con gruppo strutturale $\mathbf{G}$. Sia $\rho : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ una rappresentazione lineare, di dimensione finita, di $\mathbf{G}$. Poniamo:

(11.1)

$$E = \mathbf{P} \times V/\sim \quad \text{ove} \quad (\xi, v) \sim (\xi \cdot a, \rho(a^{-1})(v)) \quad \forall \xi \in \mathbf{P}\,,\ \forall v \in V\,,\ \forall a \in \mathbf{G}\,.$$

Il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}\times V & \xrightarrow{pr} & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \varpi \\ \mathbf{P} & \xrightarrow[\pi]{} & M \end{array}$$

definisce una sommersione differenziabile $\varpi : E \to M$.

Se $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{P})$ è una sezione differenziabile di $\mathbf{P}$ su un aperto U di M, allora possiamo considerare:

$$U \times V \ni (x, v) \to pr((\sigma(x), v)) \in \varpi^{-1}(U) \tag{11.2}$$

come l'inversa di una carta di trivializzazione di un fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\varpi} M$, con fibra tipica V.

In questo modo associamo ad ogni rappresentazione lineare ρ di $\mathbf{G}$ un fibrato vettoriale su M. Se pensiamo di aver fissato una volta per tutte il fibrato principale $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\pi} M$, potremo indicare con $E_\rho(M) \xrightarrow{\varpi} M$ il fibrato vettoriale con fibra tipica V corrispondente alla rappresentazione lineare $\rho : \mathbf{G} \to \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$. Le sezioni differenziabili del fibrato vettoriale $E_\rho(M)$ si diranno in generale *quantità di tipo ρ*.

Ad esempio, nel caso del fibrato $\mathfrak{F}(M) \xrightarrow[\mathbf{GL}(m,\mathbb{R})]{\pi} M$ dei sistemi di riferimento, il fibrato associato alla rappresentazione identica $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \ni a \to a \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m)$ è il *fibrato tangente* TM; se consideriamo invece la rappresentazione duale $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \ni a \to {}^t a^{-1} \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m)$, otteniamo lo spazio cotangente T^*M. Possiamo poi ottenere i fibrati tensoriali dalle rappresentazioni tensoriali:

$$\begin{aligned} &\rho(a)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q) \\ &\qquad = a(v_1) \otimes \cdots \otimes a(v_p) \otimes {}^t a^{-1}(w_1) \otimes \cdots \otimes {}^t a^{-1}(w_q) \\ &\qquad \forall v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q \in \mathbb{R}^m \,. \end{aligned}$$

12. G-strutture

Definizione 12.1. Siano $\mathbf{P}_1 \xrightarrow[\mathbf{G}_1]{\pi_1} M_1$ e $\mathbf{P}_2 \xrightarrow[\mathbf{G}_2]{\pi_2} M_2$ due fibrati principali. Un'applicazione differenziabile $f : \mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_2$ è un *omomorfismo di fibrati principali* se è un omomorfismo di fibrati ed inoltre esiste un omomorfismo di gruppi di Lie $\phi : \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ tale che

$$f(\xi \cdot a) = f(\xi) \cdot \phi(a) \quad \forall \xi \in \mathbf{P}_1 \ \ \forall a \in \mathbf{G}_1 \,.$$

Quando $M_1 = M_2$, $\mathbf{G}_1$ è un sottogruppo di Lie di $\mathbf{G}_2$ e la f è un'immersione che induce l'identità sulla base, diciamo che la f è una *riduzione del gruppo strutturale*.

Se $\mathbf{G}$ è un sottogruppo del gruppo lineare $\mathbf{GL}(m,\mathbb{R})$ e $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ una riduzione del gruppo strutturale di $\mathfrak{F} \xrightarrow[\mathbf{GL}(m,\mathbb{R})]{\pi} M$, diciamo che $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ è una $\mathbf{G}$-struttura su M.

Il concetto di $\mathbf{G}$-struttura permette di considerare con un punto di vista unitario diverse strutture geometriche su una varietà differenziabile.

Ad esempio,

dare un'orientazione su M è equivalente a dare una $\mathbf{GL}^+(m,\mathbb{R})$-struttura;

dare una *misura di Radon di classe* $\mathcal{C}^\infty$ equivale ad assegnare una $\mathbf{SL}(m,\mathbb{R})$-struttura;

una metrica Riemanniana corrisponde a una $\mathbf{O}(m)$-struttura;

una struttura quasi-compessa è una $\mathbf{GL}(\frac{m}{2},\mathbb{C})$-struttura ($m = 2n$ pari);

una struttura quasi-Hermitiana è una $\mathbf{U}(\frac{m}{2})$-struttura ($m = 2n$ pari);

una struttura quasi-simplettica è una $\mathbf{Sp}(\frac{m}{2},\mathbb{R})$-struttura ($m = 2n$ pari). Ricordiamo che $\mathbf{Sp}(\frac{m}{2},\mathbb{R}) = \{a \in \mathbf{SL}(2n,\mathbb{R}) \,|\, {}^t a\Omega a = \Omega\}$ per una matrice antisimmetrica $(2n)\times(2n)$ non degenere Ω;

una $\mathbf{1}$-struttura è un *parallelismo completo*.

13. Trasversalità

La nozione di *trasversalità* è l'equivalente, in geometria differenziale, di quella di *posizione generale* della geometria algebrica o di *giacitura generica* dell'algebra lineare. La nozione di trasversalità si estende a quella di trasversalità di applicazioni differenziabili. La possibilità di deformare applicazioni in modo da metterle in posizione trasversale l'una rispetto all'altra è uno strumento fondamentale nell'applicazione alla topologia di metodi di geometria differenziale.

Definizione 13.1. Due sottovarietà differenziabili N_1, N_2 di una varietà differenziabile M si dicono *trasversali* in un loro punto d'intersezione $p \in N_1 \cap N_2$ se:

eq:Fqma

$$\text{(13.1)}\qquad \begin{cases} T_pN_1 \cap T_pN_2 = \mathbf{O} & \text{se} \quad \dim_{\mathbb{R}}(N_1) + \dim_{\mathbb{R}}(N_2) \le \dim_{\mathbb{R}}(M), \\ T_pN_1 + T_pN_2 = T_pM & \text{se} \quad \dim_{\mathbb{R}}(N_1) + \dim_{\mathbb{R}}(N_2) \ge \dim_{\mathbb{R}}(M). \end{cases}$$

Siano M ed N varietà differenziabili di dimensione m ed n, rispettivamente, $f\colon M \to N$ un'applicazione differenziabile ed S una sottovarietà differenziabile chiusa di codimensione k in N.

Diciamo che *f è trasversale ad S in $p \in M$* se:

$$(i)\quad \text{o}\quad f(p) \notin S, \qquad \text{oppure}$$
$$(ii)\quad T_{f(p)}S + df(p)(T_pM) = T_{f(p)}N\,.$$

La seconda condizione si può verificare solo se $m \ge k$. Quando $m < k$, dire che f è trasversale as S in p significa soltanto che $f(p) \notin S$.

Diciamo che *f è trasversale ad S* se lo è in ogni punto di M.

Siano N_1 ed N_2 varietà differenziabili e siano $f_i : N_i \to M$ applicazioni differenziabili a valori in una stessa varietà differenziabile M. Diciamo che

f_1 è *trasversale* ad f_2 se:

eq:Fqmb
$$df_1(T_{q_1}N_1) + df_2(T_{q_2}N_2) = T_pM \quad \text{se} \quad f_1(q_1) = f_2(q_2) = p. \tag{13.2}$$

DEFINIZIONE 13.2. Sia $f : M \to N$ un'immersione differenziabile e siano $p_1, p_2 \in M$ due punti distinti di M che hanno la stessa immagine $q = f(p_1) = f(p_2)$. Diciamo che f è *regolare* in (p_1, p_2) se

$$df(T_{p_1}M) + df(T_{p_2}M) = T_qN\,.$$

Ciò equivale ad affermare che esistano intorni aperti U_1, U_2 di p_1, p_2 rispettivamente, tali che $f|_{U_1}$ sia trasversale ad $f(U_2)$ in p_1. Diciamo che f è un'immersione regolare se lo è in tutte le coppie di punti (p_1, p_2) con $p_1 \neq p_2$ ed $f(p_1) = f(p_2)$.

TEOREMA 13.3 (Thom). *Siano M, N due varietà differenziabili ed S una sottovarietà differenziabile di N. Se K è un compatto di M, le applicazioni differenziabili $f : M \to N$ che sono trasversali ad S nei punti di K di M sono un aperto denso di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$. Le $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ che sono trasversali ad S in tutti i punti di M formano un sottoinsieme denso di seconda categoria di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$.*

DIMOSTRAZIONE. Si verifica immediatamente che, se K è un compatto di M, le applicazioni $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ che sono trasverali ad S in ogni punto di K formano un aperto $\mathcal{F}_K$ di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$. Basterà dimostrare che questo aperto è denso in $\mathcal{C}^\infty(M, N)$.

Fissiamo un'applicazione differenziabile $f : M \to N$. Sia $\{(V_a, y_a)\}_{a\in A}$ un atlante numerabile e localmente finito di N, con la proprietà che o $\bar{V}_a \cap S = \emptyset$, oppure $S \cap V_a = \{y_a^1 = 0\,, \dots\,, y_a^{-}0\}$. Consideriamo ora un atlante numerabile $\{(U_b, x_b)\}_{b\in B}$ di M tale che gli $\bar{U}_b$ siano compatti in M e, per un'applicazione $\jmath : B \to A$, sia $f(\bar{U}_b) \subset V_{\jmath(b)}$ per ogni $b \in B$. Siano $b_1, \dots, b_t$ un insieme finito di indici in B con $K \subset \bigcup_{i=1}^t U_{b_i}$. Indichiamo con $\mathcal{U}_f$ l'intorno aperto di f in $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ formato dalle applicazioni differenziabili h con $h(\bar{U}_{b_i}) \subset V_{\jmath(b_i)}$.

Ricordiamo che, per definire la topologia di $\mathcal{C}^\infty(M, N)$, possiamo supporre, applicando il teorema d'immersione di Whitney, che $N \subset \mathbb{R}^\ell$. Se $\bar{V}_{\jmath(b_i)} \cap S = \emptyset$, la restrizione di f a $\bar{U}_{b_i}$ è trasversale ad S. In questo caso, posto $\epsilon_i = \operatorname{dist}(\bar{V}_{\jmath(b_i)}, S) > 0$, per ogni $g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^\ell)$ tale che $(f+g)(M) \subset N$ e $\sup_{p\in\bar{U}_{b_i}} |g(p)| < \epsilon_i$, avremo ancora $(f + g)(\bar{U}_{b_i} \cap S = \emptyset$, e quindi la $f + g$ è ancora trasversale ad S su $\bar{U}_{b_i}$.

Se invece $V_{b_i} \cap S \neq \emptyset$, detta $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ la proiezione sulle prime k coordinate, le applicazioni differenziabili $h : \tilde{U}_{b_i} \to V_{b_i}$ (ove $\tilde{U}_{b_i}$ è un intorno aperto di $\bar{U}_{b_i}$ con chiusura compatta in $f^{-1}(V_{b_i})$) che non sono trasversali ad S su $\bar{U}_{b_i}$ sono contenute nell'insieme delle $h \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{U}_{b_i}, V_{b_i})$ per cui $\mathrm{pr} \circ y \circ h$ ha punti critici in $\bar{U}_{b_i}$. Per il lemma di Sard le applicazioni di $\mathcal{C}^\infty(\tilde{U}_{b_i}, \mathbb{R}^p)$ prive di punti critici in $\bar{U}_{b_i}$ sono un aperto denso di $\mathcal{C}^\infty(\tilde{U}_{b_i}, \mathbb{R}^k)$. Ne segue che le $g : M \to \mathbb{R}^\ell$ per cui $(f + g) \in \mathcal{U}_f$ ed $f + g$ è trasversale ad S in $\bar{U}_{b_i}$ sono un aperto denso in $\mathcal{U}_f$.

Da queste osservazioni ricaviamo che $\mathcal{F}_K$ è un aperto denso di $\mathcal{C}^\infty(M,N)$. Fissata una successione di compatti $\{K_\nu\}$ di M con $K_\nu \subset \mathrm{K}_{\nu+1}$ ed $\bigcup_\nu K_\nu = M$, le applicazioni differenziabili da M in N che sono trasversali ad S sono tutte e sole quelle che appartengono ad $\bigcap_\nu \mathcal{F}_\nu$ e sono quindi l'intersezione di una famiglia numerabile di aperti densi e quindi un sottoinsieme denso di seconda categoria per il Teorema di Baire. □

Date due varietà differenziabili M, N, indichiamo con $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{imm}}(M,N)$ l'insieme delle immersioni differenziabili $f : M \to N$.

Lemma 13.4. *Siano M, N due varietà differenziabili connesse, di dimensione m ed n rispettivamente, con $m \leq n$. Se M è compatto, allora $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{imm}}(M,N)$ è aperto in $\mathcal{C}^\infty(M,N)$. In generale, $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{imm}}(M,N)$ o è vuoto, o è di seconda categoria in $\mathcal{C}^\infty(M,N)$.*

Date due varietà differenziabili connesse M, N, di dimensioni m, n rispettivamente, con $m \leq n$, indichiamo con $\mathrm{Imm}(M,N)$ il sottospazio delle immersioni differenziabili in $\mathcal{C}^\infty(M,N)$, con la topologia di sottospazio. Osserviamo che, se M è compatto, $\mathrm{Imm}(M,N)$ è aperto in $\mathcal{C}^\infty(M,N)$; in generale, $\mathrm{Imm}(M,N)$ è un sottoinsieme di seconda categoria di $\mathcal{C}^\infty(M,N)$ e quindi è uno spazio di Baire.

Teorema 13.5 (Thom). *Siano M, N due varietà differenziabili di dimensione m, n rispettivamente, con $m \leq n$. Per ogni compatto $K \subset M$, le immersioni differenziabili $f : M \to N$ che sono trasversali su K formano un aperto denso in* $\mathrm{Imm}(M,N)$. *Le immersioni differenziabili $f : M \to N$ che sono trasversali su tutto M sono un sottoinsieme denso di seconda categoria di* $\mathrm{Imm}(M,N)$.

Dimostrazione. Siano $\Delta_N = \{(q,q) \,|\, q \in N\}$ la diagonale in $N \times N$ e $\Delta_M = \{(p,p) \,|\, p \in M\}$ quella in $M \times M$. Un'applicazione differenziabile $f : M \to N$ è un'immersione trasversale se l'applicazione $(M \times M) \setminus \Delta_M \ni (p_1,p_2) \to (f(p_1), f(p_2)) \in N \times N$ è trasversale a Δ_N. Quindi, per il teorema precedente, l'insieme $\mathcal{G}_K$ delle $f \in \mathcal{C}^\infty(M,N)$ che sono immersioni differenziabili trasversali in ogni punto di K formano un aperto di $\mathcal{C}^\infty(M,N)$. Resta da dimostrare che tale aperto è denso. Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Vogliamo dimostrare che ogni intorno di f contiene funzioni di $\mathcal{G}_K$. Utilizzando il teorema d'immersione di Whitney, è sufficiente considerare il caso in cui f sia un'immersione in ogni punto di M. Sia $\{(U_a, x_a)\}_{a \in A}$, con $A \subset \mathbb{N}$, un atlante numerabile di M, con $\bar{U}_\alpha$ compatto ed f iniettiva su $\bar{U}_a$ per ogni $a \in A$. Identifichiamo N, usando il teorema di immersione di Whitney, a una sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^\ell$. Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. □

Parte 4

Elementi di teoria dell'omotopia

CAPITOLO 15

Omotopia

1. Omotopia libera di applicazioni continue

DEFINIZIONE 1.1. Siano $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ applicazioni continue tra due spazi topologici X, Y. Diciamo che f_0 e f_1 sono *omotope* se è possibile trovare un'applicazione continua:

$$F : X \times I \longrightarrow Y \tag{1.1}$$

(indichiamo con I l'intervallo $[0, 1]$ di $\mathbb{R}$), tale che

$$F(x, 0) = f_0(x) \;\; e \;\; F(x, 1) = f_1(x) \;\; \forall x \in X. \tag{1.2}$$

La F si dice un'*omotopia tra* f_0 e f_1.

OSSERVAZIONE 1.2. Un'omotopia F definisce un'applicazione continua

$$I \ni t \longrightarrow F_t = F(\cdot, t) \in \mathcal{C}(X, Y)$$

dall'intervallo I allo spazio $\mathcal{C}(X, Y)$ delle funzioni continue da X in Y con la topologia compatta-aperta.

Viceversa, se X è di Hausdorff e localmente compatto ogni applicazione continua

$$I \ni t \longrightarrow F_t \in \mathcal{C}(X, Y)$$

definisce un'omotopia tra F_0 e F_1.

In questo caso, data una $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, l'insieme delle funzioni $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ omotope ad f è la componente connessa per archi di f in $\mathcal{C}(X, Y)$.

PROPOSIZIONE 1.3. *L'omotopia è una relazione di equivalenza in* $\mathcal{C}(X, Y)$.

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo $f \sim g$ per indicare che due funzioni $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ sono omotope. Verifichiamo che questa è una relazione di equivalenza.

1. È $f \sim f$ mediante l'omotopia costante

$$X \times I \ni (x, t) \longrightarrow f(x) \in Y.$$

2. Se

$$F : X \times I \longrightarrow Y$$

è un'omotopia tra f e g, allora

$$X \times I \ni (x, t) \longrightarrow F(x, 1 - t) \in Y$$

è un'omotopia tra g ed f. Quindi

$$f \sim g \Longleftrightarrow g \sim f.$$

3. Se $f, g, h \in \mathcal{C}(X, Y)$ ed $F : X \times I \to Y$ è un'omotopia tra f e g, e $G : X \times I \to Y$ un'omotopia tra g ed h, allora la

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ F(x, 2t-1) & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

definisce un'omotopia tra f e h. Dunque

$$f \sim g \quad \text{e} \quad g \sim h \Longrightarrow f \sim h.$$

□

DEFINIZIONE 1.4. Indichiamo con $\pi(X, Y)$ il quoziente di $\mathcal{C}(X, Y)$ rispetto all'equivalenza omotopica. Questo insieme si dice l'*omotopia libera* delle applicazioni continue di X in Y.

PROPOSIZIONE 1.5. *Siano X, Y, V, W spazi topologici e $\varphi : V \longrightarrow X$, $\psi : Y \longrightarrow W$ due applicazioni continue. L'applicazione:*

$$\psi_* \varphi^* : \mathcal{C}(X, Y) \ni f \longrightarrow \psi \circ f \circ \varphi \in \mathcal{C}(V, W)$$

definisce per passaggio al quoziente un'applicazione

$$\pi(\varphi, \psi) : \pi(X, Y) \longrightarrow \pi(V, W).$$

2. Equivalenza omotopica di spazi topologici

DEFINIZIONE 2.1. Due applicazioni continue

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{e} \quad g : Y \longrightarrow X$$

si dicono *l'una l'inversa omotopica dell'altra* se

$$g \circ f \sim id_X \quad \text{in} \quad \pi(X, X),$$
$$f \circ g \sim id_Y \quad \text{in} \quad \pi(Y, Y).$$

Diciamo allora che f e g sono *equivalenze omotopiche*. Due spazi topologici X e Y tra i quali si possa stabilire un'equivalenza omotopica si dicono *omotopicamente equivalenti* o che *hanno lo stesso tipo di omotopia*.

L'equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza nella categoria degli spazi topologici. Si dimostra facilmente la seguente:

PROPOSIZIONE 2.2. *Siano X, Y, Z spazi topologici e $\varphi : X \longrightarrow Y$, $\psi : Y \longrightarrow Z$ due applicazioni continue. Se due delle applicazioni continue φ, ψ, $\psi \circ \varphi$ sono equivalenze omotopiche, anche la terza lo è.*

Se X, Y, V, W sono spazi topologici e $\varphi : V \longrightarrow X$, $\psi : Y \longrightarrow W$ sono due equivalenze omotopiche, allora

$$\pi(\varphi, \psi) : \pi(X, Y) \longrightarrow \pi(V, W)$$

è un'applicazione bigettiva.

3. Spazi topologici contrattili

DEFINIZIONE 3.1. Uno spazio topologico X si dice contrattile se id_X è omotopicamente equivalente ad un'applicazione costante in $\pi(X, X)$.

PROPOSIZIONE 3.2. *Uno spazio topologico è contrattile se e soltanto se ha lo stesso tipo di omotopia dello spazio formato da un solo punto.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con D^0 (disco 0-dimensionale) lo spazio formato da un solo punto. Siano

$$f : D^0 \longrightarrow X \qquad \text{e}$$
$$g : X \longrightarrow D^0$$

due applicazioni omotopicamente inverse l'una dell'altra. Allora $f \circ g : X \longrightarrow X$ è costante e omotopicamente equivalente a id_X.

Viceversa, se

$$\varphi : X \longrightarrow X$$

è un'applicazione costante omotopicamente equivalente a id_X, definiamo

$$f : D^0 \longrightarrow X \quad \text{mediante} \quad f(D^0) = \varphi(X)$$

e consideriamo l'unica applicazione

$$g : X \longrightarrow D^0.$$

Poiché $f \circ g = \varphi$, la f e la g sono equivalenze omotopiche. □

OSSERVAZIONE 3.3. Uno spazio topologico contrattile è connesso per archi.

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$F : X \times I \longrightarrow X$$

un'omotopia tra l'identità su X e un'applicazione costante. Allora, per ogni coppia di punti $x, y \in X$,

$$\alpha(t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ F(y, 2 - 2t) & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

definisce un cammino continuo che congiunge x a y. □

PROPOSIZIONE 3.4. *Se X è uno spazio contrattile, allora, per ogni spazio topologico Y, l'omotopia libera $\pi(Y, X)$ contiene un solo elemento.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f : D^0 \longrightarrow X$ è un'equivalenza omotopica, allora

$$\pi(id_Y, f) : \pi(Y, X) \longrightarrow \pi(Y, D^0)$$

è bigettiva. Il secondo insieme contiene un solo elemento e dunque la tesi è dimostrata. □

In particolare, due qualsiasi applicazioni costanti di uno spazio contrattile in sé sono omotopicamente equivalenti.

OSSERVAZIONE 3.5. Se X è uno spazio topologico contrattile e Y un qualsiasi spazio topologico,allora $\pi(X,Y)$ è in corrispondenza biunivoca con le componenti connesse per archi di Y. Infatti, per ogni $f : X \longrightarrow Y$ continua, $f(X)$ è contenuta in una componente connessa per archi di Y, univocamente determinata dalla classe di omotopia dell'applicazione f.

4. Omotopia legata. Retratti di deformazione. Omotopia relativa

DEFINIZIONE 4.1. Sia (X, A) una coppia topologica (X è uno spazio topologico e A un suo sottospazio). Sia Y un altro spazio topologico. Un'omotopia

$$F : X \times I \longrightarrow Y$$

si dice *legata* su A, o un'A-omotopia, se

$$F(x,t) = F(x,0) \qquad \forall x \in A, \quad \forall t \in I.$$

La relazione di A-omotopia è una relazione di equivalenza su $\mathcal{C}(X,Y)$ e il relativo quoziente si indica con $\pi_\ell(X, A; Y)$.

Fissata un'applicazione continua $\varphi : A \longrightarrow Y$, indichiamo con $\pi(X, Y; \varphi)$ l'immagine in $\pi_l(X, A; Y)$ dell'insieme $\{f \in \mathcal{C}(X,Y) \mid f\,|_A = \varphi\}$.

DEFINIZIONE 4.2. Un sottospazio A di uno spazio topologico X si dice un suo *retratto di deformazione* se possiamo trovare una retrazione

$$\varrho : X \longrightarrow A$$

(cioè un'applicazione continua a valori in A con $\varrho | A = id_A$) tale che l'applicazione composta:

$$X \xrightarrow{\varrho} A \xrightarrow{\iota} X$$

sia omotopa all'identità su X.

Diciamo che A è *un retratto di deformazione stretto* di X se l'applicazione composta

$$X \xrightarrow{\varrho} A \xrightarrow{\iota} X$$

è A-omotopa a id_X, se cioè possiamo trovare un'omotopia

$$F : X \times I \longrightarrow X$$

tra $\varrho \circ \iota$ e id_X con:

$$F(x,t) = x \quad \forall x \in A, \quad \forall t \in I.$$

Siano X, Y due spazi topologici. Fissiamo sottospazi $A_1, \cdots A_n$ di X e $B_1, \cdots, B_n$ di Y, ed indichiamo con $\mathcal{C}(X, A_1, \cdots, A_n; Y, B_1, \cdots, B_n)$ lo spazio delle funzioni continue $f : X \to Y$ tali che $f(A_i) \subset B_i$ per ogni $i = 1, \cdots, n$.

DEFINIZIONE 4.3. Chiamiamo *omotopia relativa* alle $(n+1)$-uple:

$$(X, A_1, \cdots A_n) \quad \text{ed} \quad (Y, B_1, \cdots, B_n)$$

un'omotopia $F : X \times I \to Y$ tale che $F(A_i \times I) \subset B_i \ \forall i = 1, \cdots, n$.

L'omotopia relativa definisce una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathcal{C}(X, A_1, \cdots, A_n; Y, B_1, \cdots, B_n)$.

Denotiamo il relativo quoziente con $\pi(X, A_1, \cdots, A_n; Y, B_1, \cdots, B_n)$.

kconn

5. k-connessione

Useremo in $\mathbb{R}^n$ coordinate $x^0, \cdots, x^{n-1}$ e indicheremo con $e_0, \cdots, e_{n-1}$ i vettori della base canonica. Definiamo:

$$D^0 = \{0\} \tag{5.1}$$

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\} \quad se \quad n > 0, \tag{5.2}$$

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\} \quad se \quad n \geq 0. \tag{5.3}$$

Abbiamo $S^{n-1} \subset D^n$. Considereremo S^n come un sottospazio di S^{n+1} mediante l'inclusione canonica

$$S^n \ni x \longrightarrow (x, 0) \in S^{n+1}. \tag{5.4}$$

Indichiamo con σ_+ e σ_- le immersioni canoniche:

eq:htpee

$$\sigma_+ : D^n \ni x \longrightarrow (x^0, \cdots, x^{n-1}, \sqrt{1 - |x|^2}) \in S^n \tag{5.5}$$

eq:htpef

$$\sigma_- : D^n \ni x \longrightarrow (x^0, \cdots, x^{n-1}, -\sqrt{1 - |x|^2}) \in S^n. \tag{5.6}$$

Ricordiamo ancora che l'applicazione:

$$S^n \times I \ni (x, t) \longrightarrow tx \in D^{n+1} \tag{5.7}$$

(*coordinate polari*) definisce un omeomorfismo canonico

$$\frac{S^n \times I}{S^n \times \{0\}} \longrightarrow D^{n+1}.$$

Abbiamo:

PROPOSIZIONE 5.1. *Sia X uno spazio topologico ed*

$$f : S^n \longrightarrow X$$

un'applicazione continua. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

a) *f è omotopa ad un'applicazione costante.*
b) *f si può prolungare a un'applicazione continua*

$$\tilde{f} : D^{n+1} \longrightarrow X.$$

c) *$f \circ \sigma_+$ e $f \circ \sigma_-$ sono S^{n-1}-omotope.*
d) *f è $\{e_0\}$-omotopa all' applicazione costante.*

DIMOSTRAZIONE. a) $\Rightarrow$ b). Sia $F : S^n \times I \longrightarrow X$ un'omotopia di f con un'applicazione costante. La

$$S^n \times I \ni (x, t) \longrightarrow g(x, t) = (1 - t)x \in D^{n+1}$$

è decomponibile[1] e il suo quoziente iniettivo definisce un omeomorfismo tra $S^n \times I/(S^n \times 1)$ e D^{n+1}.

Poiché la F è costante su $S^n \times 1$, essa passa al quoziente, definendo un'applicazione continua

$$\tilde{f} : D^{n+1} \longrightarrow X$$

che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} S^n \times I & \xrightarrow{F} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{f}} \\ D^{n+1} & = & D^{n+1}. \end{array}$$

Chiaramente $\tilde{f}|S^n = F_0 = f$.

b)$\Rightarrow$ c),d). Sia $\tilde{f} : D^{n+1} \longrightarrow X$ un prolungamento continuo di f. Allora

$$F(x,t) = \tilde{f}(x, (1-2t)\sqrt{1-|x|^2})$$

definisce una S^{n-1}-omotopia tra $f \circ \sigma_+$ e $f \circ \sigma_-$ e la

$$G(x,t) = \tilde{f}(t + (1-t)x^0, (1-t)x^1, \cdots, (1-t)x^{n-1})$$

definisce una $\{e_0\}$-omotopia

$$G : S^n \times I \longrightarrow X$$

di f con l'applicazione costante.

c)$\Rightarrow$b). Sia $F : D^n \times I \longrightarrow X$ una S^{n-1}-omotopia tra $f \circ \sigma_+$ e $f \circ \sigma_-$. Definiamo

$$h : D^n \times I \ni (x,t) \longrightarrow h(x,t) = \left(x, (1-2t)\sqrt{1-|x|^2}\right) \in D^{n+1}.$$

Allora h è un'applicazione decomponibile e la F per passaggio al quoziente definisce un prolungamento $\tilde{f}$ di f che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} D^n \times I & \xrightarrow{F} & X \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{f}}\ . \\ D^{n+1} & = & D^{n+1} \end{array}$$

L'implicazione d) $\Rightarrow$ a) è banale e dunque la dimostrazione è completa. □

[1]Ricordiamo che il *quoziente iniettivo* di un'applicazione $f : X \to Y$ è il quoziente $X/_\sim$ di X rispetto alla relazione di equivalenza che identifica i punti di X che hanno la stessa immagine rispetto ad f. Se X e Y sono spazi topologici, la f è continua se e soltanto se l'applicazione $\hat{f} : X/_\sim \to Y$ definita dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \pi}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle \hat{f}} \\ & X/_\sim & \end{array}$$

è continua. La $f : X \to Y$ si dice *decomponibile* se la $\hat{f}$ è un omeomorfismo.

DEFINIZIONE 5.2. Uno spazio topologico non vuoto X si dice *k-connesso*, con $0 \leq k \leq \infty$, se per ogni intero non negativo $n \leq k$ ogni applicazione continua $S^n \to X$ è omotopa ad un'applicazione costante, ovvero se

$$\pi(S^n, X) \quad \text{contiene un solo elemento} \quad \forall 0 \leq n \leq k.$$

Uno spazio topologico omotopicamente equivalente ad uno spazio k-connesso è esso stesso k-connesso.

Gli spazi contrattili sono ∞-connessi.

Gli spazi 0-connessi sono gli spazi connessi per archi.

Uno spazio 1-connesso si dice *connesso e semplicemente connesso.*

Uno spazio è *semplicemente connesso* se tutte le sue componenti connesse per archi sono 1-connesse.

6. k-connessione relativa

DEFINIZIONE 6.1. Una coppia topologica (X,A) si dice k-connessa se, per ogni intero $0 \leq n \leq k$ ogni applicazione continua $f : D^n \longrightarrow X$ tale che

$$f(S^{n-1}) \subset A$$

è S^{n-1}-omotopa ad un'applicazione continua $g : D^n \longrightarrow X$ tale che

$$g(D^n) \subset A.$$

Il lemma seguente permette di dare una condizione equivalente di k-connessione, in termini di omotopia relativa.

PROPOSIZIONE 6.2. *Sia $f \in \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X, A)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia, in $\pi(D^n, S^{n-1}; X, A)$, omotopa ad un'applicazione costante, è che f sia S^{n-1}-omotopa ad un'applicazione continua g con $g(D^n) \subset A$.*

DIMOSTRAZIONE.
NECESSITÀ. Sia $F : D^n \times I \longrightarrow X$ un'omotopia con:

$$F_0 = f$$
$$F_t(S^{n-1}) \subset A \quad \forall t \in I$$
$$F_1(x) = \text{costante} \quad \forall x \in X.$$

Definiamo allora

$$G(x,t) = \begin{cases} F(x/|x|, 2(1-|x|)) & \text{se} \quad |x| \geq 1 - t/2, \\ F(x/(1-t/2), t) & \text{se} \quad |x| \leq 1 - t/2. \end{cases}$$

La G è una S^{n-1}-omotopia tra f e la funzione continua

$$g(x) = \begin{cases} F(x/|x|, 2(1-|x|) & \text{se} \quad |x| \geq 1/2, \\ F(2x, 1) & \text{se} \quad |x| \leq 1/2, \end{cases}$$

che soddisfa $g(D^n) \subset A$.

SUFFICIENZA. Sia $G : D^n \times I \longrightarrow X$ una S^{n-1}-omotopia tra f ed un'applicazione g con $g(D^n) \subset A$. Allora la

$$F(x,t) = \begin{cases} G(x,2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(2(1-t)x,1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

è, in $\pi(D^n, S^{n-1}; X, A)$, un'omotopia di f con un'applicazione costante. □

OSSERVAZIONE 6.3. Osserviamo che, se A è un retratto di deformazione stretto di X, allora la coppia (X, A) è ∞-connessa.

Per $n = 0$ poniamo $S^{-1} = \emptyset$. Allora l'enunciato del Lemma precedente è ancora valido: *Una coppia topologica (X, A) è 0-connessa se ogni punto di X può essere congiunto a un punto di A da un cammino continuo.*

Citiamo senza dimostrazione il seguente risultato:

Se l'inclusione $A \hookrightarrow X$ è un'equivalenza omotopica, allora la coppia (X, A) è ∞-connessa.

7. Proprietà di omotopia delle sfere

Mostriamo in questo paragrafo che la sfera S^n è $(n-1)$-connessa, ma non n-connessa.

TM:oha

TEOREMA 7.1. *Per ogni intero $n \geq 1$, la sfera S^n è $(n-1)$-connessa.*

DIMOSTRAZIONE. Sia m un intero non negativo $< n$ e sia

$$f : S^m \longrightarrow S^n$$

un'applicazione continua. Per il teorema di Stone-Weierstrass possiamo trovare un'applicazione a componenti polinomiali

$$P : \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

tale che:

$$|P(x) - f(x)| < 1/2 \quad \forall x \in S^m.$$

Abbiamo quindi:

$$|f(x) + t(P(x) - f(x))| > 1/2 \quad \forall (x,t) \in S^m \times I.$$

L'applicazione

$$S^m \times I \ni (x,t) \longrightarrow \frac{f(x) + t(P(x) - f(x))}{|f(x) + t(P(x) - f(x))|} \in S^n$$

è perciò ben definita e descrive un'omotopia tra f e la restrizione g di $P/|P|$ a S^m. Dico che la g non è surgettiva. Infatti, g è di classe C^∞ su S^m e quindi, per il Lemma di Sard, $g(S^m)$ è di prima categoria in S^n. Poiché S^n meno un punto è omeomorfa a $\mathbb{R}^n$, che ha lo stesso tipo di omotopia del punto, g è omotopa ad un'applicazione costante. □

DEFINIZIONE 7.2. Sia n un intero ≥ 1. Chiamiamo *sospensione* l'applicazione continua $\sigma : \mathcal{C}(S^n, S^n) \to \mathcal{C}(S^{n+1}, S^{n+1})$ definita da:

eq:sosp
$$(\sigma f)(x', x^{n+1}) = \begin{cases} \left(|x'| \cdot f\left(\frac{x'}{|x'|}\right), x^{n+1} \right) & \text{se} \quad x' \neq 0 \\ \left(0, x^{n+1}\right) & \text{se} \quad x' = 0, \end{cases} \tag{7.1}$$

ove abbiamo posto $x' = (x^0, \ldots, x^n)$.

lm:hogc
LEMMA 7.3. *Per ogni intero $n \geq 1$ la $\sigma : \mathcal{C}(S^n, S^n) \to \mathcal{C}(S^{n+1}, S^{n+1})$ induce un'applicazione bigettiva*

$$\sigma_* : \pi(S^n, S^n) \longrightarrow \pi(S^{n+1}, S^{n+1}).$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché un'omotopia di applicazioni continue di S^n in sé si trasforma mediante σ in un'omotopia di applicazioni continue si S^{n+1} in sé, la σ_* è ben definita.

INIETTIVITÀ Siano $f_0, f_1 : S^n \longrightarrow S^n$ due applicazioni continue. Se σf_0 è omotopa a σf_1, possiamo trovare un'omotopia

$$F : S^{n+1} \times I \longrightarrow S^{n+1}$$

con $F_0 = \sigma f_0$, $F_1 = \sigma f_1$. Osserviamo che:

$$(*) \quad \Psi(x,t) = t(|F^{n+1}(x,t)| - |x^{n+1}|) \cdot e_0 + F(x,t) \neq 0$$
$$\forall (x,t) \in S^{n+1} \times I \quad \text{con} \quad |F^{n+1}(x,t)| \geq |x^{n+1}|.$$

Infatti, se $|F^{n+1}(x,t)| > 0$, i due termini nella somma a secondo membro della $(*)$ sono linearmente indipendenti. Se $|F^{n+1}(x,t)| = 0$, allora $\Psi(x,t) = F(x,t) \neq 0$.

Possiamo allora definire una nuova omotopia $G : S^n \times I \to S^n$ tra σf_0 e σf_1 ponendo:

$$G(x,t) = \begin{cases} F(x,t) & \text{se } |F^{n+1}(x,t)| \leq |x^{n+1}| \\ \Psi(x,t)/|\Psi(x,t)| & \text{se } |F^{n+1}(x,t)| \geq |x^{n+1}|. \end{cases}$$

Infatti, poiché $F^{n+1}(x,0) = [\sigma f_0]^{n+1} = x^{n+1}$ ed $F^{n+1}(x,1) = [\sigma f_1]^{n+1} = x^{n+1}$, risulta $G_0(x) = F_0(x) = \sigma f_0(x)$ e $G_1(x) = F_1(x) = \sigma f_1(x)$.

Questa nuova omotopia G verifica

$$|G^{n+1}(x,t)| < 1 \quad \forall (x,t) \in S^n \times I$$

in quanto ciò è vero se $t = 0, 1$ e per $t \neq 0, x \in S^n$ il vettore

$$\Psi(x,t) = t|F^{n+1}(x,t)|e_0 + F(x,t)$$

non è proporzionale ad e_{n+1}.

Otteniamo quindi un'omotopia $H : S^n \times I \to S^n$ di f_0 con f_1 dalla G componendola con la retrazione canonica di $S^{n+1} \setminus \{\pm e_{n+1}\}$ su S^n, definita da:

$$\varrho : S^{n+1} \setminus \{\pm e_{n+1}\} \ni x \longrightarrow \frac{x'}{|x'|} \in S^n \qquad (\text{ove } x' = (x^0, ..., x^n)).$$

Poniamo cioè

$$H(x',t) = \varrho \circ G(x',0;t) \qquad \forall x' \in S^n \subset S^{n+1},\ \forall t \in I.$$

SURGETTIVITÀ Sia $f : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$ un'applicazione continua.

a) Supponiamo che, posto:

$$S^{n+1}_+ = \{x \in S^{n+1} \mid x^{n+1} \geq 0\} \qquad \text{e}$$
$$S^{n+1}_- = \{x \in S^{n+1} \mid\ x^{n+1} \leq 0\}$$

sia:

$$f(S^{n+1}_+) \subset S^{n+1}_+ \quad \text{e} \quad f(S^{n+1}_-) \subset S^{n+1}_-.$$

Possiamo allora costruire un'omotopia tra f e σg, dove g è l'applicazione:

$$g : S^n \ni (x^0, ..., x^n) \longrightarrow f(x^0, ..., x^n, 0) \in S^n$$

nel modo seguente. Indichiamo con $h : D^{n+1} \to D^{n+1}$ la funzione continua:

$$h(y) = \begin{cases} |y|g(y/|y|) & \forall y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Siano σ_+ e σ_- le applicazioni (5.5) e (5.6) introdotte nel §5. Sia

$$p : S^{n+1} \ni (x^0, ..., x^n, x^{n+1}) \to (x^0, ..., x^n) \in D^{n+1}$$

la proiezione naturale. Allora

$$\sigma g(x) = \begin{cases} \sigma_+(h(p(x)) & \forall x \in S^{n+1}_+ \\ \sigma_-(h(p(x)) & \forall x \in S^{n+1}_-. \end{cases}$$

Indichiamo con $f_+, f_- : D^{n+1} \to D^{n+1}$ le funzioni continue:

$$f_+(y) = p \circ f(\sigma_+(y)) \text{ per } y \in D^{n+1},$$
$$f_-(y) = p \circ f(\sigma_-(y)) \text{ per } y \in D^{n+1}.$$

La proprietà della funzione f di trasformare in sé i due emisferi S^{n+1}_+ e S^{n+1}_- si può esprimere mediante:

$$f(x) = \begin{cases} \sigma_+ \circ f_+(p(x)) & \text{se } x \in S^{n+1}_+ \\ \sigma_- \circ f_-(p(x)) & \text{se } x \in S^{n+1}_-. \end{cases}$$

Allora un'omotopia $F : S^{n+1} \times I \to S^{n+1}$ tra f e σg si può ottenere rialzando l'omotopia lineare tra f_+ ,f_- ed h:

$$F(x,t) = \begin{cases} \sigma_+(f_+(p(x)) + t(h(p(x)) - f_+(p(x))) & \text{se } x \in S^{n+1}_+ \\ \sigma_-(f_-(p(x)) + t(h(p(x)) - f_-(p(x))) & \text{se } x \in S^{n+1}_-. \end{cases}$$

b) Consideriamo ora il caso generale. Sia $f : S^{n+1} \longrightarrow S^{n+1}$ una qualsiasi applicazione continua.

Se f non è surgettiva, allora è omotopa ad un'applicazione costante e questa è omotopa alla σh ove $h(x) = e_0 \quad \forall x \in S^n$.

Supponiamo quindi f surgettiva. Ripetendo il ragionamento svolto nella dimostrazione del Teorema 7.1, possiamo supporre che f sia di classe C^∞.

L'insieme dei suoi valori critici è allora un compatto di S^{n+1} privo di punti interni e potremo trovare una coppia di punti diametralmente opposti[2] che siano entrambi valori non critici di f. A meno di una rotazione, che possiamo ottenere mediante un'omotopia dell'identità, in quanto $SO(n+2)$ è connesso per archi, possiamo supporre che e_{n+1} e $-e_{n+1}$ siano valori regolari di f. Poniamo per semplicità $N = e_{n+1}$ ed $S = -e_{n+1}$. Per il teorema delle funzioni implicite, ogni punto di $N^* = f^{-1}(N)$ ed ogni punto di $S^* = f^{-1}(S)$ ha un intorno aperto che non contiene altri punti di $N^* \cup S^*$. I due insiemi sono dunque sottoinsiemi discreti di S^{n+1} e perciò finiti. Possiamo trovare una forma lineare ξ in $(\mathbb{R}^{n+2})^*$ che assume valori distinti sui punti distinti di $N^* \cup S^*$. Infatti, per ogni coppia di punti distinti di $\mathbb{R}^{n+2}$ l'insieme delle forme lineari che nei due punti hanno valori distinti è un aperto denso di $(\mathbb{R}^{n+2})^*$, ed un'intersezione finita di aperti densi di $(\mathbb{R}^{n+2})^*$ è ancora un aperto denso in $(\mathbb{R}^{n+2})^*$. Scegliamo ξ in modo che $|\xi| = 1$ e $|\xi(x)| < 1$ su $N^* \cup S^*$. A meno di una rotazione, per cui valgono le considerazioni svolte sopra, possiamo supporre sia $\xi(x) = (x|N)$. Suddividiamo ora $[-1, 1]$ in un numero finito di intervalli, mediante punti $-1 < c_1 < ... < c_\ell < 1$, in modo che:

$$\begin{gathered}(x|N) \neq c_i \quad \text{per} \quad i = 1, ..., \ell \quad \text{se} \quad x \in N^* \cup S^*, \\ \operatorname{card}(\{(x|N) \mid x \in N^* \cup S^*\} \cap [c_i, c_{i+1}]) = 1 \quad \text{per} \quad i = 1, ..., \ell - 1, \\ c_1 < (x|N) < c_\ell \quad \forall x \in N^* \cup S^*.\end{gathered}$$

Sia $\{x_i\} = \{x \in S^{n+1} \mid c_i < (x|N) < c_{i+1}\}$ e C la circonferenza $S^{n+1} \cap \langle e_0, e_{n+1}\rangle$. Costruiamo un'omotopia:

$$H : S^{n+1} \times I \longrightarrow S^{n+1}$$

tra l'identità e un omeomorfismo di S^{n+1} la cui inversa trasformi ciascun punto x_i di N^* nel punto $\bar{x}_i$ di C con $\bar{x}_i^0 > 0$ ed $\bar{x}_i^{n+1} = x_i^{n+1}$ e ciascun punto x_i di S^* nel punto $\bar{x}_i$ di C con $\bar{x}^0 < 0$ ed $\bar{x}^{n+1} = x^{n+1}$. A questo scopo consideriamo, per ogni indice $i = 1, \ldots, \ell-1$, un arco continuo $g_i(t)$ in $SO(n+2)$, formato da applicazioni che lasciano fisso il punto N (l'insieme delle applicazioni in $SO(n+2)$ che lasciano fisso N è isomorfo, come gruppo topologico, a $SO(n+1)$ ed è quindi connesso per archi) e tali che $g_i(1)\bar{x}_i = x_i$. Sia $\eta_i(x)$ la funzione definita per $c_i < (x|N) < c_{i+1}$ mediante:

$$\eta_i(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-|(x-x_i|N)|^2}{[(x|N)-c_i][c_{i+1}-(x|N)]}\right) & \text{se} \quad c_i < (x|N) < c_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

[2]Infatti sia $CV(f)$ che $\{-x \mid x \in CV(f)\}$ sono di prima categoria e quindi la loro unione è ancora un insieme di prima categoria, e dunque non è uguale ad S^{n+1}, che è uno spazio di Baire.

Essa è una funzione di classe C^∞. Consideriamo quindi l'omotopia:

$$H(x,t) = \begin{cases} x & \text{se } (x|N) \notin [c_1, c_l] \\ g_i(t\eta_i(x))x & \text{se } c_i < (x|N) < c_{i+1},\ i = 1, ..., l-1 \\ x & \text{se } (x|N) = c_i,\quad i = 1, ..., l. \end{cases}$$

La $\Phi(x,t) = f(H(x,t))$ è un'omotopia di $f = \Phi_0$ con un'applicazione $h(x) = \Phi_1(x) = f(H(x,1))$ per cui $h^{-1}(N)$ e $h^{-1}(S)$ sono sottoinsiemi finiti di punti con $x^0 > 0$ ed $x^0 < 0$, rispettivamente.

La h è omotopa alla $g = \phi \circ h$, ottenuta componendola con una rotazione $\phi \in \mathbf{SO}(n+2)$ che trasforma e_0 in $N = e_{n+1}$.

Quindi, la nostra f iniziale è omotopa ad un'applicazione continua $g : S^{n+1} \to S^{n+1}$ tale che

$$g^{-1}(N) \subset S^{n+1}_+ \quad \text{e} \quad g^{-1}(S) \quad \subset S^{n+1}_-.$$

Quindi $g(S^{n+1}+)$ è un compatto che non contiene S e $g(S^{n+1}-)$ un compatto che non contiene N. Possiamo quindi trovare $0 < \epsilon < 1/2$ tale che:

$$g(S^{n+1}_+) \subset \{x \in S^{n+1} | x^{n+1} > 2\epsilon - 1\},$$
$$g(S^{n+1}_-) \subset \{x \in S^{n+1} | x^{n+1} < 1 - 2\epsilon\}.$$

Consideriamo la porzione di sfera $Z = \{x \in S^{n+1} \mid |x^{n+1}| \leq 1 - 2\epsilon\} = \{x \in S^{n+1} \mid |x'| \leq \delta\}$, ove $\delta = 2\sqrt{\epsilon - \epsilon^2}$, e definiamo un'omotopia $L : S^{n+1} \times I \to S^{n+1}$ tra l'identità ed un'applicazione continua $L_1 : S^{n+1} \to S^{n+1}$ con $L_1(Z) \subset S^n$. Sia

$$\eta(x') = \begin{cases} \dfrac{x'}{\delta} & \text{se} \quad |x'| < \delta, \\ \dfrac{x'}{|x'|} & \text{se} \quad \delta \leq |x'| \leq 1. \end{cases}$$

Possiamo porre allora

$$L(x,t) = \begin{cases} \sigma_+(x' + t(\eta(x') - x')) & \text{se} \quad x^{n+1} \geq 0, \\ \sigma_-(x' + t(\eta(x') - x')) & \text{se} \quad x^{n+1} \leq 0. \end{cases}$$

La $S^{n+1} \times I \ni (x,t) \to L(g(x),t) \in S^{n+1}$ è un'omotopia di g con un'applicazione continua $L(g(x),1) = \lambda(x)$ tale che:

$$\lambda(S^{n+1}_+) \subset S^{n+1}_+, \quad \lambda(S^{n+1}_-) \subset S^{n+1}_-.$$

Per il punto a), essa è omotopa alla sospensione della sua restrizione ad S^n.

La dimostrazione è completa. □

tm:hogd

TEOREMA 7.4. *Consideriamo l' insieme di applicazioni continue Φ formato dalle*

$$\varphi_k : S^1 \ni e^{i\theta} \longrightarrow \varphi_k(e^{i\theta}) = e^{ki\theta} \in S^1.$$

per $k \in \mathbb{Z}$. L'applicazione naturale:

eq:hoha

$$\Phi \longrightarrow \pi(S^1, S^1) \tag{7.2}$$

è una bigezione.

DIMOSTRAZIONE. Ogni applicazione continua $f : S^1 \longrightarrow S^1$ è omotopa ad un'applicazione continua $g : S^1 \longrightarrow S^1$ tale che $g(1) = 1$. Inoltre, se $F : S^1 \times I \to S^1$ è un'omotopia tra due applicazioni continue $f_0, f_1 : S^1 \to S^1$ con $f_0(1) = 1 = f_1(1)$, la $S^1 \times I \ni (z,t) \to (F(z,t)/F(1,t)) \in S^1$ è una 1-omotopia tra f_0 ed f_1. Quindi

$$\pi(S^1, \{1\}; S^1, \{1\}) \simeq \pi(S^1, S^1).$$

Osserviamo che l'applicazione

$$\mathbb{R} \ni \theta \longrightarrow e^{i\theta} \in S^1$$

è un omeomorfismo locale. Per ogni applicazione continua

$$f : S^1 \longrightarrow S^1 \quad \text{con} \quad f(1) = 1$$

possiamo allora trovare un'unica applicazione continua

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \tilde{f}(0) = 0$$

e il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle e^{i\cdot}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e^{i\cdot}} \\ S^1 & \xrightarrow[f]{} & S^1 \end{array}$$

sia commutativo. Abbiamo allora

$$\tilde{f}(2\pi) = 2k\pi \quad \text{per qualche} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'applicazione che fa corrispondere l'intero k alla funzione f è un'applicazione continua

$$\mathcal{C}(S^1, \{1\}; S^1, \{1\}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

che assume solo valori interi.

Essa è dunque costante sulle componenti connesse di $\mathcal{C}(S^1, \{1\}; S^1, \{1\})$. Ciò dimostra che (7.2) è iniettiva. Siano ora $f, g \in \mathcal{C}(S^1, \{1\}; S^1, \{1\})$ tali che $\tilde{f}(2\pi) = \tilde{g}(2\pi)$. Allora l'omotopia lineare:

$$(\theta, t) \longrightarrow \tilde{f}(\theta) + t[\tilde{g}(\theta) - \tilde{f}(\theta)]$$

induce un'omotopia tra f e g. Ne segue che la (7.2) è anche surgettiva. La dimostrazione è completa. □

tm:hoge

TEOREMA 7.5. *Sia $n \geq 2$. L'applicazione*

$$\mathcal{C}(S^1, S^1) \ni f \longrightarrow \sigma^{(n)} f \in \mathcal{C}(S^n, S^n)$$

ove, posto $x = (x', x'')$, con $x' = (x^0, x^1)$, $x'' = (x^2, \ldots, x^n)$, è

$$\sigma^{(n)} f(x', x'') = \begin{cases} \left(|x'| f\left(\dfrac{x'}{|x'|} \right), x'' \right) & se \quad x' \neq 0, \\ (0, x'') & se \quad x' = 0, \end{cases}$$

induce un'applicazione bigettiva

$$\sigma_*^{(n)} : \pi(S^1, S^1) \longrightarrow \pi(S^n, S^n).$$

In particolare, l'applicazione

$$\mathbb{Z} \ni k \longleftrightarrow \varphi_k \in \Phi$$

induce per ogni $n \geq 1$ *una bigezione:*

$$\mathbb{Z} \longleftrightarrow \pi(S^n, S^n).$$

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue per iterazione dal Lemma 7.3 e la seconda dal Teorema 7.4. □

DEFINIZIONE 7.6. L'intero k associato ad un'applicazione continua $f : S^n \to S^n$ nel Teorema ??, si dice il *grado* di f e si indica con $\deg(f)$. È cioè $\deg(f) = k$ se $f \sim \sigma^{(n)}(\phi_k)$.

8. Il teorema del punto fisso di Brouwer

Un'importante applicazione dei risultati sull'omotopia delle sfere è il seguente:

TEOREMA 8.1 (Brouwer). *Ogni applicazione continua*

$$f : D^n \longrightarrow D^n$$

ha almeno un punto fisso.

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è banale se $n = 0$. Sia $n > 0$ supponiamo per assurdo che vi sia una funzione continua $f : D^n \longrightarrow D^n$ tale che

$$f(x) \neq x \ \forall x \in D^n.$$

Allora l'applicazione $\psi : D^n \longrightarrow S^{n-1}$, che associa ad ogni punto x di D^n l'intersezione di S^{n-1} con la semiretta

$$t \longrightarrow x + t\,(x - f(x))\,,\ \textit{per}\ t \geq 0$$

è continua ed è una retrazione di D^n su S^{n-1}. Essa infatti è descritta analiticamente mediante:

$$\psi(x) = x + \frac{\sqrt{(x|x - f(x))^2 + (1 - |x|^2)|x - f(x)|^2} - |(x|x - f(x))|}{|x - f(x)|^2}(x - f(x)).$$

L'applicazione

$$D^n \times I \ni (x, t) \longrightarrow (1 - t)x + t\psi(x) \in D^n$$

è una S^{n-1} omotopia dell'identità con una retrazione di D^n su S^{n-1}. Ciò è assurdo perchè S^{n-1} non può essere un retratto di deformazione stretto di D^n. Infatti D^n e S^{n-1} non sono omotopicamente equivalenti in quanto D^n è contrattile, mentre, per il Teorema 7.1, S^{n-1} non è $(n-1)$-connesso. □

OSSERVAZIONE 8.2. Il teorema di Brouwer si applica ovviamente a tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^n$ che sono omeomorfi a D^n; in particolare a tutti i sottoinsiemi convessi e compatti di uno spazio euclideo.

CAPITOLO 16

Gruppi di omotopia

omf

1. Gruppi di omotopia di uno spazio puntato

DEFINIZIONE 1.1. Uno *spazio puntato* è uno spazio topologico non vuoto X su cui si sia fissato un *punto base* x_0.

Chiamiamo *n-esimimo gruppo di omotopia dello spazio puntato* (X, x_0), e indichiamo con $\pi_n(X, x_0)$, l'insieme $\pi(S^n, e_0; X, x_0)$ delle classi di e_0-omotopia delle applicazioni continue $f : S^n \to X$ tali che $f(e_0) = x_0$.

Il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ si dice anche *gruppo fondamentale* di X con *punto base* x_0.

Per descrivere la struttura di gruppo di $\pi_n(X, x_0)$ (quando $n \geq 1$) è conveniente utilizzare l'isomorfismo tra $\pi_n(X, x_0)$ e $\pi(I^n, bI^n; X, x_0)$ descritto dal seguente:

LEMMA 1.2. *Sia $n \geq 1$. Possiamo definire un'applicazione continua $\phi : I^n \to S^n$ con le proprietà:*

(i) ϕ definisce un omeomorfismo di $I^n \setminus bI^n$ su $S^n \setminus \{e_0\}$;
(ii) $\phi^{-1}(e_0) = bI^n$;
(iii) il quoziente iniettivo di ϕ è un omeomorfismo di $I^n /_{bI^n}$ su S^n.

Per ogni spazio topologico X, con punto di base x_0, l'applicazione:

$$\phi^* : \pi(S^n, e_0; X, x_0) \to \pi(I^n, bI^n; X, x_0) \tag{1.1}$$

è bigettiva.

DIMOSTRAZIONE. Definiamo:

$$\psi(x) = \begin{cases} \left(2|x| - 1, 2x\sqrt{\frac{1}{|x|} - 1}\right) & \text{se } 0 < |x| \leq 1 \\ -e_0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

La $\psi : D^n \to S^n$ è continua e definisce, per passaggio al quoziente iniettivo, un omeomorfismo di $D^n /_{S^{n-1}}$ su S^n, che trasforma S^{n-1} in e_0.

Per ottenere la ϕ cercata sarà quindi sufficiente comporre la ψ con un omeomorfismo τ di I^n su D^n che trasformi bI^n in S^{n-1}. Poniamo $\|v\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |v_i|$ per $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ e sia $e = (1, \ldots, 1) = e_1 + \cdots + e_n$. Possiamo allora definire $\tau : I^n \to D^n$ mediante:

$$\tau(x) = \begin{cases} \frac{2x-e}{|2x-e|}\|2x - e\|_\infty & \text{se } 2x \neq e \\ \\ 0 & \text{se } 2x = e. \end{cases}$$

Allora $\phi = \psi \circ \tau : I^n \to S^n$ è l'applicazione continua cercata.

Per concludere, basta osservare che l'applicazione

$$\mathcal{C}(S^n, e_0; X, x_0) \ni f \to f \circ \phi \in \mathcal{C}(I^n, bI^n; X, x_0)$$

è un omeomorfismo per la topologia compatta-aperta. □

DEFINIZIONE 1.3. Dati $f, g \in \mathcal{C}(I^n, bI^n; X, x_0)$, con $n \geq 1$, definiamo:

$$f \cdot g(s_1, \ldots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \ldots, s_n) & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1\,. \end{cases} \tag{1.2}$$

Indicheremo graficamente il prodotto $f \cdot g$ con

f	g

TEOREMA 1.4. *Sia X uno spazio topologico con punto di base $x_0 \in X$. Per ogni intero $n \geq 1$ l'applicazione*

$$\mathcal{C}(I^n, bI^n; X, x_0) \times \mathcal{C}(I^n, bI^n; X, x_0) \ni (f, g) \to f \cdot g \in \mathcal{C}(I^n, bI^n; X, x_0) \tag{1.3}$$

definisce per passaggio al quoziente un'operazione interna:

$$\pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \ni (\alpha, \beta) \to \alpha \cdot \beta \in \pi_n(X, x_0) \tag{1.4}$$

rispetto alla quale $\pi_n(X, x_0)$ è un gruppo, il cui elemento neutro corrisponde all'applicazione costante $\hat{x}_0 : I^n \ni s \to x_0 \in X$. Se $n \geq 2$, allora $\pi_n(X, x_0)$ è abeliano.

DIMOSTRAZIONE. Se $F, G : I^n \times I \to X$ sono due bI^n-omotopie con $F(bI^n, t) = G(bI^n, t) = \{x_0\}$ per ogni $0 \leq t \leq 1$, allora anche

$$F \cdot G(s; t) = \begin{cases} F(2s_1, s_2, \ldots, s_n; t) & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ G(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n; t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

è una bI^n-omotopia con $F \cdot G(bI^n, t) = \{x_0\}$ per ogni $0 \leq t \leq 1$. L'operazione su $\pi_n(X, x_0)$ è perciò ben definita.

Dimostriamo ora che $\pi_n(X, x_0)$ è un gruppo per $n \geq 1$.

a. $[\hat{x}_0]$ *è l'elemento neutro del prodotto*

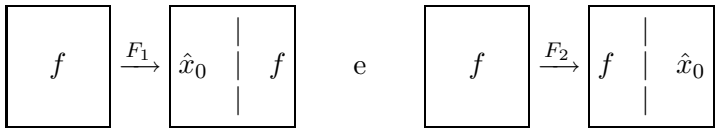
Sia $f \in \mathcal{C}(I^n, bI^n; X, x_0)$. Definiamo

$$F_1(s; t) = \begin{cases} x_0 & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{t}{2} \\ f\left(\frac{2s_1 - t}{2 - t}, s_2, \ldots, s_n\right) & \text{se } \frac{t}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

e

$$F_2(s; t) = \begin{cases} f\left(\frac{2s_1}{2 - t}, s_2, \ldots, s_n\right) & \text{se } 0 \leq s_1 \leq \frac{2 - t}{2} \\ x_0 & \text{se } \frac{2 - t}{2} \leq s_1 \leq 1. \end{cases}$$

La prima è una bI^n-omotopia tra f e $\hat{x}_0 \cdot f$, la seconda tra f e $f \cdot \hat{x}_0$:



b. *Esistenza dell'inversa.*
Data $f \in \mathcal{C}(I^n, bI^n; X, x_0)$ definiamo

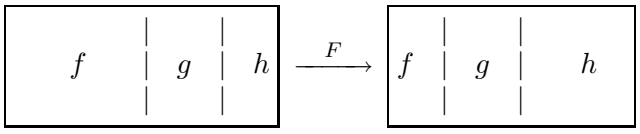
$$\check{f}(s) = f(1 - s_1, s_2, \ldots, s_n) \qquad \forall s = (s_1, \ldots, s_n) \in I^n .$$

Dico che $f \cdot \check{f} \sim \check{f} \cdot f \sim \hat{x}_0$ in $\mathcal{C}(I^n, bI^n; X, x_0)$. Osserviamo a questo scopo che

$$F(s;t) = \begin{cases} f(2ts_1, s_2, \ldots, s_n) & \text{se } 0 \le s_1 \le \frac{1}{2} \\ f(2t(1-s_1), s_2, \ldots, s_n) & \text{se } \frac{1}{2} \le s_1 \le 1 \end{cases}$$

è un'omotopia tra $\hat{x}_0$ e $f \cdot \check{f}$. Chiaramente la $F(1 - s_1, s_2, \ldots, s_n; t)$ è allora un'omotopia tra $\hat{x}_0$ e $\check{f} \cdot f$ perché $\check{\check{f}} = f$.

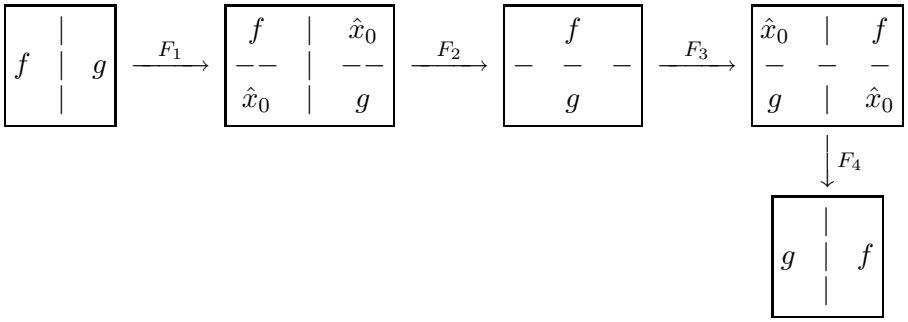
c. *Il prodotto è associativo*
L'associatività segue da schema:



con

$$F(s;t) = \begin{cases} f(2(1+t)s_1, s_2, \ldots, s_n) & \text{se } 0 \le s_1 \le \frac{1}{2(1+t)} \\ g\left(2s_1 - \frac{1}{2(1+t)}, s_2, \ldots, s_n\right) & \text{se } \frac{1}{2(1+t)} \le s_1 \le \frac{3+2t}{4(1+t)} \\ h\left(\frac{4(1+t)s_1 - (3+2t)}{1+2t}, s_2, \ldots, s_n\right) & \text{se } \frac{3+2t}{4(1+t)} \le s_1 \le 1. \end{cases}$$

d. *Il prodotto è commutativo per $n \ge 2$.* La dimostrazione della commutatività del prodotto per $n \ge 2$ segue dallo schema:



Le omotopie sono date da:

$$F_1(s;t) = \begin{cases} x_0 & \text{se} \quad 0 \le s_1 \le 1/2, \quad 0 \le s_2 \le t/2 \\ f(2s_1, \frac{2s_2 - t}{2-t}, s_3, \dots, s_n) & \text{se} \quad 0 \le s_1 \le 1/2, \quad t/2 \le s_2 \le 1 \\ g(2s_1 - 1, (1+t)s_2, s_3, \dots, s_n) & \text{se} \quad 1/2 \le s_1 \le 1, \quad 0 \le s_2 \le \frac{1}{1+t} \\ x_0 & \text{se} \quad 1/2 \le s_1 \le 1, \quad \frac{1}{1+t} \le s_2 \le 1; \end{cases}$$

$$F_2(s,t) = \begin{cases} x_0 & \text{se} \quad 0 \le s_1 \le \frac{1-t}{2}, \quad 0 \le s_2 \le \frac{1}{2} \\ g(\frac{2s_1 + t - 1}{1+t}, 2s_2, s_3, \dots, s_n) & \text{se} \quad \frac{1-t}{2} \le s_1 \le 1, \quad 0 \le s_2 \le \frac{1}{2} \\ f((2-t)s_1, 2s_2 - 1, s_3, \dots, s_n) & \text{se} \quad 0 \le s_1 \le \frac{1}{2-t}, \quad 1/2 \le s_2 \le 1 \\ x_0 & \text{se} \quad \frac{1}{2-t} \le s_1 \le 1, \quad 1/2 \le s_2 \le 1; \end{cases}$$

$$F_3(s) = \begin{cases} g((1+t)s_1, 2s_2, s_3, \dots, s_n) & \text{se} \quad 0 \le s_1 \le \frac{1}{1+t}, \quad 0 \le s_2 \le \frac{1}{2} \\ x_0 & \text{se} \quad \frac{1}{1+t} \le s_1 \le 1, \quad 0 \le s_2 \le 12 \\ x_0 & \text{se} \quad 0 \le s_1 \le \frac{t}{2}, \quad \frac{1}{2} \le s_2 \le 1 \\ f(\frac{2s_1 - t}{2-t}, 2s_2 - 1, s_3, \dots, s_n) & \text{se} \quad \frac{t}{2} \le s_1 \le 1, \quad \frac{1}{2} \le s_2 \le 1\,; \end{cases}$$

$$F_4(s) = \begin{cases} g(2s_1, (2-t)s_2, s_3, \dots, s_n) & \text{se} \quad 0 \le s_1 \le \frac{1}{2}, \quad 0 \le s_2 \le \frac{1}{2-t} \\ x_0 & \text{se} \quad 0 \le s_1 \le \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2-t} \le s_2 \le 1 \\ x_0 & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le s_1 \le 1, \quad 0 \le s_2 \le \frac{1-t}{2} \\ f(2s_1 - 1, \frac{2s_2 + t - 1}{1+t}, s_3, \dots, s_n) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le s_1 \le 1, \quad \frac{1-t}{2} \le s_2 \le 1\,. \end{cases}$$

□

TEOREMA 1.5. *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo topologico con identità* e*. Allora* $\pi_1(\mathbf{G}, e)$ *è un gruppo abeliano.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(I, \{0,1\}; \mathbf{G}, e)$. Definiamo l'applicazione

$$\phi : I \times I \ni (s,t) \to \alpha(s)\beta(t) \in \mathbf{G}\,.$$

Osserviamo che, posto

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} (2t, 0) & \text{se} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (1, 2t-1) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \qquad \gamma_2(t) = \begin{cases} (0, 2t) & \text{se} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (2t-1, 0) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

abbiamo:

$$\alpha \cdot \beta(s) = \phi \circ \gamma_1(s), \qquad \beta \cdot \alpha(s) = \phi \circ \gamma_2(s)\,.$$

Quindi

$$I \times I \ni (s,t) \to F(s;t) = \phi(t\gamma_2(s) + (1-t)\gamma_1(s)) \in \mathbf{G}$$

è un'omotopia tra $\alpha \cdot \beta$ e $\beta \cdot \alpha$. □

Osserviamo che, se X è uno spazio topologico, $x_0 \in X$ ed Y è la componente connessa per archi di X contenente x_0, abbiamo $\pi_n(Y, x_0) = \pi_n(X, x_0)$ per ogni $n \ge 1$, mentre l'insieme $\pi_0(X, x_0)$ è in corrispondenza biunivoca con le componenti connesse per archi di X.

2. Cambiamento del punto di base e azione del gruppo fondamentale

Sia X uno spazio topologico connesso per archi, e sia $\alpha : I \to X$ un cammino continuo, di estremi $x_0 = \alpha(0)$ ed $x_1 = \alpha(1)$.

Ad esso associeremo un'applicazione $\alpha_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_1)$. Per definirla, è conveniente utilizzare le identificazioni:

$$\pi_n(X, x_0) \simeq \pi(D^n, S^{n-1}; X, x_0) \quad \text{e} \quad \pi_n(X, x_1) \simeq \pi(D^n, S^{n-1}; X, x_1).$$

La α_* si ottiene allora per passaggio al quoziente dall'applicazione

eq:hdba (2.1) $$\alpha* : \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X, x_0) \to \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X, x_1)$$

definita da:

eq:hdbb (2.2) $$\alpha * f = \begin{cases} f(2x) & \text{se} \quad |x| \le \frac{1}{2} \\ \alpha(2|x| - 1) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le |x| \le 1. \end{cases}$$

Chiaramente possiamo definire applicazioni

$$\alpha* : \mathcal{C}(I^n, bI^n; X, x_0) \to \mathcal{C}(I^n, bI^n; X, x_1) \quad \text{ed}$$
$$\alpha* : \mathcal{C}(S^n, e_0; X, x_0) \to \mathcal{C}(S^n, e_0; X, x_1)$$

utilizzando le composizioni con gli omeomorfismi canonici

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(I^n, bI^n; X, x_0) & \xrightarrow{\alpha*} & \mathcal{C}(I^n, bI^n; X, x_1) \\ \sim\downarrow & & \uparrow\sim \\ \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X, x_0) & \xrightarrow{\alpha*} & \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X, x_1) \\ \sim\uparrow & & \downarrow\sim \\ \alpha* : \mathcal{C}(S^n, e_0; X, x_0) & \xrightarrow[\alpha*]{} & \mathcal{C}(S^n, e_0; X, x_1) \end{array}$$

tm:hxba TEOREMA 2.1. *L'applicazione* (2.1) *definisce per passaggio al quoziente un isomorfismo*

eq:hdbb (2.3) $$\alpha_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_1).$$

DIMOSTRAZIONE. Si verifica infatti che $(\alpha^{-1})_*$ è l'applicazione inversa di α_*. □

OSSERVAZIONE 2.2. In particolare, se $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(I, \{0, 1\}; X, x_0)$,

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(4s) & \text{se} \quad 0 \le s \le \frac{1}{4}, \\ \beta([4s - 1]/2) & \text{se} \quad \frac{1}{4} \le s \le \frac{3}{4}, \\ \alpha(4s - 3) & \text{se} \quad \frac{3}{4} \le s \le 1. \end{cases}$$

Quindi $\alpha * \beta$ è omotopa ad $\alpha \cdot \beta \cdot \breve{\alpha}$ (dove $\breve{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ è il cammino inverso di α).

Otteniamo quindi il seguente:

TEOREMA 2.3. *Sia X uno spazio topologico e sia $x_0 \in X$. Per ogni intero $n \geq 1$ l'applicazione:*

(2.4)
$$\mathcal{C}(I, \{0,1\}; X, x_0) \times \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X, x_0) \ni (\alpha, f) \to \alpha * f \in \mathcal{C}(D^n, S^{n-1}; X, x_0)$$

definisce per passaggio al quoziente un'azione di gruppo:

$$\pi_1(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \ni ([\alpha], [f]) \to [\alpha * f] \in \pi_n(X, x_0) \tag{2.5}$$

del gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ sull'n-esimo gruppo di omotopia $\pi_n(X, x_0)$ con punti base x_0.

Per $n = 1$ tale azione coincide con l'inversa della rappresentazione aggiunta.

3. Insiemi convessi in $\mathbb{R}^n$

Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se per ogni coppia di punti $x_0, x_1 \in K$ il segmento $[x_0, x_1] = \{x_0 + t(x_1 - x_0) \,|\, 0 \leq t \leq 1\}$ è tutto contenuto in K.

Un'applicazione $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice *affine* se $f(x_0 + t(x_1 - x_0)) = f(x_0) + t(f(x_1) - f(x_0))$ per ogni $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^m$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$.

PROPOSIZIONE 3.1. *Immagini dirette e inverse di convessi mediante applicazioni affini sono convesse.*

DEFINIZIONE 3.2. Sia K un intorno convesso di 0 in $\mathbb{R}^n$. La *funzione di Minkowski* di K è la funzione:

$$q_K(x) = \inf\{t > 0 \,|\, t^{-1}x \in K\}\,. \tag{3.1}$$

PROPOSIZIONE 3.3. *Se K è un intorno convesso dell'origine di $\mathbb{R}^n$, la funzione di Minkowski $q_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua, positiva su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e gode delle proprietà:*

$$\begin{cases} q_K(tx) = t\, q_K(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t > 0 & \textit{(positiva omogeneità)} \\ q_K(x + y) \leq q_K(x) + q_K(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n & \textit{(subattività)}\,. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. La positiva omogeneità segue immediatamente dalla definizione. Dimostriamo la subattività: siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ e siano $s > 0$, $t > 0$ tali che $s^{-1}x$, $t^{-1}y \in K$. Poiché K è convesso, posto $\lambda = \frac{s^{-1}}{s^{-1}+t^{-1}}$, abbiamo $s^{-1}x + \lambda(t^{-1}y - s^{-1}x) = \frac{1}{(s+t)^{-1}}(x + y) \in K$, onde $q_K(x + y) \leq s + t$, e la subadditività si ottiene passando all'estremo inferiore a secondo membro.

Poiché 0 è un punto interno di K, avremo $\overline{B(0, r)} \subset K$ per qualche $r > 0$. Questa relazione ci dà

$$q_K(x) \leq \frac{1}{r}|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Infatti abbiamo $\frac{r}{|x|}x \in K$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Per la subadditività otteniamo allora

$$|q_K(x) - q_K(y)| \leq \frac{1}{r}|x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

e quindi la q_K è continua. □

TEOREMA 3.4. *Due qualsiasi insiemi convessi e compatti con parte interna non vuota di $\mathbb{R}^n$ sono omeomorfi tra loro. Ogni omeomorfismo tra le loro frontiere si estende a un omeomorfismo tra i due convessi.*

DIMOSTRAZIONE. Siano K e K' due convessi compatti con parte interna non vuota. A meno di una traslazione possiamo supporre che 0 sia un punto interno di $K \cap K'$. La funzione

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \to \frac{q_k(x)}{q_{K'}(x)} \in \mathbb{R}$$

è continua e positivamente omogenea di grado 0. Ammette pertanto massimo e minimo in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Ne segue che la

$$g(x) = \begin{cases} \frac{q_k(x)}{q_{K'}(x)} \cdot x & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

è un omeomorfismo di K su K'. □

Osserviamo infine che se K è un convesso compatto con $0 \in \text{int}(K)$, allora il quoziente iniettivo dell'applicazione continua $bK \times I \ni (x,t) \to tx \in K$ definisce un omeomorfismo di $(bK \times I) \big/ _{(bK \times \{0\})}$ su K. Se $\phi : bK \to bK'$ è un omeomorfismo tra le frontiere di due convessi compatti che contengono 0 come punto interno, l'omeomorfismo $bK \times I \xrightarrow{\phi \times \text{id}_I} bK' \times I$ induce per passaggio al quoziente un omeomorfismo $K \to K'$ che estende $\phi : bK \to bK'$. In particolare ogni convesso compatto con parte interna non vuota di $\mathbb{R}^n$ è omeomorfo a $\mathbf{D}^n$ e ha frontiera omeomorfa a S^{n-1}.

4. Fibrati di Serre

DEFINIZIONE 4.1. Un *fibrato topologico* $E \xrightarrow{p} B$ è il dato di due spazi topologici E, B e di un'applicazione continua $p : E \to B$. Chiamiamo E lo *spazio totale*, B la *base* e $p : E \to B$ la *proiezione sulla base* del fibrato $E \xrightarrow{p} B$.

Se U è un sottospazio di B, porremo $E|_U = p^{-1}(U)$ e chiameremo il fibrato topologico $E|_U \xrightarrow{p_U} U$, ove p_U è la restrizione di p a $p^{-1}(U)$, la *restrizione ad U* del fibrato $E \xrightarrow{p} B$.

Una *sezione continua* del fibrato $E \xrightarrow{p} B$ su un aperto U di B è un'applicazione continua $s : U \to E$ tale che $p \circ s(b) = b$ per ogni $b \in U$. Indichiamo con $\Gamma(U, E)$ l'insieme delle sezioni continue di E su U.

DEFINIZIONE 4.2. Sia $E \xrightarrow{p} B$ un fibrato topologico, Y uno spazio topologico e $\phi : Y \to B$ un'applicazione continua. Un'applicazione $f : Y \to E$ è un *rilevamento*, o *rialzamento*, di ϕ se è continua e $p \circ f = \phi$.

DEFINIZIONE 4.3. Un fibrato topologico $E \xrightarrow{p} B$ si dice un *fibrato di Serre* se, per ogni intero non negativo n, per ogni applicazione continua

$$f : I^n \to E,$$

ogni omotopia

$$F : I^n \times I \to B \quad \text{di} \quad p \circ f : I^n \to B$$

ammette un rilevamento

$$\tilde{F} : I^n \times I \to E,$$

(è cioè $\tilde{F}$ continua e $p \circ \tilde{F} = F$) che soddisfa la condizione iniziale

$$\tilde{F}(s, 0) = f(s) \quad \forall s \in I^n.$$

ESEMPIO 4.4. I fibrati $E = I \xrightarrow{p_i} I = B$, ove $p_1(x) = x/2$ e $p_2(x) = x(1-x)/4$ *non* sono fibrati di Serre. Nel primo caso, ciò segue dal fatto che la $I \ni t \to \phi(t) = t \in B$ non si può rilevare a un'applicazione $f : E \to E$ perché p_1 non è surgettiva. Nel secondo caso consideriamo $F : I^2 \ni (s; t) \to 4s(1-s)(1-t) \in B$, ed $f : I \ni s \to s \in E = I$. Non è possibile rilevare F ad un'omotopia $\tilde{F}$ di f.

LEMMA 4.5. *Supponiamo che $E \xrightarrow{p} B$ sia un fibrato di Serre. Fissiamo un punto $\xi_0 \in E$ e sia $b_0 = p(\xi_0) \in B$. Sia n un intero non negativo. Ogni $\phi \in \mathcal{C}(I^n, 0; B, b_0)$ ammette un rilevamento $f \in \mathcal{C}(I^n, 0; E, \xi_0)$.*

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per ricorrenza su n. Per $n = 0$ l'affermazione è banale. Supponiamo ora che m sia un intero positivo e che la tesi sia vera per $n = m - 1$. In particolare c'è un'applicazione $g \in \mathcal{C}(I^{m-1}, 0; E, \xi_0)$ tale che $p(g(s_1, ..., s_{m-1})) = \phi(s_1, ..., s_{m-1}, 0)$, $g(0, \dots, 0) = \xi_0$. Per definizione di fribrato di Serre esisterà allora una $f : I^{m-1} \times I = I^m \to E$ con $f(s_1, \dots, s_{m-1}, 0) = g(s_1, \dots, s_{m-1})$ e $p \circ f = \phi$. Tale f soddisfa la tesi del lemma. □

LEMMA 4.6. *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un fibrato di Serre e siano $\xi_0 \in E$, $b_0 = p(\xi_0)$. Se $f, g \in \mathcal{C}(I^n, 0; E, \xi_0)$ e $p \circ f = p \circ g = \phi \in \mathcal{C}(I^n, 0; B, b_0)$, allora f e g sono $\{0\}$-omotope in un'omotopia $F : I^n \times I \to E$ tale che $p \circ F(s; t) = \phi(s)$ per ogni $(s, t) \in I^n \times I$.*

DIMOSTRAZIONE. Il caso $n = 0$ è banale. Possiamo quindi ragionare per ricorrenza, supponendo che $n > 0$ e la tesi sia vera per applicazioni di $\mathcal{C}(I^{n-1}, 0; E, \xi_0)$. In particolare possiamo supporre che esista $G : I^{n-1} \times I \to E$ continua tale che $G(0; t) = \xi_0$ per ogni $t \in I$ e

$$\begin{aligned} G(s_1, \dots, s_{n-1}; 0) &= f(s_1, \dots, s_{n-1}, 0), \\ G(s_1, \dots, s_{n-1}; 1) &= g(s_1, \dots, s_{n-1}, 0), \\ p \circ G(s_1, \dots, s_{n-1}; t) &= \phi(s_1, \dots, s_{n-1}; 0). \end{aligned}$$

Sia A la frontiera dell'ipercubo $I^n_{s_1,\dots,s_n} \times I_t$, privata dei punti interni della faccia $\{s_n = 1\}$:

$$A = \{(s_1, \dots, s_n; t) \in I^{n+1} \mid \sup\{|2t - 1|, |1 - s_n|, \sup_{1 \le j \le n-1} |2s_j - 1|, \} = 1\}.$$

Definiamo un'applicazione continua $h : A \to E$ mediante:

$$h(s_1, \dots, s_n; t) = \begin{cases} f(s_1, \dots, s_n) & \text{se} \quad t = 0 \\ g(s_1, \dots, s_n) & \text{se} \quad t = 1 \\ G(s_1, \dots, s_{n-1}; t) & \text{se} \quad s_n = 0\,. \end{cases}$$

Definiamo $\tilde{\phi}(s;t) = \phi(s)$ per ogni $(s,t) \in I^n \times I$.

Osserviamo che le coppie (I^{n+1}, I^n) ed (I^{n+1}, A) sono omeomorfe. Possiamo cioè definire un omeomorfismo $\psi : I^{n+1} \to I^{n+1}$ che trasformi A in $I^n = bI^{n+1} \cap \{t = 0\}$.

Per la definizione di fibrato di Serre possiamo estendere $h \circ \psi^{-1}$ ad un'applicazione continua $\tilde{h} \circ \psi^{-1} : I^{n+1} \to E$ tale che $p \circ \tilde{h} \circ \psi^{-1}(s;t) = \tilde{\phi} \circ \psi^{-1}(s;t)$ per ogni $(s,t) \in I^n \times I$. La $\tilde{h}$ definisce allora l'omotopia cercata. □

tm:hddf

TEOREMA 4.7. *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un fibrato di Serre. Fissiamo un intero $n \geq 0$ e siano $\phi \in \mathcal{C}(I^{n+1}, B)$, $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(I^{n+1}, E)$ tali che*

$$\begin{cases} p \circ f_0 = p \circ f_1 = \phi \\ f_0(s', 0) = f_1(s', 0) \quad \forall s' \in I^n\,. \end{cases}$$

Allora esiste un'applicazione continua $F : I^{n+1} \times I \to E$ tale che $p \circ F(s,t) = \phi(s)$ per ogni $(s,t) \in I^{n+1} \times I$ e $F(s', 0, t) = f_0(s', 0) = f_1(s', 0)$ per ogni $s' \in I^n$ ed ogni $t \in I$.

DIMOSTRAZIONE. Come nella dimostrazione del Teorema precedente, osserviamo che la coppia (I^{n+2}, I^{n+1}) è omeomorfa alla coppia (I^{n+2}, A), ove A è la frontiera dell'ipercubo I^{n+2} privata dei punti interni della faccia $\{s_{n+2} = 1\}$. Posto $\Phi(s,t) = \phi(s)$, la F cercata è il rilevamento di $I^{n+2} \xrightarrow{\Phi} B$ con valori iniziali su A:

$$\begin{cases} F(s', 0, t) = f_0(s', 0) = f_1(s', 0) & \forall s' \in I^n, \quad \forall t \in I \\ F(s, 0) = f_0(s) & \forall s \in I^{n+1} \\ F(s, 1) = f_1(s) & \forall s \in I^{n+1}. \end{cases}$$

□

5. Fibrati localmente banali

DEFINIZIONE 5.1. Siano E, B spazi topologici e sia $p : E \to B$ un'applicazione continua. Sia F uno spazio topologico. Diciamo $E \xrightarrow{p} B$ è un *fibrato localmente banale* con fibra F se per ogni punto $x \in B$ esiste un intorno aperto U di x in B e un omeomorfismo $\phi : U \times F \to E\,|_U$ che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\phi} & E\,|_U \\ {\scriptstyle \pi_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & = & U\,. \end{array}$$

Vale il seguente:

tm:hddf

TEOREMA 5.2. *Ogni fibrato localmente banale è un fibrato di Serre.*

La dimostrazione si basa sul seguente criterio:

LEMMA 5.3. *Siano E, B spazi topologici e sia $p : E \to B$ continua. Condizione necessaria e sufficiente affinché $E \xrightarrow{p} B$ sia un fibrato di Serre è che per ogni $x \in B$ vi sia un intorno U di x in B tale che $p^{-1}(U) \xrightarrow{p|_{p^{-1}(U)}} U$ sia un fibrato di Serre.*

DIMOSTRAZIONE. La condizione è chiaramente necessaria. Dimostriamone la sufficienza.

Siano $f \in \mathcal{C}(I^n, E)$ ed $F \in \mathcal{C}(I^{n+1}, B)$ tali che $p \circ f(s) = F(s, 0)$ per $s \in I^n$. Poiché $F(I^{n+1}) \subset B$ è compatto, possiamo ricoprirlo con un numero finito di aperti $U_1, \dots, U_\ell$ di B, tali che ogni $p^{-1}(U_j) \xrightarrow{p_{U_j}} U_j$ sia un fibrato di Serre.

A questo punto suddividiamo il cubo I^{n+1} in cubi $Q_1, \dots, Q_k$, di lato $1/N$, con $k = N^{n+1}$, in modo tale che ciascun cubo Q_r della suddivisione sia contenuto in un aperto U_{j_r} con $1 \le j_r \le \ell$, per ogni $1 \le r \le k$. Ordiniamo i cubi Q_r secondo l'ordinamento lessicografico dei loro centri. (Cioè: $Q_1 = \{0 \le s_i \le 1/N \text{ per } 1 \le i \le n+1\}$, $Q_2 = \{1/N \le s_1 \le 2/N, \text{ e } 0 \le s_i \le 1/N \text{ per } 2 \le i \le n+1\}$, ...) In particolare, ciascun cubo Q_r interseca l'unione dei precedenti in un sottoinsieme A_r della propria frontiera che è un'unione di facce connessa e semplicemente connessa. La coppia (Q_r, A_r) risulta quindi, per ogni r, omeomorfa alla coppia (I^{n+1}, I^n).

Possiamo allora procedere per ricorrenza alla costruzione di $\tilde{F}$ su $\bigcup_{r \le h} Q_r$, definendo la $\tilde{F}$ su Q_h in modo che $p \circ \tilde{F} = F$ su Q_h e coincida con l'applicazione già definita su $\bigcup_{r<h} Q_r$ sull'intersezione $A_h = \left(\bigcup_{r<h} Q_r\right) \cap Q_h$, utilizzando l'omeomorfismo tra le coppie topologiche (I^{n+1}, I^n) e (Q_h, A_h). □

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA tm:hddf 5.2. Basta dimostrare che un fibrato banale $B \times F \xrightarrow{p} B$, ove $p(b, \tau) = b$ per ogni $(b, \tau) \in B \times F$ è di Serre. Date $f : I^n \ni s \to (\phi(s), \psi(s)) \in B \times F$ e $\Phi : I^n \times I \ni (s, t) \to \Phi(s, t) \in B$ con $\Phi(s; 0) = \phi(s)$, rialziamo Φ ponendo $\tilde{\Phi}(s; t) = (\Phi(s, t), \psi(s))$ per ogni $(s, t) \in I^n \times I$. Chiaramente $\tilde{\Phi}$ è continua e $p \circ \tilde{\Phi} = \Phi$. □

6. Successione esatta di omotopia di un fibrato di Serre

Siano X ed Y due spazi topologici non vuoti. Fissiamo $x_0 \in X$ ed $y_0 \in Y$. Dall'omeomorfismo

$$\mathcal{C}(S^n, e_0; X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \mathcal{C}(S^n, e_0; X, x_0) \times \mathcal{C}(S^n, e_0; Y, y_0)$$

ricaviamo il:

TEOREMA 6.1. *Con le notazioni introdotte sopra, per ogni intero $n \ge 1$ abbiamo:*

eq:hdfg

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0) \quad \textit{(prodotto diretto).} \tag{6.1}$$

Quindi il calcolo dei gruppi di omotopia di un fibrato banale si riduce a quello dei gruppi di omotopia della base e della fibra. Per i fibrati di Serre, non vale in generale la (6.1), ma i gruppi di omotopia dello spazio totale, della base e della fibra sono correlati da una *successione esatta*.

6.1. Successioni esatte.

DEFINIZIONE 6.2. Sia $\{A_k\}_{k=0,1,\dots}$ una successione di insiemi non vuoti, su ciascuno dei quali sia fissato un *punto base* $a_0^k \in A_k$. Una sequenza di applicazioni:

sucpunt

$$\begin{aligned} \cdots \to A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-2} \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow A_2 \xrightarrow{f_2} A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

si dice un *complesso di insiemi puntati* se

$$f_n(A_n) \subset f_{n-1}^{-1}(a_0^{n-2}) \qquad \forall n \geq 2\,. \tag{6.3}$$

La (6.2) è una *successione esatta di insiemi puntati* se

$$f_n(A_n) = f_{n-1}^{-1}(a_0^{n-2}) \qquad \forall n \geq 2\,. \tag{6.4}$$

Se gli A_k hanno ciascuno una struttura di gruppo, con identità a_0^k, e se le f_n ($n \geq 1$) sono omomorfismi di gruppi, diremo che (6.2) è, rispettivamente, un *complesso*, o una *successione esatta di gruppi*.

6.2. Definizione dell'applicazione Δ. Sia $\phi \in \mathcal{C}(I^n, bI^n; B, b_0)$. Sia A la frontiera dell'ipercubo I^n privata dei punti interni della faccia $\{s_n = 0\}$:

$$A = \{s \in I^n \mid \sup\{s_n, \sup_{1\leq j\leq n-1} |2s_j - 1|\} = 1\}.$$

Poiché la coppia (I^n, A) è omeomorfa alla coppia (I^n, I^{n-1}), per le proprietà dei fibrati di Serre, possiamo trovare un rilevamento $f \in \mathcal{C}(I^n, E)$ di ϕ tale che

$$\begin{cases} p \circ f = \phi & \text{su} \quad I^n, \\ f(s) = \xi_0 & \text{su} \quad A \end{cases}$$

Poiché $\phi(bI^n) = \{b_0\}$, $f(s', 0) \in F$ per ogni $s' \in I^{n-1}$. Perciò la restrizione di f a $I^{n-1} \simeq \{s \in I^n \mid s_n = 0\}$ definisce un elemento di $\mathcal{C}(I^{n-1}, bI^{n-1}; F, \xi_0)$ e quindi una classe di omotopia $[f|_{I^{n-1}}]$ in $\pi_{n-1}(F, \xi_0)$.

Per il Teorema 5.2, l'elemento $[f|_{I^{n-1}}]$ dipende solo dalla classe di omotopia di ϕ in $\pi_n(B, b_0)$. Abbiamo quindi ottenuto un'applicazione

eq:hodta

$$\Delta = \Delta_n : \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, \xi_0), \quad n \geq 1. \tag{6.5}$$

6.3. La successione esatta di un fibrato di Serre.

L'inclusione $\iota : F \simeq p^{-1}(b_0) \to E$ e la proiezione $p : E \to B$ definiscono applicazioni $\iota_* : \pi_n(F, \xi_0) \to \pi_n(E, \xi_0)$ e $p_* : \pi_n(E, \xi_0) \to \pi_n(B, b_0)$. Abbiamo:

TEOREMA 6.3. *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un fibrato di Serre. Allora la:*

$$
\begin{array}{rcccc}
\dots & \longrightarrow \pi_{n+1}(F,\xi_0) & \xrightarrow{\iota_*} \pi_{n+1}(E,\xi_0) & \xrightarrow{p_*} \pi_{n+1}(B,b_0) \\
\xrightarrow{\Delta} & \pi_n(F,\xi_0) & \xrightarrow{\iota_*} \pi_n(E,\xi_0) & \xrightarrow{p_*} \pi_n(B,b_0) \\
 & & \cdots\cdots & \longrightarrow \pi_2(B,b_0) \\
\xrightarrow{\Delta} & \pi_1(F,\xi_0) & \xrightarrow{\iota_*} \pi_1(E,\xi_0) & \xrightarrow{p_*} \pi_1(B,b_0) \\
\xrightarrow{\Delta} & \pi_0(F,\xi_0) & \xrightarrow{\iota_*} \pi_0(E,\xi_0) & \xrightarrow{p_*} \pi_0(B,b_0)
\end{array}
\tag{6.6}
$$

serreseq

è una successione esatta di insiemi puntati.

Per $n \geq 1$ le applicazioni $\pi_n(F,\xi_0) \xrightarrow{\iota_*} \pi_n(E,\xi_0)$, $\pi_n(E,\xi_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B,b_0)$ e $\pi_{n+1}(B,b_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_n(F,\xi_0)$ sono omomorfismi di gruppi.

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che (6.6) sia un complesso di insiemi puntati e che p_*, ι_*, Δ siano omomorfismi di gruppi quando i due insiemi tra cui agiscono hanno una struttura di gruppo, sono facili conseguenze delle definizioni. Dimostriamo l'esattezza di (6.6).

Esattezza in $\pi_n(F,\xi_0)$. Sia $f \in \mathcal{C}(I^n, bI^n; F, \xi_0)$, con $\iota_*([f]) = 0$. Ciò significa che esiste un'omotopia $F : I^n \times I \to E$ tale che

$$
\begin{cases}
F(s,0) = f(s) & \forall s \in I^n, \\
F(s,t) = \xi_0 & \forall (s,t) \in (bI^n) \times I, \\
F(s,1) = \xi_0 & \forall s \in I^n\,.
\end{cases}
$$

Sia $\phi = p \circ F$. Allora $\phi \in \mathcal{C}(I^n, bI^n; B, b_0)$ ed $[f] = \Delta([\phi])$.

Esattezza in $\pi_n(E,\xi_0)$. Sia $f \in \mathcal{C}(I^n, bI^n; E, \xi_0)$, con $p_*([f]) = 0$. Ciò significa che esiste un'omotopia $F : I^n \times I \to B$ tale che

$$
\begin{cases}
F(s,0) = p \circ f(s) & \forall s \in I^n, \\
F(s,t) = b_0 & \forall (s,t) \in (bI^n) \times I, \\
F(s,1) = b_0 & \forall s \in I^n\,.
\end{cases}
$$

Possiamo allora rialzare F ad un'omotopia $\tilde{F} : I^n \times I \to E$ con le proprietà:

$$
\begin{cases}
\tilde{F}(s,0) = f(s) & \forall s \in I^n, \\
\tilde{F}(s,t) = \xi_0 & \forall (s,t) \in (bI^n) \times I, \\
p \circ \tilde{F}(s,t) = F(s,t) & \forall (s,t) \in I^n \times I\,.
\end{cases}
$$

Allora la $g : I^n \ni s \to \tilde{F}(s,1) \in F$ è un'applicazione in $\mathcal{C}(I^n, bI^n; F, \xi_0)$ e $\iota_*([g]) = [f]$.

Esattezza in $\pi_n(B, b_0)$. Sia $\phi \in \mathcal{C}(I^n, bI^n; B, b_0)$ e sia $f \in \mathcal{C}(I^n, bI^n; E, \xi_0)$ tale che

$$\begin{cases} f(s', s_n) = \xi_0 & \forall s = (s', s_n) \in (bI^{n-1}) \times I, \\ f(s', 1) = \xi_0 & \forall s' \in I^{n-1}, \\ p \circ f(s) = \phi(s) & \forall s \in I^n \,. \end{cases}$$

Supponiamo sia $\Delta([\phi]) = 0$. Allora esiste un'omotopia $\Phi : I^{n-1} \times I \to F$ con le proprietà:

$$\begin{cases} \Phi(s', 1) = f(s', 0) & \forall s' \in I^{n-1}, \\ \Phi(s', t) = \xi_0 & \forall s' \in bI^{n-1}, \\ \Phi(s', 0) = \xi_0 & \forall s' \in I^{n-1} \,. \end{cases}$$

Definiamo $h \in \mathcal{C}(I^n, bI^n; E, \xi_0)$ ponendo:

$$h(s) = \begin{cases} \Phi(s', 2s_n) & \text{se} \quad 0 \le s_n \le \frac{1}{2}, \\ f(s', 2s_n - 1) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le s_n \le 1 \,. \end{cases}$$

Osserviamo che

$$p \circ h(s) = \begin{cases} b_0 & \text{se} \quad 0 \le s_n \le \frac{1}{2} \\ \phi(s', 2s_n - 1) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le s_n \le 1 \,. \end{cases}$$

Quindi $p_*([h]) = [p \circ h] = [\hat{b}_0 \cdot \phi] = [\hat{b}_0] \cdot [\phi] = [\phi]$. La dimostrazione è completa. □

Definizione 6.4. Un fibrato topologico localmente banale con fibra discreta si dice un *rivestimento*.

Corollario 6.5. *Se* $E \xrightarrow{p} B$ *è un rivestimento,* $\xi_0 \in E$ *e* $b_0 = p(\xi_0)$*, allora* $\pi_n(E, \xi_0) \simeq \pi_n(B, b_0)$ *per ogni* $n \ge 2$*, e per* $n = 1$ *abbiamo la successione esatta di insiemi puntati:*

$$0 \to \pi_1(E, \xi_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \to \pi_0(F, \xi_0) \,. \tag{6.7}$$

Se E *è connesso per archi, allora la* $\pi_1(B, b_0) \to \pi_0(F, \xi_0)$ *è surgettiva.*

Abbiamo qui indicato con 0 l'insieme (o il gruppo) che contengono un solo elemento.

7. Esempi

Esempio 7.1 (**Gruppi di omotopia delle sfere**). Sappiamo dai risultati dei paragrafi precedenti che:

$$\pi_n(S^m, e_0) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n \le m - 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se} \quad n = m \,. \end{cases} \tag{7.1}$$

In generale i gruppi $\pi_n(S^m, e_0)$ non sono banali se $n > m$.

Il problema di calcolare *tutti* i gruppi di omotopia di ordine $> m$ della sfera S^m, per un m arbitrario, non è ancora completamente risolto. Sono stati calcolati tutti i gruppi $\pi_n(S^m, e_0)$ con per $n \le m + 30$.

Le sfere si sono rivelati oggetti topologicamente complicati. A titolo di esempio, riportiamo nel seguito alcuni risultati sull'omotopia delle sfere di dimensione piccola.

Abbiamo:

$$\pi_n(S^1, e_0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se} \quad n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{7.2}$$

Per la sfera S^2 dello spazio ordinario abbiamo, per i gruppi $\pi_n(S^2, e_0)$ con $2 \leq n \leq 21$:

$$\begin{array}{lll} \pi_2(S^2, e_0) = \mathbb{Z} & \pi_3(S^2, e_0) = \mathbb{Z} & \pi_4(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2 \\ \pi_5(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2 & \pi_6(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_{12} & \pi_7(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2 \\ \pi_8(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2 & \pi_9(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_3 & \pi_{10}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_{15} \\ \pi_{11}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2 & \pi_{12}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2^2 & \pi_{13}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2^2 \\ \pi_{14}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_{84} \times \mathbb{Z}_2^2 & \pi_{15}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2^2 & \pi_{16}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \\ \pi_{17}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 & \pi_{18}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 & \pi_{19}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3 \\ \pi_{20}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3 & \pi_{21}(S^2, e_0) = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3 & \end{array}$$

Abbiamo poi per la sfera di dimensione tre:

$$\pi_n(S^3, e_0) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n \leq 2 \\ \pi_n(S^2, e_0) & \text{se} \quad n \geq 3\,. \end{cases} \tag{7.3}$$

L'uguaglianza segue qui dalla *fibrazione di Hopf*: infatti S^2 è omeomorfo alla retta proiettiva complessa $\mathbb{CP}^1$. Allora l'applicazione naturale:

$$S^3 \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \ni z \to [z] \in \mathbb{CP}^1$$

definisce un fibrato localmente banale $S^3 \xrightarrow{p} S^2$ con fibra S^1. Dalla successione esatta del fibrato:

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \quad \pi_n(S^1, e_0) \quad &\longrightarrow \pi_n(S^3, e_0) \longrightarrow \pi_n(S^2, e_0) \\ \longrightarrow \pi_{n-1}(S^1, e_0) \longrightarrow \quad &\cdots \end{aligned}$$

poiché $\pi_n(S^1, e_0) = 0$ per $n \geq 2$, otteniamo che $\pi_n(S^3, e_0) \simeq \pi_n(S^2, e_0)$ per ogni $n \geq 2$.

Analogamente, S^4 si può identificare alla retta proiettiva sui quaternioni $\mathbb{HP}^1$, definita da

$$\mathbb{HP}^1 = (\mathbb{H}^2 \setminus \{0\}) /_\sim$$
$$\text{con} \quad (q_1, q_2) \sim (q_1', q_2') \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{H} \text{ tale che } q_i' = q_i \cdot q \text{ per } i = 1, 2.$$

Possiamo identificare S^7 con $\{(q_1, q_2) \in \mathbb{H}^2 \mid |q_1|^2 + |q_2|^2 = 1\}$. Otteniamo allora la *fibrazione di Hopf*

$$S^7 \ni (q_1, q_2) \to [(q_1, q_2)] \simeq S^4.$$

La sua fibra tipica è S^3 ed abbiamo perciò la successione esatta di omotopia

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(S^3, e_0) \longrightarrow \pi_n(S^7, e_0) \longrightarrow \pi_n(S^4, e_0)$$
$$\longrightarrow \pi_{n-1}(S^3, e_0) \longrightarrow \cdots$$

Per $n < 7$, abbiamo $\pi_n(S^7, e_0) = 0$ e dunque $\pi_n(S^4, e_0) \simeq \pi_{n-1}(S^3, e_0)$. Per $n = 7$, dalla successione esatta

$$\mathbb{Z}_2 \simeq \pi_7(S^3, e_0) \longrightarrow \mathbb{Z} \simeq \pi_7(S^7, e_0) \longrightarrow \pi_7(S^4, e_0)$$
$$\longrightarrow \pi_6(S^3, e_0) = \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow 0 = \pi_6(S^7, e_0)$$

ricaviamo che $\pi_7(S^4, e_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$.

OSSERVAZIONE 7.2. I soli gruppi $\pi_n(S^m, e_0)$ con $n > m$ che contengano infiniti elementi sono i gruppi $\pi_{4m-1}(S^{2m}, e_0)$. Ciascuno di essi è la somma diretta di $\mathbb{Z}$ e di un gruppo finito.

Abbiamo osservato sopra che $\pi_3(S^2, e_0) = \mathbb{Z}$ e $\pi_7(S^4, e_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$. È poi, ad esempio, $\pi_{11}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}$ e $\pi_{15}(S^8, e_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{120}$.

Si può definire un omomorfismo non banale $\pi_{4m-1}(S^{2m}, e_0) \to \mathbb{Z}$ nel modo seguente. Se $f \in \mathcal{C}(S^{4m-1}, e_0; S^{2m}, e_0)$, possiamo innanzi tutto supporre, a meno di un'omotopia, che la f sia di classe $\mathcal{C}^\infty$. Per il lemma di Sard, possiamo poi scegliere due valori non critici distinti $a, b \in S^{2m}$ di f. Allora $M_a = f^{-1}(a)$ ed $M_b = f^{-1}(b)$ sono due sottovarietà di dimensione $(m-1)$ di S^{4m-1}. Se $\tilde{M}_b$ è una sottovarietà di dimensione $(2m)$ di S^{4m-1} con bordo M_b, pur di aver scelto $\tilde{M}_b$ in modo generico, M_a interseche rà $\tilde{M}_b$ trasversalmente in un numero finito di punti. Poiché sia M_a che $\tilde{M}_b$ sono orientate, potremo attribuire a ciascun punto dell'intersezione un valore ± 1 a seconda che i sistemi di riferimento di S^{4m-1} che si ottengono mettendo insieme sistemi di riferimento postivamente orientati di M_a e di $\tilde{M}_b$ siano orientati positivamente oppure negativamente. La somma algebrica di questi valori ± 1 definisce l'*indice di allacciamento* $\lambda(M_a, M_b)$ di M_a ed M_b. Si verifica che questa costruzione definisce un omomorfismo non banale $\pi_{4m-1}(S^{2m}, e_0) \to \mathbb{Z}$ (*omomorfismo di Hopf*).

Abbiamo ancora una *fibrazione di Hopf*

$$S^{15} \to S^8 \quad \text{con fibra} \quad S^7.$$

Essa si ottiene come restrizione alla sfera unitaria della proiezione di $\mathbf{Ca}^2$ sulla retta proiettiva $\mathbf{Ca}\mathbb{P}^1$, dove $\mathbf{Ca}$ è l'algebra degli *ottonioni* o *ottave di Cayley*. Ricordiamo che

$$\mathbf{Ca} \simeq \mathbf{H}^2 \quad \text{con} \quad (q_1, q_2) \cdot (q_1', q_2') = (q_1 q_2 + \bar{q}_2' q_2, q_2 \bar{q}_1' + q_2' q_1).$$

Gli elementi non nulli di $\mathbf{Ca}$ sono invertibili e $\mathbf{Ca}\mathbb{P}^1$ si definisce come il quoziente di $\mathbf{Ca}^2 \setminus \{0\}$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica (α_1, α_2) ad (α_1', α_2') se esiste un ottonione non nullo γ per cui $\alpha_i' = \alpha_i \cdot \gamma$ per $i = 1, 2$. Risulta $\mathbf{Ca}\mathbb{P}^1 \simeq S^8$ e la restrizione della proiezione sul quoziente ad $S^{15} = \{(q_1, q_2; q_3, q_4) \in \mathbb{H}^4 \mid |q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2 + |q_4|^2 = 1\}$ definisce una

fibrazione con fibra S^7. Abbiamo allora la successione esatta di omotopia

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \quad \pi_n(S^7, e_0) \quad &\longrightarrow \pi_n(S^{15}, e_0) \longrightarrow \pi_n(S^8, e_0) \\ \longrightarrow \pi_{n-1}(S^7, e_0) \longrightarrow \quad &\cdots \end{aligned}$$

da cui otteniamo che $\pi_n(S^8, e_0) \simeq \pi_{n-1}(S^7, e_0)$ per $1 \leq n < 15$. Per $n = 15$ otteniamo $\pi_{15}(S^8, e_0) \simeq \mathbb{Z} \times \pi_{14}(S^7, e_0) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{120}$.

A titolo d'informazione, nella tabella seguente elenchiamo i gruppi di omotopia di ordine $m \leq n \leq 15$ delle sfere S^m per $4 \leq m \leq 8$.

$\pi_4(S^4, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_5(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_6(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_7(S^4, e_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$
$\pi_8(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2^2$	$\pi_9(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2^2$	$\pi_{10}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	$\pi_{11}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_{15}$
$\pi_{12}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{13}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_2^3$	$\pi_{14}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_{120} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$	
$\pi_{15}(S^4, e_0) = \mathbb{Z}_{84} \times \mathbb{Z}_2^5$			
$\pi_5(S^5, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_6(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_7(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_8(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_{24}$
$\pi_9(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{10}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{11}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{12}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_{30}$
$\pi_{13}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{14}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_2^3$	$\pi_{15}(S^5, e_0) = \mathbb{Z}_{72} \times \mathbb{Z}_2$	
$\pi_6(S^6, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_7(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_8(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_9(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_{24}$
$\pi_{10}(S^6, e_0) = 0$	$\pi_{11}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_{12}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{13}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_{60}$
$\pi_{14}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_2$	$\pi_{15}(S^6, e_0) = \mathbb{Z}_2^3$		
$\pi_7(S^7, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_8(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_9(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{10}(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_{24}$
$\pi_{11}(S^7, e_0) = 0$	$\pi_{12}(S^7, e_0) = 0$	$\pi_{13}(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{14}(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_{120}$
$\pi_{15}(S^7, e_0) = \mathbb{Z}_2^3$			
$\pi_8(S^8, e_0) = \mathbb{Z}$	$\pi_9(S^8, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{10}(S^8, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{11}(S^8, e_0) = \mathbb{Z}_{24}$
$\pi_{12}(S^8, e_0) = 0$	$\pi_{13}(S^8, e_0) = 0$	$\pi_{14}(S^8, e_0) = \mathbb{Z}_2$	$\pi_{15}(S^8, e_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{120}$

OSSERVAZIONE 7.3. La tabella sopra è organizzata rispetto ai parametri n e k di $\pi_{n+k}(S^n, e_0)$ e illustra, per valori $5 \leq n \leq 8$ un fatto generale. Fissato un intero positivo k, i gruppi di omotopia $\pi_{n+k}(S^n, e_0)$, per $n \geq k + 2$, sono tutti isomorfi tra loro. Il gruppo corrispondente si dice il k-esimo *gruppo di omotopia stabile* delle sfere. I gruppi $\pi_{n+k}(S^n, e_0)$ sono stati calcolati per $k \leq 64$. Indichiamo con Π_k il k-esimo gruppo di omotopia stabile delle sfere. Riportiamo nella seguente tabella i gruppi $\Pi_k \simeq \pi_{2k+2}(S^{k+2}, e_0)$ per $1 \leq k \leq 15$:

$\Pi_1 \simeq \pi_4(S^3) \simeq \mathbb{Z}_2$	$\Pi_2 \simeq \pi_6(S^4) \simeq \mathbb{Z}_2$	$\Pi_3 \simeq \pi_8(S^5) \simeq \mathbb{Z}_{24}$
$\Pi_4 \simeq \pi_{10}(S^6) = 0$	$\Pi_5 \simeq \pi_{12}(S^7) = 0$	$\Pi_6 \simeq \pi_{14}(S^8) \simeq \mathbb{Z}_2$
$\Pi_7 \simeq \pi_{16}(S^9) \simeq \mathbb{Z}_{240}$	$\Pi_8 \simeq \pi_{18}(S^{10}) \simeq \mathbb{Z}_2^2$	$\Pi_9 \simeq \pi_{20}(S^{11}) \simeq \mathbb{Z}_2^3$
$\Pi_{10} \simeq \pi_{22}(S^{12}) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$	$\Pi_{11} \simeq \pi_{24}(S^{13}) \simeq \mathbb{Z}_{540}$	$\Pi_{12} \simeq \pi_{26}(S^{14}) = 0$
$\Pi_{13} \simeq \pi_{28}(S^{15}) \simeq \mathbb{Z}_3$	$\Pi_{14} \simeq \pi_{30}(S^{16}) \simeq \mathbb{Z}_2^2$	$\Pi_{15} \simeq \pi_{32}(S^{17}) \simeq \mathbb{Z}_{480} \times \mathbb{Z}_2$

ESEMPIO 7.4 (**Gruppi di omotopia degli spazi proiettivi reali**). Abbiamo per lo spazio proiettivo reale di dimensione 1:

$$\pi_n(\mathbb{RP}^1, b) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se} \quad n = 1 \\ 0 & \text{se} \quad n \neq 1 \end{cases} \tag{7.4}$$

e per lo spazio proiettivo reale di dimensione $n > 1$:

$$\pi_n(\mathbb{RP}^m, b) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{se} \quad n = 1 \\ 0 & \text{se} \quad 1 < n < m \\ \mathbb{Z} & \text{se} \quad n = m \\ \pi_n(S^m, e_0) & \text{se} \quad n \geq 2\,. \end{cases} \tag{7.5}$$

ESEMPIO 7.5 (**Gruppi di omotopia degli spazi proiettivi complessi)**. L'applicazione $p : S^{2m+1} \ni z \to [z] \in \mathbb{CP}^m$ è, per ogni $m \geq 1$, un fibrato topologico localmente banale con fibra S^1. Dalla successione esatta di un fibrato ricaviamo allora:

$$\pi_n(\mathbb{CP}^m, b) \simeq \pi_n(S^{2m+1}, e_0) \quad \forall n \geq 3\,. \tag{7.6}$$

Abbiamo poi la successione esatta:

(7.7)

$$\begin{aligned} 0 \simeq \pi_2(S^{2m+1}, e_0) &\longrightarrow \pi_2(\mathbb{CP}^m, b) \longrightarrow \mathbb{Z} \simeq \pi_1(S^1, e_0) \\ \longrightarrow 0 \simeq \pi_1(S^{2m+1}, e_0) &\longrightarrow \pi_1(\mathbb{CP}^m, b) \longrightarrow \qquad 0 \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{cases} \pi_1(\mathbb{CP}^m, b) = 0 \\ \pi_2(\mathbb{CP}^m, b) \simeq \mathbb{Z}\,. \end{cases} \tag{7.8}$$

ESEMPIO 7.6 (**Gruppi di omotopia degli spazi proiettivi quaternionii)**. Lo spazio proiettivo di dimensione n sui quaternioni $\mathbb{HP}^n$ è definito come il quoziente di $\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$(q_0, q_1, \ldots, q_n) \sim (q'_0, q'_1, \ldots, q'_n) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{H} \quad \text{tale che} \quad q'_i = q_i \cdot q \quad \text{per } 0 \leq i \leq n.$$

La restrizione alla sfera $S^{4n+3} = \{(q_0, q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{H}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n |q_i|^2 = 1\}$ della proiezione $p : \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{HP}^n$ definisce una fibrazione localmente banale $S^{4m-1} \to \mathbb{HP}^n$, con fibra S^3. Otteniamo perciò la successione esatta di omotopia

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \quad \pi_m(S^3, e_0) &\longrightarrow \pi_m(S^{4n+3}, e_0) \longrightarrow \pi_m(\mathbb{HP}^n, p_0) \\ \longrightarrow \pi_{m-1}(S^3, e_0) &\longrightarrow \qquad \cdots \end{aligned}$$

Poiché $\pi_m(S^{4n+3}, e_0) = 0$ per $m < 4n + 3$, otteniamo che $\pi_m(\mathbb{HP}^n, p_0) \simeq \pi_{m-1}(S^3, e_0)$ se $m < 4n+3$. Abbiamo poi $\pi_{4n+3}(\mathbb{HP}^n, p_0) \simeq \mathbb{Z} \times \pi_{4n+2}(S^3, e_0)$ se $n \geq 1$.

ESEMPIO 7.7 (**Gruppi di omotopia delle lenti**). Fissiamo una $(n+1)$-upla $(m, m_1, \dots, m_n)$, con m intero positivo ed $m_1, \dots, m_n$ interi relativamente primi con m. Sia $S^{2n-1} = \{(z_1, \dots, z_n) \mid \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1\}$ la sfera unitaria di $\mathbb{C}^n$ e consideriamo l'applicazione

$$\mathbb{Z} \times S^{2n-1} \ni (k, z_1, \dots, z_n) \to \left(z_1 e^{2\pi i m_1/m}, \dots, z_n e^{2\pi i m_n/m}\right) \in S^{2n-1}.$$

Per passaggio al quoziente essa definisce un'azione su $S^{2n=1}$ del gruppo abeliano $\mathbb{Z}_m$. Il quoziente $S^{2n-1}/\mathbb{Z}_m$ si dice una *lente* e si indica con $L(m; m_1, \dots, m_n)$. La proiezione nel quoziente $p : S^{2n-1} \to L(m; m_1, \dots, m_n)$ è un rivestimento connesso ad m fogli. Il gruppo fondamentale di $L(m; m_1, \dots, m_n)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_m$, mentre i gruppi di omotopia d'ordine superiore sono isomorfi a quelli della sfera S^{2m-1}.

ESEMPIO 7.8 (**Gruppi di omotopia dei gruppi classici**). I gruppi classici connessi sono prodotti topologici di fattori compatti, omeomorfi ai gruppi compatti $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{SU}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$, e di fattori non compatti, omeomorfi a spazi Euclidei. Sarà sufficiente quindi considerare i gruppi di omotopia dei gruppi compatti.

I GRUPPI DI OMOTOPIA DI $\mathbf{SO}(n)$

Abbiamo già osservato che valgono gli omeomorfismi:

$$\begin{cases} \mathbf{SO}(2) \simeq S^1 \\ \mathbf{SO}(3) \simeq \mathbb{RP}^3 \\ \mathbf{SO}(4) \simeq S^3 \times \mathbb{RP}^3 \,. \end{cases}$$

Abbiamo perciò

$$\begin{aligned} &\pi_n(\mathbf{SO}(2), e) \simeq \pi_n(S^1, e_0), \\ &\pi_n(\mathbf{SO}(3), e) \simeq \pi_n(\mathbb{RP}^3, p_0), \\ &\pi_n(\mathbf{SO}(4), e) \simeq \pi_n(S^3, e_0) \times \pi_n(\mathbb{RP}^3, p_0), \\ &\qquad\qquad \forall n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Se $n \geq 2$ l'applicazione:

$$\mathbf{SO}(n) \ni g \to g(e_0) \in S^{n-1}$$

definisce un fibrato localmente banale con fibra omeomorfa a $\mathbf{SO}(n-1)$. Abbiamo quindi la successione esatta:

$$\begin{aligned} &\cdots \longrightarrow \pi_{m+1}(S^{n-1}, e_0) \\ &\longrightarrow \pi_m(\mathbf{SO}(n-1), e) \longrightarrow \pi_m(\mathbf{SO}(n), e) \longrightarrow \pi_m(S^{n-1}, e_0) \\ &\longrightarrow \cdots \end{aligned} \tag{7.9}$$

In particolare, poiché $\pi_m(S^{n-1}, e_0) = 0$ se $m < n-1$ e $\pi_{n-1}(S^{n-1}, e_0) \simeq \mathbb{Z}$, otteniamo:

$$\pi_m(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_m(\mathbf{SO}(n-1), e) \quad \text{se} \quad m < n-2 \tag{7.10}$$

e un omomorfismo surgettivo:

$$\pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n-1)) \to \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n)) \to 0 \qquad \text{per} \quad n \geq 2\,. \tag{7.11}$$

Osserviamo che questo omomorfismo è banale se $n = 2, 4$, in quanto sono $\pi_0(\mathbf{SO}(2), e) \simeq \pi_0(S^1, e_0) = 0$ e $\pi_2(\mathbf{SO}(4), e) \simeq \pi_2(S^3 \times \mathbb{RP}^3 \times S^3, (p_0, e_0)) = 0$. Per $n = 3$ abbiamo un omomorfismo $\mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbf{SO}(2), e) \to \pi_1(\mathbf{SO}(3), e) = \mathbb{Z}_2$.

Abbiamo perciò

eq:hdl
$$\pi_m(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_m(\mathbf{SO}(m+2), e) \qquad \forall n \geq m+2. \tag{7.12}$$

In particolare

$$\pi_1(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_1(\mathbf{SO}(3), e) \simeq \mathbb{Z}_2 \qquad \forall n \geq 3\,, \tag{7.13}$$

$$\pi_2(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_2(\mathbf{SO}(4), e) \simeq 0 \qquad \forall n \geq 4\,, \tag{7.14}$$

$$\pi_3(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_3(\mathbf{SO}(5), e) \simeq \mathbb{Z} \qquad \forall n \geq 5\,, \tag{7.15}$$

$$\pi_4(\mathbf{SO}(n), e) \simeq \pi_4(\mathbf{SO}(6), e) \simeq 0 \qquad \forall n \geq 6\,. \tag{7.16}$$

Ad esempio nel caso $n = 5$, $m = 3$, abbiamo la successione esatta

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \simeq \pi_4(S^4, e_0)$$
$$\longrightarrow \pi_3(\mathbf{SO}(4), e) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_3(\mathbf{SO}(5), e) \longrightarrow 0 \simeq \pi_3(S^4, e_0)$$
$$\longrightarrow \cdots$$

da cui possiamo dedurre che $\pi_3(\mathbf{SO}(n), e)$ è, per ogni $n \geq 5$, un quoziente di $\mathbb{Z}^2$ rispetto a un sottogruppo abeliano libero.

Osservazione 7.9. Sono tutti calcolati i *gruppi di omotopia stabile* dei gruppi ortogonali: è

$$\Pi_k = \pi_{n+k}(\mathbf{SO}(n), e) \quad \forall n > k+1,$$
$$\Pi_k = \Pi_{k+8} \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$
$$\Pi_0 = \mathbb{Z}_2 \quad \Pi_1 = \mathbb{Z}_2 \quad \Pi_2 = 0 \quad \Pi_3 = \mathbb{Z}$$
$$\Pi_4 = 0 \quad \Pi_5 = 0 \quad \Pi_6 = 0 \quad \Pi_7 = \mathbb{Z}.$$

Gruppi di omotopia di $\mathbf{SU}(m)$

Il gruppo $\mathbf{SU}(2)$ è omeomorfo a S^3. Per $m \geq 3$, l'applicazione

$$\mathbf{SU}(m) \ni g \to g(e_0) \in S^{2m-1} \tag{7.17}$$

definisce un fibrato localmente banale con fibra omeomorfa a $\mathbf{SU}(m-1)$. Otteniamo quindi la successione esatta:

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(S^{2m-1}, e_0)$$

eq:una
$$\longrightarrow \pi_n(\mathbf{SU}(m-1), e) \longrightarrow \pi_n(\mathbf{SU}(m), e) \longrightarrow \pi_n(S^{2m-1}, e_0) \tag{7.18}$$
$$\longrightarrow \cdots$$

da cui ricaviamo che:

eq:unb
$$\pi_n(\mathbf{SU}(m), e) \simeq \pi_n(\mathbf{SU}(m-1), e) \quad \text{se} \quad n < 2m-2 \tag{7.19}$$

e l'omomorfismo $\pi_n(\mathbf{SU}(m-1),e) \to \pi_n(\mathbf{SU}(m),e)$ è surgettivo per $n = 2m-2$.

In particolare

eq:hdgn

$$\pi_n(\mathbf{SU}(m)) \simeq \begin{cases} \pi_n(\mathbf{SU}([n+1]/2),e) & \text{se } n \notin 2\mathbb{N},\ 2m > n+2, \\ \pi_n(\mathbf{SU}([n+2]/2),e) & \text{se } n \in 2\mathbb{N},\ 2m > n+2. \end{cases} \tag{7.20}$$

Abbiamo, per $m \geq 2$:

$$\begin{aligned} &\pi_1(\mathbf{SU}(m),e) = 0, \\ &\pi_2(\mathbf{SU}(m),e) = 0, \\ &\pi_3(\mathbf{SU}(m),e) = \mathbb{Z}, \\ &\pi_4(\mathbf{SU}(2),e) = \mathbb{Z}_2, \\ &\pi_4(\mathbf{SU}(m),e) = 0 \qquad \text{se } m \geq 3 \\ &\pi_5(\mathbf{SU}(2),e) = \mathbb{Z}_2, \\ &\pi_5(\mathbf{SU}(m),e) = \mathbb{Z} \qquad \text{se } m \geq 3\,. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Ricaviamo i gruppi di omotopia di ordine $1,2,3$ della tabella. È

$$\pi_1(\mathbf{SU}(m),e) \simeq \pi_1(\mathbf{SU}(2),e) \simeq \pi_1(S^3,e_0) = 0.$$

Abbiamo poi

$$\pi_2(\mathbf{SU}(2),e) \simeq \pi_2(S^3,e_0) = 0$$
$$\text{e} \quad \pi_2(\mathbf{SU}(m),e) \simeq \pi_2(\mathbf{SU}(3),e) \quad \text{per} \quad m \geq 3.$$

Dalla successione esatta

$$0 = \pi_2(\mathbf{SU}(2),e) \longrightarrow \pi_2(\mathbf{SU}(3),e) \longrightarrow \pi_2(S^5,e_0) = 0$$

ricaviamo che $\pi_2(\mathbf{SU}(3),e) = 0$ e quindi $\pi_2(\mathbf{SU}(m),e) = 0$ per ogni m.

Abbiamo ancora $\pi_3(\mathbf{SU}(2),e) \simeq \pi_3(S^3,e_0) = \mathbb{Z}$ e quindi dalla successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_4(S^5,e_0) & \longrightarrow & \pi_3(\mathbf{SU}(2),e) & \longrightarrow & \pi_3(\mathbf{SU}(3),e) & \longrightarrow & \pi_3(S^5,e_0) \\ = 0 & & = \mathbb{Z} & & & & = 0 \end{array}$$

ricaviamo che anche $\pi_3(\mathbf{SU}(3),e) = \mathbb{Z}$ e quindi $\pi_3(\mathbf{SU}(m),e) \simeq \pi_3(\mathbf{SU}(3),e) = \mathbb{Z}$ per ogni $m \geq 3$.

Gruppi di omotopia di $\mathbf{Sp}(m)$

Abbiamo $\mathbf{Sp}(1) \simeq S^3$. L'applicazione:

$$\mathbf{Sp}(m) \ni g \to g(e_0) \in S^{4m-1} \tag{7.22}$$

definisce un fibrato localmente banale con fibra $\mathbf{Sp}(m-1)$. Otteniamo perciò una successione esatta:

$$\begin{aligned} &\cdots \qquad \longrightarrow \pi_{n+1}(S^{4m-1},e_0) \\ &\longrightarrow \pi_n(\mathbf{Sp}(m-1),e) \longrightarrow \pi_n(\mathbf{Sp}(m),e) \longrightarrow \pi_{n+1}(S^{4m-1},e_0) \\ &\longrightarrow \qquad \cdots \end{aligned} \tag{7.23}$$

Quindi:

$$\pi_n(\mathbf{Sp}(m), e) \simeq \pi_n(\mathbf{Sp}(m-1), e) \quad \text{se} \quad n \leq 4m-3. \tag{7.24}$$

Per $m = 2$, poiché $\pi_n(S^7, e_0) = 0$ per $0 \leq n \leq 6$, otteniamo che

$$\pi_n(\mathbf{Sp}(2), e) \simeq \pi_n(\mathbf{Sp}(1), e) \ \simeq \pi_n(S^3, e_0) \quad \text{per} \quad 0 \leq n \leq 5.$$

Per ricorrenza, abbiamo quindi

$$\pi_n(\mathbf{Sp}(m), e) \simeq \pi_n(S^3, e_0) \quad \text{se} \quad n \leq 5\,. \tag{7.25}$$

In generale:

eq:hdgbf

$$\pi_n(\mathbf{Sp}(m), e) \simeq \begin{cases} \pi_n(\mathbf{Sp}([n-1]/4), e) & \text{se } n \equiv 1 \mod 4, \\ \pi_n(\mathbf{Sp}(n/4), e) & \text{se } n \equiv 0 \mod 4, \\ \pi_n(\mathbf{Sp}([n+2]/4), e) & \text{se } n \equiv 2 \mod 4, \\ \pi_n(\mathbf{Sp}([n+1]/4), e) & \text{se } n \equiv 3 \mod 4. \end{cases} \tag{7.26}$$

CAPITOLO 17

Rivestimenti ed omotopia

1. Azioni di gruppo

In questo paragrafo richiamiamo le principali definizioni relative all'azione di gruppo su un insieme e su uno spazio topologico. Ricordiamo innanzi tutto che un'*azione di gruppo* di un gruppo $\mathbf{G}$ su un insieme X è un'applicazione

raa
$$\begin{aligned} &\mathbf{G}\times X\ni(g,x)\to gx\in X \qquad \text{tale che}\\ &g_1(g_2x)=(g_1g_2)x \quad \forall g_1,g_2\in\mathbf{G},\quad \forall x\in X. \end{aligned} \tag{1.1}$$

In particolare, indicando con $\mathfrak{S}(X)$ il gruppo delle applicazioni bigettive di X in sè, un'azione di gruppo di $\mathbf{G}$ su X è un omomorfismo $\mathbf{G}\to\mathfrak{S}(X)$.

DEFINIZIONE 1.1. L'azione (1.1) si dice *fedele* od *effettiva* se l'omomorfismo $\mathbf{G}\to\mathfrak{S}(X)$ è iniettivo.

In generale, il nucleo di questa applicazione è un sottogruppo normale $\mathbf{H}$ di $\mathbf{G}$, che si dice il *nucleo d'infedeltà* dell'azione.

Abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}\times X & \longrightarrow & X \\ \big\downarrow & & \big\| \\ (\mathbf{G}/_{\mathbf{H}})\times X & \longrightarrow & X \end{array}$$

che definisce un'azione fedele su X del gruppo quoziente $\mathbf{G}/_{\mathbf{H}}$.

Dato un punto x di X indichiamo con $\mathbf{G}x$ e chiamiamo *orbita* di x per l'azione di G, l'insieme

eq:rab
$$\mathbf{G}\,x=\{gx\mid g\in\mathbf{G}\}. \tag{1.2}$$

Chiamiamo *stabilizzatore* di x il sottogruppo $\mathbf{G}_x$ di $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{G}_x=\{g\in\mathbf{G}\mid gx=x\}.$$

Osserviamo che l'applicazione $\mathbf{G}\ni g\to gx\in\mathbf{G}\,x$ induce, per passaggio al quoziente, un'applicazione bigettiva:

$$\mathbf{G}/_{\mathbf{G}_x}\longleftrightarrow\mathbf{G}x. \tag{1.3}$$

L'insieme delle orbite di $\mathbf{G}$ in X è una *partizione* di X e si indica con $X/\mathbf{G}$.

DEFINIZIONE 1.2. Diciamo che G opera *transitivamente* su X se $\mathbf{G}x=X$ per qualche (e quindi per ogni) $x\in X$.

In questo caso gli stabilizzatori dei diversi punti di X sono sottogruppi tra loro coniugati di $\mathbf{G}$ ed X è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle classi laterali di $\mathbf{G}$ rispetto ad uno qualsiasi di tali sottogruppi.

Se $\mathbf{G}$ opera transitivamente su X, diciamo che X è un *spazio* $\mathbf{G}$*-omogeneo*.

Un'azione del gruppo $\mathbf{G}$ sull'insieme X induce naturalmente un'azione del gruppo $\mathbf{G}$ sull'insieme 2^X di tutti i suoi sottoinsiemi.

Sia $\Gamma \subset 2^X$ una partizione di X. Diciamo che G *opera su* Γ se

eq:rad
$$g(A) \in \Gamma, \quad \forall A \in \Gamma, \quad \forall g \in G. \tag{1.4}$$

Chiamiamo *non banale* una partizione Γ di X che sia diversa dalle partizioni $\{X\}$ e $\{\{x\} \mid x \in X\}$.

Chiamiamo l'azione di $\mathbf{G}$ *primitiva* se non esiste nessuna partizione non banale di X su cui operi $\mathbf{G}$.

Esempio 1.3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione ≥ 2 su un campo $\mathbb{K}$, sia $X = V - \{0\}$ e sia $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V)$. Allora $\mathbf{G}$ opera transitivamente e fedelmente su X. L'azione di $\mathbf{G}$ non è primitiva: infatti $\mathbf{G}$ agisce sulla partizione di X formata dagli insiemi

$$\{kv | k \in \mathbb{K} - \{0\}\}$$

al variare di v in X.

È invece primitiva l'azione corrispondente di $\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ sul quoziente $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{K}\mathbb{P}^1$.

Citiamo il seguente teorema algebrico:

Teorema 1.4. *Se* $\mathbf{G}$ *opera transitivamente su un insieme* X *che contiene almeno due elementi, allora condizione necessaria e sufficiente affinché* $\mathbf{G}$ *operi in modo primitivo è che lo stabilizzatore di un qualsiasi punto di* X *sia un sottogruppo proprio massimale di* $\mathbf{G}$.

Definizione 1.5. Indichiamo con X_n l'insieme delle n-uple ordinate di punti distinti di X. Un'azione di $\mathbf{G}$ su X induce in modo ovvio un'azione di $\mathbf{G}$ su X_n. Se questa è transitiva, diremo che $\mathbf{G}$ opera su X in modo n-volte transitivo.

Ad esempio, il gruppo delle affinità di una retta opera in modo doppiamente transitivo sulla retta.

Definizione 1.6. Supponiamo ora che $\mathbf{G}$ sia un gruppo topologico ed X uno spazio topologico. Un'azione di gruppo $\mathbf{G} \times X \to X$ si dirà allora *continua* se tale applicazione è continua.

Essa si dirà *libera* se per ogni $x \in X$ la $\mathbf{G} \ni g \to gx \in X$ è un'immersione topologica.

Essa si dirà *propria* se per ogni compatto $K \subset X$ l'insieme

$$\{g \in \mathbf{G} \mid g(K) \cap K \neq \emptyset\}$$

è relativamente compatto in $\mathbf{G}$.

Se $\mathbf{G}$ è un gruppo discreto, l'azione di $\mathbf{G}$ sullo spazio topologico X è propria se, per ogni compatto $K \subset X$, l'insieme $\{g \in \mathbf{G} | g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ è finito. Diciamo allora che $\mathbf{G}$ opera su X *in modo propriamente discontinuo.*

In questo caso vale il

TEOREMA 1.7. *Supponiamo che un gruppo* $\mathbf{G}$ *operi in modo propriamente discontinuo su uno spazio topologico* X *localmente compatto e di Hausdorff. Allora le orbite* $\mathbf{G}x$ *sono sottoinsiemi chiusi discreti di* X *e* $X/\mathbf{G}$ *è uno spazio di Hausdorff.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché X è localmente compatto, la famiglia Γ dei compatti di X forma un ricoprimento fondamentale di X. Per l'ipotesi che $\mathbf{G}$ operi in modo propriamente discontinuo, ogni $A \in \Gamma$ interseca ogni orbita $\mathbf{G}x$ in un sottoinsieme finito, e dunque in un chiuso con la topologia discreta. Quindi $\mathbf{G}x$ è un chiuso con la topologia discreta.

Siano ora x e y due punti di X non appartenenti ad una stessa orbita. Possiamo allora trovare un intorno compatto U di x che non intersechi $\mathbf{G}y$. Dico allora che

$$\mathbf{G}(U) = \bigcup \{\mathbf{G}z \mid z \in U\}$$

non interseca $\mathbf{G}y$. In caso contrario avremmo

$$g_1 y = g_2 z$$

con $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$, $z \in U$ e quindi

$$g_2^{-1} g_1 y = z \in U$$

ci darebbe una contraddizione.

Osserviamo che $\mathbf{G}(U)$ è un intorno di $\mathbf{G}x$. Esso è un chiuso. A questo scopo è sufficiente verificare che $\mathbf{G}(U) \cap K$ è chiuso per ogni compatto K di X.

Fissato il compatto K, l'insieme dei $g \in \mathbf{G}$ tali che $g(U) \cap K \neq \emptyset$ è finito: esso è intatti contenuto in

$$\{g \in \mathbf{G} | g(K \cup U) \cap (K \cup U) \neq \emptyset\}.$$

Quindi $\mathbf{G}(U) \cap K$ è unione finita di compatti della forma $g(U) \cap K$ e perciò chiuso in quanto X è di Hausdorff. Pertanto $\mathbf{G}(U)$ e $X \setminus \mathbf{G}(U)$ sono intorni saturi disgiunti delle due orbite $\mathbf{G}x$ e $\mathbf{G}y$. Ciò dimostra che $X/_{\mathbf{G}}$ è di Hausdorff. □

2. Omeomorfismi locali

DEFINIZIONE 2.1. Sia $p : E \to B$ un'applicazione continua tra due spazi topologici E e B. Diciamo che p è un *omeomorfismo locale* se ogni punto $\xi \in E$ ha un intorno aperto W in E tale che $U = p(W)$ sia aperto in X e $p|_W : W \to U$ sia un omeomorfismo.

OSSERVAZIONE 2.2. Ogni omeomorfismo locale è una applicazione aperta.

Ricordiamo che una *sezione* di un fibrato topologico $E \xrightarrow{p} B$ sull'aperto U di B è un'applicazione $s : U \to E$ tale che $p \circ s = id_U$. Indichiamo con $\Gamma(U, E)$ l'insieme delle sezioni continue di E sull'aperto $U \subset B$. Vale il seguente

lm:rbb

LEMMA 2.3. *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un omeomorfismo locale.*

(1) *Sia U un aperto di B. Ogni sezione $s \in \Gamma(U, E)$ è un'applicazione aperta ed è un omeomorfismo di U sull'aperto $s(U)$ di E.*
(2) *Per ogni $b \in p(E)$ e $\xi \in p^{-1}(b)$ possiamo trovare un intorno aperto U di b in B ed una sezione $s \in \gamma(U, E)$ tale che $s(b) = \xi$.*
(3) *Due sezioni $s_i \in \Gamma(U_i, E)$, definite su intorni aperti U_i dello stesso punto $b \in B$ ($i = 1, 2$) e tali che $s_1(b) = s_2(b)$ coincidono su un intorno aperto $U \subset U_1 \cap U_2$ di b in B.*

DIMOSTRAZIONE. Sia U un aperto di B ed $s \in \gamma(U, E)$ una sezione continua. Se $\xi = s(b) \in s(U)$, possiamo trovare un intorno aperto W di ξ in E tale che $p|_W : W \to p(W)$ sia un omeomorfismo sull'aperto $p(W)$ di B. Poiché s è continua, possiamo trovare un intorno aperto V di b in U tale che $s(V) \subset W$. Allora $s|_V = (p|_W)^{-1}|_V$ è un omeomorfismo di V sull'aperto $s(V)$ di E. Ne segue che s è un omeomorfismo locale e dunque una applicazione aperta. Quindi $s : U \to s(U)$ è continua, bigettiva e aperta e perciò un omeomorfismo.

Sia $\xi \in E$ e $b = p(\xi)$. Fissiamo un intorno aperto W di ξ in E tale che $p|_W$ definisca un omeomorfismo di W su un aperto $U = p(W)$ di B. L'inversa s di tale omeomorfismo definisce allora la sezione continua cercata.

Infine, se $s_i : U_i \to E$ $(i = 1, 2)$ sono sezioni continue definite su intorni aperti di $b \in B$ con $s_1(b) = s_2(b) = \xi$, esse coincidono sull'intorno aperto $p(s_1(U_1) \cap s_2(U_2))$ di b. □

COROLLARIO 2.4. *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un omeomorfismo locale. Condizione necessaria e sufficiente affinché E sia di Hausdorff, è che B sia di Hausdorff. Se B è uno spazio di Hausdorff, due sezioni continue definite su uno stesso aperto U di B che assumano lo stesso valore in un punto b di U assumono gli stessi valori sulla componente connessa di b in U.*

DEFINIZIONE 2.5. Siano $E_i \xrightarrow{p_i} B$ $(i = 1, 2)$ due fibrati topologici sulla stessa base B. Un *omomorfismo di fibrati* è un'applicazione continua $\phi : E_1 \to E_2$ tale che $p_2 \circ \phi = p_1$, tale cioè che $\phi((E_1)_b) \subset (E_2)_b$ per ogni $b \in B$.

Abbiamo allora

lm:rbf

LEMMA 2.6. *Siano $E_i \xrightarrow{p_i} B$, $i = 1, 2$, due omeomorfismi locali. Supponimao che B sia di Hausdorff e che E_1 ed E_2 siano spazi connessi. Siano $\phi, \psi : E_1 \to E_2$ due morfismi di fibrati . Se $\phi(\xi) = \psi(\xi)$ in un punto $\xi \in E_1$, allora $\phi = \psi$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti ϕ e ψ sono allora omeomorfismi locali e la tesi segue pertanto dal corollario precedente. □

DEFINIZIONE 2.7. Indichiamo con $\mathrm{Aut}(E \xrightarrow{p} B)$ l'insieme degli omeomorfismi di E con se stesso che sono morfismi di fibrati. Esso è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni. I suoi elementi si dicono *automorfismi* del fibrato e $\mathrm{Aut}(E \xrightarrow{p} B)$ il gruppo degli automorfismi del fibrato.

Questo gruppo opera su ciascuna fibra di E. Per il lemma precedente, se p è un omeomorfismo locale, ed E uno spazio di Hausdorff connesso, l'azione su una qualsiasi fibra non vuota è fedele e propriamente discontinua.

Se E è inoltre localmente compatto, l'azione del gruppo degli automorfismi del fibrato è anche propriamente discontinua su E.

3. Rivestimenti

Ricordiamo che un rivestimento è un fibrato $E \xrightarrow{p} B$ localmente banale con fibra F discreta. Abbiamo

LEMMA 3.1. *Se $E \xrightarrow{p} B$ è un rivestimento, allora $p : E \to B$ è un omeomorfismo locale.*

In particolare possiamo applicare ai rivestimenti i rusultati dimostrati nel paragrafo precedente.

tm:rcb

TEOREMA 3.2. *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un fibrato topologico con E connesso. Condizione necessaria e sufficiente affinché esso sia un rivestimento è che siano verificate le due condizioni:*

(i) *$p : E \to B$ è un omeomorfismo locale surgettivo;*
(ii) *per ogni $b \in B$ possiamo trovare un intorno aperto U di b in B e per ogni $\xi \in p^{-1}(b)$ una sezione continua $s_\xi : U \to E$ con $s_\xi(b) = \xi$, in modo che*

$$s_\xi(U) \cap s_\eta(U) = \emptyset \quad \forall \xi \neq \eta \in p^{-1}(b), \tag{3.1}$$

$$p^{-1}(U) = \bigcup \{ s_\xi(U) \mid \xi \in p^{-1}(b) \}. \tag{3.2}$$

DIMOSTRAZIONE. La necessità della condizione è immediata. Dimostriamo la sufficienza.

Osserviamo che B è connesso perché immagine di un connesso mediante una applicazione continua. Fissiamo $b_0 \in B$. La fibra $F = E_{b_0} = p^{-1}(b_0)$ di E su b_0 è un sottospazio di E con la topologia discreta perché p è un omeomorfismo locale.

Dimostriamo che tutte le fibre E_b hanno la stessa cardinalità di F. A questo scopo indichiamo con A il sottoinsieme di B formato dai punti $b \in B$ tali che si possa trovare una applicazione bigettiva $\alpha_b : E_b \to F$.

L'insieme A è non vuoto perché contiene b_0. Se $b \in A$, scegliamo un intorno aperto U di b in B con la proprietà (ii). Se $x \in U$, otteniamo un'applicazione bigettiva $\beta : E_x \to E_b$ facendo corrispondere ad $\eta \in E_x$ l'unica $\xi \in E_b$ tale che $s_\xi(x) = \eta$. Allora, se $\alpha_b : E_b \to F$ è bigettiva, anche la $\alpha_x = \alpha_b \circ \beta : E_x \to F$ è bigettiva. Ciò dimostra che A è aperto. Se $b \in \bar{A}$, scegliamo un intorno U di b con la proprietà (ii). Esso contiene punti di A e

dunque, ragionando come in precedenza, possiamo costruire un'applicazione bigettiva di E_b su F. Dunque A è aperto e chiuso in B e coincide perciò con B, perché B è connesso.

Otteniamo allora che $E \xrightarrow{p} B$ è un fibrato localmente banale con fibra discreta utilizzando, con le notazioni di (ii), le trivializzazioni locali:

$$U \times F \xrightarrow{id_U \times \alpha_b^{-1}} U \times E_b \ni (x, \xi) \to s_\xi(x) \in E|U.$$

□

DEFINIZIONE 3.3. Se le fibre di un rivestimento $E \xrightarrow{p} B$ hanno cardinalità α, diremo che $E \xrightarrow{p} B$ è un rivestimento a α *fogli.*

ESEMPIO 3.4. L'applicazione $S^1 \ni z \to z^n \in S^1$ è un rivestimento a n fogli.

L'applicazione $\mathbb{R} \ni t \to e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t) \in S^1$ è un rivestimento a un'infinità numerabile di fogli.

ESEMPIO 3.5. L'applicazione $S^n \ni x \to [x] \in \mathbb{RP}^n$ è un rivestimento a due fogli.

ESEMPIO 3.6 (Bottiglia di Klein). Consideriamo la relazione di equivalenza $\sim$ su $\mathbb{R}^2$ generata dalle $(x, y) \sim (x, y + 1)$ e $(x, y) \sim (x + 1, -y)$. La proiezione nel quoziente $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 /_\sim$ è un rivestimento a infiniti fogli.

ESEMPIO 3.7. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio a coefficienti complessi di grado $m \geq 1$ e sia K l'insieme dei valori critici di $\mathbb{C} \ni z \to p(z) \in \mathbb{C}$. Allora $\mathbb{C} \setminus p^{-1}(K) \to \mathbb{C} \setminus K$ è un rivestimento a m fogli.

TEOREMA 3.8. *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un fibrato topologico in cui p sia un omeomorfismo locale e tutte le fibre E_b di E abbiano uno stesso numero finito m di elementi. Se E è di Hausdorff, allora $E \xrightarrow{p} B$ è un rivestimento a m fogli.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $b \in B$ e siano $\xi_1, ..., \xi_m$ gli elementi distinti della fibra E_b. Ognuno di essi è contenuto in un aperto W_i di E tale che $p|W_i$ sia un omeomorfismo di W_i su un aperto U_i di B. Possiamo inoltre supporre $W_1, ..., W_m$ due a due disgiunti perché E è di Hausdorff. Allora $U = U_1 \cap ... \cap U_m$ è un intorno aperto di b e risultano definite m sezioni continue $s_i : U \to E$ con $s_i(U) \subset W_i$. Ne segue che

$$U \times \{1, ..., m\} \ni (x, i) \to s_i(x) \in E|U$$

è un omeomorfismo. Infatti è continua, aperta e iniettiva. Inoltre è surgettiva perché le immagini delle fibre di $U \times \{1, ..., m\}$ sono formate da m elementi distinti e dunque coincidono con le fibre corrispondenti di $E|U$. La dimostrazione è completa. □

Un caso particolare di questo teorema è il seguente:

TEOREMA 3.9. *Siano M, N varietà differenziabili compatte e connesse della stessa dimensione n. Ogni applicazione differenziabile*

$$p : M \to N$$

priva di punti critici è un rivestimento.

Ad esempio, le applicazioni

$$S^1 \ni e^{i\theta} \to e^{im\theta} \in S^1$$

con $0 \neq m \in \mathbf{Z}$ sono rivestimenti a $|m|$ fogli.

TEOREMA 3.10. *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento, con B di Hausdorff. Se E_0 è una componente connessa di E, allora*

$$E_0 \xrightarrow{p|_{E_0}} p(E_0)$$

è ancora un rivestimento.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è una facile conseguenza del Teorema 3.2. tm:rcb □

TEOREMA 3.11. *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento, con E di Hausdorff connesso. Se F è una fibra di E, l'azione del gruppo $\mathrm{Aut}(E \xrightarrow{p} B)$ su F induce un isomorfismo di tale gruppo con un sottogruppo del gruppo $\mathfrak{S}(F)$ delle applicazioni bigettive (permutazioni) di F in sé.*

DIMOSTRAZIONE. Questo enunciato è un'immediata conseguenza del Lemma 2.3. lm:rbb □

TEOREMA 3.12 (Gerarchia dei rivestimenti). *Siano $E_i \xrightarrow{p_i} B$ due rivestimenti dello spazio topologico B, con E_1, E_2 di Hausdorff connessi. Ogni morfismo di rivestimenti $\phi : E_1 \to E_2$ è un rivestimento. Viceversa, se $E \xrightarrow{p} B$ ed $E' \xrightarrow{q} E$ sono rivestimenti, anche $E' \xrightarrow{p\circ q} B$ è un rivestimento.*

DEFINIZIONE 3.13. Questo teorema ci permette di introdurre un ordinamento parziale nello spazio dei rivestimenti: se le condizioni della prima parte dell'enunciato sono verificate, diremo che il rivestimento $E_2 \xrightarrow{p_2} B$ è *subordinato* al rivestimento $E_1 \xrightarrow{p_1} B$ e scriviamo:

$$(E_2 \xrightarrow{p_2} B) \prec (E_1 \xrightarrow{p_1} B).$$

Due rivestimenti che siano subordinati l'uno all'altro si dicono *equivalenti*: in questo caso il momorfismo di rivestimenti è un omeomorfismo che commuta con le proiezioni sulla base.

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è una facile conseguenza del Teorema 3.2. tm:rcb □

Ad esempio, per i rivestimenti di $S^1 \subset \mathbb{C}$ definiti dalle applicazioni $p_m : S^1 \ni z \to z^m \in S^1$, il rivestimento relativo a un intero m_1 precede quello relativo all'intero m_2 nella gerarchia dei rivestimenti se e soltanto se m_1 divide m_2.

TEOREMA 3.14 (Rialzamento di cammini). *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento ed $\alpha : I \to B$ un cammino continuo. Fissato $\xi \in p^{-1}(\alpha(0))$, vi è uno ed un*

solo cammino continuo $\tilde{\alpha} : I \to E$, con punto iniziale ξ, che rileva α, tale cioè che

$$\begin{cases} p \circ \tilde{\alpha} = \alpha, \\ \tilde{\alpha}(0) = \xi. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo trovare una partizione

$$0 = t_0 < t_1 ... < t_n = 1$$

dell'intervallo I tale che per ogni $i = 1, ..., n$ vi sia un aperto di trivializzazione U_i in B per cui

$$\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i.$$

Sia s_1 la sezione continua su U_1 con $s_1(\alpha(0)) = \xi$ e definiamo induttivamente le sezioni s_i su U_i per $i > 1$ ponendo la condizione che $s_i(\alpha(t_{i-1}) = s_{i-1}(\alpha(t_{i-1})$. Definiamo allora

$$\tilde{\alpha}(t) = s_i(\alpha(t)) \quad \text{se} \quad t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Questo è l'unico cammino continuo in E che soddisfa le condizioni del teorema. □

TEOREMA 3.15 (Rialzamento dell'omotopia). *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento ed $F : I^n \to B$ un'applicazione continua. Fissato $\xi \in p^{-1}(F(0))$, vi è un'unica applicazione continua $\tilde{F} : I^n \to E$ tale che*

$$\begin{cases} \tilde{F}(0) = \xi, \\ p \circ \tilde{F} = F. \end{cases}$$

Se

$$F(I^{n-1} \times \{1\}) = \{b_1\},$$

allora anche

$$\tilde{F}(I^{n-1} \times \{1\}) = \{\xi_1\}$$

per qualche $\xi_1 \in p^{-1}(b_1)$.

Se $n \geq 2$ e $F(bI^n) = \{b_0\}$, allora $\tilde{F}(bI^n) = \{\xi_0\}$.

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dal fatto che un rivestimento è un fibrato di Serre, quindi esiste una applicazione continua $\tilde{F}$ che rialza F. L'unicità segue dal teorema precedente e implica le due ultime affermazioni dell'enunciato. □

4. Gruppo del rivestimento

Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento. Fissiamo un punto base ξ_0 in E e sia $b_0 = p(\xi_0)$ il corrispondente punto base di B. La proiezione sulla base induce una applicazione

$$p_* : \pi_1(E, \xi_0) \to \pi_1(B, b_0). \tag{4.1}$$

DEFINIZIONE 4.1. Abbiamo osservato che questa applicazione è iniettiva e dunque la p_* è un monomorfismo di gruppi. La sua immagime si dice *gruppo del rivestimento* con punto di base ξ_0 e sarà indicata con $\mathbf{G}(E, \xi_0)$.

TEOREMA 4.2 (Cambiamento del punto di base). *Supponiamo che lo spazio totale E del rivestimento $E \xrightarrow{p} B$ sia connesso per archi e siano ξ_0, η_0 due punti della fibra $E_{b_0} = p^{-1}(b_0)$ per un punto fissato $b_0 \in B$. Se α è un cammino continuo in E di punto iniziale ξ_0 e punto finale η_0, allora $p \circ \alpha$ è un laccetto continuo in B e definisce un elemento $g_\alpha \in \pi_1(B, b_0)$. Abbiamo allora:*

$$\mathbf{G}(E, \eta_0) = g_\alpha \mathbf{G}(E, \xi_0) g_\alpha^{-1}. \tag{4.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia infatti β un laccetto continuo in E con origine in η_0. Allora $\alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1}$ è un laccetto con origine in ξ_0. Per il Teorema 2.1 del Capitolo II6, questa applicazione induce un isomorfismo tra i gruppi fondamentali di E rispettivamente con punti base η_0 e ξ_0. La tesi segue immediatamente. □

Studiamo ora le relazioni tra la gerarchia dei rivestimenti e i gruppi dei rivestimenti.

DEFINIZIONE 4.3. Diciamo che uno spazio topologico X è *localmente connesso per archi* se per ogni punto $x \in X$ ed ogni intorno aperto U di x possiamo trovare un intorno aperto $V \subset U$ di x tale che due punti qualsiasi di V possano essere congiunti da un cammino continuo tutto contenuto in U.

Si ottiene facilmente il seguente:

lm:rdd LEMMA 4.4. *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento. Se B è localemte connesso per archi, allora ogni sezione di E su un aperto U di B che trasformi insiemi connessi per archi in insiemi connessi per archi è continua.*

LEMMA 4.5. *Siano $E_1 \xrightarrow{p_1} B$ ed $E_2 \xrightarrow{p_2} B$ due rivestimenti connessi e localmente connessi per archi dello stesso spazio topologico B. Fissiamo un punto base b_0 in B e siano $\xi_0^1 \in p_1^{-1}(b_0)$, $\xi_0^2 \in p_2^{-1}(b_0)$ corrispondenti punti base in E_1 ed E_2. Se*

$$\mathbf{G}(E_2, \xi_0^2) \subset \mathbf{G}(E_1, \xi_0^1),$$

allora possiamo trovare uno ed un solo morfismo di rivestimenti

$$\phi : E_1 \to E_2$$

tale che

$$\phi(\xi_0^1) = \xi_0^2.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $\xi^1 \in E_1$ ed α un cammino continuo in E_1 che congiunga ξ_0^1 a ξ^1. Il cammino $p_1 \circ \alpha$ si rialza in modo unico a un cammino α' in E_2 con punto iniziale ξ_0^2. Il suo punto finale ξ^2 dipende solo da ξ^1 e non dal cammino α prescelto. Se infatti β è un secondo cammino continuo di punto iniziale ξ_0^1 e punto finale ξ^1 in E_1, allora $\alpha \cdot \beta^{-1}$ è un laccetto con origine in ξ_0^1. Per ipotesi l'immagine in $\pi_1(B, b_0)$ della sua classe di omotopia è immagine di una classe di omotopia di un laccetto di E_2 con punto iniziale ξ_0^2 e dunque $p_1 \circ (\alpha \cdot \beta^{-1})$ si rialza a un laccetto di E_2 con punto iniziale ξ_0^2.

Facendo quindi corrispondere a ξ^1 il punto ξ^2, otteniamo una applicazione $\phi : E_1 \to E_2$ che commuta con le rispettive proiezioni nella base. Essa è dunque un morfismo di rivestimenti, essendo continua per il Lemma 4.4. □ lm:rdd

Da questo lemma si deduce immediatamente:

tm:rdf TEOREMA 4.6. *Siano $E_1 \xrightarrow{p_1} B$ ed $E_2 \xrightarrow{p_2} B$ due fibrati con spazi totali connessi per archi sulla stessa base B. Fissiamo un punto base b_0 in B e punti base corrispondenti $\xi_0^i \in p_i^{-1}(b_0)$ in E_i $(i = 1, 2)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché il secondo sia subordinato al primo è che il gruppo di rivestimento $\mathbf{G}(E_1, \xi_0^1)$ del primo sia contenuto in un coniugato in $\pi_1(B, b_0)$ del gruppo di rivestimento $\mathbf{G}(E_2, \xi_0^2)$ del secondo. In particolare i due rivestimenti sono equivalenti se e soltanto se i loro gruppi di rivestimento sono tra loro coniugati.*

Fissato un rivestimento $E \xrightarrow{p} B$ con E e B connessi e localmente connessi per archi, un punto base $\xi_0 \in E$ e il punto base $b_0 = p(\xi_0)$ in B, indichiamo con F la fibra E_{b_0} e sia

$$F_{\xi_0} = \{\xi \in F \mid \mathbf{G}(E, \xi) = \mathbf{G}(E, \xi_0)\}.$$

Indichiamo poi con $\mathbf{N}(E, \xi_0)$ il normalizzatore di $\mathbf{G}(E, \xi_0)$ in $\pi_1(B, b_0)$:

$$\mathbf{N}(E, \xi_0) = \{g \in \pi_1(B, b_0) \mid g\mathbf{G}(E, \xi_0)g^{-1} = \mathbf{G}(E, \xi_0)\}.$$

TEOREMA 4.7. *L'applicazione $\delta : \pi_1(B, b_0) \to F$, che fa corrispondere alla classe di omotopia del laccetto α il secondo estremo $\tilde{\alpha}(1)$ del cammino che $\tilde{\alpha}$ con punto iniziale ξ_0 che rialza α, induce per passaggio al quoziente una bigezione*

$$\lambda : \mathbf{N}(E, \xi_0)/\mathbf{G}(E, \xi_0) \to F. \tag{4.3}$$

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato è una conseguenza dei risultati precedenti. □

TEOREMA 4.8. *Sia $E \xrightarrow{p} B$ un rivestimento, con E e B connessi e localmente connessi per archi. La composizione*

$$Aut(E \xrightarrow{p} B) \ni \phi \to \phi(\xi_0) \in F_{\xi_0} \to \lambda^{-1}(\phi(\xi_0)) \in \mathbf{N}(E, \xi_0)/\mathbf{G}(E, \xi_0) \tag{4.4}$$

è un antiisomorfismo di gruppi.

DEFINIZIONE 4.9. Un rivestimento $E \xrightarrow{p} B$ si dice *regolare* o *di Galois* se E e B sono connessi e localmente connessi per archi e se per qualche (e quindi per tutti) i punti $\xi \in E$ il gruppo $\mathbf{G}(E, \xi)$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(B, p(\xi))$. In questo caso abbiamo

$$Aut(E \xrightarrow{p} B) \simeq \pi_1(B, b_0)/\mathbf{G}(E, \xi_0) \tag{4.5}$$

per ogni $\xi_0 \in E$ e $b_0 = p(\xi_0)$.

5. Rivestimenti con gruppo di rivestimento assegnato

Diciamo che uno spazio topologico X è *microlocalmente semplicemente connesso* se ogni punto x di X ha un intorno U tale che l'applicazione canonica:

$$\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x_0) \tag{5.1}$$

abbia immagine nulla: ogni laccetto in U di punto iniziale x è omotopo in X al laccetto costante, in una omotopia che lascia fisso il punto x. Ad esempio, ogni varietà topologica è microlocalmente semplicemente connessa, in quanto ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni contrattili. Vale il:

TEOREMA 5.1 (Esistenza ed unicità del rivestimento universale). *Se B è uno spazio topologico di Hausdorff, connesso per archi e microlocalmente semplicemente connesso, allora possiamo trovare un rivestimento $E \to B$ di B con E connesso per archi e semplicemente connesso. Due rivestimenti di B connessi e semplicemente connessi sono equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto $b_0 \in B$ e definiamo l'insieme E come unione disgiunta degli insiemi

$$E_b = \pi(I, 0, 1; B, b_0, b). \tag{5.2}$$

Sia $p : E \to B$ l'applicazione che fa corrispondere a $\xi \in E_b$ il punto b di B. Definiamo una topologia su E in questo modo: un sottoinsieme W di E è aperto se, per ogni $\xi \in W$, detto α un cammino continuo con punto iniziale b_0 e punto finale $b = p(\xi)$ rappresentante di ξ in E_b, possiamo trovare un intorno aperto U di b in B tale che i laccetti di punto iniziale b contenuti in U siano omotopi in X al laccetto costante e le classi di omotopia in E_t di tutti i cammini della forma $\alpha \cdot \beta$ con $\beta(1) = t \in U$ e $\beta(I) \subset U$ siano contenuti in W.

Si verifica allora che $E \xrightarrow{p} B$ è un rivestimento connesso e semplicemente connesso, con fibra $\pi_1(B, b_0)$.

L'unicità è conseguenza del Teorema 4.6. tm:rdf □

TEOREMA 5.2. *Sia B uno spazio topologico connesso per archi e microlocalemente semplicemente connesso. Sia $b_0 \in B$ e sia $\mathbf{G}$ un sottogruppo di $\pi_1(B, b_0)$. Allora possiamo trovare un rivestimento $E \xrightarrow{p} B$ di B, con E connesso per archi, tale che, per un punto $\xi_0 \in E_{b_0}$, sia $\mathbf{G}(E, \xi_0) = \mathbf{G}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\tilde{B} \xrightarrow{\varpi} B$ il rivestimento universale di B. Allora, fissato un punto $\tilde{b}_0 \in \tilde{B}_{b_0}$, $\mathbf{G}$ si può identificare a un sottogruppo $\mathbf{G}'$ del gruppo degli automorfismi di $\tilde{B} \xrightarrow{\varpi} B$. Allora il rivestimento di B con spazio totale $\tilde{B}/_{\mathbf{G}'}$ è il rivestimento cercato. □

6. Rivestimenti di Galois

Consideriamo in tutto questo paragrafo un rivestimento $E \xrightarrow{p} B$ con E e B spazi di Hausdorff connessi e localmente connessi. Indichiamo con $\mathbf{G}_E$ il gruppo $\mathrm{Aut}(E \xrightarrow{p} B)$ degli automorfismi del rivestimento.

TEOREMA 6.1. *Il gruppo $\mathbf{G}_E$ opera su E in modo libero e propriamente discontinuo.*

DIMOSTRAZIONE. L'azione di $\mathbf{G}_E$ su E è libera per il Lemma 2.6: infatti le orbite sono sottospazi discreti di E e l'applicazione $\mathbf{G}_E \ni g \to g(\xi) \in E$ è iniettiva per ogni $\xi \in E$.

Sia ora K un compatto di E. Dobbiamo dimostrare che l'insieme dei $g \in \mathbf{G}_E$ tali che $g(K) \cap K \neq \emptyset$ è finito.

Se così non fosse, potremmo trovare una successione $\{g_m\}$ di elementi distinti di $\mathbf{G}_E$ e una successione $\{x_m\}$ di elementi di K tali che $g_m(x_m) \in K$.

Possiamo ricoprire K con un numero finito di aperti W_i $(i = 1, ..., n)$ connessi tali che $p : W_i \to p(W_i) = U_i$ siano omeomorfismi e gli U_i siano aperti di trivializzazione di B. A meno di passare ad una sottosuccessione e di riordinare gli indici, possiamo supporre che $\{x_m\} \subset W_1$ e $\{g_m(x_m)\} \subset W_2$. Sostituendo W_1 con una delle componenti connesse di $W_1 \cap p^{-1}(U_2)$ che contiene infiniti x_m distinti, e W_2 con la corrispondente componente connessa di $W_2 \cap p^{-1}(U_1)$ possiamo ancora supporre che $U_1 = U_2 = U$. Un automorfismo di E che trasformi un punto di W_1 in un punto di W_2 trasforma allora W_1 in W_2 per il Lemma 2.6 ed è univocamente determinato. Ciò contraddice il fatto che i g_m fossero tutti distinti e dimostra quindi il teorema. □

TEOREMA 6.2. *Perché il rivestimento $E \xrightarrow{p} B$ sia di Galois è sufficiente che $\mathbf{G}_E$ agisca transitivamente su una delle fibre.*

CAPITOLO 18

Il teorema di Van Kampen

1. Prodotto libero di gruppi

PROPOSIZIONE 1.1. *Sia $\mathcal{G} = \{\mathbf{G}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ una famiglia di gruppi. Possiamo allora determinare un gruppo $\mathbf{G}$, unico a meno di isomorfismi, tale che:*

(1) *Per ogni indice $\alpha \in A$ vi sia un monomorfismo di gruppi*

eq:vkaa (1.1) $$j_\alpha : \mathbf{G}_\alpha \to \mathbf{G}.$$

(2) *Dato un qualsiasi gruppo $\mathbf{H}$ ed una qualsiasi famiglia di omomorfismi*

$$\phi_\alpha : \mathbf{G}_\alpha \to \mathbf{H}$$

vi è uno ed un solo omomorfismo di gruppi

$$\phi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$$

tale che

$$\phi \circ j_\alpha = \phi_\alpha \quad \forall \alpha \in A.$$

DEFINIZIONE 1.2. Un gruppo $\mathbf{G}$ con le proprietà (1) e (2) della proposizione si inidica con $*\mathcal{G}$ e si dice il *prodotto libero* della famiglia $\mathcal{G}$. Indicheremo il prodotto libero di una famiglia finita $\{\mathbf{G}_1, ..., \mathbf{G}_n\}$ mediante $\mathbf{G}_1 * ... * \mathbf{G}_n$.

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo innanzi tutto che il prodotto libero, se esiste, è univocamente determinato a meno di isomorfismi. Sia infatti $\mathbf{G}'$ un altro gruppo e $j'_\alpha : \mathbf{G}_\alpha \to \mathbf{G}'$ monomorfismi di gruppi tali che sia verificata la proprietà (2). In particolare potremo trovare omomorfismi di gruppi

$$j : \mathbf{G}' \to \mathbf{G} \qquad \text{e} \qquad j' : \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$$

tali che

$$j \circ j'_\alpha = j_\alpha,$$
$$j' \circ j_\alpha = j'_\alpha.$$

Da queste relazioni deduciamo che

$$j' \circ j \circ j'_\alpha = j' \circ j_\alpha = j'_\alpha,$$
$$j \circ j' \circ j_\alpha = j \circ j'_\alpha = j_\alpha,$$

e dunque, per l'unicità, otteniamo

$$j \circ j' = \mathrm{id}_{\mathbf{G}},$$
$$j' \circ j = \mathrm{id}_{\mathbf{G}'}.$$

Ne segue che j e j' sono isomorfismi di gruppi.

Costruiamo ora un gruppo $\mathbf{G}$ che goda delle proprietà (1) e (2). Sia $E = \bigsqcup \mathcal{G}$ l'unione disgiunta degli insiemi $\mathbf{G}_\alpha$:

$$\bigsqcup \mathcal{G} = \{(g, \alpha) \mid \alpha \in A,\ g \in \mathbf{G}_\alpha\}$$

ed indichiamo con $P(E)$ l'insieme di tutte le sequenze finite di elementi di E. Chiamiamo E un *alfabeto* e $P(E)$ l'insieme delle *parole* nell'alfabeto E. Definiamo su $P(E)$ una struttura naturale di *monoide moltiplicativo* definendo l'operazione tra due parole mediante giustapposizione:

se $(g_1, \alpha_1), ..., (g_n, \alpha_n), (h_1, \beta_1), ..., (h_m, \beta_m) \in E$ poniamo

$$\begin{aligned}&((g_1, \alpha_1), ..., (g_n, \alpha_n)) \cdot ((h_1, \beta_1), ..., (h_m, \beta_m))\\ &= ((g_1, \alpha_1), ..., (g_n, \alpha_n), (h_1, \beta_1), ..., (h_m, \beta_m)).\end{aligned}$$

Questa operazione di prodotto gode della proprietà associativa e la parola vuota è elemento neutro del prodotto. Per ottenere il gruppo $\mathbf{G}$ introduciamo la semplificazione di parole: conveniamo di cancellare da una parola tutte le lettere che siano l'identità di un gruppo e di sostituire a una coppia di lettere consecutive che siano elementi dello stesso gruppo la lettera ottenuta facendone il prodotto:

$$\begin{aligned}&((g_1, \alpha_1), ..., (g_i, \alpha_i)(g_{i+1}, \alpha_{i+1}), ...(g_n, \alpha_n))\\ &\quad \sim ((g_1, \alpha_1), ..., (g_i g_{i+1}, \alpha_i), (g_{i+2}, \alpha_{i+2})..., (g_n, \alpha_n))\\ &\qquad\qquad \text{se } \alpha_i = \alpha_{i+1}.\end{aligned}$$

In questo modo ad ogni parola si può far corrispondere un'unica parola di lunghezza minimale, in cui nessuna lettera è identità di un gruppo e lettere consecutive appartengano a gruppi con indici diversi. La relazione tra parole che corrisponde ad avere associata la stessa parola minimale è una relazione di equivalenza. Definiamo $\mathbf{G}$ come il quoziente di $P(E)$ rispetto a questa relazione di equivalenza. Si verifica facilmente che $\mathbf{G}$ è un gruppo che gode delle proprietà richieste. □

2. Teorema di Van Kampen

Definizione 2.1. Sia X uno spazio topologico connesso per archi. Siano A, B due aperti di X tali che

$$A \cup B = X$$

$$A \cap B \neq \emptyset \text{ è connesso per archi.}$$

Fissiamo un punto base $x_0 \in A \cap B$. Le inclusioni:

$$\imath_A : A \cap B \to A$$

$$\imath_B : A \cap B \to B$$

$$\jmath_A : A \to X$$

$$\jmath_B : B \to X$$

inducono un diagramma commutativo di omomorfismi di gruppi:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A,x_0) & \xrightarrow{\jmath_{A*}} & \pi_1(X,x_0) \\ {\scriptstyle \imath_{A*}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \jmath_{B*}} \\ \pi_1(A\cap B,x_0) & \xrightarrow[\imath_{B*}]{} & \pi_1(B,x_0) \end{array}$$

Il sottogruppo normale di $\pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0)$, generato dagli elementi della forma $\imath_{A*}(h)*\imath_{B*}(h^{-1})$ al variare di h in $\pi_1(A\cap B,x_0)$, si dice il *gruppo di Van Kampen* associato alla triade (X,A,B) e al punto base x_0, e si indica con $\mathbf{K}(A,B,x_0)$

Possiamo allora formulare il:

TEOREMA 2.2 (Van Kampen). *Sia X uno spazio topologico connesso per archi e siano A,B due aperti connessi per archi di X con $A\cup B=X$, $\emptyset\neq A\cap B$ connesso per archi. Fissato un punto x_0 di $A\cap B$, l'omomorfismo*

eq:vkbb (2.1) $$\jmath_*:\pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$$

indotto dagli omomorfismi $\jmath_{A*}:\pi_1(A,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$ e $\jmath_{B*}:\pi_1(B,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$ è surgettivo e definisce, per passaggio al quoziente, un isomorfismo di gruppi:

eq:vkbc (2.2) $$\frac{\pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0)}{\mathbf{K}(A,B,x_0)}\to\pi_1(X,x_0).$$

DIMOSTRAZIONE. È conveniente nella dimostrazione cambiare leggermente le notazioni e porre $A_1=A$, $A_2=B$. Scriveremo ancora $[\alpha]_X$ per indicare la classe di $\alpha\in\mathcal{C}(I,\{0,1\};X,x_0)$ in $\pi_1(X,x_0)$ e, similmente, $[\alpha]_{A_i}$ per indicare la classe di $\alpha\in\mathcal{C}(I,\{0,1\};A_i,x_0)$ in $\pi_1(A_i,x_0)$.

Dimostriamo in primo luogo che (2.1) è un omomorfismo surgettivo. Sia $\alpha\in\mathcal{C}(I,\{0,1\};X,x_0)$ un qualsiasi laccetto. Poiché $I=\alpha^{-1}(A_1)\cup\alpha^{-1}(A_2)$, possiamo fissare una partizione

eq:vkbd (2.3) $$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_m=1$$

dell'intervallo $I=[0,1]$ ed un'applicazione $\{1,\dots,m\}\ni j\to\varepsilon(j)\in\{1,2\}$ tale che l'immagine $\alpha([t_{j-1},t_j])$ di ciascun sottointervallo della (2.3) sia tutta contenuta nell'aperto $A_{\varepsilon(j)}$. Indichiamo con $s_j\in\mathcal{C}(I,X)$ il cammino

eq:vkbe (2.4) $$s_j(t)=\alpha(t_{j-1}+t(t_j-t_{j-1})),\quad t\in I.$$

Il cammino α è una riparametrizzazione del prodotto $s_1\cdots s_m$. Poiché A_1, A_2 ed $A_1\cap A_2$ sono tutti connessi per archi, per ogni indice $j=1,\dots,m-1$, possiamo fissare un cammino continuo

$$\beta_j\in\mathcal{C}(I,0,1;A_{\varepsilon(j)}\cap A_{\varepsilon(j+1)},\alpha(t_j),x_0).$$

Siano β_0,β_m i laccetti costanti in x_0. Ciascuno dei prodotti[1] $\alpha_j=\check{\beta}_{j-1}\cdot s_j\cdot\beta_j$ è un laccetto in (X,x_0), con supporto contenuto in $A_{\varepsilon(j)}$. Chiaramente

[1]Ricordiamo che $\check{\beta}_i(t)=\beta_i(1-t)$ è il *cammino inverso* di β_i.

$\alpha_1 \cdots \alpha_m$ definisce la stessa classe di omotopia di α in $\pi_1(X, x_0)$ e si ha

eq:vkbf (2.5) $$\jmath_*([\alpha_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\alpha_m]_{A_{\varepsilon(m)}}) = [\alpha_1]_X \cdots [\alpha_m]_X = [\alpha_1 \cdots \alpha_m]_X = [\alpha]_X.$$

Ciò dimostra la surgettività di (2.1).

Chiameremo il prodotto $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ una *decomposizione* di α in laccetti, subordinata al ricoprimento $\{A_1, A_2\}$ di X.

Il sottogruppo $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$ è contenuto nel nucleo di $\jmath_*$. Infatti $\ker \jmath_*$ è un sottogruppo normale[2] di $\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, b_0)$ che contiene gli elementi $[\imath_A \circ \alpha]_A * [\imath_B \circ \check{\alpha}]_B$ per ogni $\alpha \in \mathcal{C}(I, \{0, 1\}, A \cap B, x_0)$.

Dividiamo la dimostrazione del fatto che $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$ è proprio uguale al nucleo di $\jmath_*$ in una serie di passi.

Passo 1. Consideriamo ora un elemento $\eta_1 * \cdots * \eta_m$ del prodotto libero $\pi_1(A_1, x_0) * \pi_1(A_2, x_0)$. Supponiamo che per qualche j, con $1 \leq j \leq m$, la classe di omotopia η_j contenga un laccetto α_j con supporto in $A_1 \cap A_2$. Supponiamo per fissare le idee che $\eta_j \in \pi_1(A_1, x_0)$ ed indichiamo con η'_j la classe di omotopia definita da α_j in $\pi_1(A_2, x_0)$. Allora $\eta_j^{-1}\eta'_j$ è un generatore di $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$ e perciò

$$\begin{aligned}
&(\eta_1 * \cdots * \eta_j * \cdots \eta_m)^{-1} * (\eta_1 * \cdots * \eta'_j * \cdots \eta_m) \\
&= \eta_m^{-1} * \cdots * \eta_j^{-1} * \cdots \eta_1^{-1} * \eta_1 * \cdots * \eta'_j * \cdots \eta_m \\
&= (\eta_{j+1} * \cdots * \eta_m)^{-1}(\eta_j^{-1}\eta'_j)(\eta_{j+1} * \cdots * \eta_m) \in \mathbf{K}(A_1, A_2, x_0).
\end{aligned}$$

Quindi: due qualsiasi elementi del prodotto libero $\pi_1(A_1, x_0) * \pi_1(A_2, x_0)$ sono equivalenti rispetto al sottogruppo normale $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$ se sono ottenuti l'uno dall'altro sostituendo a fattori liberi che hanno rappresentanti α con supporto in $A_1 \cap A_2$ alla classe $[\alpha]_{A_1}$ la classe $[\alpha]_{A_2}$, o viceversa.

Passo 2. Dimostriamo ora che i prodotti $[\alpha_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\alpha_m]_{A_{\varepsilon(m)}}$ associati a decomposizioni di uno stesso laccetto $\alpha \in \mathcal{C}(I, \{0, 1\}; X, x_0)$ in prodotti di laccetti, subordinati al ricoprimento $\{A_1, A_2\}$ di X, sono tutti equivalenti modulo $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$. Per il Passo 1, scelte diverse delle $\varepsilon(j)$ danno prodotti equivalenti modulo $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$. Ancora, per il Passo 2, la classe d'equivalenza modulo $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$ del prodotto $[\alpha_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\alpha_m]_{A_{\varepsilon(m)}}$ dipende soltanto dalla partizione (2.3). Sarà quindi sufficiente dimostrare che, se fissiamo $t_{j-1} < \tau < t_j$ un prodotto che dipende dalla partizione

$$0 = t_0 < \cdots < t_{j-1} < \tau < t_j < \cdots < t_m = 1$$

è equivalente modulo $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$ al prodotto $[\alpha_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\alpha_m]_{A_{\varepsilon(m)}}$. Siano $s'_j(t) = \alpha(t_{j-1} + t(\tau - t_{j-1}),\ s''_j(t) = \alpha(\tau + t(t_j - \tau)$. Fissiamo un

[2] Se $\mathbf{N}$ è un sottogruppo normale di un gruppo $\mathbf{G}$, e se due elementi $g, g' \in \mathbf{G}$ sono equivalenti modulo $\mathbf{N}$, e $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$, allora anche $g_1 g g_2$ e $g_1 g' g_2$ sono equivalenti modulo $\mathbf{N}$. Infatti $(g_1 g g_2)^{-1} g_1 g' g_2 = g_2^{-1} g^{-1} g' g_2 \in \mathbf{N}$ se $g^{-1} g' \in \mathbf{N}$.

elemento $\gamma \in \mathcal{C}(I,0,1;X,\alpha(\tau),x_0)$ con $\gamma(I) \subset A_i$ se $\alpha(\tau) \in A_i$, e $\gamma(I) \subset A_1 \cap A_2$ se $\alpha(\tau) \in A_1 \cap A_2$. Allora

$$\begin{aligned}&[\check\beta_0 s_1 \beta_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\check\beta_{j-1} s_j \beta_j]_{A_{\varepsilon(j)}} * \cdots * [\check\beta_{m-1} s_m \beta_m]_{A_{\varepsilon(m)}} \\ &= [\check\beta_0 s_1 \beta_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\check\beta_{j-1} s'_j \gamma]_{A_{\varepsilon(j)}} * [\check\gamma s''_j \beta_j]_{A_{\varepsilon(j)}} * \cdots * [\check\beta_{m-1} s_m \beta_m]_{A_{\varepsilon(m)}}.\end{aligned}$$

Passo 3. Sia $\alpha \in \mathcal{C}(I,\{0,1\};X,x_0)$ e sia (2.3) una partizione per cui $\alpha([t_{j-1},t_j]) \subset A_{\varepsilon(j)}$, con $\varepsilon(j) \in \{0,1\}$, per $j = 1,\dots,m$, e gli s_j definiti dalle (2.4). Siano $\beta_j, \gamma_j \in \mathcal{C}(I,0,1;X,\alpha(t_j),x_0)$ con

$$\beta_j(I) \cup \gamma_j(I) \subset A_{\varepsilon(j)} \cap A_{\varepsilon(j+1)}$$

e siano $\beta_0, \beta_m, \gamma_0, \gamma_m$ i laccetti costanti in (X,x_0). Allora

$$[\check\beta_0 s_1 \beta_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\check\beta_{m-1} s_m \beta_m]_{A_{\varepsilon(m)}} \equiv [\check\gamma_0 s_1 \gamma_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\check\gamma_{m-1} s_m \gamma_m]_{A_{\varepsilon(m)}} \mod \mathbf{K}(A_1,A_2,x_0).$$

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}&[\check\beta_0 s_1 \beta_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\check\beta_{m-1} s_m \beta_m]_{A_{\varepsilon(m)}} \\ &\qquad = [\check\gamma_0 s_1 \gamma_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * [\check\gamma_1 \beta_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * [\check\beta_1 \gamma_1]_{A_{\varepsilon(2)}} * [\check\gamma_1 s_2 \gamma_2]_{A_{\varepsilon(2)}} * \cdots \\ &\qquad \cdots * [\check\gamma_{m-1} \beta_{m-1}]_{A_{\varepsilon(m-1)}} * [\check\beta_{m-1} \gamma_{m-1}]_{A_{\varepsilon(m)}} * [\check\gamma_{m-1} s_m \gamma_m]_{A_{\varepsilon(m)}}.\end{aligned}$$

Il secondo membro di questa uguaglianza è equivalente, modulo il sottogruppo normale $\mathbf{K}(A_1,A_2,x_0)$, al prodotto che si ottiene da esso sostituendo a ciascun fattore $[\check\beta_j \gamma_j]_{A_{\varepsilon(j+1)}}$ il fattore $[\check\beta_j \gamma_j]_{A_{\varepsilon(j)}}$. Ciò è ovvio se $\varepsilon(j) = \varepsilon(j+1)$. Quando i due valori sono diversi, $\alpha(t_j) \in A_1 \cap A_2$ e $\check\beta_j \gamma_j$ è un laccetto in $(A_1 \cap A_2, x_0)$, per cui l'equivalenza segue dal Passo 1.

Passo 4. Possiamo ora concludere la dimostrazione.

Sia $\eta \in \pi_1(A_1,x_0) * \pi_1(A_2,x_0)$ un elemento del nucleo di $\jmath_*$. Abbiamo $\eta = [\alpha_1]_{A_{\varepsilon(1)}} * \cdots * [\alpha_m]_{A_{\varepsilon(m)}}$, ove $\alpha_j \in \mathcal{C}(I,\{0,1\};A_{\varepsilon(j)},x_0)$, $\varepsilon(j) \in \{0,1\}$ per $j = 1,\dots,m$. Sia $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_m$. Per ipotesi $[\alpha]_X$ è la classe di omotopia del laccetto costante. Vi è perciò un'omotopia

$$\begin{cases} F : I \times I \ni (t,s) \to F(t,s) \in X, \\ F(t,0) = \alpha(t), \\ F(0,s) = F(1,s) = F(t,1) = x_0 \quad \forall t,s \in I. \end{cases}$$

Suddividiamo in quadrato $I \times I$ in N^2 quadratini di lato $1/N$:

$$Q_{i,j} = \{(t,s) \in I \times I \mid i-1 \le Nt \le i,\ j-1 \le Ns \le j\} \quad \text{per} \quad 1 \le i,j \le N.$$

Scegliendo l'intero positivo N sufficientemente grande, facciamo in modo che, per ogni quadratino $Q_{i,j}$ della suddivisione, $F(Q_{i,j})$ sia tutto contenuto in un aperto $A_{\varepsilon(i,j)}$, per $\varepsilon(i,j) \in \{1,2\}$. Per ogni $1 \le i \le N-1$ e $0 \le j \le N-1$ fissiamo

$$\beta_{i,j} \in \mathcal{C}\left(I,0,1;A_{\varepsilon(i,j)} \cap A_{\varepsilon(i,j+1)}, \cap A_{\varepsilon(i+1,j)} \cap A_{\varepsilon(i+1,j+1)}, F(i/N, j/N), x_0\right).$$

Definiamo poi $\beta_{0,j}$, $\beta_{N,j}$, $\beta_{i,N}$ come il laccetto costante di (X, x_0) per ogni $0 \leq i, j \leq N$. Siano poi

$$\begin{cases} \sigma_{i,j}(t) = F((t+i-1)/_N, j/_N) & 1 \leq i \leq N,\ 0 \leq j \leq N,\ t \in I, \\ \tau_{i,j}(t) = F(i/_N, (t+j-1)/_N) & 0 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq N,\ t \in I. \end{cases}$$

Per ogni $j = 0, 1, \ldots, N$ consideriamo il laccetto $F_{j/_N}(t) = F(t, j/_N)$ di (X, x_0). La sua classe di omotopia $[F_{j/_N}]_X$ è l'immagine mediante $\jmath_*$ dell'elemento

$$\eta_j = [\check{\beta}_{0,j}\sigma_{1,j}\beta_{1,j}]_{A_{\varepsilon(1,j)}} * \cdots * [\check{\beta}_{i-1,j}\sigma_{i,j}\beta_{i,j}]_{A_{\varepsilon(i,j)}} * \cdots * [\check{\beta}_{N-1,j}\sigma_{1,j}\beta_{N,j}]_{A_{\varepsilon(N,j)}}$$

di $\pi_1(A_1, x_0) * \pi_1(A_2, x_0)$. Per i passi precedenti della dimostrazione, η_0 è equivalente ad η modulo $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$. Quindi, per verificare che $\eta \in \mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$ sarà sufficiente dimostrare che, per ogni $1 \leq j \leq N$, è $\eta_{j-1}\eta_j^{-1} \in \mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$. Indicando con $\equiv$ l'equivalenza modulo $\mathbf{K}(A_1, A_2, x_0)$, ed utilizzando le omotopie descritte dai quadratini $Q_{i,j-1}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \eta_j =& [\check{\beta}_{0,j-1}\tau_{0,j-1}\sigma_{1,j}\check{\tau}_{1,j-1}\beta_{1,j-1}]_{A_{\varepsilon(1,j)}} * \cdots \\ & \cdots * [\check{\beta}_{i-1,j-1}\tau_{i-1,j-1}\sigma_{i,j}\check{\tau}_{i,j-1}\beta_{i,j-1}]_{A_{\varepsilon(i,j)}} * \cdots \\ & \cdots * [\check{\beta}_{N-1,j-1}\tau_{N-1,j-1}\sigma_{N,j}\check{\tau}_{N,j-1}\beta_{N,j-1}]_{A_{\varepsilon(i,j)}} \\ =& [\check{\beta}_{0,j-1}\sigma_{1,j-1}\beta_{1,j-1}]_{A_{\varepsilon(1,j)}} * \cdots \\ & \cdots * [\check{\beta}_{i-1,j-1}\sigma_{i,j-1}\beta_{i,j-1}]_{A_{\varepsilon(i,j)}} * \cdots \\ & \cdots * [\check{\beta}_{N-1,j-1}\sigma_{N,j-1}\beta_{N,j-1}]_{A_{\varepsilon(i,j)}} \\ \equiv& [\check{\beta}_{0,j-1}\sigma_{1,j-1}\beta_{1,j-1}]_{A_{\varepsilon(1,j-1)}} * \cdots \\ & \cdots * [\check{\beta}_{i-1,j-1}\sigma_{i,j-1}\beta_{i,j-1}]_{A_{\varepsilon(i,j-1)}} * \cdots \\ & \cdots * [\check{\beta}_{N-1,j-1}\sigma_{N,j-1}\beta_{N,j-1}]_{A_{\varepsilon(i,j-1)}} \ = \ \eta_{j-1}. \end{aligned}$$

Ciò completa la dimostrazione. □

3. Alcuni esempi ed applicazioni

3.1. Attaccamento di una 2-cella. Sia X uno spazio topologico connesso per archi e sia

$$f : S^1 \to X$$

una applicazione continua. Costruiamo un nuovo spazio topologico Y considerando l'unione disgiunta

$$D^2 \sqcup X$$

e il suo quoziente Y ottenuto identificando i punti $y \in S^1 \subset D^2$ con i punti $f(y) \in X$. Lo spazio topologico Y si dice ottenuto da X per *attaccamento di una 2-cella* lungo f. Abbiamo inclusioni naturali:

$$\imath_X : X \to Y$$

$$\imath_{D^2} \to Y.$$

Osserviamo che $\imath_X$ è un omeomorfismo con l'immagine. Lo spazio topologico Y è connesso per archi e possiamo calcolare il suo gruppo fondamentale usando il teorema di Van Kampen.

Il gruppo fondamentale, a meno di isomorfismi, non dipende dalla scelta del punto base. Fissiamo dunque il punto base $y_0 = e_0/2$ in D^2 e consideriamo il ricoprimento di Y mediante i due aperti

$$A = \imath_X(X) \cup \imath_{D^2}(\{|y| > 0\}),$$
$$B = \imath_{D^2}(\{|y| < 1\}).$$

Allora $A \cap B$ è omeomorfo alla corona circolare $\{0 < |y| < 1\}$ e $\pi_1(A \cap B, y_0)$ è il gruppo ciclico di ordine infinito generato da

$$S^1 \ni e^{i\theta} \to \imath_{D^2}(y_0 \cdot e^{i\theta}) \in A \cap B.$$

Poiché B è contrattile, $\pi_1(B, y_0) = \{e\}$ e poiché $\imath_X(X)$ è un retratto di deformazione di A, $\pi_1(A, y_0)$ è isomorfo a $\pi_1(X, x_0)$ ove $x_0 = f(e_0)$ e l'isomorfismo è indotto dal cammino

$$I \ni t \to \imath_{D^2}([1-t]y_0 + te_0) \in Y.$$

Otteniamo quindi, indicando con $N(f)$ il sottogruppo normale di $\pi_1(X, x_0)$ generato dalla classe di omotopia $[f]$ di f,

eq:vkcc

$$\pi_1(Y, \imath_X(x_0)) \simeq \pi_1(X, x_0)/N(f). \tag{3.1}$$

COROLLARIO 3.1. $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \simeq \mathbb{Z}_2$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $X = S^1$ ed $f : S^1 \ni e^{i\theta} \to f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta} \in X$. Lo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^2$ si ottiene attaccando ad $X = S^1$ una 2-cella mediante f. Il sottogruppo normale $N(f)$ è l'immagine in $\pi_1(S^1, e_0) \simeq \mathbb{Z}$ delle applicazioni

$$S^1 \ni e^{i\theta} \to e^{2ki\theta} \in S^1 \text{ per } k \in \mathbb{Z}.$$

Abbiamo quindi:

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2.$$

□

ESEMPIO 3.2. In generale possiamo considerare lo spazio topologico Y_m che si ottiene attaccando ad $X = S^1$ una 2-cella mediante l'applicazione $f_m : S^1 \ni z \to z^m \in X$. Risulta

$$\pi_1(Y_m, e_0) = \mathbb{Z}/N(f) = \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_m.$$

ESEMPIO 3.3. $\pi_1(\mathbb{R}^3 - S^1, 0) \simeq \mathbb{Z}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$S^1 = \{(x, y, 0) | x^2 + y^2 = 1\}.$$

Possiamo trovare una retrazione di deformazione di $\mathbb{R}^3 - S^1$ su

$$X = \{(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 = 1\}.$$

Abbiamo quindi:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - S^1, 0) \simeq \pi_1(X, 0).$$

Lo spazio X si ottiene attaccando ad S^1 una 2-cella mediante l'applicazione

$$f(e^{i\theta}) = \begin{cases} e^{2i\theta} & 0 \leq \theta \leq \pi \\ e^{-2i\theta} & \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Poiché f è omotopa all'applicazione costante, ne segue che

$$\pi_1(X, 0) \simeq \mathbb{Z}.$$

□

3.2. Bouquet di circonferenze.

ESEMPIO 3.4. Consideriamo il *bouquet* di due circonferenze

$$X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| = 1\}.$$

Per calcolare $\pi_1(X, 0)$, consideriamo il ricoprimento aperto di X mediante gli insiemi

$$A = \left\{ z \in X \,\middle|\, \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2} \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ z \in X \,\middle|\, \operatorname{Re} z < \frac{1}{2} \right\}.$$

Ciascuno dei due insiemi A e B si può retrarre per deformazione su una circonferenza e la loro intersezione $A \cap B$ è connessa e contrattile. Quindi

$$\pi_1(X, 0) = \pi_1(S^1, e_0) * \pi_1(S^1, e_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

ESEMPIO 3.5. Più in generale possiamo considerare il bouquet

$$X_n = \underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{n \text{ volte}}$$

di n circonferenze ($n \geq 2$). Esso è il quoziente dell'unione disgiunta di n circonferenze rispetto alla relazione di equivalenza che identifica ad un unico punto un punto fissato di ciascuna circonferenza:

$$X_n = \{(z, j) \in S^1 \times \{1, \ldots, n\}\}/_{(\{1\} \times \{1, \ldots, n\})}.$$

Indichiamo con $p : S^1 \times \{1, \ldots, n\} \to X_n$ la proiezione nel quoziente. Possiamo considerare il ricoprimento di X_n mediante i due aperti $A = X_n \setminus \{p((-1, n))\}$ e $B = X_n \setminus p(\{(-1, j) \mid 1 \leq j < n\}$. Allora $A \cap B$ è contrattile ed A si retrae per deformazione su un sottospazio omeomorfo ad X_{n-1}, mentre B si retrae per deformazione su un sottospazio omeomorfo ad S^1. Quindi, posto $x_0 = p((1, 1))$,

$$\pi_1(X_n, x_0) \simeq \pi_1(X_{n-1}, x_0) * \pi_1(S_1, 1) \simeq \cdots \simeq \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}.$$

ESEMPIO 3.6. Consideriamo il toro $T = S^1 \times S^1$. Esso si può ottenere dal quadrato $Q = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ identificando tra loro i punti dei lati opposti:

$$(0, y) \sim (1, y), \quad (x, 0) \sim (x, 1).$$

Possiamo quindi considerare T come l'attaccamento di una due cella al bouquet di due circonferenze $(S^1, 1) \vee (S^1, 1)$ mediante l'applicazione

$$S^1 \ni z \to f(z) = \begin{cases} p(z^4, 1) & \text{se } \mathrm{Re}(z) \geq 0,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0, \\ p(z^4, 2) & \text{se } \mathrm{Re}(z) \leq 0,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0, \\ p(-z^4, 1) & \text{se } \mathrm{Re}(z) \leq 0,\ \mathrm{Im}(z) \leq 0, \\ p(-z^4, 2) & \text{se } \mathrm{Re}(z) \geq 0,\ \mathrm{Im}(z) \leq 0. \end{cases}$$

Qui $S^1 \vee S^1 = \{(z, h) \mid z \in S^1,\ h = 1, 2\}/\{(1, 1), (1, 2)\}$ e $p : \{(z, h) \mid z \in S^1,\ h = 1, 2\} \to S^1 \vee S^1$ è la proiezione nel quoziente. Detti a e b gli elementi di $\pi_1(S^1 \vee S^1, p(1, 1)) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ corrispondenti ai cammini $I \ni t \to p(e^{2i\pi t}, 1)$ e $I \ni t \to p(e^{2i\pi t}, 2)$, rispettivamente, otteniamo che il gruppo di Van Kampen è il sottogruppo normale generato da $aba^{-1}b^{-1}$. Quindi $\pi_1(T, x_0) \simeq (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})/_{\mathbf{N}(aba^{-1}b^{-1})} \simeq \mathbb{Z}^2$.

ESEMPIO 3.7. Consideriamo il sottoinsieme X_m di $\mathbb{C}$ definito da

$$X_m = \{|z| = 1\} \cup \{|z| = 2\} \cup \bigcup_{j=1}^{m} \left\{ t \exp\left(\frac{2j\pi}{m}\right) \mid 1 < t < 2 \right\}.$$

X_1 è omotopicamente equivalente al bouquet di due circonferenze e quindi $\pi_1(X_1, e_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Sia ora $m > 1$. Siano $A = X_m \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ e $B = \left\{z \in X_m \,\middle|\, -\frac{\pi}{m} < \mathrm{Arg}(z) < \frac{3\pi}{m}\right\}$. Allora A si retrae per deformazione su un sottospazio omeomorfo ad X_{m-1}, B si retrae per deformazione su un sottospazio omeomorfo ad una circonferenza S^1, mentre $A \cap B$ è contrattile. Otteniamo perciò

$$\begin{aligned} \pi_1(X_m, 1) =& \pi_1(A, 1) * \pi_1(B, 1) \simeq \pi_1(X_{m-1}, 1) * \pi_1(S^1, 1) \\ \simeq& \pi_1(X_{m-2}, 1) * \pi_1(S^1, 1) * \pi_1(S^1, 1) \simeq \cdots \\ \simeq& \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{(m+1) \text{ volte}}. \end{aligned}$$

ESEMPIO 3.8. Il toro si generalizza alla *sfera a n manici*. L'operazione di aggiungere un manico a una sfera si può effettuare togliendo dalla sfera due calotte aperte disgiute ed attaccando ai loro bordi i bordi di un cilindro circolare retto. La sfera a n manici M_n si può anche ottenere a partire dal disco $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ identificando coppie di punti della sua frontiera mediante

$$e^{it} \equiv e^{i\left(\frac{(j+n)\pi}{n} - t\right)} \quad \text{se} \quad j = 1, \ldots, n, \quad \frac{(j-1)\pi}{n} \leq t \leq \frac{j\pi}{n}.$$

Quindi M_n si ottiene attaccando una 2-cella al bouquet di n circonferenze

$$p : \{(z, h) \mid z \in S^1,\ h = 1, \ldots, n\} \to (S^1, 1) \vee \cdots \vee (S^1, 1)$$

mediante l'applicazione

$$f(z) = \begin{cases} p\left(z^{2n}, \left[\frac{\mathrm{Arg}(z)}{n\pi}\right]\right) & \text{se} \quad 0 \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \pi, \\ p\left(z^{-2n}, \left[\frac{\mathrm{Arg}(z)-\pi}{n\pi}\right]\right) & \text{se} \quad \pi \leq \mathrm{Arg}(z) \leq 2\pi. \end{cases}$$

Indichiamo con a_j l'elemento di $\pi_1(S^1 \vee \cdots \vee S^1, p(1,1))$ corrispondente al laccetto $p(e^{it}, j)$, per $j = 1, \ldots, n$. Allora $\pi_1(S^1 \vee \cdots \vee S^1, p(1,1))$ è il gruppo libero con generatori $a_1, \ldots, a_n$. Il quoziente

$$\pi_1(M_n, p_0) = \pi_1(S^1 \vee \cdots \vee S^1, p(1,1))/_{\mathbf{N}(f)}$$

è quindi il gruppo definito dai generatori $a_1, \ldots, a_n$ e dalla relazione

$$a_1 \cdots a_n a_1^{-1} \cdots a_n^{-1} = e.$$

3.3. Altri esempi.

Esempio 3.9. Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme formato da una retta e da un punto che non le appartiene. Supponiamo, per fissare le idee, che sia

$$E = \{(2,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\} \cup \{(-2,0,0)\}.$$

Sia $X = \mathbb{R}^3 \setminus E$. Ricopriamo X mediante i due aperti

$$A = \{(x,y,z) \in X \mid x < 1\}, \quad B = \{(x,y,z) \in X \mid x > -1\}.$$

Allora $A \cap B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 < x < 1\}$ è contrattile. L'aperto A si retrae per deformazione su un sottospazio omeomorfo alla sfera S^2; l'aperto B si deforma per deformazione ad un sottospazio omeomorfo ad S^1. Quindi

$$\pi_1(X,0) \simeq \pi_1(A,0) * \pi_1(B,0) \simeq \mathbb{Z}.$$

Esempio 3.10. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ formato da n punti distinti ed $X_n = \mathbb{R}^2 \setminus E$. X_n è omeomorfo ad $\mathbb{R}^2 \setminus \{1, 2, \ldots, n\}$. Osserviamo che $A = \{(x,y) \in X_n \mid x < 2\}$ e $B = \{(x,y) \in X_n \mid x > 1\}$ danno un ricoprimento aperto di X_n con $A \cap B$ contrattile. Poiché A è omeomorfo ad X_1 e B ad X_{m-1}, abbiamo

$$\begin{aligned} \pi_1(X_n, 0) &\simeq \pi_1(X_{n-1}, 0) * \pi_1(X_1, 0) \\ &\simeq \cdots \simeq \underbrace{\pi_1(X_1,0) * \cdots * \pi_1(X_1,0)}_{n \text{ volte}} \\ &\simeq \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}} \end{aligned}$$

perché X_1 si retrae per deformazione su un sottospazio omeomorfo ad S^1.

Esempio 3.11. Sia

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(0,0,z) \mid -1 < z < 1\}.$$

Ricopriamo X con gli aperti

$$A = X \setminus \{0\}, \qquad B = X \setminus \{(1,0,0)\}.$$

Allora $A \cap B$ è contrattile, A si retrae per deformazione su S^2 e B si retrae per deformazione su un sottospazio omeomorfo ad S^1. Quindi

$$\pi_1(X, e_3) \sim \pi_1(S^2, e_0) * \pi_1(S^1, e_0) \simeq \mathbb{Z}.$$

ESEMPIO 3.12. Sia $X = S^2 \cup D^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Siano $A = X \setminus \{e_3\}$, $B = X \setminus \{-e_3\}$. Allora $A \cap B$ è contrattile, mentre A e B si retraggono per deformazione su sottospazi omeomorfi ad S^2. Quindi $\pi_1(X, e_1) = 0$.

ESEMPIO 3.13. Sia $X = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$, ove $S^1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 1\}$. Sia $p_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Possiamo ricoprire X mediante i due aperti $A = \{(x, y, z) \in X \mid x^2 + y^2 > 0\}$ e $B = \{(x, y, z) \in X \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Osserviamo che B è contrattile, che A si retrae per deformazione sul toro $T = \{(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = \frac{1}{4}\}$, che si ottiene facendo ruotare la circonferenza $\{(x - 1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}\} \subset \mathbb{R}^2_{x,z}$ intorno all'asse z, che $A \cap B$ si retrae per deformazione sul cilindro $\{x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$ e quindi sulla circonferenza $\{x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\} \cap \{z = 0\}$. Poiché $\alpha(t) = (\frac{1}{2}\cos(t), \frac{1}{2}\sin(t), 0)$ definisce sia la classe del generatore di $\pi_1(A \cap B, p_0) \simeq \mathbb{Z}$ che di uno dei due generatori di $\pi_1(A, p_0) \simeq \mathbb{Z}^2$ come prodotto diretto, otteniamo $\pi(X, p_0) = \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

CAPITOLO 19

CW-complessi

1. Definizioni fondamentali

Per ogni intero non negativo m siano D^m e B^m rispettivamente la palla chiusa e la palla aperta di raggio 1 in $\mathbb{R}^m$ ed S^m la sfera unitaria di dimensione m:

$$\begin{aligned} D^0 &= B^0 = \{0\} \\ D^m &= \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, |x| \leq 1\} \supset B^m \quad \text{se} \quad m > 0 \\ B^m &= \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, |x| < 1\} \subset D^m \quad \text{se} \quad m > 0 \\ S^0 &= \{-1, 1\} \subset \mathbb{R} \\ S^m &= D^{n+1} \setminus B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, |x| = 1\} \quad \text{se} \quad m > 0\,. \end{aligned}$$

Definizione 1.1. Sia X uno spazio topologico. Chiamiamo *cella di dimensione* m di X un suo sottospazio A, omeomorfo a B^m mediante un omeomorfismo $\phi : B^m \to A$ che si estende ad un'applicazione continua $\bar{\phi} : D^m \to X$:

$$\begin{array}{ccc} B^m & \xrightarrow{\text{inclusione}} & D^n \\ {\scriptstyle \text{omeomorfismo } \phi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \bar{\phi} \text{ continua}} \\ A & \xrightarrow[\text{inclusione}]{} & X \end{array} \tag{1.1}$$

Una funzione ϕ con queste proprietà si dice *caratteristica* della cella A.

La chiusura $\bar{A}$ di una cella A si dice *cella chiusa* di X.

Per l'invarianza topologica della dimensione, la *dimensione* m della cella A di X è univocamente determinata.

Per ogni punto x di X, il sottospazio $\{x\}$ è una cella di dimensione 0.

Si dice *decomposizione cellulare* di X una partizione $\mathcal{P}$ di X con le proprietà:

(1) Ogni elemento A di $\mathcal{P}$ è una cella;
(2) Se $A \in \mathcal{P}$ è una cella di dimensione m, allora $\bar{A} \setminus A$ è unione di un numero finito di celle di $\mathcal{P}$ di dimensione strettamente minore di m.

Esempio 1.2. Consideriamo la sfera

$$S^n = \left\{ x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1 \right\}\,.$$

Posto $A = \{(1, 0, \dots, 0)\}$, $B = \{x \in S^n \,|\, x_0 < 1\}$, la $\mathcal{P} = \{A, B\}$ è una decomposizione cellulare di S^n in una cella A di dimensione 0 ed una cella B di dimensione n.

ESEMPIO 1.3. Consideriamo il disco $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,||x| \leq 1\}$. Gli insiemi $A_n = B^n$, $A_{n-1} = S^{n-1} \setminus \{e_1\}$ ed $A_0 = \{e_1\}$ sono le celle di una decomposizione cellulare di D^n, che consiste di una cella A_n di dimensione n, una cella A_{n-1} di dimensione $(n-1)$ e una cella A_0 di dimensione 0.

es:cwad

ESEMPIO 1.4. Sia $\mathbb{RP}^n$ lo spazio proiettivo reale di dimensione n e $p : \mathbb{R}^{n+1}_{x_0,\dots,x_n} \to \mathbb{RP}^n$ la proiezione canonica nel quoziente. Poniamo

$$\begin{aligned}
A_n &= \mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{RP}^{n-1} = p(\{x_n \neq 0\}),\\
A_{n-1} &= \mathbb{RP}^{n-1} \setminus \mathbb{RP}^{n-2} = p(\{x_n = 0,\ x_{n-1} \neq 0\}),\\
&\dots \quad \dots\\
A_k &= \mathbb{RP}^k \setminus \mathbb{RP}^{k-1} = p(\{x_j = 0 \text{ se } j > k,\ x_k \neq 0\}),\\
&\dots \quad \dots\\
A_0 &= \mathbb{RP}^0 = p(\{(1, 0, \dots, 0)\}).
\end{aligned}$$

La $\mathcal{P} = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ è una partizione cellulare di $\mathbb{RP}^n$ con una cella di dimensione h per ogni $0 \leq h \leq n$.

ESEMPIO 1.5. Sia $\mathbb{CP}^n$ lo spazio proiettivo complesso di dimensione n e $p : \mathbb{C}^{n+1}_{z_0,\dots,z_n} \to \mathbb{RP}^n$ la proiezione canonica nel quoziente. Poniamo

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= \mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{CP}^{n-1} = p(\{z_n \neq 0\}),\\
A_{2n-2} &= \mathbb{CP}^{n-1} \setminus \mathbb{CP}^{n-2} = p(\{z_n = 0,\ z_{n-1} \neq 0\}),\\
&\dots \quad \dots\\
A_{2k} &= \mathbb{CP}^k \setminus \mathbb{CP}^{k-1} = p(\{z_j = 0 \text{ se } j > k,\ z_k \neq 0\}),\\
&\dots \quad \dots\\
A_0 &= \mathbb{CP}^0 = p(\{(1, 0, \dots, 0)\}).
\end{aligned}$$

La $\mathcal{P} = \{A_0, A_2, \dots, A_{2n}\}$ è una partizione cellulare di $\mathbb{CP}^n$ con una cella di dimensione $2h$ per ogni $0 \leq h \leq n$.

ESEMPIO 1.6. Sia $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ il toro di dimensione n. Indichiamo con $\pi : I^n \to T^n$ la restrizione della proiezione di $\mathbb{R}^n$ sul quoziente T^n. Per ogni sottoinsieme F di $\{1, \dots, n\}$ poniamo:

$$X_F = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in I^n \,|\, 0 < x_i < 1 \text{ se } i \in F\,,\ x_i = 0 \text{ se } i \notin F\}\,.$$

Allora $\pi(X_F) = A_F$ è una cella di dimensione $\#F$ (= numero di elementi di F) e $\{A_F \,|\, F \subset \{1, \dots, n\}\}$ è una decomposizione cellulare di T^n, in cui vi sono, per ogni intero m con $0 \leq m \leq n$, $\binom{n}{m}$ celle di dimensione m.

ESEMPIO 1.7. Consideriamo la *Grassmanniana* $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ degli m-piani lineari di $\mathbb{R}^n$. Essa è una varietà differenziabile analitica. Una carta locale

con centro in un punto $p_0 = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ si ottiene completando la base $v_1, \dots, v_m$ di p_0 ad una base $v_1, \dots, v_n$ di $\mathbb{R}^n$ e facendo corrispondere alla matrice reale $(n-m) \times m$

$$\begin{pmatrix} x_{m+1,1} & \dots & x_{m+1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,m} \end{pmatrix}$$

il piano $p = \langle v_1 + \sum_{j=m+1}^{n} x_{j,1} v_j, \dots, v_m + \sum_{j=m+1}^{n} x_{j,m} v_j \rangle$.

Una decomposizione cellulare di $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ si ottiene utilizzando le *celle di Schubert*. Definiamole a partire dalla base canonica $e_1, \dots, e_n$ di $\mathbb{R}^n$. Indichiamo con $E_h = \langle e_1, \dots, e_h \rangle$ l'h-piano generato dai primi h vettori della base. Per ogni $j = 1, \dots, m$ ed ogni m-piano $p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$, definiamo

$$\mu_j(p) = \inf\{h \mid \dim_{\mathbb{R}}(p \cap E_h) \geq j\}.$$

In questo modo associamo ad ogni $p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ una sequenza crescente di numeri interi

$$1 \leq \mu_1(p) < \mu_2(p) < \cdots \mu_m(p) \leq n.$$

Allora gli insiemi

$$A_{k_1,\dots,k_m} = \{p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \mid \mu_j(p) = k_j\},$$

al variare di $(k_1, \dots, k_m)$ tra le successioni di interi con $1 \leq k_1 < \cdots < k_m \leq n$, formano una decomposizione cellulare di $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$, con

eq:cwagd

$$d = \dim_{\mathbb{R}}(A_{k_1,\dots,k_m}) = \left(\sum_{j=1}^{m} k_j \right) - \frac{m(m+1)}{2}. \tag{1.2}$$

Infatti, ogni elemento di p di $A_{k_1,\dots,k_m}$ ha un'unica base della forma

$$\begin{cases} v_1 = e_{k_1} + \sum_{j<k_1} x_{1,j} e_j \\ \dots \\ v_h = e_{k_h} + \sum_{\substack{j<k_h \\ j \notin \{k_i \mid i<h\}}} x_{h,j} e_j \\ \dots \\ v_m = e_{k_m} + \sum_{\substack{j<k_m \\ j \notin \{k_i \mid i<m\}}} x_{h,j} e_j. \end{cases}$$

La scelta del vettore v_1 dipende linearmente da $k_1 - 1$ parametri, quella di v_2 da $k_2 - 2$ parametri, in generale quella di v_h da $k_h - h$ parametri. Poiché $\sum_{h=1}^{m}(k_h - h)$ è la d definita dalla (1.2), questa descrizione di una base di $p \in A_{k_1,\dots,k_m}$ definisce un omeomorfismo di $\mathbb{R}^d$ con $A_{k_1,\dots,k_m}$.

Osserviamo che $A_{1,\dots,m}$ è l'unica cella di dimensione 0, mentre $A_{(n-m+1),\dots,n}$ è l'unica cella di dimensione massima $(n-m)m$.

Questa costruzione generalizza quella descritta nell'Esempio 1.4 per lo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^n = \mathbb{G}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

ESEMPIO 1.8. In modo analogo si possono trovare le decomposizioni cellulari delle grassmanniane complesse $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})$ e quaternioniche $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{H})$. La prima conterrà soltanto celle di dimensione pari, la seconda celle le cui dimensioni sono multipli di quattro.

LEMMA 1.9. *Sia A una cella di dimensione m di uno spazio topologico X e sia $\phi : D^m \to X$ una sua funzione caratteristica. Allora $\phi(D^m) \subset \bar{A}$. Se X è di Hausdorff, allora $\phi(D^m) = \bar{A}$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché ϕ è continua, $\phi^{-1}(X \setminus \bar{A})$ è un aperto di D^m. Poiché ogni aperto non vuoto di D^m contiene punti di B^m e $B^m \cap \phi^{-1}(X \setminus \bar{A}) = \emptyset$, abbiamo $\phi^{-1}(X \setminus \bar{A}) = \emptyset$ e quindi $\phi(D^m) \subset \bar{A}$. In particolare, $\phi(D^m) = \bar{A}$ se e soltanto se $\phi(D^m)$ è chiuso in X. L'ultima affermazione del lemma è perciò conseguenza del fatto che $\phi(D^m)$ è compatto in X e quindi chiuso in X quando X sia di Hausdorff. □

DEFINIZIONE 1.10. Si dice *spazio cellulare*, o *CW-complesso*, la coppia $(X, \mathcal{P})$ di uno spazio topologico di Hausdorff X e di una sua decomposizione cellulare $\mathcal{P}$ che goda delle proprietà[1]:

(C) Per ogni $A \in \mathcal{P}$, l'insieme delle celle $B \in \mathcal{P}$ che intersecano la chiusura di A (cioè con $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$) è finito.

(W) Le celle chiuse formano un ricoprimento fondamentale di X, cioè $F \subset X$ è chiuso in X se e soltanto se $F \cap \bar{A}$ è chiuso per ogni cella $A \in \mathcal{P}$.

Uno spazio cellulare $(X, \mathcal{P})$ con una partizione cellulare $\mathcal{P}$ formata da un numero finito di celle si dice *finito*.

Osserviamo che, dalla definizione di decomposizione cellulare, segue che *ogni cella chiusa $\bar{A}$ di un CW-complesso $(X, \mathcal{P})$ è un'unione finita di celle di $\mathcal{P}$.*

Gli esempi precedenti ci mostrano che S^n, D^n, $\mathbb{RP}^n$, $\mathbb{CP}^n$, T^n, $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$, $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})$, $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{H})$ sono spazi cellulari finiti.

LEMMA 1.11. *Sia $(X, \mathcal{P})$ un CW-complesso. Per ogni $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$, l'unione di celle chiuse $Y = \bigcup_{A \in \mathcal{Q}} \bar{A}$ è chiusa in X.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $C \in \mathcal{P}$. Allora $\bar{C} = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_m$ con $C_0 = C$ ed un numero finito di celle $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{P}$, di dimensione inferiore a quella di C. Abbiamo

$$\begin{aligned} Y \cap \bar{C} &= \bigcup \{C_h \,|\, 0 \leq h \leq m \quad \text{e} \quad C_h \subset Y\} \\ &= \bigcup \{\bar{C}_h \,|\, 0 \leq h \leq m \quad \text{e} \quad C_h \subset Y\}\,. \end{aligned}$$

[1]La lettera (C) è l'iniziale di *closure finiteness* e (W) di *weak topology*. La topologia debole di un ricoprimento è la topologia meno fine per cui il ricoprimento sia fondamentale, cioè la topologia in cui un sottoinsieme è aperto o chiuso se e soltanto se è tale, per la topologia di sottospazio, la sua intersezione con ogni sottoinsieme del ricoprimento. In questo caso si considera il ricoprimento di X mediante le celle chiuse della sua decomposizione cellulare.

Ciò dimostra che l'intersezione di Y con qualsiasi cella chiusa è un chiuso (perché unione finita di chiusi) e quindi Y è chiuso in X. □

DEFINIZIONE 1.12. Se $\mathcal{P}$ è una decomposizione cellulare di uno spazio topologico X, possiamo considerare su X la topologia meno fine per cui $\{\bar{C} \,|\, C \in \mathcal{P}\}$ sia un ricoprimento fondamentale. Questa topologia è in generale più fine della topologia originaria, di cui si dice essere *l'indebolimento cellulare*.

ESEMPIO 1.13. Sia X il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito da:

$$X = \left\{ x = (x_0, x_1, x_2) \in S^3 \;\middle|\; mx_1 = nx_2 \quad \text{con } (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} \right\} .$$

Una decomposizione cellulare $\mathcal{P}$ di X consiste delle celle di dimensione 1:

$$\begin{cases} A_{m,n} = \{x \in X \,|\, mx_1 = nx_2 \;\; x_1 > 0\} \quad m > 0\,,\; n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\,,\; (m : |n|) = 1 \\ B_{m,n} = \{x \in X \,|\, mx_1 = nx_2 \;\; x_1 < 0\} \quad m > 0\,,\; n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\,,\; (m : |n|) = 1 \\ C_+ = \{x \in X \,|\, x_2 = 0\,,\; x_1 > 0\} \\ C_- = \{x \in X \,|\, x_2 = 0\,,\; x_1 < 0\} \\ D_+ = \{x \in X \,|\, x_1 = 0\,,\; x_2 > 0\} \\ D_- = \{x \in X \,|\, x_1 = 0\,,\; x_2 < 0\} \end{cases}$$

e nelle due celle $\{(1,0,0)\}$ e $\{(-1,0,0)\}$, di dimensione 0. Osserviamo che la topologia debole di X associata a questa decomposizione cellulare è strettamente più fine di quella di sottospazio. Ad esempio, l'unione Z di una qualsiasi cella di dimensione uno e del sottoinsieme $Y = \{x \in X \,|\, |x_0| > 1/2\}$ è aperta per la topologia debole, ma non per quella di sottospazio.

PROPOSIZIONE 1.14. *Uno spazio cellulare $(X, \mathcal{P})$ è finito se e soltanto se X è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché tutte le celle chiuse sono compatte, chiaramente uno spazio cellulare finito è compatto perché unione finita di compatti.

Viceversa, supponiamo che X sia compatto. Per ogni cella $A \in \mathcal{P}$ fissiamo un punto $x_A \in A$ e consideriamo l'insieme $K = \{x_A \,|\, A \in \mathcal{P}\}$. Ogni suo sottoinsieme interseca ogni cella chiusa al più in un numero finito di punti. Quindi ogni sottoinsieme di K è chiuso in X e pertanto K è un sottospazio chiuso di X su cui X induce la topologia discreta. Poiché X è compatto, anche K è compatto perché sottospazio chiuso di uno spazio compatto. Ma un compatto con la topologia discreta è un insieme finito e questo ci dimostra che $\mathcal{P}$ è finito. □

DEFINIZIONE 1.15. La *dimensione* di uno spazio cellulare $(X, \mathcal{P})$ è l'estremo superiore delle dimensioni delle celle di $\mathcal{P}$. Conveniamo che $\emptyset$ sia cellulare di dimensione -1.

Sia $(X, \mathcal{P})$ uno spazio cellulare. Se $Y \subset X$, indichiamo con $\mathcal{P}(Y)$ l'insieme delle celle di $\mathcal{P}$ contenute in Y:

$$\mathcal{P}(Y) = \{A \in \mathcal{P} \,|\, A \subset Y\} .$$

Se $Y = \bigcup \mathcal{P}(Y)$ e la $\mathcal{P}(Y)$ è una decomposizione cellulare di Y, diciamo che $(Y, \mathcal{P}(Y))$ è un *sottospazio cellulare* o un *sotto-CW-complesso* di $(X, \mathcal{P})$.

Abbiamo:

PROPOSIZIONE 1.16. *Sia $(X, \mathcal{P})$ uno spazio cellulare.*

(*i*) *Per ogni $A \in \mathcal{P}$, la coppia $(\bar{A}, \mathcal{P}(\bar{A}))$ è un sottospazio cellulare finito di $(X, \mathcal{P})$.*

(*ii*) *Sia $Y \subset X$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $(Y, \mathcal{P}(Y))$ sia un sottospazio cellulare di $(X, \mathcal{P})$ è che, per ogni $y \in Y$, Y contenga la chiusura della cella di $\mathcal{P}$ che contiene y. In particolare, tutti i sottospazi cellulari di X sono chiusi.*

(*iii*) *Sia m un intero non negativo e sia $\mathcal{P}_{(m)} = \{A \in \mathcal{P} \mid \dim(A) \leq m\}$ l'insieme delle celle di dimensione minore o uguale ad m. Il sottospazio $X_m = \bigcup \mathcal{P}_{(m)}$ è chiuso in X e $(X_m, \mathcal{P}_{(m)})$ è un sottospazio cellulare di $(X, \mathcal{P})$.*

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue dalla proprietà (2) delle decomposizioni cellulari.

Dimostriamo la (*ii*). Se $(Y, \mathcal{P}(Y))$ è un sottospazio cellulare di $(X, \mathcal{P})$, allora, per la definizione di cella e per il fatto che Y è di Hausdorff, Y deve contenere la chiusura di ogni cella di $\mathcal{P}(Y)$ e quindi di ciascuna cella che contiene un suo punto.

Viceversa, se Y contiene la chiusura di ogni cella che contiene un suo punto, la $\mathcal{P}(Y)$ è una decomposizione cellulare di Y.

Se $\bar{A}$, con $A \in \mathcal{P}$, è una cella chiusa e $\bar{A} \cap Y \neq \emptyset$, l'intersezione $\bar{A} \cap Y$ è l'unione delle chiusure delle celle di $\mathcal{P}$ contenute in $\bar{A} \cap Y$ ed è quindi chiusa perché unione finita di chiusi. Ne segue che Y è un sottospazio chiuso di X.

La (*iii*) segue facilmente dalla (*ii*): infatti la chiusura di ogni cella di dimensione h è unione di celle di dimensione minore o uguale di h e dunque X_m contiene la chiusura di ogni cella che contiene un suo punto. □

DEFINIZIONE 1.17. Il sottospazio cellulare $(X_m, \mathcal{P}_{(m)})$, con $\mathcal{P}_{(m)} = \{A \in \mathcal{P} \mid \dim(A) \leq m\}$ ed $X_m = \bigcup \mathcal{P}_{(m)}$, si dice lo *scheletro di dimensione m* di $(X, \mathcal{P})$.

PROPOSIZIONE 1.18. *Ogni spazio cellulare è normale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $(X, \mathcal{P})$ un CW-complesso. Per ipotesi X è uno spazio di Hausdorff.

Basterà quindi dimostrare che ogni coppia di chiusi disgiunti A, B di X ammette una funzione di Urysohn. A questo scopo definiremo per induzione funzioni continue $f_m : X_m \to I$ sullo scheletro m-dimensionale di X in modo che f_m sia su X_m una funzione di Uryshon della coppia $(A \cap X_m, B \cap X_m)$. Se $m = 0$, poiché X_0 è discreto, possiamo porre $f_0(x)$ uguale a 0 su $A \cap X_0$, a 1 su $B \cap X_m$ e ad $1/2$ sui punti di X_0 che non appartengono ad $A \cup B$. Supponiamo ora di aver definito $f_m : X_m \to I$ con le proprietà richieste.

Per ogni cella $C \in \mathcal{P}_{m+1}$, definiamo una funzione g_C su $\bar{C} \cap (X_m \cup A \cup B)$ mediante:

$$g_C(x) = \begin{cases} f_m(x) & \text{se} \quad x \in X_m \cap \bar{C} \\ 0 & \text{se} \quad x \in A \cap \bar{C} \\ 1 & \text{se} \quad x \in B \cap \bar{C}\,. \end{cases}$$

La g_C è ben definita e continua. Poiché $\bar{C}$ è uno spazio normale, in quanto di Hausdorff e compatto, la g_C si estende ad un'applicazione continua $\tilde{g}_C : \bar{A} \to I$. Possiamo quindi definire f_{m+1} ponendo $f_{m+1}(x) = \tilde{g}_C(x)$ su $\bar{C}$. Poiché $\{\bar{C} \,|\, C \in \mathcal{P}_{m+1}\}$ è un ricoprimento fondamentale di X_{m+1}, ne segue che $f_{m+1} : X_{m+1} \to I$ è continua, coincide con f_m su X_m ed è una funzione di Uryshon della coppia $(A \cap X_{m+1}, B \cap X_{m+1})$.

Infine, utilizzando la successione $\{f_m : X_m \to I\}$, definiamo $f : X \to I$ ponendo $f(x) = f_m(x)$ se $x \in X_m$. La f è ben definita ed è continua perché lo è la sua restrizione ad ogni cella chiusa. Questa f è una funzione di Uryshon della coppia (A, B). □

PROPOSIZIONE 1.19. *Se $\mathcal{P}$ è una decomposizione cellulare localmente finita di uno spazio di Hausdorff X, allora $(X, \mathcal{P})$ è uno spazio cellulare.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti $\{\bar{A} \,|\, A \in \mathcal{P}\}$ è in questo caso un ricoprimento chiuso localmente finito e quindi fondamentale. □

DEFINIZIONE 1.20. Uno spazio cellulare $(X, \mathcal{P})$ si dice *localmente finito* se $\mathcal{P}$ è localmente finita.

Abbiamo:

PROPOSIZIONE 1.21. *In uno spazio cellulare localmente finito $(X, \mathcal{P})$, ogni unione Y di celle chiuse è un sottoinsieme chiuso di X e $(Y, \mathcal{P}(Y))$ è un sottospazio cellulare di $(X, \mathcal{P})$.* □

LMMCELAF PROPOSIZIONE 1.22. *Sia $(X, \mathcal{P})$ un CW-complesso. Ogni compatto K di X interseca al più un numero finito di celle di $\mathcal{P}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{P}_K$ l'insieme delle celle in $\mathcal{P}$ che intersecano K. Per ogni $C \in \mathcal{P}$, scegliamo un punto $x_C \in K \cap C$. Il sottoinsieme $T = \{x_C \,|\, C \in \mathcal{P}_K\}$ è chiuso e discreto in X. Poiché è contenuto in K è anche compatto. Essendo un compatto con la topologia discreta, è finito, quindi $\mathcal{P}_K$ è finito. □

PROPOSIZIONE 1.23. *Sia $(X, \mathcal{P})$ un CW-complesso. Allora X è connesso se e soltanto se è connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia x_0 un punto di X e sia Y il sottospazio di X che consiste dei punti che si possono congiungere ad x_0 con un arco. Poiché tutte le celle, sia aperte che chiuse, di X sono connesse per archi, $(Y, \mathcal{P}(Y))$ è un sottospazio cellulare di $(X, \mathcal{P})$. In modo analogo si dimostra che $(\complement Y, \mathcal{P}(\complement Y))$ è anch'esso un sottospazio cellulare di $(X, \mathcal{P})$, in quanto la chiusura di ogni cella A che non interseca Y non interseca neanch'essa Y. Quindi $\complement Y$ è chiuso ed Y è aperto e chiuso. □

PROPOSIZIONE 1.24. *Sia $(X, \mathcal{P})$ un CW-complesso.*

(1) *Un sottospazio Z di X è unione di componenti connesse di X se e soltanto se contiene ogni cella chiusa che lo intersechi.*
(2) *Per ogni $m \geq 1$ e per ogni componente connessa Y di X, lo scheletro m-dimensionale Y_m di $(Y, \mathcal{P}(Y))$ è connesso.*
(3) *In particolare, X è connesso se e soltanto se X_1 è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. (1). Se C è un sottoinsieme connesso di X ed $A \in \mathcal{P}$ è una cella con $\bar{A} \cap C \neq \emptyset$, allora anche $C \cup \bar{A}$ è connesso, perché unione di due connessi con almeno un punto in comune. Quindi, se il sottospazio Z di X è unione di componenti connesse di X, contiene ogni cella chiusa che lo intersechi.

Viceversa, se Z contiene ogni cella chiusa che lo intersechi, sia Z che il suo complementare sono chiusi. Quindi Z è aperto e chiuso ed è perciò unione di componenti connesse di X.

(2). Sia T una componente connessa di Y_m e definiamo per ricorrenza:

$$\begin{cases} Z_m = T \\ Z_h = \bigcup \{\bar{A} \,|\, A \in \mathcal{P}\,,\ \bar{A} \cap Z_{h-1} \neq \emptyset\} \qquad \text{per} \quad h > m\,. \end{cases}$$

Allora $Z = \bigcup_{h \geq m} Z_h$ è connesso e $(Z, \mathcal{P}(Z))$ è un sotto-CW-complesso di $(X, \mathcal{P})$. Per costruzione Z contiene tutte le celle chiuse che lo intersecano e quindi è unione di componenti connesse di X. Essendo connesso, coincide con una componente connessa di X ed è perciò uguale a Y.

(3). Se X è connesso, per (2) anche X_1 è connesso. Viceversa, poiché la chiusura di ogni cella di dimensione $m \geq 1$ contiene almeno una cella di dimensione 0, la chiusura di ogni cella in $\mathcal{P}$ interseca X_1. Perciò X è connesso se X_1 è connesso. □

PROPOSIZIONE 1.25. *Sia $(X, \mathcal{P})$ un CW-complesso.*

(*a*) *X è separabile se e soltanto se $\mathcal{P}$ è al più numerabile.*
(*b*) *X soddisfa al primo assioma di numerabilità se e soltanto se $\mathcal{P}$ è localmente finita.*
(*c*) *X è metrizzabile se e soltanto se $\mathcal{P}$ è localmente finita.*
(*d*) *X è a base numerabile se e soltanto se $\mathcal{P}$ è al più numerabile e localmente finito.*

DIMOSTRAZIONE. (*a*). Supponiamo che X sia separabile e sia D un suo sottoinsieme denso e numerabile. Per ogni $x \in D$ sia A_x la cella in $\mathcal{P}$ che contiene D. Dico che $X = \bigcup_{x \in D} \bar{A}_x$. Infatti il secondo membro è un chiuso (perché unione di celle chiuse) che contiene D e coincide quindi con X. Poiché ogni cella chiusa si decompone in un numero finito di celle, ne segue che $\mathcal{P}$ è al più numerabile.

Supponiamo viceversa che $\mathcal{P}$ sia al più numerabile. Per ogni $A \in \mathcal{P}$ possiamo fissare un sottoinsieme D_A di A al più numerabile e denso in A. Allora $D = \bigcup_{A \in \mathcal{P}} D_A$ è numerabile ed è denso in X perché è denso in ciascuna cella e quindi in ciascuna cella chiusa di X.

(b). Supponiamo che $\mathcal{P}$ sia localmente finita. Sia $\mathcal{Q}$ l'insieme degli $A \in \mathcal{P}$ per cui $\bar{A} \ni x$. L'insieme $\mathcal{Q}$ è finito. Dico che l'unione $U = \bigcup \mathcal{Q}$ di tutte le celle la cui chiusura contiene x è un aperto di X. Sia infatti C una qualsiasi cella in $\mathcal{P}$. Se $x \notin \bar{C}$, allora $\bar{C} \cap U = \emptyset$. Se $x \in \bar{C}$, allora $\bar{C} \cap U \supset C$. Il complementare di C in $\bar{C}$ è un'unione finita $C_1 \cup \cdots \cup C_m$ di celle in $\mathcal{P}$, ciascuna di dimensione minore di quella di C. Abbiamo allora $U \cap \bar{C} = \bar{C} \setminus \bigcup\{\bar{C}_i \,|\, 1 \leq i \leq m\,,\ \bar{C}_i \not\ni x\}$ e quindi $U \cap \bar{C}$ è aperto in $\bar{C}$. Questo dimostra che U è un aperto di X. Osserviamo ora che $(\bar{U}, \mathcal{P}(\bar{U}))$ è un sottospazio cellulare finito di $(X, \mathcal{P})$. In particolare è uno spazio compatto di Hausdorff separabile (per il punto (a)). Ne segue che $\bar{U}$, e a maggior ragione il suo sottospazio aperto U, sono a base numerabile. In particolare x ha in U, e perciò anche in X, un sistema fondamentale d'intorni numerabile.

Supponiamo viceversa che $x \in X$ ammetta un sistema fondamentale d'intorni numerabile $\{U_n\}$ e supponiamo per assurdo che $\mathcal{P}$ non sia localmente finito in x, che cioè ogni intorno U_n intersechi un numero infinito di celle di $\mathcal{P}$. Possiamo allora costruire una successione x_n con $x_n \in U_n \setminus \{x\}$ tale che elementi della successione corrispondenti ad indici distinti appartengano a celle distinte. Ogni cella chiusa conterrà allora al più un numero finito di elementi della successione $\{x_n\}$. Quindi l'insieme S degli elementi della successione è un sottoinsieme chiuso di X e $X \setminus S$ un intorno aperto di x in X che non contiene nessuno degli intorni $\{U_n\}$, contraddicento il fatto che questo fosse un sistema fondamentale d'intorni di x in X. Quindi $\mathcal{P}$ dev'essere localmente finita in x, e questo completa la dimostrazione del punto (b).

(c). Se X è metrizzabile soddisfa al primo assioma di numerabilità e quindi un CW-complesso $(X, \mathcal{P})$ con X metrizzabile ha una decomposizione cellulare $\mathcal{P}$ localmente finita per il punto (b).

Per dimostrare il viceversa, possiamo limitarci a considerare il caso in cui X sia connesso. Dimostriamo innanzi tutto che $\mathcal{P}$ è al più numerabile. A questo scopo fissiamo $x \in X$ e definiamo per ricorrenza:

$$\begin{cases} Y_0 = \bigcup\{\bar{A} \,|\, A \in \mathcal{P}\,,\ \bar{A} \ni x\} \\ Y_m = \bigcup\{\bar{A} \,|\, A \in \mathcal{P}\,,\ \bar{A} \cap Y_{m-1} \neq \emptyset\} \qquad \text{se} \quad m > 0\,. \end{cases}$$

Abbiamo $Y_m \subset Y_{m+1}$ per ogni m e l'ipotesi della finitezza locale implica che ciascuno degli $(Y_m, \mathcal{P}(Y_m))$ è un sottospazio cellulare finito di $(X, \mathcal{P})$. Inoltre, per costruzione, $Y = \bigcup Y_m$ è un sottospazio cellulare di $(X, \mathcal{P})$ e Y, essendo una componente connessa di X, coincide con X. Poiché ogni $(Y_m, \mathcal{P}(Y_m))$ è finito, $(Y, \mathcal{P}(Y)) = (X, \mathcal{P})$ è numerabile. Quindi X è metrizzabile perché è uno spazio normale a base numerabile (è separabile per (a) e soddisfa al primo assioma di numerabilità per (b), onde soddisfa anche al secondo assioma di numerabilità). □

2. Attaccamenti

Descriviamo in questo paragrafo la costruzione topologica dell'attaccamento, che utilizzeremo nel seguito per descrivere le proprietà dei CW-complessi.

DEFINIZIONE 2.1. Siano X_1 ed X_2 due spazi topologici, sia A un sottospazio di X_1 e $\phi : A \to X_2$ un'applicazione continua. Definiamo sull'unione disgiunta $X_1 \sqcup X_2$ dei due spazi topologici X_1 ed X_2 una relazione d'equivalenza identificando i punti di A con quelli di Y che ad essi corrispondono mediante l'applicazione ϕ:

$$x \sim y \iff \begin{cases} x = y, & \text{oppure} \\ x \in A \text{ ed } y = \phi(x), & \text{oppure} \\ y \in A \text{ ed } x = \phi(y)\,. \end{cases}$$

Lo spazio topologico quoziente $(X_1 \sqcup X_2)/\sim$ si indica con $X_2 \cup_\phi X_1$ e si dice *ottenuto attaccando X_1 ad X_2 mediante l'applicazione ϕ.*

Abbiamo delle applicazioni canoniche $p_1 : X_1 \to X_2 \cup_\phi X_1$ e $\jmath_2 : X_2 \to X_2 \cup_\phi X_1$ che sono entrambe continue. La seconda è un'immersione topologica (cioè un omeomorfismo con l'immagine).

LEMMA 2.2. *Siano X_1 ed X_2 due spazi topologici, sia A un sottospazio di X_1 e $\phi : A \to X_2$ un'applicazione continua. Allora $\{p_1(X_1),\, \jmath_2(X_2)\}$ è un ricoprimento fondamentale di $X_2 \cup_\phi X_1$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia U un sottoinsieme di $X_2 \cup_\phi X_1$ tale che $U \cap p_1(X_1)$ sia un aperto di $\mathrm{p}_1(X_1)$ e $U \cap \jmath_2(X_2)$ sia un aperto di $\jmath(X_2)$ per le topologie di sottospazio. Allora $p_1^{-1}(U)$ è aperto in X_1 e $\jmath_2^{-1}(U)$ è aperto in X_2. Quindi $p_1^{-1}(U) \sqcup \jmath_2^{-1}(U)$ è un aperto di $X_1 \sqcup X_2$, saturo rispetto alla relazione d'equivalenza "$\sim$" e perciò U, immagine d'un aperto saturo nella proiezione sul quoziente, è aperto in $X_2 \cup_\phi X_1$. Ciò dimostra che il ricoprimento $\{p_1(X_1),\, \jmath_2(X_2)\}$ è fondamentale. □

PROPOSIZIONE 2.3. *Se X_1, X_2 sono spazi normali, $A \subset X_1$ è chiuso e $\phi : A \to X_2$ un'applicazione continua, allora $X_2 \cup_\phi X_1$ è uno spazio normale.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzi tutto che i punti di $X_2 \cup_\phi X_1$ sono chiusi. Infatti:

$$\jmath_2^{-1}(p) = \begin{cases} \emptyset & \text{se} \quad p \in (X_2 \cup_\phi X_1) \setminus \jmath_2(X_2) \\ \text{un punto} & \text{se} \quad p \in \jmath_2(X_2) \end{cases} \qquad \text{e}$$

$$p_1^{-1}(p) = \begin{cases} \text{un punto} & \text{se} \quad p \in (X_2 \cup_\phi X_1) \setminus \jmath_2(X_2) \\ \phi^{-1}(\jmath_2^{-1}(p)) & \text{se} \quad p \in \jmath_2(X_2)\,. \end{cases}$$

Ciò dimostra che, se $\pi : X_1 \sqcup X_2 \to X_2 \cup_\phi X_1$ è la proiezione nel quoziente, allora $\pi^{-1}(p) = p_1^{-1}(p) \sqcup \jmath_2^{-1}(p)$ è chiuso in $X_1 \sqcup X_2$. Quindi lo spazio $X_2 \cup_\phi X_1$ soddisfa l'assioma T_1.

Per concludere la dimostrazione, è sufficiente verificare che, se F_0, F_1 sono chiusi disgiunti di $X_2 \cup_\phi X_1$ esiste una funzione di Uryshon della coppia (F_0, F_1). Poiché X_2 è normale, esiste una funzione continua $f_2 : X_2 \to I$ con $\jmath_2^{-1}(F_0) \subset f_2^{-1}(0)$ e $\jmath_2^{-1}(F_1) \subset f_2^{-1}(1)$.

Sia $F = A \cup p_1^{-1}(F_0 \cup F_1)$. Allora F è un sottoinsieme chiuso di X_1 e la funzione:

$$f_1(x) = \begin{cases} f_2(\jmath_2^{-1} \circ p_1(x)) & \text{se} \quad x \in A\,, \\ 0 & \text{se} \quad x \in p_1^{-1}(F_0)\,, \\ 1 & \text{se} \quad x \in p_1^{-1}(F_1)\,, \end{cases}$$

è continua sul chiuso F. Per il teorema d'estensione di Uryshon, esiste una funzione continua $\tilde{f}_1 : X_1 \to I$ che prolunga f_1. Definiamo allora una funzione di Uryshon della coppia (F_0, F_1) mediante:

$$f(x) = \begin{cases} f_2(y) & \text{se} \quad x = \jmath_2(y) \quad \text{con} \quad y \in X_2\,, \\ \tilde{f}_1(y) & \text{se} \quad x = p_1(y) \quad \text{con} \quad y \in X_1\,. \end{cases}$$

La f è ben definita perché, per costruzione, le due definizioni danno lo stesso valore quando $x \in \phi(A)$. Infine, poiché $p_1^* f = \tilde{f}_1$ e $\jmath_2^* f = f_2$ sono continue, anche f è continua ed è quindi una funzione di Uryshon della coppia (F_0, F_1). □

Nel seguito, per semplicità di notazione, identificheremo X_2 e il sottospazio $\jmath_2(X_2)$ di $X_2 \cup_\phi X_1$.

3. Applicazioni cellulari ed attaccamenti di celle

DEFINIZIONE 3.1. Siano $(X, \mathcal{P})$ ed $(Y, \mathcal{Q})$ due CW-complessi. Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice *cellulare* se è continua e trasforma lo scheletro k-dimensionale di X nello scheletro k-dimensionale di Y: $f(X_k) \subset Y_k$ per ogni intero $k \geq 0$.

Come conseguenza immediata della Proposizione LMMCELAF 1.22 otteniamo:

LEMMA 3.2. *Siano $(X, \mathcal{P})$ ed $(Y, \mathcal{Q})$ due CW-complessi e sia $f : X \to Y$ un'applicazione cellulare. Allora l'immagine di una cella $A \in \mathcal{P}$ di dimensione m di X è unione di un numero finito di celle di dimensione $\leq m$ di Y.* □

Sia $(X, \mathcal{P})$ un CW-complesso. Sia $A \in \mathcal{P}$ una cella m-dimensionale, $\phi_A : B^m \to X$ la sua funzione caratteristica, $\bar{\phi}_A : D^m \to X$ quella della cella chiusa $\bar{A}$. La restrizione di $\bar{\phi}_A$ alla frontiera S^{m-1} di D^m è un'applicazione $S^{m-1} \ni x \to \bar{\phi}_A(x) \in X_{m-1}$. Sarà conveniente nel seguito scrivere B_A^m, D_A^m ed S_A^m per indicare la palla, il disco e la frontiera del disco associati alla cella A.

Gli spazi cellulari si possono ottenere per attaccamenti successivi di celle. Esprimiamo questo fatto nel seguente enunciato

TEOREMA 3.3. *Sia $(X, \mathcal{P})$ un CW-complesso. Indichiamo con $\mathcal{P}_m$ l'insieme delle sue celle di dimensione m e, per ogni $A \in \mathcal{P}_m$, fissiamo una funzione caratteristica $\phi_A : B_A^m \to X$ di A. Indichiamo ancora con $\chi_A : S_A^{m-1} \to X_{m-1}$ la restrizione alla frontiera della $\bar{\phi}_A : D^m \to X$. Indichiamo con*

eq:cwcc
$$\chi_{m-1} : \bigsqcup_{A \in \mathcal{P}_m} S_A^{m-1} \to X_{m-1} \tag{3.1}$$

l'applicazione, definita sulla somma disgiunta di tante sfere $(m-1)$ dimensionali quanti sono le celle di $\mathcal{P}_m$, che coincide con χ_A sull'elemento S_A^{m-1} dell'unione disgiunta. L'applicazione

eq:cwcd
$$X_{m-1} \cup_{\chi_{m-1}} \bigsqcup_{A \in \mathcal{P}_m} D_A^m \longrightarrow X_m \tag{3.2}$$

definita come l'inclusione $X_{m-1} \hookrightarrow X_m$ su X_{m-1}, e che coincide con l'applicazione caratteristica ϕ_A su $B_A^m \subset D_A^m$, è un omeomorfismo.

4. Prolungamenti differenziabili di funzioni continue

Dimostriamo in questo paragrafo un risultato di prolungamento che ci sarà utile nel seguito per discutere l'omotopia degli spazi cellulari.

LEMMA 4.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^m$ ed F un chiuso di Ω. Esiste allora una funzione $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ con $\psi = 0$ su F e $\psi > 0$ su $\Omega \setminus F$.*

DIMOSTRAZIONE. I punti con coordinate razionali che appartengono ad $\Omega \cap \complement F$ sono un'infinità numerabile. Elenchiamoli in una successione $\{x_n\}_{n \geq 1}$. Per ogni n sia $r_n = \operatorname{dist}(x_n, F \cup \complement\Omega)$ e sia χ_n la funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\chi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\exp\left(|x - x_n|^2 - r^2\right)} & \text{se } |x - x_n| < r_n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Possiamo poi scegliere una successione di interi strettamente positivi $\{c_n\}$ tale che, per ogni n,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} \sum_{|\alpha| \leq n} |D^\alpha \chi_n(x)| < 2^{-n} c_n^{-1}.$$

Chiaramente la somma della serie $\chi(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n \chi_n(x)$ definisce una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ che è positiva su $\Omega \cap \complement F$ e si annulla sul suo complementare $\complement\Omega \cup F$. □

Dimostriamo ora un complemento del Lemma di estensione di Uryshon per funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$.

LEMMA 4.2. *Sia X uno spazio topologico normale, A un chiuso di X ed $f : A \to C$ una funzione continua a valori in un convesso localmente chiuso C di $\mathbb{R}^n$. Esiste allora un'applicazione continua $\tilde{f} : X \to C$ tale che $\tilde{f} = f$ su A.*

DIMOSTRAZIONE. A meno di sostituire ad $\mathbb{R}^n$ il più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ che contiene C, possiamo supporre che C abbia parte interna non vuota. Se $C = \mathbb{R}^n$, allora otteniamo la tesi applicando il lemma di estensione di Uryshon ad ogni componente scalare dell'applicazione f. In generale, possiamo definire un'immersione $\phi : C \to I^n$ la cui immagine $\phi(C)$ sia un aperto di I^n che contiene $\{x \in I^n \mid 0 < x_j < 1 \text{ per } j = 1, \dots, n\}$. Applicando il Lemma di estensione Urysohn a ciascuna componente di $\phi \circ f$, otteniamo una $g \in \mathcal{C}(X, I^n)$ con $g|_A = \phi \circ f$. Osserviamo ora che $B = g^{-1}(I^n \cap \complement\phi(C))$ è un chiuso di X disgiunto da A. Se $\chi \in \mathcal{C}(X, I)$ è una funzione che vale 0 su A ed 1 su B, ed η è un punto interno di I^n, allora la

$$\tilde{g}_A(x) = g(x) + \chi(x)(\eta - g(x))$$

è una funzione continua su X, che coincide con $\phi \circ f$ su A e la cui immagine è contenuta in $\phi(C)$. Possiamo quindi definire $\tilde{f} = \phi^{-1} \circ \tilde{g}$. □

APPRLEMMA

LEMMA 4.3. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^m$, F un chiuso di Ω, C un convesso localmente chiuso di $\mathbb{R}^n$ ed $f : F \to C$ una funzione continua a valori in C. Esiste allora una funzione continua $\tilde{f} : \Omega \to C$, con $\tilde{f}|_F = f$ e la cui restrizione ad $\Omega \cap \complement F$ sia di classe $\mathcal{C}^\infty$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $A = \Omega \cap \complement F$. Per il Lemma d'estensione di Uryshon, possiamo prolungare f a una funzione F continua su Ω ed a valori in C. Fissiamo poi una funzione $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ con $\psi > 0$ su A e $\psi = 0$ su $F \cup \complement\Omega$ e poniamo, per $x \in \Omega$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in F \\ [\psi(x)]^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} F(y)\chi([\psi(x)]^{-1}(x-y))dy & \text{se} \quad x \in A\,, \end{cases}$$

dove la χ è una funzione non negativa, di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $\mathbb{R}^m$, con supporto in D^m e $\int_{\mathbb{R}^m} \chi(y)dy = 1$. Per i teoremi di derivazione sotto il segno d'integrale, la $\tilde{f}$ così definita è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su A. Resta da verificare che è continua nei punti di bA. Osserviamo a questo scopo che la F, essendo continua, è uniformemente continua su $\bar{A}$. Quindi, fissato un numero reale $\epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che $|F(x) - F(y)| < \epsilon$ se $|x - y| < \delta$ e $x, y \in \bar{A}$. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} \left|\tilde{f}(x) - F(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^m} g(x)^{-m}\,[F(y) - F(x)]\,\chi([g(x)]^{-1}(x-y))dy\right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^m} g(x)^{-m}\,|F(y) - F(x)|\,\chi([g(x)]^{-1}(x-y))dy \\ &< \epsilon \qquad \text{se} \quad 0 < g(x) < \delta\,. \end{aligned}$$

Quindi, se $\{x_n\}$ è una successione di punti di A che converge ad un punto $x \in bA$, abbiamo:

$$|f(x) - \tilde{f}(x_n)| \le |f(x) - F(x_n)| + |F(x_n) - \tilde{f}(x_n)| \to 0 \quad \text{per} \quad n \to \infty$$

in quanto il primo addendo a secondo membro tende a zero perché F è un'estensione continua di f, mentre il secondo tende a zero perché $g(x_n)$ converge a zero per $x_n \to x \in bA$. Ciò completa la dimostrazione. □

5. Approssimazione cellulare

Dimostriamo un lemma relativo all'attaccamento di celle.

LEMMA 5.1. *Sia Y uno spazio topologico, m un intero positivo, $\phi : S^{m-1} \to Y$ un'applicazione continua ed $X = Y \cup_\phi D^m$. Se k è un intero positivo con $k < m$, allora ogni $f \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X, Y)$ è S^{k-1}-omotopa ad un'applicazione a valori in Y.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varpi : D^m \to X$ la restrizione a D^m della proiezione nel quoziente $D^m \sqcup Y \to X$. Essa definisce un omeomorfismo di B^m sull'aperto $\Omega = \complement Y$ di X. Sia $f \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X, Y)$. Se fosse $f(D^k) \not\supset \Omega$, a meno di omeomorfismi potremmo ricondurci al caso in cui $\varpi(0) \notin f(D^k)$. L'applicazione:

$$\Phi(y,t) = \begin{cases} \varpi([1-t]z + t[z/|z|]) & \text{se} \quad y = \varpi(z) \text{ con } z \in B^m \setminus \{0\} \\ y & \text{se} \quad y \in Y \end{cases}$$

è una retrazione di deformazione di $X \setminus \{\varpi(0)\}$ su Y. Allora la $F(x,t) = \Phi(f(x),t)$ è una S^{k-1}-omotopia di f con un'applicazione a valori in Y.

Consideriamo ora il caso generale.

Poiché $f(S^{k-1}) \subset Y$, l'insieme $A = f^{-1}(\{\varpi(z) \,|\, |z| < 1/2\}$ è un sottoinsieme aperto relativamente compatto in $B^k \subset D^k$. Per il Lemma 4.3 esiste una funzione $g : \bar{A} \to B^m$, di classe $\mathcal{C}^\infty$ nei punti di A, con $g(x) = \varpi^{-1}(f(x))$ sulla frontiera bA di A. La:

$$G(x,t) = \begin{cases} \varpi(tg(x) + [1-t]\varpi^{-1} f(x)) & \text{se} \quad x \in \bar{A}\,, \\ f(x) & \text{se} \quad x \in D^k \setminus A\,, \end{cases}$$

è una S^{k-1}-omotopia tra f ed un'applicazione continua

$$h : D^k \to X\,, \quad \text{con} \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in D^k \setminus A \\ \varpi(g(x)) & \text{se} \quad x \in \bar{A}\,. \end{cases}$$

Abbiamo perciò $h(D^k) \subset Y \cup \varpi^{-1}(\{|z| \geq 1/2\}) \cup \varpi(g(A))$. Per il Lemma di Sard, poiché abbiamo supposto che $k < m$, l'insieme $\varpi(g(A))$ è di prima categoria in $\Omega = \varpi(B^m)$. Quindi l'immagine di g non contiene $\varpi(\{|z| < 1/2\}$ e quindi non contiene Ω. Allora, per la prima parte della dimostrazione, la h è S^{k-1}-omotopa ad un'applicazione a valori in Y. □

Da questo lemma ricaviamo la

pp:cweb PROPOSIZIONE 5.2. *Sia $(X, \mathcal{P})$ un CW-complesso. Sia k un intero non negativo. Ogni $f \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X, X_{k-1})$ è S^{k-1}-omotopa ad una $g \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X_k, X_{k-1})$.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo compatto, $f(D^k)$ è contenuto in un sottospazio cellulare finito di $(X, \mathcal{P})$. Possiamo quindi supporre che $(X, \mathcal{P})$ sia finito. Se $\mathcal{P}$ non contiene celle di dimensione maggiore di k, la tesi è banalmente verificata. Supponiamo quindi che $\mathcal{P}$ contenga una cella Ω di dimensione massimale $m > k$. Abbiamo allora, per $Y = X \setminus \Omega$, $X = Y \cup_\phi D^m$ per un'opportuna funzione d'attaccamento $\phi : S^{m-1} \to Y$. Per il Lemma precedente, la nostra f è allora S^{k-1}-omotopa ad un'applicazione continua f_1 a valori in Y. Iterando quest'argomento un numero finito di volte, otteniamo la tesi. □

Come conseguenza, otteniamo il:

TEOREMA 5.3. *Sia $(X, \mathcal{P})$ un CW-complesso. Fissiamo un punto $x_0 \in X$ per cui $\{x_0\}$ sia una 0-cella. Allora, per ogni intero $k \geq 0$ l'applicazione (è un omomorfismo di gruppi se $k \geq 1$) indotta dall'inclusione*

eq:cwee
$$[\imath_m]_* : \pi_k(X_m, x_0) \to \pi_k(X, x_0) \tag{5.1}$$

è surgettiva se $m \geq k$ e bigettiva se $m > k$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un intero $k \geq 0$. Per la proposizione precedente, l'applicazione $[\imath_m]_*$ è surgettiva per ogni $m \geq k$.

Dobbiamo dimostrare che se $m > k$, la (5.1) è anche iniettiva.

Sia $f \in \mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X_k, x_0)$ un'applicazione S^{k-1}-omotopa in $\mathcal{C}(D^k, X)$ all'applicazione costante.

Sia quindi $F_0 : D^k \times I \to X$ un'applicazione continua con

$$\begin{cases} F_0(x, 0) = f(x) & \forall x \in D^k, \\ F_0(x, 1) = x_0 & \forall x \in D^k, \\ F_0(x, t) = x_0 & \forall x \in S^{n-1},\ \forall t \in I. \end{cases}$$

Quindi la F_0 è un'applicazione continua sul cilindro $D^k \times I$, che vale x_0 in tutti i punti di una delle due basi, $D^k \times \{1\}$, del cilindro, e sulla superficie laterale $S^{k-1} \times I$. Poiché l'immagine di f è contenuta in X_k, la F_0 trasforma tutta la frontiera del cilindro $D^k \times I$ in X_k.

Poiché tutti i convessi chiusi e limitati sono tra loro omeomorfi, mediante un omeomorfismo tra le coppie (D^{k+1}, S^k) e $(D^k \times I, b(D^k \times I))$, possiamo considerare la F_0 come un'applicazione di $\mathcal{C}(D^{k+1}, S^k; X, X_k)$.

Per la Proposizione (5.2), la F_0 è S^k-omotopa ad una $F_1 \in \mathcal{C}(D^{k+1}, X_{k+1})$. Abbiamo cioè un'applicazione continua $D^k \times I \times I \ni (x, t, s) \to F_s(x, t) \in X$ con le proprietà:

$$\begin{cases} F_s(x, 0) = f(x) & \forall x \in D^k\,,\ \forall s \in I \\ F_s(x, t) = x_0 & \forall x \in S^{k-1}\,,\ \forall t \in I\,,\ \forall s \in I \\ F_s(x, 1) = x_0 & \forall x \in D^k\,,\ \forall s \in I\,. \end{cases}$$

In particolare, la $F_1 : D^k \times I \to M$ è, in $\mathcal{C}(D^k, S^{k-1}; X_{k+1}, x_0)$, una S^{k-1}-omotopia di f con l'applicazione costante. □

6. Una proprietà di omotopia delle coppie cellulari

DEFINIZIONE 6.1. Sia $(X, \mathcal{P})$ un CW-complesso e sia Y un sottospazio cellulare di X. Per ogni $C \in \mathcal{P}$ sia $d(C)$ la sua dimensione e $\bar{\phi}_C : D_C^{d(C)} \to \bar{C} \subset X$, l'estensione al disco chiuso della sua funzioni caratteristica.

Costruiamo per ricorrenza una successione di funzioni continue $h^{(m)} : Y \cup X_m \to I$, nel modo seguente.

Poniamo

$$\begin{cases} h_Y^{(0)}(x) & = 0 \quad \text{se} \quad x \in Y, \\ h_Y^{(0)}(x) & = 1 \quad \text{se} \quad x \in X_0 \cap \complement Y. \end{cases}$$

Se $m > 0$, ed abbiamo già costruito $h^{(m-1)} : Y \cup X_{m-1} \to I$, definiamo $h_Y^{(m)} : Y \cup X_m \to I$ mediante

$$h_Y^{(m)}(x) = \begin{cases} h_Y^{(m-1)}(x) \quad \text{se} \quad x \in Y \cup X_{m-1} \\ (1 - |\xi|) + |\xi| \cdot h_Y^{(m-1)}\left(\phi_C\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right) \quad \text{se } x = \phi_C(\xi) \text{ con } \xi \in B_C^m \setminus \{0\}, \\ 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{se} \quad x = \phi_C(0), \\ \text{quando } x \in \phi_C(B^m), \text{ per una } C \in \mathcal{P}_m \text{ con } C \cap Y = \emptyset. \end{cases}$$

La $h_Y(x) = h_Y^{(m)}(X)$ su ogni X_m è una funzione continua $h_Y : X \to I$ con $f^{-1}(0) = Y$. Essa si dice *funzione caratteristica della coppia* (X, Y).

L'aperto $U_Y = \{x \in X \,|\, h_Y(x) < 1\}$ si dice un *intorno proprio* di Y in X. Esso si ottiene aggiungendo ad Y, per ogni cella C il cui centro non appartenga ad Y, ma la cui frontiera interseca Y, i raggi che congiungono il centro di C ai punti di $Y \cap bC$.

Vale il

LEMMA 6.2. *Ogni sottospazio cellulare Y di un CW-complesso $(X, \mathcal{P})$ è un retratto di deformazione stretto del suo intorno proprio.*

DIMOSTRAZIONE. Una retrazione di deformazione di U_Y su Y è la:

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in Y, \\ \bar{\phi}_C((1-t)(\xi/|\xi|) + t\xi) & \text{se} \begin{cases} C \cap Y = \emptyset, \quad \bar{C} \cap Y \neq \emptyset, \\ x = \bar{\phi}_C(\xi),\ \xi \in D^{d(C)} \setminus \{0\}. \end{cases} \end{cases}$$

Osserviamo che Φ è ben definita su $U_Y \times I$ perché $h_Y(\phi_C(t\xi)) = 1$ se $\xi \in D^{d(C)} \setminus \{0\}$ e $\bar{\phi}_C(\xi/|\xi|) \notin Y$. □

CORFB COROLLARIO 6.3. *Sia $(X, \mathcal{P})$ un CW-complesso ed Y un suo sottospazio cellulare. Allora per ogni spazio topologico Z, per ogni applicazione continua $f : X \to Z$ ed ogni omotopia $F : Y \times I \to Z$ di $f|_Y$, esiste un'omotopia $\tilde{F} : X \times I \to Z$ di f che prolunga F.*

DIMOSTRAZIONE. Utilizziamo le notazioni introdotte nella discussione svolta finora. Definiamo in primo luogo una $G : U_Y \times I \to X$ mediante:

$$G(x,t) = \begin{cases} \Phi(x, \min\{1, t/h_Y(x)\}) & \text{se} \quad x \in U_Y \setminus Y \\ x & \text{se} \quad x \in Y\,. \end{cases}$$

La G è un'applicazione continua, che descrive ancora una retrazione di deformazione dell'intorno caratteristico U_Y di Y su Y. Utilizzando la G definiamo una $\Psi : X \times I \to X \times I$ mediante:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} (G(x, \max\{0, t - h_Y(x)\}), \max\{0, t - 2h_Y(x)\}) & \text{se} \quad x \in U_Y \\ (x,0) \quad \text{se} \quad x \in X \setminus U_Y\,. \end{cases}$$

La Ψ è continua e definisce una retrazione di $X \times I$ su $(X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$.

Se ora Z è un qualsiasi spazio topologico, $f : X \to Z$ un'applicazione continua ed $F : Y \times I \to Z$ un'omotopia di $f|_Y$, allora la:

$$f'(x,t) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad t = 0\,,\ x \in X \\ F(x,t) & \text{se} \quad t \in I\,,\ x \in Y \end{cases}$$

è continua e quindi la:

$$\tilde{F}(x,t) = f' \circ \Psi(x,t) \quad \text{per} \quad (x,t) \in X \times I$$

è un'omotopia di f che estende F. □

Questo corollario ci dice che, se Y è un sottospazio cellulare di uno spazio cellulare X, allora l'inclusione $Y \hookrightarrow X$ è una *cofibrazione*. Nel paragrafo successivo discuteremo brevemente il concetto di cofibrazione.

7. Cofibrazioni

Poiché l'intervallo I è uno spazio di Hausdorff localmente compatto, per ogni coppia di spazi topologici X, Z, l'applicazione canonica $\mathcal{C}(X \times I, Z) \to \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(I, Z))$ è un omeomorfismo. Possiamo identificare quindi un'omotopia F di applicazioni continue di X in Z ad un'applicazione continua $F : X \to \mathcal{C}(I, Z)$, che ad ogni punto x di X faccia corrispondere un cammino continuo $I \ni t \to F(x,t) \in Z$ in Z.

Definiamo una *cofibrazione* di X come il dato di uno spazio topologico Y e di un'immersione topologica $\imath : Y \to X$ tale che, per ogni applicazione $f \in \mathcal{C}(X, Z)$ ed ogni omotopia $F \in \mathcal{C}(Y, \mathcal{C}(I, Z))$ di $f \circ \imath$ si possa trovare un'omotopia $\tilde{F} \in \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(I, Z))$ che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xleftarrow{\imath} & X & \xrightarrow{f} & Z \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{F}} & & \| \\ Y & \xrightarrow[F]{} & \mathcal{C}(I,Z) & \xrightarrow[p_0]{} & Z \end{array}$$

dove $p_0 : \mathcal{C}(I, Z) \ni \alpha \to \alpha(0) \in Z$ è l'applicazione che associa ad ogni cammino continuo in Z il suo punto iniziale.

Nel seguito identificheremo per semplicità Y con la sua immagine $\imath(Y) \subset X$.

LEMMA 7.1. *Se $\imath : Y \to X$ è una cofibrazione, allora $(X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$ è un retratto del cilindro $X \times I$.*

In particolare, se X è di Hausdorff, Y è un sottospazio chiuso di X.

DIMOSTRAZIONE. Una retrazione

$$\rho : X \times I \to (X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$$

è un'estensione dell'omotopia

$$F : Y \times I \ni (x,t) \to (x,t) \in (X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$$

della restrizione ad Y dell'immersione

$$X \ni x \to (x,0) \in (X \times \{0\}) \cup (Y \times I)\,.$$

Se X è di Hausdorff, anche il prodotto $X \times I$ è uno spazio di Hausdorff e quindi il suo retratto[2] $(X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$ è chiuso in $X \times I$. L'applicazione $\rho_1 : X \ni x \to \rho(x,1) \in X \times I$ è continua e quindi $Y = \rho_1^{-1}([X \times 0] \cup [Y \times I])$ è chiuso perché immagine inversa di un chiuso mediante un'applicazione continua. □

PROPOSIZIONE 7.2. *Se $Y \hookrightarrow X$ è una cofibrazione e Y è contrattile, allora la proiezione $(X,Y) \to (X/_Y, [Y])$ è un'equivalenza omotopica.*

DIMOSTRAZIONE. Siano (X,Y) ed (X',Y') due coppie topologiche. Ricordiamo che esse sono *omotopicamente equivalenti* se esistono due applicazioni $f \in \mathcal{C}(X,Y;X',Y')$ e $g \in \mathcal{C}(X',Y';X,Y)$ tali che $f \circ g$ sia omotopa all'identità in $\mathcal{C}(X',Y';X',Y')$ e $g \circ f$ sia omotopa all'identità in $\mathcal{C}(X,Y;X,Y)$.

Sia $F : Y \times I \to Y$ un'omotopia tra l'identità ed un'applicazione costante. Per l'ipotesi che $\imath : Y \hookrightarrow X$ sia una cofibrazione, la $\imath \circ H$ si estende ad un'omotopia $\tilde{F} : X \times I \to X$ tra l'identità ed un'applicazione che trasforma Y in un punto. Quindi $\tilde{F}_1 : X \ni x \to \tilde{F}(x,1) \in X$ definisce, per passaggio al quoziente, un'applicazione $g : X/_Y \to X$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{F}_1} & X \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\| \\ X/_Y & \xrightarrow[g]{} & X \end{array}$$

ove $p : X \to X/_Y$ è la proiezione nel quoziente. La $\tilde{F}$ è allora un'omotopia tra l'identità e $g \circ p$. Poiché $\tilde{F}(Y \times I) \subset Y$, per passaggio al quoziente la $\tilde{F}$

[2]Se A è un retratto dello spazio topologico di Hausdorff B, detta $\rho : B \to A$ la retrazione, B è chiuso perché immagine inversa della diagonale $\{(b,b) \,|\, b \in B\}$ di $B \times B$ mediante l'applicazione continua $B \ni b \to (b, \rho(b)) \in B \times B$.

definisce una $\hat{F}$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{\tilde{F}} & X \\ {\scriptstyle p\times \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ (X/_Y) \times I & \xrightarrow[\hat{F}]{} & X/_Y \end{array}$$

ed è un'omotopia tra l'identità su $X/_Y$ e la $p \circ g$. □

8. Alcune proprietà di omotopia dei CW-complessi

Otteniamo allora la:

PROPOSIZIONE 8.1. *Sia $(X, \mathcal{P})$ un CW-complesso ed Y un sottospazio cellulare di X. Se l'inclusione $Y \hookrightarrow X$ è un'equivalenza omotopica, allora Y è un retratto di deformazione stretta di X.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che il fatto che Y sia un retratto di deformazione stretto di X significa che l'identità su X è Y-omotopa ad un'applicazione a valori in Y.

Sia $g : X \to Y$ un'inversa omotopica dell'inclusione $Y \hookrightarrow X$. Sia $F : Y \times I \to Y$ un'omotopia tra $g|_Y$ e l'identità su Y. Per il corollario precedente, essa si estende ad un'omotopia $\tilde{F} : X \times I \to A$ tra g e una retrazione $\rho : X \to Y$.

L'applicazione $f'(x,t)$, definita su $(X \times \{0\}) \cup (Y \times I)$ mediante:

$$f'(x,t) = \begin{cases} \rho(x) & \text{se} \quad x \in X\,,\ t = 0 \\ x & \text{se} \quad x \in Y\,,\ t \in I \end{cases}$$

è continua. Consideriamo ora l'applicazione $R : X \ni x \to \rho(x) \in X$ (ottenuta componendo ρ con l'inclusione $Y \hookrightarrow X$). Per ipotesi essa è omotopa all'identità su X. Sia $G : X \times I \to X$ un'omotopia tra l'identità su X e l'applicazione ρ. Allora la $G \circ \Psi : X \times I \to X$ è una retrazione di deformazione di X su A. □

DEFINIZIONE 8.2. Una *coppia topologica* (X, Y) si dice k-connessa se, per ogni $1 \leq h \leq k$, ogni $f \in \mathcal{C}(D^h, S^{h-1}; X, Y)$ è S^{h-1}-omotopa a un'applicazione a valori in Y.

Ad esempio, se Y è un retratto di deformazione stretto di X, la coppia (X, Y) è ∞-connessa.

La coppia (X, Y) è 0-connessa se tutte le componenti connesse per archi di X contengono punti di Y.

DEFINIZIONE 8.3. Chiamiamo *coppia cellulare* una coppia (X, Y) formata da uno spazio cellulare X e da un suo sottospazio cellulare Y.

Vale la seguente:

PRPFD

PROPOSIZIONE 8.4. *Sia (X, Y) una coppia cellulare e supponiamo, che per un intero positivo k, ovvero per $k = \infty$, tutte le celle contenute in $X \setminus Y$ abbiano dimensione minore o uguale a k. Se (A, B) è una coppia topologica k-connessa, ogni $f \in \mathcal{C}(X, Y; A, B)$ è Y-omotopa ad un'applicazione $g \in \mathcal{C}(X, A)$ che trasforma X in B.*

In particolare, se X è uno spazio cellulare di dimensione minore o uguale a k, ogni applicazione continua di X a valori in uno spazio topologico k-connesso A è omotopa ad un'applicazione costante.

DIMOSTRAZIONE. Costruiamo per ricorrenza una successione di Y-omotopie $F_m : (Y \cup X_h) \times I \to A$, per interi $m = -1, 0, 1, \ldots$, in modo che siano verificate le:

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad F_{m+1}(x,t) = F_m(x,t) \quad \text{su} \quad (Y \cup X_m) \times I \\
&(ii) \quad F_m(x,t) = f(x) \quad \text{su} \quad (Y \cup X_m) \times \{0\} \\
&(iii) \quad F_m\left((Y \cup X_m) \times [0, 2^{-m-1}]\right) \subset B \\
&(iv) \quad F_m(x,t) = F_m(x,t') \quad \text{se} \quad x \in Y \cup X_m\,, \quad 2^{-m-1} \le t, t' \le 1\,.
\end{aligned}
$$

La $F : X \times I \to A$ che coincide con F_m su $X_m \times I$ sarà allora un'omotopia di f con un'applicazione a valori in B.

Definiamo $F_{-1} : Y \times I \to A$ come l'omotopia costante ($F_{-1}(x,t) = f(x)$ per ogni $x \in Y$ e $t \in I$).

Sia ora r un intero ≥ -1 e supponiamo di aver già costruito F_m per $-1 \le m \le r$, in modo che siano verificate le (ii), (iii), (iv) per ogni r con $-1 \le m \le r$ ed (i) per $-1 \le m < r$. Se fosse $r \ge k$, avremmo $Y \cup X_r = X$ e potremmo quindi porre $F_{r+1} = F_r$. Ci limitiamo quindi a considerare il caso in cui $r < k$.

Poiché $Y \cup X_r$ è un sottospazio cellulare di X, per il Corollario 6.3, CORFB possiamo trovare un'omotopia $G : X \times I \to A$, con $G(x,0) = f(x)$ per ogni $x \in X$, che prolunga F_r.

Per ogni cella C della partizione cellulare $\mathcal{P}$ di X, indichiamo con $\phi_C : D^{d(C)} \to X$ la sua funzione caratteristica. Allora, per ogni cella C di dimensione $(r+1)$ contenuta in $X \setminus Y$, l'applicazione:

$$
g_C(y) = G(\phi_C(y), 1 - 2^{-r-1}) \quad \text{per} \quad y \in D^{r+1}
$$

manda S^r in B. Poiché la coppia (A, B) è per ipotesi $(r+1)$-connessa, possiamo trovare una S^r-omotopia $G_C : D^{r+1} \times I \to A$ tra g_C e un'applicazione

continua che trasforma D^{r+1} in B. Definiamo allora:

$$F_{r+1}(x,t) = \begin{cases} F_r(x,t) & \text{se} \quad x \in Y \cup X_r\,,\ t \in I \\ G(x,t) & \text{se} \quad x \in Y \cup X_{r+1}\,, \\ & \quad 0 \le t \le 2^{-r-1} \\ G_C\left(y, 2^{r+2}(t-1+2^{-r-1})\right) & \text{se} \quad x = \phi_C(y)\,, \\ & \quad 1-2^{-r-1} \le t \le 1-2^{-r-2} \\ G_C(y,1)) & \text{se} \quad x = \phi_C(y)\,, \\ & \quad 1-2^{-r-2} \le t \le 1\,. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che la F_{r+1} è continua e verifica tutte le condizioni (i), (ii), (iii), (iv).

L'ultima affermazione segue dal fatto che, se A è k-connesso e $a_0 \in A$, allora $(A, \{a_0\})$ è una coppia k-connessa. □

COROLLARIO 8.5. *Sia k un intero non negativo o ∞. Se una coppia cellulare (X,Y) è k connessa e nessuna cella di dimensione maggiore di k della decomposizione cellulare $\mathcal{P}$ di X è contenuta in $X \setminus Y$, allora Y è un retratto di deformazione stretto di X.*

In particolare, uno spazio cellulare k-connesso di dimensione minore o uguale a k è contrattile. □

9. Coppie cellulari k-connesse ed equivalenza omotopica

Richiamiamo la definizione di equivalenza omotopica per coppie topologiche.

DEFINIZIONE 9.1. Due coppie topologiche (X,Y) ed (X',Y') si dicono *omotopicamente equivalenti* se esistono due applicazioni continue $f \in \mathcal{C}(X,Y;X',Y')$ e $g \in \mathcal{C}(X',Y';X,Y)$ tali che $g \circ f$ sia omotopa all'identità in $\mathcal{C}(X,Y;X,Y)$ ed $f \circ g$ sia omotopa all'identità in $\mathcal{C}(X',Y';X',Y')$.

La proprietà di essere k-connesse è chiaramente una proprietà delle coppie topologiche invariante per equivalenza omotopica.

Vale il:

LEMMA 9.2. *Ogni coppia cellulare k-connessa è omotopa a una coppia cellulare (X,Y) con $X_k \subset Y$.*

DIMOSTRAZIONE. Conveniamo che lo scheletro (-1)-dimensionale di un qualsiasi spazio cellulare sia vuoto. Possiamo ragionare per ricorrenza su k. Supponiamo quindi che sia data una coppia cellulare k-connessa (X',Y'), con $k \ge 0$ e con $X'_{k-1} \subset Y'$ (per $k=0$ questa condizione è banalmente verificata). Consideriamo l'inclusione $X'_k \hookrightarrow X'$ come un elemento di $\mathcal{C}(X'_k, Y'_k; X', Y')$.

Per la Proposizione PRPFD 8.4, esiste una Y'_k-omotopia $\Phi : X'_k \times I \to X'$ tale che $\Phi_1(X'_k) \subset Y'$.

Consideriamo il prodotto topologico

$$X'_k \times I \times I.$$

Possiamo considerarlo in modo ovvio come spazio cellulare, utilizzando le partizioni cellulari standard ($\mathcal{P}_I = \{\{0\}, \{1\}, (0,1)\}$) dell'intervallo I e la conseguente partizione cellulare

$$\mathcal{Q} = \{C' \times C'' \times C''' \mid C' \in \bigcup_{0 \le h \le k} \mathcal{P}'_h,\ C', C'' \in \mathcal{P}_I\}$$

del prodotto. Abbiamo qui indicato con $\mathcal{P}'$ la partizione cellulare di X' e con $\mathcal{P}'_h$ il sottoinsieme delle celle di dimensione h in $\mathcal{P}'$.

Consideriamo il sottospazio cellulare B di A che si ottiene considerando l'unione della base, di due facce laterali di $X'_k \times I \times I$ e del prodotto $Y'_k \times I \times I$:

$$B = (X'_k \times I \times \{0\}) \ \cup \ (X'_k \times \{0\} \times I) \ \cup \ (X'_k \times \{1\} \times I) \ \cup \ (Y'_k \times I \times I).$$

Definiamo lo spazio cellulare X attaccando A ad X' lungo B, mediante l'applicazione

$$\phi : B \ni (x, t_1, t_2) \to \Phi(x, t_1) \in X'.$$

Poniamo quindi

$$X = X' \cup_\phi A,$$
$$Y = Y' \cup \jmath(B),$$

dove $\jmath$ è la restrizione ad A della proiezione nel quoziente $X' \sqcup A \to X' \cup_\phi A$ ed abbiamo identificato X' ad un sottospazio di $X' \cup_\phi A$.

Osserviamo che A, B sono sottospazi cellulari di $X'_k \times I \times I$ e l'applicazione $\phi : B \to X'$ è cellulare.

Lo spazio topologico X è in modo naturale uno spazio cellulare ed Y un suo sottospazio cellulare, che contiene il suo scheletro k-dimensionale. Per verificare che le coppie (X, Y) ed (X', Y') sono omotopicamente equivalenti, basta osservare che Y' è un retratto di deformazione stretto di Y e che X' è un retratto di deformazione stretto di X. Quindi (X, Y) è omotopicamente equivalente alla coppia (X', Y'). □

Corollario 9.3. *Ogni spazio cellulare k-connesso è omotopicamente equivalente ad uno spazio cellulare X in cui lo scheletro k-dimensionale X_k sia un punto.*

Dimostrazione. Sia X' uno spazio cellulare k-connesso e sia $\{x_0\} \subset X$ una sua cella 0-dimensionale. Per la proposizione precedente, la coppia cellulare $(X', \{x_0\})$ è omotopicamente equivalente a una coppia cellulare (X'', Y'') con $Y'' \supset X''_k$. Poniamo $X = X''/Y''$. Poiché, essendo omotopicamente equivalente a un punto, Y'' è contrattile, X è omotopicamente equivalente a X'', e chiaramente X_k è un punto. □

LMMAGD

LEMMA 9.4. *Sia X uno spazio topologico, $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un suo ricoprimento fondamentale con:*

$$X_k \cap X_h = \emptyset \quad se \quad |h-k| > 1$$
$$X_{k-1} \cap X_k \quad \text{è un retratto di deformazione stretto di } X_k \quad se \quad k \geq 1\,.$$

Allora X_0 è un retratto di deformazione stretto di X.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni intero positivo k sia $F_k : X_k \times I \to X_k$ una $X_k \cap X_{k-1}$-omotopia legata tra l'identità su X_k ed un'applicazione che trasforma X_k nell'intersezione $X_k \cap X_{k-1}$. Definiamo allora un'omotopia $F : X \times I \to X$ ponendo:

$$F(x,t) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in X_k \quad \text{e} \quad 0 \leq t \leq 2^{-k} \\ F_\ell(F_{\ell-1}(\dots \quad (F_k(x,1),\dots)1),1), 2^\ell t - 1) & \\ & \text{se} \quad x \in X_k \quad 2^{-\ell} \leq t \leq 2^{1-\ell}\,,\ \ell \leq k\,. \end{cases}$$

La F è una X_0-omotopia legata tra l'identità e una retrazione di X su X_0. □

Otteniamo allora il seguente:

LEMMA 9.5. *Ogni spazio cellulare connesso contiene un sottospazio contrattile di dimensione* 1 *che contiene il suo scheletro di dimensione zero.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $(X,\mathcal{P})$ un CW-complesso e sia $\{x_0\} \in \mathcal{P}$ una sua cella di dimensione 0. Sia A_k l'insieme dei punti x tali che $\{x\} \in \mathcal{P}$ sia una cella di dimensione zero e che si possono collegare ad x_0 con un cammino continuo $\alpha : I \to X_1$ tale che $\alpha(I)$ contenga al più k celle distinte di dimensione 1. Abbiamo $A_0 = \{x_0\}$ e conveniamo di porre $A_{-1} = \emptyset$. Poiché X_1 è connesso, ed un cammino continuo, essendo un compatto, interseca solo un numero finito di celle, avremo $X_0 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Per ogni intero $k \geq 1$ ed ogni cella $\{x\}$ di dimensione 0 contenuta in $A_k \setminus A_{k-1}$ fissiamo una cella chiusa $C_x \in \mathcal{P}$, di dimensione 1, che congiunga x a una cella $\{y\} \in \mathcal{P}$ di dimensione 0, con $y \in A_{k-1} \setminus A_{k-2}$. Definiamo allora:

$$Y_k = \begin{cases} \{x_0\} & \text{se} \quad k = 0 \\ \bigcup_{y\in A_k \setminus A_{k-1}} C_y & \text{se} \quad k > 0\,. \end{cases}$$

Posto $Y = \bigcup_{k\geq 0} Y_k$, chiaramente Y è un sottospazio cellulare di dimensione 1 di X, che contiene X_0 e che, per il Lemma 9.4, LMMAGD $\{x_0\}$ è un retratto di deformazione stretto di Y. In particolare, Y è contrattile. □

COROLLARIO 9.6. *Ogni spazio cellulare connesso X è omotopicamente equivalente a uno spazio cellulare X' con* $\dim(X') \leq \dim(X)$*, il cui scheletro di dimensione* 0 *si riduce a un punto.*

In particolare, ogni spazio cellulare di dimensione 1 *è equivalente a un bouquet di circonferenze.*

DIMOSTRAZIONE. Sia Y un sottospazio cellulare di X contrattile, che contiene lo scheletro di dimensione 0 di X. Allora la coppia (X, Y) è omotopicamente equivalente alla coppia $(X/Y, [Y])$.

Sia infatti $F : Y \times I \to Y$ un'omotopia tra l'identità ed un'applicazione costante. Per il Corollario 6.3 la F si prolunga ad un'omotopia $G : X \times I \to X$ dell'identità su X. Sia $g(x) = g(x, 1)$. Poiché g è costante su Y, essa definisce per passaggio al quoziente un'applicazione $\hat{g} : X/Y \to X$. Inoltre, $\hat{g}([A]) \in A$.

Si verifica facilmente che la $\hat{g} \in \mathcal{C}(X/Y, \{[Y]\}; X, Y)$ è un'inversa omotopica di $p \in \mathcal{C}(X, Y; X/Y, \{[A]\})$, ove $p : X \to X/A$ è la proiezione nel quoziente.

Infatti G definisce un'omotopia tra $\hat{g} \circ p = g$ e l'identità su X; osserviamo poi che $G(Y, t) \subset Y$ per ogni $t \in I$ e quindi G definisce un'omotopia $\hat{G} : (X/Y) \times I \to X/Y$ tra $p \circ \hat{g}$ e l'identità su X/Y, costante su $[Y]$. □

10. Gruppi di omotopia degli spazi cellulari di dimensione 1

Uno spazio cellulare connesso di dimensione 1 è omotopicamente equivalente a un bouquet di circonferenze. Dimostriamo la:

PROPOSIZIONE 10.1. *Sia I un insieme qualsiasi e sia $X = \bigvee_{i \in I} S^1_i$ il bouquet di I circonferenze. Allora $\pi_1(X, e_0)$ è il gruppo libero delle parole nell'alfabeto I, mentre tutti i gruppi $\pi_m(X, e_0)$ con $h \neq 1$ sono banali.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $\mathbf{G}$ il gruppo libero delle parole nell'alfabeto I. Consideriamo il bouquet $Y = \bigvee_{i \in I} D^1_i$ di I copie del disco di dimensione uno $D^1 = [-1, 1]$, consideriamo su $\mathbf{G}$ la topologia discreta e definiamo sul prodotto topologico $Y \times \mathbf{G}$ la relazione di equivalenza:

$$(x, g) \sim (x', g') \iff \begin{cases} x = x' \quad \text{e} \quad g = g', \quad \text{oppure} \\ x = 1 \in D^1_i,\ x' = -1 \in D^1_i \quad \text{e} \quad g' = g \cdot i, \quad \text{oppure} \\ x = -1 \in D^1_i,\ x' = 1 \in D^1_i \quad \text{e} \quad g = g' \cdot i. \end{cases}$$

Sia $\tilde{X} = (Y \times \mathbf{G})/\sim$ il quoziente topologico. Allora $\tilde{X}$ è contrattile.

Questo fatto si può verificare nel modo seguente. Detta $\tilde{X}_h$ l'immagine in $\tilde{X}$ dell'insieme $\{(y, g) \,|\, y \in Y\,,\ \ell(g) = h\}$ (qui $\ell(g)$ è la lunghezza della parola g nell'alfabeto I), si osserva che la successione $\{\tilde{X}_h\}$ soddisfa le condizioni del Lemma 9.4, e quindi $\tilde{X}_0$ è un retratto di deformazione stretto di $\tilde{X}$. Ma $\tilde{X}_0$ è omeomorfo a Y, che è contrattile, onde $\tilde{X}$ è contrattile.

L'applicazione $Y \times \mathbf{G} \to X$ indotta dalle $D^1_i \times \mathbf{G} \ni (y, g) \to \exp(i\pi y) \in S^1_i$, per passaggio al quoziente, definisce un rivestimento (in senso stretto) $p : \tilde{X} \to X$. Poiché $\tilde{X}$ è contrattile, il gruppo fondamentale di X è isomorfo al gruppo degli automorfismi del rivestimento $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$, che è isomorfo a $\mathbf{G}$.

Utilizzando poi la successione esatta d'omotopia di un fibrato, otteniamo la tesi[3]. □

11. Gruppo fondamentale di uno spazio cellulare

Abbiamo dimostrato che un qualsiasi spazio cellulare connesso è omotopicamente equivalente ad uno spazio cellulare $(X, \mathcal{P})$ il cui scheletro di dimensione 0 si riduce a un punto: $X_0 = \{x_0\}$. Il suo scheletro di dimensione 1 è allora un bouquet di circonferenze (una per ogni cella di dimensione 1), e l'applicazione naturale $\pi_1(X_1, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ indotta dall'inclusione è un omomorfismo surgettivo. Sappiamo inoltre che la $\pi_1(X_2, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ è un isomorfismo.

Quindi: *$\pi_1(X, x_0)$ è isomorfo al quoziente di $\pi_1(X_1, x_0)$ rispetto al suo sottogruppo normale generato dalle classi di omotopia dei laccetti $\gamma_C : I \ni t \to \phi_C(\cos(2\pi\, t), \sin(2\pi\, t)) \in X_1$, ove $\phi_C : D^2 \to X$ è la funzione caratteristica di una cella chiusa $\bar{C}$ di dimensione due.*

Se X_0 non si riduce a un punto, possiamo ancora descrivere $\pi_1(X, x_0)$ come il quoziente di $\pi_1(X_1, x_0)$ (scegliamo il punto base x_0 nello scheletro 0-dimensionale di X) rispetto al sottogruppo normale generato dalle classi di omotopia dei laccetti della forma: $\alpha \cdot \gamma_C \cdot \alpha^{-1}$ dove α è un cammino che congiunge x_0 con il punto $\gamma(0) = \psi_C(e_0)$.

Esempio 11.1. Sia m un intero positivo e sia X l'unione della sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e dei raggi $R_h = \{(0, t\cos(2h\pi/m), t\sin(2h\pi/m) \,|\, t \in I\}$. Otteniamo una partizione cellulare di X considerando come celle di dimensione 0 il punto $(0,0,0)$ ed i punti $(0, \sin(2h\pi/m), \cos(2h\pi/m)$ per $1 \le h \le m$, come celle di dimensione 1 i punti interni dei segmenti R_h e degli archi A_h in cui la circonferenza $S^3 \cap \{x_0 = 0\}$ è suddivisa dagli estremi dei raggi R_h, come celle di dimensione due le due semisfere $S^3 \cap \{x_0 > 0\}$ e $S^3 \cap \{x_0 < 0\}$. Osserviamo che $Y = \bigcup R_h$ è un sottospazio cellulare contrattile che contiene X_0. Quindi X è omotopicamente equivalente allo spazio cellulare $Z = X/Y$. Lo scheletro 0-dimensionale di Z è un punto, mentre Z_1 è un bouquet di m circonferenze. Dette $a_1, \ldots, a_m$ le classi di omotopia in $\pi_1(Z_1, [Y])$ generate dalle classi delle immagini dei laccetti:

$$I \ni t \to (0, \cos(2[h+t]\pi/m), \sin(2[h+t]\pi/m)) \in X\,,$$

il gruppo fondamentale $\pi_1(Z_1, [Y])$ è il gruppo libero generato da $a_1, \ldots, a_m$. Le relazioni indotte dall'attaccamento delle due celle si riducono entrambe a:

$$a_1 \cdots a_m = 1\,.$$

[3] Osserviamo che, nel caso del bouquet di un numero finito di circonferenze, avremmo potuto ottenere lo stesso risultato per ricorrenza, utilizzando il teorema di Seifert-Van Kampen. Questa dimostrazione, che utilizza la teoria dei rivestimenti, ci permette di discutere il caso del bouquet di un insieme qualsiasi (non necessariamente finito) di circonferenze.

Quindi $\pi_1(Z, [Y])$ e $\pi_1(X, x_0)$ sono isomorfi al gruppo libero generato da $(m-1)$ elementi.

CAPITOLO 20

Esercizi e Complementi

1. Esercizi

1. Dati $n+1$ punti distinti $p_0, p_1, \ldots, p_n$ di $\mathbb{R}^2$, si calcoli il gruppo fondamentale di $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ rispetto al punto base p_0.

2. Siano M_1 ed M_2 due nastri di Moebius, con frontiere $S^1_1 \subset M_1$ ed $S^1_2 \subset M_2$. Dato un intero m, consideriamo la funzione di attaccamento $\phi : S^1_2 \ni z \to z^m \in S^1_1$ e sia $X = M_1 \cup_\phi M_2$. Si scelga un punto $x_0 \in X$ e si calcoli il gruppo fondamentale di X rispetto ad x_0.

[Il gruppo fondamentale del nastro di Moebius è il gruppo libero generato dalla sua circonferenza mediana: se $M = I \times I/\sim$, dove la simmetria $\sim$ identifica i punti $(0,t)$ ai punti $(1, 1-t)$, per $t \in I$, possiamo scegliere come generatore il laccetto che è L'immagine in M del cammino $I \ni t \to (t, 1/2) \in I \times I$. Indichiamo con α la corrispondente classe di omotopia. Allora la frontiera S^1 del nastro di Moebius, opportunamente orientata, è omotopa a un laccetto della classe di α^2.

Usando il teorema di Seifert-Van Kampen, e riportando le classi di omotopia a uno stesso punto base sulle frontiere dei due nastri di Moebius, si può allora verificare che $\pi_1(X, x_0)$ è il quoziente del gruppo libero generato da due elementi a, b, rispetto alla relazione $a^2 b^{2m} = 1$.]

3. Siano M un nastro di Moebius e D^2 un disco bidimensionale, con frontiere $S^1_1 \subset M$ ed $S^1_2 \subset D^2$. Sia n un intero e sia $\phi : S^1_2 \ni z \to z^n \in S^1_1$. Posto $X = M \cup_\phi D^2$ e scelto $x_0 \in X$, si calcoli $\pi_1(X, x_0)$.

[Indichiamo con a la classe di omotopia corrispondente ad un generatore di $\pi_1(M, x_0)$ e con $b = 1$ quella corrispondente alla frontiera del disco. Poiché la frontiera del nastro di Moebius definisce la classe a^2, utilizzando Seifert-Van Kampen otteniamo che $\pi_1(X, x_0)$ è il quoziente del gruppo libero generato da un elemento a che soddisfa la relazione $a^2 = b^n = 1$ e quindi è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.]

4. Siano D^2 un disco bidimensionale ed M un nastro di Moebius, con frontiere $S^1_1 \subset D^2$ ed $S^1_2 \subset M$. Sia m un intero e sia $\phi : S^1_1 \ni z \to z^n \in S^1_2$. Posto $X = D^2 \cup_\phi M$ e scelto $x_0 \in X$, si calcoli $\pi_1(X, x_0)$.

[Con le notazioni dell'esercizio precedente: usando ancora Seifert-Van Kampen si verifica che $\pi_1(X, x_0) \simeq \mathbb{Z}_{2n}$, essendo il gruppo libero generato da a con la relazione che $(a^2)^n = a^{2n} = 1$.]

5. Siano a, b, c numeri interi positivi, con $a + b = c$ e tali che b, c siano privi di fattori comuni. Posto $X = \{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{CP}^2 \mid z_0^a z_1^b = z_2^c\}$ e scelto un punto $p_0 \in X$, si calcoli $\pi_1(X, p_0)$.

[Si verifichi che l'applicazione $\mathbb{CP}^1 \ni (w_0, w_1) \to (w_0^{b+c}, w_0^b w_1^c, w_0^c w_1^b) \in X$ è un omeomorfismo.]

2. Le superfici modello

sec:supmod

DEFINIZIONE 2.1 (Superfici modello elementari). Chiamiamo *sfera con ℓ buchi* la sfera S^2 privata dei punti interni di ℓ calotte. Se $\xi_1, \dots, \xi_\ell \in S^2$ sono punti distinti della sfera ed $\inf_{1\le i<j\le \ell} |\xi_i - \xi_j| = 3\epsilon > 0$, allora

eq:sma
$$\{x \in S^2 \mid |x - \xi_j| \ge \epsilon,\ 1 \le j \le \ell\} \tag{2.1}$$

è una sfera con ℓ buchi.

Si chiama *manico* la sfera a due buchi. La sfera a due buchi è una *varietà a bordo*, omeomorfa al cilindro $S^1 \times I$, e il suo bordo è l'unione disgiunta $S^1 \sqcup S^1$ di due circonferenze, orientate l'una nel verso opposto dell'altra.

Si chiama *nastro di Moebius* il complementare di una palla aperta nel piano proiettivo reale. Possiamo prendere ad esempio

eq:smb
$$M = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{RP}^2 \mid x_0^2 \le x_1^2 + x_2^2\}. \tag{2.2}$$

Osserviamo che il nastro di Moebius è una *varietà a bordo*, con bordo ∂M omeomorfo ad una circonferenza.

DEFINIZIONE 2.2 (Superfici modello). La sfera a g manici e k buchi si ottiene dalla sfera a $2g + k$ buchi mediante l'attaccamento di g manici lungo le frontiere di $2g$ buchi, preservando l'orientazione naturale.

La sfera ad h nastri e k buchi si ottiene dalla sfera ad $h + k$ buchi attaccando ad essa h nastri di Moebius lungo il bordo di h buchi.

ESEMPIO 2.3. La sfera con un manico è il *toro*. La sfera ad una banda è il *piano proiettivo reale*. La sfera a due bande è la *bottiglia di Klein*. La sfera con due bande e un buco è un *disco con manico ritorto*.

Nell'elenco delle superfici modello non compaiono sfere che abbiano contemporaneamente bande e manici. Vale infatti il seguente

TEOREMA 2.4. *Una sfera con g manici, h bande e k buchi, se $h \ge 1$, è omeomorfa ad una sfera con $2g + h$ bande e k buchi.*

TEOREMA 2.5. *Ogni superficie differenziabile con bordo è omeomorfa ad una superficie modello.*

Una superficie modello ammette una decomposizione cellulare in cui vi è un'unica cella di dimensione 0 ed un'unica cella di dimensione 2. Possiamo allora rappresentarla come il quoziente topologico che si ottiene identificando in modo opportuno i punti del bordo di un poligono piano. I punti interni del poligono corrispondono alla cella di dimensione 2; i vertici, tutti identificati tra loro, danno la cella di dimensione 0. I punti interni dei lati corrispondono alle celle di dimensione 1. Si fanno corrispondere ad ogni manico quattro lati del poligono, che vengono identificati secondo lo schema

eq:smc
$$aba^{-1}b^{-1}. \tag{2.3}$$

Questo significa che i punti di ciascun segmento sono identificati con quelli dello stesso nome, ma presi nell'ordine inverso. Ad esempio, se pensiamo di percorrere la frontiera del poligono in senso anti-orario, punti del lato contrassegnato con a vicini al primo estremo corrispondono a punti vicini al secondo estremo del lato contrassegnato con a^{-1}.

Ad ogni nastro si fanno corrispondere due lati consecutivi del poligono secondo lo schema

eq:smd (2.4) $$cc.$$

Ciò significa che a punti vicini al primo estremo del lato corrispondente a c si fanno corrispondere punti vicini al primo estremo dell'altro lato contrassegnato con c.

Ad ogni buco si associa un singolo lato, con lo schema semplice

eq:sme (2.5) $$d.$$

Ogni lato del poligono corrisponde ad un laccetto sulla superficie. Chiaramente, i diversi nomi sui lati corrispondono a generatori del gruppo fondamentale, mentre il perimetro dà, per il teorema di Van Kampen, la relazione che definisce il gruppo fondamentale.

Abbiamo perciò

TEOREMA 2.6. (1) *Se X è una sfera con g manici, allora il gruppo fondamentale di X ha $2g$ generatori $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$, legati dalla relazione*

eq:smf (2.6) $$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1.$$

(2) *Se X è una sfera con h nastri, allora il gruppo fondamentale di X ha h generatori $c_1, \ldots, c_h$, legati dalla relazione*

eq:smg (2.7) $$c_1^2 \cdots c_h^2 = 1.$$

(3) *Se X è una sfera a g manici e $k \geq 1$ buchi, allora il gruppo fondamentale di X è un gruppo libero con $2g + k - 1$ generatori.*

(4) *Se X è una sfera con h nastri e $k \geq 1$ buchi, allora il gruppo fondamentale di X è un gruppo libero con $h + k - 1$ generatori.*

La dimostrazione di molti di questi risultati si può ricondurre a manipolazioni algebriche.

Si osserva in primo luogo che è possibile definire una partizione cellulare di X che contenga una sola cella di dimensione 0 ed una sola cella di dimensione 2 e in cui le celle di dimensione 1 siano sottovarietà localmente chiuse di X. Se quindi si rappresenta X come un quoziente di un poligono chiuso P, ottenuto identificandone opportunamente i punti dei lati, a ciascuna cella di dimensione 1 possono corrispondere o un solo lato di P, se essa è contenuta nel bordo ∂X di X, o due lati distinti, se essa è interna ad X, perché una curva semplice piana disconnette localmente il piano in due componenti.

Per ottenere le forme canoniche delle superfici modello, si può allora dimostrare che ogni poligono P con una corrispondenza dei lati ai laccetti su X tale che al più due lati corrispondano ad uno stesso laccetto, o al suo inverso, è *equivalente* ad una della forma (2.6) o (2.7).

Algebricamente, ciò consiste essenzialmente nel trovare un diverso sistema di generatori per il gruppo fondamentale, in modo che la relazione tra di essi si riduca ad una delle (2.6) o (2.7).

L'operazione fondamentale che consente questo passaggio si può descrivere geometricamente nel modo seguente. Si considera una diagonale d di P che divida P in due poligoni, P_1 e P_2, contenenti uno un lato a e l'altro il suo omologo $a^{\pm 1}$. Si costruisce poi un nuovo poligono P' attaccando P_2 a P_1 lungo i lati omologhi $a, a^{\pm 1}$, avendo cura di preservarne l'orientazione.

Consideriamo ad esempio il perimetro

$$abca^{-1}b^{-1}c = 1,$$

che corrisponde ad una superficie senza bordo con un manico ed un nastro. Tracciare la diagonale che congiunge il primo estremo di a al secondo estremo di c equivale a considerare, come nuovo insieme di generatori del gruppo fondamentale, $\alpha = a^{-1}, \beta = b^{-1}$ e $\gamma = abc$. La relazione diviene allora

$$\begin{aligned}
&\gamma\, a^{-1}b^{-1}b^{-1}a^{-1}\gamma = 1, \quad \text{cioè}\\
&\gamma\alpha\beta\beta\alpha\gamma = 1, \quad \text{da cui}\\
&\alpha\beta\beta\alpha\gamma\gamma = 1, \quad \text{che ci dà}\\
&(\alpha\beta\alpha^{-1})(\alpha\beta\alpha^{-1})\alpha\alpha\gamma\gamma = 1.
\end{aligned}$$

Verifichiamo quindi che la nostra superficie è una sfera a tre nastri utilizzando come generatori del gruppo fondamentale $\alpha\beta\alpha^{-1} = a^{-1}b^{-1}a$, $\alpha = a^{-1}$, $\gamma = abc$.

Osservazione 2.7. La sfera X con h nastri e k buchi ha un rivestimento a due fogli che consiste di una sfera con $h-1$ manici e $2k$ buchi.

Per $h = 1$, $k = 0$, otteniamo la sfera come rivestimento a due fogli del piano proiettivo reale; per $h = 2$, $k = 0$ il toro come rivestimento a due fogli della bottiglia di Klein; per $h = 1$, $k = 1$, il cilindro come rivestimento a due fogli del nastro di Moebius.

Osservazione 2.8. Utilizzando i rivestimenti di superfici, otteniamo interessanti omomorfismi di gruppi. Consideriamo ad esempio una sfera con $g \geq 3$ manici. Possiamo rappresentarla come la superficie X che si ottiene dal toro $T = \{(z,t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R} \mid \mathrm{dist}((z,t),K) < (1/2)\}$ ove K è la circonferenza $K = \{(z,t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R} \mid |z| = 1,\ t = 0\}$, ponendo

$$X = \left\{ (z,t) \in T \;\middle|\; \left| z - \exp\left(\frac{2\pi k i}{g-1}\right)\right| \geq 1/4,\ k = 1,\dots,g-1 \right\}.$$

Introduciamo la relazione di equivalenza:

$$(z_1,t_1) \sim (z_2,t_2) \Longleftrightarrow t_1 = t_2,\ z_1^{-1}z_2 \in \left\{ \exp\left(\frac{2\pi k i}{g-1}\right) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Allora $Y = X/\sim$ è omeomorfo alla sfera con due manici e l'omomorfismo iniettivo $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ ci permette di rappresentare il gruppo definito da $2g \geq 6$ generatori, legati dalla relazione (2.6), come un sottogruppo di un gruppo libero con 4 generatori $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, legati dalla relazione

$$\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1} = 1.$$

OSSERVAZIONE 2.9. Se $(X, \mathcal{P})$ è un CW complesso finito, la somma alternata

$$\chi(X) = \sum_m (-1)^m \#\mathcal{P}_m, \tag{2.8}$$

ove $\#\mathcal{P}_m$ indica il numero delle celle di dimensione m, è un invariante topologico che si dice la *caratteristica di Eulero-Poincaré* di X. Tale numero non dipende dalla partizione cellulare.

In particolare: se X è una sfera con manici, il numero $g(X)$ dei manici (che si dice *genere* di X) è legato alla caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(X)$ di X da

$$\chi(X) = 2 - 2g(X). \tag{2.9}$$

Se X è una sfera con $h(X)$ nastri, allora

$$\chi(X) = 2 - h. \tag{2.10}$$

In particolare, tutte le superfici orientabili hanno caratteristica di Eulero-Poincaré pari.

Osserviamo che, se $X \to Y$ è un rivestimento ad m fogli di Y, avremo $\chi(X) = m\chi(Y)$.

OSSERVAZIONE 2.10. Le sole superfici differenziabili compatte che abbiano gruppo fondamentale finito sono la sfera e il piano proiettivo reale. Il loro rivestimento universale è compatto, ed è omeomorfo alla sfera S^2. Tutte le altre hanno gruppo fondamentale infinito. La sfera a $g \geq 1$ manici e la sfera ad $h \geq 2$ nastri hanno rivestimento universale omeomorfo a $\mathbb{C}$.

3. Gruppo fondamentale delle curve algebriche piane

DEFINIZIONE 3.1. Una curva algebrica piana è il luogo degli zeri in $\mathbb{CP}^2$ di un polinomio omogeneo $f \in \mathbb{C}_0[z_0, z_1, z_2]$. Se f è un polinomio irriducibile, diremo che anche la curva C_f corrispondente è irriducibile. Chiaramente, se $f = f_1 \cdots f_m$ si decompone nel prodotto di m polinomi, avremo $C_f = C_{f_1} \cup \cdots \cup C_{f_m}$ ed inoltre $C_{f^k} = C_f$ per ogni intero positivo k. Se f non ha fattori multipli, chiameremo il grado di f *grado della curva algebrica* C_f.

Per studiare la struttura topologica di una curva algebrica irriducibile di grado m, osserviamo innanzi tutto che ogni polinomio irriducibile f di grado m si può scrivere, a meno di una proiettività di $\mathbb{CP}^2$, nella forma:

$$f(z_0, z_1, z_2) = z_2^m + \sum_{\substack{a+b+c=m \\ c<m}} k_{a,b,c} z_0^a z_1^b z_2^c$$

per opportuni coefficienti $k_{a,b,c} \in \mathbb{C}$.

Osserviamo che la curva C_f è contenuta nell'unione dei due aperti coordinati $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ ed $U_1 = \{z_1 \neq 0\}$. In particolare, otteniamo un'applicazione continua e surgettiva:

$$\mathrm{pr} : C_f \ni (z_0, z_1, z_2) \to (z_0, z_1) \in \mathbb{CP}^1 .$$

In U_0 consideriamo le coordinate non omogenee $y = z_2/z_0$ ed $x = z_1/z_0$. $X \cap U_0$ è descritto nelle coordinate non omogenee da:

$$f_0(x, y) = f(1, x, y) = y^m + \sum_{h=0}^{m-1} y^h p_h(x) = 0 \quad \text{con} \quad p_h \in \mathbb{C}[x] .$$

Nell'intorno di ogni punto (x, y) di $U_0 \cap C_f$ in cui $\partial f(x, y)/\partial y \neq 0$, per il teorema delle funzioni implicite la proiezione $pr_0 : U_0 \cap C_f \ni (x, y) \to x \in \mathbb{C}$ definisce un omeomorfismo locale. Otteniamo perciò:

LEMMA 3.2. *Sia $V_0(f)$ l'insieme dei punti $x \in \mathbb{C}$ per cui esiste un $y \in \mathbb{C}$ per cui:*

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \partial f(x, y)/\partial y = 0 . \end{cases}$$

L'insieme $V_0(f)$ è finito e l'applicazione

$$(U_0 \cap C_f) \setminus \mathrm{pr}_0^{-1}(V_0(f)) \ni (x, y) \to x \in \mathbb{C} \setminus V_0(f)$$

è un rivestimento (in senso stretto) ad m fogli. □

DEFINIZIONE 3.3. I punti di $V_0(f)$ si dicono i *punti di diramazione al finito* della *funzione algebrica* $y = F(x)$ che ha grafico C_f.

Diciamo che anche il punto ∞ è un *punto di diramazione* se, posto:

$$f_1(t, y) = f(t, 1, y) = y^m + \sum_{h=0}^{m-1} y^h q_h(t) = 0 \quad \text{con} \quad q_h \in \mathbb{C}[t] ,$$

risulta $\partial f_1(0, y)/\partial y = 0$ per qualche soluzione y di $f_1(0, y) = 0$. I punti di $\mathbb{CP}^1$ di coordinate omogenee $(1, x)$ con $x \in V_0(f)$ ed anche $(0, 1)$ nel caso in cui ∞ sia un punto di diramazione, si dicono *i punti di diramazione* in $\mathbb{CP}^1$ della funzione algebrica $y = F(x)$. Indichiamo con $V(F) \subset \mathbb{CP}^1$ *l'insieme dei punti di diramazione di F.*

Osserviamo che, se necessario, mediante un cambiamento di coordinate in $\mathbb{CP}^1$, possiamo supporre che ∞ non sia punto di diramazione della funzione algebrica F.

Descriviamo una decomposizione cellulare di C_f. A questo scopo, consideriamo una spezzata semplice aperta[1] L in $\mathbb{CP}^1$, di $(k-1)$ lati, che abbia

[1]Possiamo supporre infatti che $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{CP}$. Possiamo enumerare i punti di diramazione x_1, …, x_k in modo che, per un punto $x_0 \in \mathbb{C} \subset \mathbb{CP}$, sia $|x_1 - x_0| < |x_2 - x_0| < \cdots < |x_k - x_0|$. Allora la spezzata $L = \bigcup_{h=1}^{k-1} \{x_h + t(x_{h+1} - x_h) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ ha le proprietà richieste.

come vertici i punti di diramazione $x_1, \dots, x_k$. Il complemento $\complement L$ di L in $\mathbb{CP}^1$ è una 2-cella aperta. Questa cella aperta, insieme alle $(k-1)$ parti interne dei lati della spezzata L e ai k vertici $x_1, \dots, x_k$, definisce una partizione cellulare $\mathcal{P}$ ci $\mathbb{CP}^1$.

Otteniamo una partizione cellulare di C_f come immagine inversa della $\mathcal{P}$ mediante la $\mathrm{pr} : C_f \to \mathbb{CP}^1$.

Poiché la restrizione a $C_f \setminus \mathrm{pr}^{-1}(V(f))$ della proiezione $C_f \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathbb{CP}^1$ è un rivestimento ad m fogli, l'aperto $C_f \setminus \mathrm{pr}^{-1}(L)$ ha m componenti connesse, ciascuna delle quali è omeomorfa ad una palla B^2 ed è quindi una 2-cella aperta. Otteniamo così m celle di dimensione 2.

Le immagini inverse delle parti interne dei $(k-1)$ lati della spezzata L sono $m(k-1)$ celle di dimensione 1, e le immagini inverse dei k punti di diramazione sono le celle di dimensione zero.

Quindi C_f ammette una decomposizione cellulare con m celle di dimensione 2 ed $m(k-1)$ celle di dimensione 1, mentre il numero di celle di dimensione zero si calcola sommando, per ogni punto di diramazione x_j di F, il numero $N_0(x_j)$ delle soluzioni y distinte dell'equazione $f_0(x_j, y) = 0$.

Per calcolare il gruppo fondamentale di una curva algebrica piana C_f irriducibile, abbiamo bisogno di introdurre un altro invariante, il suo *genere*. Esso si può definire in vari modi equivalenti. Lo definiremo qui in modo affatto topologico. Per ogni punto di diramazione x_j di F in $\mathbb{CP}^1$ fissiamo un disco Δ di centro x_j che non contenga altri punti di diramazione. A questo scopo possiamo scegliere una coordinata non omogenea τ su $\mathbb{CP}^1$ con $\tau(x_j) = 0$ e scegliere $\Delta = \{|\tau| < r\}$ per un numero reale r sufficientemente piccolo, in modo che $|\tau(x)| > r$ per i punti di diramazione $x_h \in V(f)$, con $x_h \neq x_j$. Indichiamo con $\dot{\Delta}$ il disco Δ privato del centro: $\dot{\Delta} = \{x \in \Delta \mid \tau(x) \neq 0\}$. Allora $\mathrm{pr}^{-1}(\dot{\Delta}) \ni p \to \mathrm{pr}(p) \in \dot{\Delta}$ è un rivestimento. In generale esso *non* sarà un rivestimento in senso stretto, ma sarà formato da $N(x_j)$ componenti connesse distinte.

Osserviamo che, in generale, $N(x_j) \geq N_0(x_j)$.

Definizione 3.4. Siano $x_1, \dots, x_k$ i punti di diramazione distinti della funzione algebrica F associata alla curva algebrica piana irriducibile C_f. Definiamo il *genere* $g(C_f)$ di C_f come il numero intero che soddisfa l'equazione:

$$2 - 2g(C_f) = m - m(k-1) + \sum_{j=1}^{k} N(x_j) = \sum_{j=1}^{k} N(x_j) - m(k-2).$$

Se x_j è un punto di diramazione di F, fissiamo un disco Δ_j di centro x_j e consideriamo una componente connessa $U_{j,r}$ $(1 \leq r \leq N(x_j))$ di $\mathrm{pr}^{-1}(\dot{\Delta}_j)$. la $U_{j,r} \to \dot{\Delta}_j$ è un *rivestimento in senso stretto* con $\nu_{j,r}$ fogli di $\dot{\Delta}_j$. Ora, i rivestimenti in senso stretto con $\nu_{j,r}$ fogli del disco puntato sono tutti e soli quelli della forma:

$$\{t \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |t| < 1\} \ni t \to t^{\nu_{j,r}} \in \{t \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |t| < 1\}.$$

Si può verificare che i punti $(1, x, y) \in U_{j,r}$ sono parametrizzati mediante:

$$(1, t^{\nu_{j,r}}, \Phi_{j,r}(t))$$

per una funzione analitica di $t \in \Delta$ e la t si dice una *coordinata uniformizzante*[2].

Possiamo allora costruire una varietà differenziabile orientata $\tilde{C}_f$ di dimensione due, aggiungendo a $C_f \setminus \mathrm{pr}^{-1}(V(f))$ un punto per ogni componente connessa $U_{j,r}$ ed utilizzando come atlante le carte locali date dalla restrizione di pr alle celle aperte di dimensione due e alle componenti connesse delle immagini inverse di dischi che non contengano punti di diramazione, e le coordinate uniformizzanti su ciascuno degli aperti $U_{j,r}$.

Chiaramente è definita un'applicazione surgettiva e continua $\widetilde{\mathrm{pr}} : \tilde{C}_f \to \mathbb{CP}^1$ che coincide con pr su $\tilde{C}_f \setminus \widetilde{\mathrm{pr}}^{-1}(V_f) = C_f \setminus \mathrm{pr}^{-1}(V_f)$.

L'immagine inversa mediante $\widetilde{\mathrm{pr}}$ della decomposizione cellulare di $\mathbb{CP}^1$ ci dà una decomposizione cellulare di $\tilde{C}_f$ con m celle di dimensione 2, $m(k-1)$ celle di dimensione 1 e $\sum_j N(x_j)$ celle di dimensione 0. Quindi il genere $g(C_f)$ è:

$$g(C_f) = \frac{2 - \chi(\tilde{C}_f)}{2},$$

dove $\chi(\tilde{C}_f)$ è la *caratteristica di Eulero-Poincaré della varietà differenziabile* $\tilde{C}_f$.

Infatti, per un CW-complesso finito X di dimensione due la somma alternata:

$$\chi(X) = S(X) - L(X) + V(X)$$

ove

$$S(X) = \text{numero di celle di dimensione due di } X$$
$$L(X) = \text{numero di celle di dimensione uno di } X$$
$$V(X) = \text{numero di celle di dimensione zero di } X$$

è un *invariante topologico*, che si dice la *caratteristica di Eulero-Poincaré* di X. Per tutte le varietà differenziabili compatte orientabili, la caratteristica di Eulero-Poincaré è un numero pari. Il numero $g = (2 - \chi)/2$ si dice il suo *genere* ed è il suo invariante topologico fondamentale: infatti X risulta omeomorfa alla sfera con g manici, ed ha quindi gruppo fondamentale (rispetto ad un suo punto qualsiasi) isomorfo al quoziente del gruppo libero su $2g$ lettere $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ rispetto alla relazione $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$. Indicheremo nel seguito questo gruppo con $\mathbf{G}_g$ (vedi il §2).

Ritorniamo alla nostra curva piana irriducibile C_f. Se C_f è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{CP}^1$, allora $\tilde{C}_f = C_f$ e quindi il genere determina completamente la topologia di C_f.

[2]Il numero intero positivo $\nu_{j,r}$ è un invariante della componente connessa $U_{j,r}$ e si dirà l'*indice di diramazione* del corrispondente punto $p_{j,r}$ della superficie $\tilde{C}_f$ che definiremo più avanti.

In generale, l'applicazione $\widetilde{\mathrm{pr}}$ si fattorizza mediante un'applicazione η che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_f & \xrightarrow{\ \eta\ } & C_f \\ {\scriptstyle \widetilde{\mathrm{pr}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}} \\ \mathbb{CP}^1 & = & \mathbb{CP}^1 \end{array}$$

La C_f si può ottenere quindi da $\tilde{C}_f$ come quoziente iniettivo della η, identificando cioè i punti distinti di $\widetilde{\mathrm{pr}}^{-1}(V_f)$ che corrispondono mediante η ad uno stesso punto di $\mathrm{pr}^{-1}(V_f)$.

Per il calcolo effettivo del gruppo fondamentale, possiamo utilizzare il seguente:

duedue

LEMMA 3.5. *Sia $(X, \mathcal{P})$ un CW-complesso connesso e siano $\{a\}, \{b\}$ due celle distinte di dimensione 0 di X. Allora $X/\{a,b\}$ è omotopicamente equivalente al bouquet di $X \bigvee S^1$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\phi : \{0,1\} \to X$ definita da $\phi(0) = a$, $\phi(1) = b$ e sia $\tilde{X} = X \cup_\phi I$. Poiché I è contrattile, la coppia cellulare $(\tilde{X}, I)$ è omotopicamente equivalente a $(\tilde{X}/I, [I])$, che è omeomorfa alla coppia $(X/\{a,b\}, [\{a,b\}])$. Consideriamo ora un sottospazio cellulare contrattile Y di dimensione 1 di X che contenga $\{a,b\}$. Allora $(\tilde{X}/Y, [Y])$ è omotopicamente equivalente al bouquet $(X \bigvee S^1, \{a\})$ e alla coppia $(\tilde{X}, I)$. □

Come conseguenza di questo lemma, otteniamo il risultato seguente:

PROPOSIZIONE 3.6. *Il gruppo fondamentale di una curva piana irriducibile C_f di genere g è isomorfo al prodotto libero*

$$\mathbf{G}_g * \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{N - N_0 \text{ volte}}$$

dove:

$\mathbf{G}_g$ *è il quoziente del gruppo libero con $2g$ generatori $a_1 \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$*

$$\text{rispetto alla relazione} \quad a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1,$$

$$N = \sum_{j=1}^{k} N(x_j) \quad \text{ove} \quad V_f = \{x_1, \ldots, x_k\}$$

$$N_0 = \sum_{j=1}^{k} N_0(x_j) \text{ è la cardinalità di } \mathrm{pr}^{-1}(V_f)\,.$$

4. Esempi di curve piane irriducibili (Esercizi)

Di ciascuna delle seguenti curve piane: si defininsca una partizione cellulare, se ne calcoli il genere, si dica se la curva è o meno liscia, e se ne calcoli infine il gruppo fondamentale.

6. $X = \{z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 = 0\} \subset \mathbb{CP}^1$.

7. $X = \{z_0 z_1^2 + z_1 z_2^2 + z_2^3 = 0\} \subset \mathbb{CP}^1$.

8. $X = \{z_0 z_1^3 + z_0 z_1 z_2^2 + z_2^4 = 0\} \subset \mathbb{CP}^1$.

9. $X = \{z_0 z_1^5 + z_0 z_1^2 z_2^3 + z_2^6 = 0\} \subset \mathbb{CP}^1$.

10. $X = \{z_2^5 + z_0 z_1 z_2^3 + z_1^4 z_2 + z_1^5 = 0\} \subset \mathbb{CP}^1$.

11. $X = \{z_0^{m-k} z_2^k = (z_1 - a_1 z_0) \cdots (z_1 - a_m z_0)\}$ con $m \geq 2$, $1 \leq k \leq m$, ed $a_1, \ldots, a_m$ punti distinti di $\mathbb{C}$.

5. Curve piane riducibili (Esercizi)

Abbiamo già osservato che, se $f_1, \ldots, f_\ell \in \mathbb{C}_0[z_0, z_1, z_2]$ sono polinomi irriducibili due a due non proporzionali, allora $C_{f_1 \cdots f_\ell} = C_{f_1} \cup \cdots \cup C_{f_\ell}$. Due curve distinte di gradi m, n, si intersecheranno in un numero finito $r \leq mn$ di punti distinti (teorema di Bézout). Per calcolare quindi il gruppo fondamentale di una curva algebrica riducibile, sarà sufficiente osservare che vale il seguente:

LEMMA 5.1. *Siano X, Y due spazi cellulari connessi. Siano $x_1 \neq x_2 \in X$ ed $y_1, y_2 \in Y$. Sia $Z = Y \cup_\phi X$ ove $\phi : \{x_1, x_2\} \ni x_i \to y_i \in \{y_1, y_2\}$. Allora $\pi_1(Z, y_1) \simeq \pi_1(X, x_1) * \pi_1(Y, y_1) * \mathbb{Z}$.*

DIMOSTRAZIONE. Lo spazio topologico Z è un CW-complesso omotopicamente equivalente al quoziente del bouquet $(X, x_1) \bigvee (Y, y_1)$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica i punti x_2 ed y_2. Applicando il Lemma duedue 3.5, otteniamo che Z è omotopicamente equivalente al bouquet $(X, x_1) \bigvee (Y, y_1) \bigvee (S^1, e_0)$, e quindi otteniamo la tesi. □

12. Si calcoli il gruppo fondamentale della curva piana di equazione omogenea:

$$\{(z_0^2 - z_1 z_2)(z_0^2 + z_1^2 + z_3^2) = 0\} \subset \mathbb{CP}^2 .$$

13. Si calcoli il gruppo fondamentale della curva piana di equazione omogenea:

$$\{z_0 z_1 z_2 (z_0^4 + z_1^4 + z_3^4) = 0\} \subset \mathbb{CP}^2 .$$

14. Si calcoli il gruppo fondamentale della curva piana di equazione omogenea:

$$\{z_0^{a+b} = z_1^a z_2^b\} \subset \mathbb{CP}^2 ,$$

ove a, b sono interi positivi con massimo comun divisore $d > 1$.

15. Si calcoli il gruppo fondamentale della curva piana di equazione omogenea:

$$\{z_0^6 = (z_0 z_1 + z_2^2)^3\} \subset \mathbb{CP}^2 .$$

16. Si calcoli il gruppo fondamentale della curva piana di equazione omogenea:

$$\{z_2^6 - z_0^2 z_1 z_2^3 - z_0 z_1^2 z_2^3 + z_0^3 z_1^3 = 0\} \subset \mathbb{CP}^2 .$$

6. Altri esercizi

17. Sia M un nastro di Moebius e siano $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ punti distinti interni ad M. Sia $X = M \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$. Si calcoli $\pi_1(X, p_0)$.

18. Siano $p_0, p_1, \dots, p_n$ punti distinti dello spazio proiettivo reale $\mathbb{PR}^2$, sia $X = \mathbb{PR}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$. Si calcoli $\pi_1(X, p_0)$.

19. Siano Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 quattro sfere di dimensione due, due a due disgiunte. Fissiamo punti $p_i, q_i \in Y_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$ e sia X il quoziente dell'unione disgiunta $Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup Y_3 \sqcup Y_4$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica il punto p_i al punto q_{i+1} per $1 \leq i \leq 3$ e il punto p_4 al punto q_1. Si trovi una decomposizione cellulare di X e, scelto un suo punto p_0, si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(X, p_0)$.

20. Si consideri il cilindro $K = S^1 \times I$ e, fissati due interi $m, n \neq 0$, si consideri la relazione di equivalenza su K:

$$(z,t) \sim (w,s) \Longleftrightarrow \begin{cases} (z,t) = (w,s) \\ z^m = w^n\,,\ t = 0\,,\ s = 1 \\ z^n = w^m\,,\ t = 1\,,\ s = 0\,. \end{cases}$$

Sia $X = K/_\sim$, sia $\mathrm{pr} : K \to X$ la proiezione nel quoziente. Siano fissati $(k+1)$ punti distinti $z_0, z_1, \dots, z_k$ di S^1 (con $k \geq 0$) e sia $Y = X \setminus \{\mathrm{pr}(z_1, 1/2), \dots, \mathrm{pr}(z_k, 1/2)\}$.

Si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(Y, \mathrm{pr}(z_0, 1/2))$.

21. Consideriamo il sottogruppo $\mathbf{H}$ di $\mathbf{SU}(2)$ formato dalle matrici

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che lo spazio omogeneo $X = \mathbf{SU}(2)/\mathbf{H}$ è una varietà differenziabile connessa di dimensione 3. Si fissi un punto x_0 di X e si calcolino $\pi_1(X, x_0)$, $\pi_2(X, x_0)$ e $\pi_3(X, x_0)$.

21. Con le notazioni dell'Esercizio 20, si consideri l'immagine $\mathbf{G}$ di $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ in $\mathbf{SO}(4)$ mediante l'omomorfismo che associa a $(g_1, g_2) \in \mathbf{H} \times \mathbf{H}$ l'isometria

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longrightarrow g_1 \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} g_2^{-1}(e_1)$$

di $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$. Si dimostri che $Y = \mathbf{SO}(4)/\mathbf{G}$ è una varietà differenziabile di dimensione 6 e, fissato $y_0 \in Y$, si calcolino i gruppi $\pi_1(Y, y_0)$, $\pi_2(Y, y_0)$, $\pi_3(Y, y_0)$.

22. Sia $E \subset \mathbb{C}$ il sottospazio

$$E = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}} \left(2a + S^1\right) = \{2a + z \mid a \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.$$

Sia $B = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid zw = 0,\ |z-1| + |w-1| = 2\}$ il bouquet di due circonferenze. Si verifichi che l'applicazione

$$\pi : E \ni (2a+z) \to \begin{cases} (z^2-1,0) & \text{se } a \text{ è dispari,} \\ (0,z^2-1) & \text{se } a \text{ è pari,} \end{cases}$$

è un rivestimento. Si calcoli $\pi_1(E,1)$ e si descriva l'omomorfismo iniettivo $\pi_* : \pi_1(E,1) \to \pi_1(B,(0,0))$.

Questo esempio mostra che il gruppo libero con due generatori $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ contiene un sottogruppo isomorfo al gruppo libero con un'infinità numerabile di generatori.

7. Varietà di Stiefel e di Grassmann reali

DEFINIZIONE 7.1. La *varietà di Stiefel reale* $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è l'insieme degli m-riferimenti ortogonali di $\mathbb{R}^n$. I suoi punti sono cioè le m-uple $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ di vettori ortonormali di $\mathbb{R}^n$.

Identificando $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ alla matrice $n \times m$ con colonne $v_1, \ldots, v_m$ otteniamo un'immersione naturale di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ nello spazio Euclideo $\mathbb{R}^{nm}$, e quindi una struttura topologica di sottospazio di uno spazio Euclideo.

Per $m = 1$, la varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{R})$ è la sfera $(n-1)$-dimensionale $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$; è poi $\mathbb{V}_{n,n-1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{V}_{n,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbf{SO}(n)$. Le varietà di Stiefel reali generalizzano quindi, allo stesso tempo, le sfere e i gruppi speciali ortogonali.

PROPOSIZIONE 7.2. *La varietà di Stiefel* $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ *è una varietà analitica compatta di dimensione* $\frac{m(2n-m-1)}{2}$.

DIMOSTRAZIONE. Innanzi tutto $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è un compatto di $\mathbb{R}^{nm}$ perché chiuso e limitato.

Descriviamo ora un atlante di carte locali di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$. Sia $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)$ un elemento di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$. Completiamolo, mediante vettori $\epsilon_{m+1}, \ldots, \epsilon_n$ ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Osserviamo che, assegnati

$$\begin{cases} (x_{1,2}, \ldots, x_{1,n}) \in B^{n-1} \\ (x_{2,3}, \ldots, x_{3,n}) \in B^{n-2} \\ \ldots \\ (x_{m,m+1}, \ldots, x_{m,n}) \in B^{n-m} \end{cases}$$

risultano univocamente determinati numeri reali $x_{i,j}$, per interi i,j con $1 \leq i \leq j \leq m$ tali che $x_{i,i} > 0$ per ogni $1 \leq i \leq m$ e

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_{1,j}\epsilon_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} x_{m,j}\epsilon_j \right) \in \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

Gli $x_{i,j}$ con $1 \leq i < j \leq n$ definiscono quindi una carta locale con centro in $\vec{\epsilon}$. In particolare

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) = \sum_{h=1}^{m} (n-h) = nm - \frac{m(m+1)}{2}.$$

□

Il gruppo speciale ortogonale $\mathbf{SO}(n)$ opera transitivamente sulle varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ per ogni $1 \leq m \leq n-1$. Lo stabilizzatore di un punto è isomorfo al gruppo $\mathbf{SO}(n-m)$. Quindi:

PROPOSIZIONE 7.3. *La varietà di Stiefel $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è connessa per archi ed è omeomorfa allo spazio omogeneo $\mathbf{SO}(n)/_{\mathbf{SO}(n-m)}$. Abbiamo la successione esatta di omotopia (dove per semplicità omettiamo di indicare il punto base)*

eq:cwpc
$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow \pi_h(\mathbf{SO}(n-m)) \longrightarrow \pi_h(\mathbf{SO}(n)) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ &\longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(n-m)) \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\longrightarrow \pi_1(\mathbf{SO}(n-m)) \longrightarrow \pi_1(\mathbf{SO}(n)) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ &\longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Siano k, m, n interi con $1 \leq k < m < n$. L'applicazione

eq:cwpca
$$\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) \ni (v_1, \ldots, v_m) \to (v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R}) \tag{7.2}$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{R})$. Otteniamo quindi una successione esatta in omotopia[3]

eq:cwpcb
$$\begin{aligned} &\cdots \longrightarrow \pi_{h+1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) \\ &\longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) \\ &\longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \tag{7.3}$$

Da questo deduciamo immediatamente

PROPOSIZIONE 7.4. *La varietà di Stiefel reale $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$, con $1 \leq m < n$, è $(n-m-1)$-connessa e*

eq:swpct
$$\pi_{n-m}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n-m \text{ è pari, o } m = 1, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } n-m \text{ è dispari ed } m \geq 2. \end{cases} \tag{7.4}$$

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per ricorrenza su $m \geq 1$. Poiché, come abbiamo osservato in precedenza, $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{R}) = S^{n-1}$, la tesi è vera se $m = 1$. Supponiamo allora che $m > 1$ e che la tesi sia vera per le varietà di Stiefel reali $\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{R})$ con $1 \leq k < m$. Consideriamo la successione esatta (7.3) con $k = m-1$. Se $h < n-m$, allora $\pi_h(\mathbb{V}_{n-m+1,1}(\mathbb{R})) = \pi_h(S^{n-m}) = 0$, e $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m-1}(\mathbb{R})) = 0$ per l'ipotesi induttiva. Quindi anche $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) = 0$.

[3]Per semplicità in questa, e nelle altre successioni esatte in questo paragrafo ometteremo di indicare il punto base.

Per dimostrare in generale la (7.4), che sappiamo vera per $m-1$, cominciamo ad esaminare a parte il caso $m=2$. Per $m=2$, $k=1$ ed $h=n-2$, la (7.3) dà:

eq:stxa
$$\mathbb{Z}=\pi_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\Delta_*} \mathbb{Z}=\pi_{n-2}(S^{n-2}) \longrightarrow \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n,2}) \longrightarrow 0. \tag{7.5}$$

Per calcolare l'applicazione Δ_* in (7.5), osserviamo che abbiamo un diagramma commutativo di fibrazioni

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{SO}(n-1) & \longrightarrow & \mathbf{SO}(n) & \longrightarrow & S^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ \mathbb{V}_{n-1,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S^{n-1}. \end{array}$$

Otteniamo allora un diagramma commutativo

eq:stea
$$\begin{array}{ccccc} \pi_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\Delta_*} & \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n-1)) & \longrightarrow & \pi_{n-2}(\mathbf{SO}(n)) \\ \| & & \downarrow p_* & & \downarrow \\ \pi_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\Delta_*} & \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n-1,1}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \pi_{n-2}(\mathbb{V}_{n,2}(\mathbb{R})). \end{array} \tag{7.6}$$

Dimostriamo a questo punto alcuni risultati relativi al gruppo ortogonale.

LEMMA 7.5. *Consideriamo l'applicazione* $\Psi : S^n \times S^n \to S^n$ *definita da*

eq:stya
$$S^n \times S^n \ni (x,y) \to \Psi(x,y) = y - 2(x|y)x \in S^n. \tag{7.7}$$

Per ogni $x \in S^n$, *la* $S^n \ni y \to F(x,y) \in S^n$ *ha grado* (-1). *Per ogni* $y \in S^n$, *la* $S^n \ni x \to F(x,y) \in S^n$ *ha grado* $1-(-1)^n$, *cioè* 2 *se* n *è dispari e* 0 *se* n *è pari.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato $x = e_1$, la $y \to F(e_0, y)$ è la sospensione della $S^1 \ni (x_0, x_1) \to (x_0, -x_1) \in S^1$, che possiamo anche scrivere, mediante l'inclusione $S^1 \subset \mathbb{C}$, come $S^1 \ni z \to \bar{z} = z^{-1} \in S^1$. Quindi la $y \to F(e_0, y)$ ha grado (-1) e perciò tutte le $y \to f_x(y) = F(x,y)$ hanno grado (-1).

Per dimostrare che le $x \to \psi_y(x) = F(x,y)$ hanno grado $1-(-1)^n$, poiché S^n è connesso per archi, possiamo limitarci a considerare il caso speciale in cui $y = -e_n$. Scriviamo per semplicità $\psi = \psi_{-e_n}$. Consideriamo quindi l'applicazione

$$S^n \ni x = (x_n, \dots, x_n) \to \psi(x) = (2x_n x_0, \dots, 2x_n x_{n-1}, 2x_n^2 - 1) = (2x_n)\cdot x - e_n \in S^n.$$

Abbiamo $\psi(x) = \psi(-x)$. Quindi, se $a : S^n \ni x \to -x \in S^n$ è l'applicazione antipodale, $\psi = \psi \circ a$. Quindi, poiché il grado della mappa antipodale è $(-1)^{n+1}$, da

$$\deg(\psi) = \deg(\psi \circ a) = \deg(\psi) \cdot (-1)^{n+1}$$

otteniamo che $\deg(\psi) = 0$ se n è pari.

Consideriamo ora il caso in cui n sia dispari. Osserviamo che $\psi(S^{n-1}) = \{-e_0\}$. Possiamo quindi definire due applicazioni

$$\psi_+(x) \begin{cases} \psi(x) & \text{se } x \in S^n_+, \\ -e_0 & \text{se } x \in S^n_-, \end{cases}, \quad \psi_-(x) \begin{cases} -e_0 & \text{se } x \in S^n_+, \\ \psi(x) & \text{se } x \in S^n_-. \end{cases}$$

L'elemento definito da ψ in $\pi_n(S^n, e_0)$ è la somma delle classi di omotopia di ψ_+ e ψ_-. Poiché $\psi_- = \psi_+ \circ a$, abbiamo $\deg(\psi_-) = \deg(\psi_+)$, perché la mappa antipodale ha grado 1. Quindi $\deg(\psi) = 2\deg\deg(\psi_+)$. Osserviamo ora che $\psi_+(x) \neq -x$ per ogni $x \in S^n$. Quindi

$$S^n \times I \ni (x,t) \to \Psi_+(x,t) = \frac{(1-t)\psi_+(x) + t\,x}{|(1-t)\psi_+(x) + t\,x|} \in S^n$$

è un'omotopia di ψ_+ con l'identità. Ciò dimostra che ψ_+ ha grado 1, e quindi ψ ha grado 2. □

La matrice della simmetria σ_x rispetto al vettore $x = (x_0, \dots, x_n) \in S^n$ è la

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1-2x_0^2 & -2x_0x_1 & \dots & -2x_0x_n \\ -2x_0x_1 & 1-2x_1^2 & \dots & -2x_1x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2x_0x_n & -2x_1x_n & \dots & 1-2x_n^2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante della simmetria rispetto a un vettore è (-1). Otteniamo quindi un'applicazione $\phi_n : S^n \to \mathbf{SO}(n+1)$, definita da

$$\phi_n : S^{n-1} \ni x \to \sigma_x \circ \sigma_{e_0}.$$

La restrizione di ϕ_n alla semisfera superiore $S^{n+1}_+ = S^n \cap \{x_n \geq 0\}$ trasforma la coppia (S^n_+, S^{n-1}) nella coppia $(\mathbf{SO}(n+1), (\mathbf{SO}(n))$. Consideriamo l'applicazione $p : \mathbf{SO}(n+1) \ni g \to g(e_n) \in S^n$. Abbiamo

$$\begin{aligned} p(\phi(x)) &= \phi(x)(e_n) = \sigma_x \circ \sigma_{e_0}(e_n) \\ &= \sigma_x(e_0) = -\psi_+(x) \quad \forall x \in S^n_+. \end{aligned}$$

Possiamo quindi considerare l'estensione di $p \circ \phi$ che si ottiene mandando tutta la semisfera S^n_- nel punto e_n. L'applicazione che si ottiene è la $a \circ \psi_+$, ed ha quindi, poiché ψ_+ ha grado 1, grado uguale a $(-1)^{n+1}$. Osserviamo infine che la restrizione di ϕ_n all'equatore è la ϕ_{n-1}.

Questa applicazione ci permette di descrivere, nella successione esatta

$$\mathbb{Z} = \pi_n(S^n) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(n)) \xrightarrow{\iota_*} \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(n+1)) \longrightarrow 0$$

il nucleo della ι_*. Abbiamo infatti

PROPOSIZIONE 7.6. *Il nucleo di ι_* è il sottogruppo ciclico generato da $\alpha = \Delta_*(\mathrm{id}_{S^n})$. L'applicazione $\phi_{n-1} : S^{n-1} \to \mathbf{SO}(n)$ rappresenta l'elemento $(-1)^{n+1}\alpha$.*

Utilizziamo ora il diagramma commutativo (7.6). Poiché l'immagine $p_* \circ \Delta_*$ della classe di $\mathrm{id}_{S^{n-1}}$ è 0 o $2[\mathrm{id}_{S^{n-2}}]$ a seconda che n sia dispari o pari, otteniamo la (7.4). □

Studiamo ora i gruppi di omotopia delle varietà di Grassmann. Fissato un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$, l'applicazione

$$\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \ni p \to p^\perp \in \mathbb{G}_{n,n-m}(\mathbb{R}) \tag{7.8}$$

che associa ad ogni m-piano p l'$(n-m)$-piano ad esso ortogonale è un omeomorfismo. Possiamo quindi supporre nel seguito che $n \geq 2m$.

Consideriamo l'applicazione naturale

eq:stn
$$\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \tag{7.9}$$

che associa ad un sistema $\vec{v} \in \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ di m vettori ortonormali il sottospazio $p \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$ da essi generato. La (7.9) è una fibrazione localmente banale con fibra omeomorfa al gruppo $\mathbf{O}(m)$. Abbiamo quindi la successione esatta:

eq:sto
$$\begin{aligned} &\cdots \longrightarrow \pi_{h+1}(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ &\longrightarrow \pi_h(\mathbf{O}(m)) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \\ &\longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{O}(m)) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \tag{7.10}$$

lm:stg
LEMMA 7.7. *Per ogni intero non negativo h ed ogni coppia d'interi positivi m, k, con $m \leq k$, le applicazioni $\iota_* : \pi_h(\mathbf{O}(m)) \to \pi_h(\mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R}))$ hanno immagine nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Rappresentiamo $\mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R})$ come lo spazio delle matrici reali M di tipo $(k+m) \times m$ tali che ${}^tM\,M = I_m$. Allora l'inclusione $\iota : \mathbf{O}(m) \hookrightarrow \mathbb{V}_{k+m,m}(\mathbb{R})$ identifica $\mathbf{O}(m)$ al sottospazio delle matrici

$$M_g = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad g \in \mathbf{O}(m).$$

L'omotopia $F : \mathbf{O}(m) \times I \to \mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ definita da

$$F(g,t) = \begin{pmatrix} g\,\cos^2(t\pi/2) + I_m\,\sin^2(t\pi/2) \\ (g - I_m)\,\sin(t\pi/2)\cos(t\pi/2) \\ 0_{n-2m,m} \end{pmatrix}$$

definisce una retrazione di deformazione di $\mathbf{O}(m)$ sul punto base di $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$. Da questo segue la tesi. □

In particolare, dalla successione esatta di Serre otteniamo le successioni esatte corte:

eq:stoa
$$0 \to \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{O}(m)) \to 0. \tag{7.11}$$

Abbiamo perciò, tenuto conto dell'omeomorfismo (7.8),

TEOREMA 7.8. *Siano $1 \leq m < n$ e $\nu = \min\{n, n-m\}$. Per ogni $h \geq 1$ abbiamo*

eq:stob
$$\pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \pi_h(\mathbb{V}_{n,\nu}(\mathbb{R})) \oplus \pi_{h-1}(\mathbf{O}(\nu)). \tag{7.12}$$

In particolare, poiché $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{R})$ è semplicemente connesso per $n-m > 1$, otteniamo che

eq:stoc
$$\pi_1(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2 \quad \forall n \geq 3 \quad \text{e} \quad 1 \leq m < n \tag{7.13}$$

e inoltre

eq:stod
$$\pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) = \begin{cases} \pi_{h-1}(\mathbf{SO}(\nu)) & \text{se } 2 \le h < n-\nu, \\ \mathbb{Z} \oplus \pi_{n-\nu-1}(\mathbf{SO}(\nu)) & \text{se } h = n-\nu \text{ è pari o } \nu = 1, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \pi_{n-\nu-1}(\mathbf{SO}(\nu)) & \text{se } h = n-\nu \text{ è dispari e } \nu \ge 3. \end{cases} \tag{7.14}$$

Se $n' > n$, abbiamo un'inclusione naturale

eq:stoe
$$\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R}). \tag{7.15}$$

PROPOSIZIONE 7.9. *L'applicazione* $\pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})) \to \pi_h(\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R}))$ *indotta dalla* (7.15) *è un isomorfismo per ogni* $h < \min\{m, n-m\}$ *ed ogni* $n' > n$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se $h < n-m$, e consideriamo la partizione cellulare di $\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R})$ data dalle celle di Schubert, lo scheletro $h+1$-dimensionale di $\mathbb{G}_{n',m}(\mathbb{R})$ è contenuto in $\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{R})$. □

8. Varietà di Stiefel e di Grassmann complesse

In modo analogo definiamo le varietà di Stiefel e di Grassmann complesse.

DEFINIZIONE 8.1. La *varietà di Stielfel complessa* $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è costituita dalle m-uple di vettori ortonormali di $\mathbb{C}^n$.

Possiamo identificare $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ all'iniseme delle matrici complesse Z, di tipo $n \times m$, che soddisfano $Z^*Z = I_m$. Abbiamo:

PROPOSIZIONE 8.2. *Per ogni* $0 \le m \le n$, *la varietà di Stiefel* $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ *è una varietà analitica di Hausdorff, di dimensione reale* $m(2n-m)$, *compatta e connessa per archi. Essa è omeomorfa allo spazio omogeneo* $\mathbf{SU}(n)/_{\mathbf{SU}(n-m)}$.

DIMOSTRAZIONE. $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è uno spazio topologico di Hausdorff compatto perché è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{C}^{nm}$. Possiamo definire la sua struttura differenziabile descrivendo una carta locale con centro in un punto $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$. Completiamo $v_1, \dots, v_m$ ad una base ortonormale $(v_1, \dots, v_m)$ di $\mathbb{C}^n$. Assegnamo numeri complessi $z_{h,j}$ per $1 \le j < h \le n$ e numeri reali y_j per $j = 1, \dots, m$, tali che $y_j^2 + \sum_{h=j+1}^{n} |z_{h,j}|^2 < 1$ per ogni $j = 1, \dots, m$. Risulteranno allora univocamente determinati numeri complessi $z_{h,j}$, per $1 \le h \le j \le m$ tali che $\mathrm{Im}(z_{j,j}) = y_j$, $\mathrm{Re}(z_{j,j}) > 0$ e detta Z la matrice $Z = (z_{h,j})_{\substack{1 \le h \le n \\ 1 \le j \le m}}$, sia $Z^*Z = I_m$. I numeri reali y_j e le parti reali e immaginarie degli $z_{h,j}$ con $1 \le j < h \le n$ sono le coordinate di una carta locale con centro in $\vec{v}$. La dimensione della varietà è quindi

$$\sum_{j=1}^{m} [2(n-j)+1] = m(2n+1) - m(m+1) = 2nm - m^2 = m(2n-m).$$

Chiaramente il gruppo speciale unitario $\mathbf{SU}(n)$ opera transitivamente su $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$, con isotropia $\mathbf{SU}(n-m)$. Quindi $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è omeomorfo al quoziente $\mathbf{SU}(n)/_{\mathbf{SU}(n-m)}$ e perciò compatto e connesso per archi. □

PROPOSIZIONE 8.3. *La varietà di Stiefel complessa* $\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ *è* $(2n-2m)$*-connessa e* $\pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$.

DIMOSTRAZIONE. Fissato un intero k con $1 \leq k < m$, l'applicazione

eq:stcya
$$\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni (v_1, \dots, v_m) \to (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C}). \tag{8.1}$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})$. Otteniamo quindi una successione esatta

eq:stcyb
$$\begin{aligned} &\cdots \longrightarrow \pi_{h+1}(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \\ &\longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,k}(\mathbb{C})) \\ &\longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n-k,m-k}(\mathbb{C})) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \tag{8.2}$$

Ragioniamo per ricorrenza su $m \geq 1$. Per $m = 1$, $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{C}) = S^{2n-1}$, e sappiamo che la sfera di dimensione $(2n-1)$ è $(2n-2)$-connessa. Supponiamo ora che $m > 1$ e che, per ogni r con $1 \leq r < m$ la varietà di Stiefel complessa $\mathbb{V}_{n,r}(\mathbb{C})$ sia $(2n-2r)$-connessa. Utilizziamo la successione esatta (8.2) con $k = 1$. Poiché per l'ipotesi induttiva $\mathbb{V}_{n-1,m-1}(\mathbb{C})$ è $(2n-2m)$-connesso e $\mathbb{V}_{n,1}(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^{2n-1}$ è $(2n-2)$-connesso, otteniamo che $\pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})$ è $(2n-2)$-connesso.

Utilizziamo ancora la successione esatta (8.2) con $k = (m-1)$ ed $h = 2n-2m$. Poiché $\mathbb{V}_{n,m-1}(\mathbb{C})$ è $(2n-2m+2)$-connessa, otteniamo l'isomorfismo

$$\pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) \simeq \pi_{2n-2m+1}(\mathbb{V}_{n-m+1,1}(\mathbb{C})) = \pi_{2n-2m+1}(S^{2n-2m-1}) = \mathbb{Z}.$$

□

L'applicazione

eq:stcyc
$$\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni (v_1, \dots, v_m) \to \langle v_1, \dots, v_m \rangle \in \mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C}) \tag{8.3}$$

è una fibrazione localmente banale con fibra tipica $\mathbf{U}(m)$. Otteniamo quindi una successione esatta d'omotopia

eq:stcyd
$$\begin{aligned} &\cdots \longrightarrow \pi_{h+1}(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \\ &\longrightarrow \pi_h(\mathbf{U}(m)) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \\ &\longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{U}(m)) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \tag{8.4}$$

Con una dimostrazione analoga a quella del Lemma 7.7 otteniamo

LEMMA 8.4. *Se* $1 \leq m < 2m \leq n$, *allora l'applicazione* $\pi_h(\mathbf{U}(m)) \to \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C}))$ *in* (8.4) *ha immagine nulla.*

Questo di dà, per ogni intero $h \geq 1$ e per $1 \leq m < 2m \leq n$, le successioni esatte corte

eq:stcye
$$0 \to \pi_h(\mathbb{V}_{n,m}(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_{h-1}(\mathbf{U}(m)) \to 0. \tag{8.5}$$

Otteniamo perciò il

TEOREMA 8.5. *Sia* $\nu = \min\{m, n-m\}$. *Allora, per ogni* $1 \leq m < n$ *ed* $h \geq 1$

eq:stcyf
$$\pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \pi_h(\mathbb{V}_{n,\nu}(\mathbb{C})) \oplus \pi_{h-1}(\mathbf{U}(\nu)). \tag{8.6}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $2m \leq n$, la tesi segue dalla (8.5). Per completare la dimostrazione, è sufficiente utilizzare l'omeomorfismo

eq:stcyg
$$\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C}) \ni p \to p^{\perp} \in \mathbb{G}_{n,n-m}(\mathbb{C}), \tag{8.7}$$

dove $p^{\perp}$ è l'$(n-m)$-piano ortogonale a p, rispetto ad un prodotto scalare Hermitiano in $\mathbb{C}^n$. □

Otteniamo in particolare

eq:stcyh
$$\pi_h(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \begin{cases} \pi_{h-1}(\mathbf{U}(\nu)) & \text{se } 1 \leq h \leq 2n-2\nu, \\ \mathbb{Z} \oplus \pi_{2n-2\nu}(\mathbf{U}(\nu)) & \text{se } h = 2n-2\nu, \end{cases} \tag{8.8}$$

e quindi $\pi_1(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = 0$ e $\pi_2(\mathbb{G}_{n,m}(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$ per ogni $1 \leq m < n$.

Parte 5

Curve e Superfici

part:curvsup

CAPITOLO 21

Geometria differenziale delle curve

1. Curve parametriche in $\mathbb{R}^n$

DEFINIZIONE 1.1. Una *curva parametrica* di classe $\mathcal{C}^k$ in $\mathbb{R}^n$ è una applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$:

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n$$

definita su un intervallo J di $\mathbb{R}$. Chiamiamo l'immagine $\alpha(J)$ di α il suo *supporto*.

Diciamo che α è una curva *regolare* se $k > 0$ e

$$\dot{\alpha}(t) = D\alpha(t) \neq 0 \ \ \forall t \in J.$$

Diciamo che α è una curva *chiusa* (o un *laccetto*) di classe $\mathcal{C}^k$ se $J = [t_0, t_1]$ è un intervallo compatto e $D^i\alpha(t_0) = D^i\alpha(t_1)$ per ogni $i = 0, ..., k$, *aperta* altimenti. La curva α si dice *semplice* se è aperta e l'applicazione α è iniettiva oppure se è chiusa e la sua restrizione a ogni sottointervallo proprio di J è iniettiva. Se $[t_0, t_1] \subset J$ chiamiamo la restrizione

$$\alpha|[t_0, t_1] : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$$

arco di α da t_0 a t_1.

DEFINIZIONE 1.2. Sia $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrica differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ e sia

$$\sigma : J' \to J$$

un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$. Allora la

$$\alpha \circ \sigma : J' \to \mathbb{R}^n$$

è ancora una curva parametrica di classe $\mathcal{C}^k$, che si dice ottenuta da α per *riparametrizzazione*. La riparametrizzazione definisce una relazione di equivalenza tra le curve parametriche di classe $\mathcal{C}^k$. Le corrispondenti classi di equivalenza si dicono *curve geometriche* o semplicemente *curve*.

Si ricava immediatamente dal teorema delle funzioni implicite:

PROPOSIZIONE 1.3. *Il supporto di una curva semplice regolare di classe $\mathcal{C}^k$ è una sottovarietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ di dimensione 1 di $\mathbb{R}^n$.*

Due curve semplici, regolari, aperte, di classe $\mathcal{C}^k$ sono equivalenti se e soltanto se hanno lo stesso supporto.

Due curve chiuse, semplici, regolari, di classe $\mathcal{C}^k$ sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso supporto e lo stesso punto iniziale.

Ricordiamo che un sottoinsieme L di $\mathbb{R}^n$ si dice un *sottospazio affine* se per ogni coppia di punti $x, y \in L$ la retta

$$xy = \{tx + (1-t)y | t \in \mathbb{R}\}$$

è contenuta in L. In questo caso, fissato $y \in L$,

$$L_0 = \{x - y | x \in L\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, che non dipende dalla scelta del punto $y \in L$ usato per definirlo. La dimensione di L_0 come sottospazio vettoriale si dice dimensione del sottospazio affine L. Un sottospazio affine di dimensione m si può descrivere in forma parametrica mediante

$$L = \{x_0 + s^1 v_1 + ... + s^m v_m \mid s^1, ..., s^m \in \mathbb{R}\} \tag{1.1}$$

ove x_0 è un qualsiasi punto di L e $v_1, ..., v_m$ una qualsiasi base di L_0, oppure in forma implicita mediante

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n | \xi^i(x) = c^i \;\; i = 1, ..., n-m\} \tag{1.2}$$

ove $\xi^1, ..., \xi^{n-m}$ è una base dell'annullatore di L_0 in $(\mathbb{R}^n)'$ e $\xi^i(x_0) = c^i$ $(i = 1, ..., n-m)$ per un qualsiasi punto $x_0 \in L$.

Supponiamo che una curva $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^k$ abbia il supporto contenuto in un sottospazio affine L di dimensione $m < k$. Se L è descritto in forma parametrica da (1), avremo su J

$$\alpha(t) = x_0 + s^1(t) v_1 + ... + s^m(t) v_m$$

con funzioni $s^1, ..., s^m : J \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^k$. In particolare la matrice

$$(D\alpha(t), ..., D^k\alpha(t)) \tag{1.3}$$

ha rango minore o uguale a m in tutti i punti di J. Indicheremo nel seguito con $A^\alpha_m(t)$ o semplicemente con $A_m(t)$ quando non vi sia ambiguità, la matrice $(D\alpha(t), ..., D^m\alpha(t))$ per $m \leq k$.

Abbiamo, con le notazioni introdotte sopra:

PROPOSIZIONE 1.4. *Sia m un intero non negativo ed*

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n$$

una curva di classe $\mathcal{C}^{m+1}$ tale che

$$rkA_m(t) = rkA_{m+1}(t) = m$$

per ogni $t \in J$. Allora il supporto di α è contenuto in un sottospazio affine di dimensione m e nessun arco di α è contenuto in un sottospazio affine di dimensione $m-1$.

DIMOSTRAZIONE. Se $m = 0$, la curva α è costante e dunque la tesi è verificata. Supponiamo $m > 0$. Segue dall'ipotesi che $D^{m+1}\alpha(t)$ è in ogni punto di J combinazione lineare di $D\alpha, ..., D^m\alpha$ e sono univocamente determinate applicazioni continue $\lambda_1, ..., \lambda_m : J \to \mathbb{R}$ tali che

$$D^{m+1}\alpha(t) = \lambda_1(t) D\alpha(t) + ... + \lambda_m(t) D^m\alpha(t)$$

per ogni $t \in J$. Fissiamo un punto $t_0 \in J$ e sia $\xi^1, ..., \xi^{n-m}$ una base dell'annullatore del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ generato da $D\alpha(t_0), ..., D^m\alpha(t_0)$. Definiamo le funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ su J:

$$w_{i,j}(t) = \xi^j(D^i\alpha(t))$$

per $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n-m$. Esse sono soluzione del problema di Cauchy omogeneo:

$$\begin{cases} \dot{w}_{i,j} = w_{i+1,j} & i = 1, ..., m-1 \\ \dot{w}_{m,j} = \lambda_1(t)w_{1,j} + ... + \lambda_m(t)w_{m,j} & i = m \\ w_{i,j}(t_0) = 0 & i = 1, ..., m \end{cases}$$

e quindi sono identicamente nulle su J. In particolare ne segue che $\xi^j(\alpha)$ è costante su J e dunque il supporto di α è contenuto nel sottospazio affine L definito da (2), con $x_0 = \alpha(t_0)$. L'ultima affermazione dell'enunciato è una conseguenza della discussione precedente: se un arco di α fosse contenuto in un sottospazio affine di dimensione minore di m, allora $A_m(t)$ avrebbe rango inferiore a m in qualche punto di J. □

Ricordando che una funzione analitica reale su un intervallo J che si annulli su un sottoinsieme aperto di J si annulla identicamente su J, otteniamo:

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ una curva analitica reale. Sia*

$$m = max\{rkA_n(t) | t \in J\}.$$

Allora il supporto di α è contenuto in un sottospazio affine di dimensione m di $\mathbb{R}^n$ e nessun arco di α è contenuto in un sottospazio affine di dimensione $m-1$ di $\mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che $rkA_m(t) = m$ su un arco di α. Applichiamo su questo arco il ragionamento svolto nel teorema precedente: le funzioni analitiche $\xi^j(\alpha)$ essendo costanti su tale arco sono costanti su tutto J e otteniamo quindi la tesi. □

DEFINIZIONE 1.6. Sia

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n$$

una curva differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq n$. Diciamo che essa è *sghemba* se

$$A(t) = A_n(t) = (D\alpha(t), ..., D^n\alpha(t))$$

ha rango n in tutti i punti di J.

Per la proposizione 1.2 nessun arco di una curva sghemba è contenuto in un sottospazio affine proprio di $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE 1.7. Fissato un punto $t_0 \in J$, associamo a tale punto i sottospazi affini:

$$L^0(t_0) = \{\alpha(t_0)\},$$
$$L^1(t_0) = \{\alpha(t_0) + sD\alpha(t_0) | s \in \mathbb{R}\}$$

(retta *tangente*),

$$L^j(t_0) = \{\alpha(t_0) + s^1 D\alpha(t_0) + ... + s^j D^j\alpha(t_0) | s^1, ..., s^j \in \mathbb{R}\}$$

(spazio *osculatore* di dimensione j) per $j = 2, ..., n$.

Essi sono caratterizzati dalla proprietà:

Sia $d(x, y) = |x - y|$ la distanza su $\mathbb{R}^n$ associata a un qualsiasi prodotto scalare. Allora

$$d(\alpha(t), L^j(t_0)) = o(|t - t_0|^j).$$

Infatti, posto $x_0 = \alpha(t_0)$, $v_j = (j!)^{-1} D^j\alpha(t_0)$, abbiamo per la formula di Taylor:

$$\alpha(t) = x_0 + v_1(t - t_0) + ... + v_n(t - t_0)^n + o(|t - t_0|^n)$$

e dunque

$$d(\alpha(t), L^j(t_0)) \leq |v_{j+1}(t - t_0)^{j+1} + ... + v_n(t - t_0)^n + o(|t - t_0|^n).$$

Ricordiamo la formula della derivazione di una funzione composta (formula di Faà di Bruno): se

$$J \xrightarrow{f} J' \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

sono funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ su intervalli $J, J' \subset \mathbb{R}$, allora

$$D^k(g \circ f)(t)$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{a_1+2a_2+...+ka_k=k \\ a_1+...+a_k=m}} \sigma(k; a_1, ..., a_k)(Dg(t))^{a_1} ... (D^k g(t))^{a_k})(D^m f)(g(t))$$

ove i coefficienti multinomiali $\sigma(k; a_1, ..., a_k)$ sono definiti da:

$$\sigma(k; a_1, ..., a_k) = k!/((1!)^{a_1} a_1! ... (k!)^{a_k} a_k!).$$

Se dunque $\sigma : J' \to J$ è una applicazione di classe $\mathcal{C}^k$ e $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe $\mathcal{C}^k$, per la curva di classe $\mathcal{C}^k$ $\beta = \alpha \circ \sigma$ avremo:

$$A_k^\beta(t) = A_k^\alpha(\sigma(t)) T_k^\sigma(t)$$

dove $T_k^\sigma(t)$ è una matrice $k \times k$ triangolare superiore della forma

$$T_k^\sigma(t) = \begin{pmatrix} \dot\sigma(t) & * & \dots & * \\ 0 & \dot\sigma^2(t) & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dot\sigma^k(t) \end{pmatrix}.$$

2. Decomposizioni di Gauss e di Gram

Dato un sottogruppo G del gruppo $GL(n)$ degli automorfismi lineari di $\mathbb{R}^n$, consideriamo su $\mathbb{R}^n$ le trasformazioni affini della forma

$$x \to gx + v$$

al variare di g in G e di v in $\mathbb{R}^n$. Esse formano un gruppo, che si denota con G_1 e si dice il *gruppo affine* associato a G o la *prima estensione* del gruppo G. Esso è isomorfo al sottogruppo di $GL(n+1)$ delle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & g \end{pmatrix}$$

per $(g, v) \in G \times \mathbb{R}^n$. Si verifica facilmente che G è un sottogruppo chiuso di $GL(n)$ se e soltanto se G_1 è un sottogruppo chiuso di $GL(n+1)$. Se $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie di G, allora l'algebra di Lie $\mathfrak{g}_1$ di G_1 è data da:

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & X \end{pmatrix} \,\middle|\, v \in \mathbb{R}^n,\ X \in \mathfrak{g} \right\}.$$

Osserviamo che in ogni caso G_1 opera transitivamente su $\mathbb{R}^n$: lo spazio $\mathbb{R}^n$ si identifica quindi allo *spazio omogeneo*

$$\mathbb{R}^n \simeq G_1/G.$$

Date due curve di classe $\mathcal{C}^k$:

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n,$$
$$\beta : J' \to \mathbb{R}^n,$$

diciamo che esse sono G_1–*congruenti* se possiamo trovare un diffeomorfismo $\sigma : J \to J'$ di classe $\mathcal{C}^k$ e un elemento $g \in G_1$ tali che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^n \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ J' & \xrightarrow[\beta]{} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

sia commutativo. Per lo studio della G_1-congruenza di curve, è utile premettere alcuni risultati generali sulla decomposizione di matrici.

Introduciamo i seguenti sottogruppi di $GL(n)$:

$$\begin{aligned} Z_+(n) &= \{(z_{ij}) \,|\, z_{ii} = 1,\ z_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}, \\ Z_-(n) &= \{(z_{ij}) \,|\, z_{ii} = 1,\ z_{ij} = 0 \text{ se } i < j\}, \\ D(n) &= \{(z_{ij}) \,|\, z_{ii} \neq 0,\ z_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j\}, \\ T_+(n) &= \{(z_{ij}) \,|\, z_{ii} \neq 0\ z_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}, \\ T_-(n) &= \{(z_{ij}) \,|\, z_{ii} \neq 0,\ z_{ij} = 0 \text{ se } i < j\}. \end{aligned}$$

Gli ultimi due si dicono rispettivamente i gruppi delle matrici triangolari superiori e triangolari inferiori invertibili, $D(n)$ il gruppo delle matrici diagonali.

Data una matrice $n \times n$

$$M = (m_{ij})$$

indichiamo con

$$M^{i_1 \dots i_h}_{j_1 \dots j_h}$$

il determinante della matrice $h \times h$:

$$(m_{i_p, j_q})_{1 \le p,q \le h}\,.$$

Poniamo per semplicità

$$D_h(M) = M^{1 \dots h}_{1 \dots h}$$

e conveniamo che

$$D_0(M) = 1$$

per ogni matrice M.

DEFINIZIONE 2.1. Una matrice M si dice *regolare* se

$$D_h(M) \neq 0 \text{ per } h = 1, ..., n.$$

TEOREMA 2.2 (Decomposizione di Gauss). *Data una matrice regolare M, risultano univocamente determinate tre matrici $\zeta \in Z_-(n)$, $\delta \in D(n)$, $z \in Z_+(n)$ tali che*

$$M = \zeta \delta z.$$

I coefficienti delle matrici ζ, δ, z sono funzioni razionali dei coefficienti di M.

La dimostrazione sarà suddivisa in una serie di lemmi.

lm:gonba

LEMMA 2.3. *Se $M \in \mathfrak{gl}(n)$ e $z \in Z_+(n)$, allora per ogni $1 \le h \le n$ e $1 \le j_1 < ... < j_h \le n$ abbiamo:*

$$M^{j_1 \dots j_h}_{1 \dots h} = (Mz)^{j_1 \dots j_h}_{1 \dots h}.$$

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo

$$M = (M_1, ..., M_n)$$

$$Mz = (M'_1, ..., M'_n).$$

Allora

$$M'_j = M_1 z_{1j} + ... + M_{j-1,j} z_{j-1,j} + M_j$$

e dunque

$$M'_1 \wedge ... \wedge M'_h = M_1 \wedge ... \wedge M_h$$

per ogni $h = 1, ..., n$, da cui segue l'asserzione sui determinanti dei minori. □

lm:gonbb

LEMMA 2.4. *Sia $t = (t_{ij}) \in T_-(n)$. Allora:*

(*i*) $D_h(t) = t_{11} ... t_{hh}$

(*ii*) $t^{1 \dots (h-1) r}_{1 \dots h} = t_{rh} D_{h-1}(t)$.

DIMOSTRAZIONE. La (i) è un caso particolare di (ii). Quest'ultima si ricava osservando che $t_{1\dots h}^{1\dots(h-1)r}$ è uguale a 0 se $r < h$ e per $r \geq h$ è il determinante della matrice triangolare inferiore:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{h-1,1} & t_{h-1,2} & t_{h-1,3} & \dots & t_{h-1,h-1} & 0 \\ t_{h1} & t_{h2} & t_{h3} & \dots & t_{h,h-1} & t_{hr} \end{pmatrix}.$$

□

LEMMA 2.5. *Ogni matrice regolare M si decompone in modo unico nella forma*

$$M = tz$$

con $t \in T_-(n)$ e $z \in Z_+(n)$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $M = (m_{ij})$ e determiniamo i coefficienti x_{ij} per $i > j$ risolvendo il sistema lineare:

$$(*)\ m_{\ell 1}x_{1j} + \dots + m_{\ell(j-1)}x_{(j-1)j} = -m_{\ell j}\ \ \ell = 1, \dots, j-1.$$

Questo ha una e una sola soluzione, perché il determinante della matrice dei suoi coefficienti è $D_{k-1}(M)$. Essa si calcola con la regola di Kramer, e dunque è funzione razionale dei coefficienti di M. Posto $x_{ii} = 1$ e $x_{ij} = 0$ per $i < j$, abbiamo allora

$$M(x_{ij}) = t \in T_-(n)$$

e dunque, con $z = (x_{ij})^{-1} \in Z_+(n)$ otteniamo la decomposizione cercata. Viceversa, la condizione che $Mz^{-1} \in T_-(n)$ è equivalente al fatto che i coefficienti di $(x_{ij}) = z^{-1}$ soddisfino (*) e dunque la decomposizione è unica. □

Utilizziamo i lemmi precedenti per calcolare i coefficienti t_{ij} della matrice $t \in T_-(n)$ ottenuti in questa decomposizione: per il Lemma 2.3, essendo $M = tz$ abbiamo:

$$M_{1\dots h}^{j_1\dots j_h} = t_{1\dots h}^{j_1\dots j_h}$$

e dunque, per il Lemma 2.4:

$$M_{1\dots h}^{1\dots(h-1)r} = t_{1\dots h}^{1\dots(h-1)r} = t_{rh}D_{h-1}(t) = t_{rh}D_{h-1}(M).$$

È quindi

$$t_{rh} = M_{1\dots h}^{1\dots(h-1)r}/D_{h-1}(M).$$

La decomposizione di Gauss segue ora dall'osservazione che ogni matrice $t \in T_-(n)$ si scrive in modo unico mediante:

$$t = \zeta\delta$$

con $\zeta \in Z_-(n)$ ove $\delta \in D(n)$ ha la stessa diagonale principale della matrice t. Indichiamo con $K_+(n)$ il sottogruppo di $T_+(n)$ delle matrici triangolari superiori ad elementi della diagonale principale positivi.

TEOREMA 2.6 (Decomposizione di Gram). *Ogni matrice $a \in GL(n)$ si decompone in modo unico mediante*

$$a = uk$$

con $u \in \mathbf{O}(n)$ e $k \in K_+(n)$. Abbiamo $u \in \mathbf{SO}(n)$ se e soltanto se $Det(A) > 0$.

L'applicazione

$$\mathbf{O}(n) \times K_+(n) \ni (u, k) \to uk \in GL(n)$$

è un diffeomorfismo analitico.

DIMOSTRAZIONE. La decomposizione si può ottenere mediante il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Qui la deduciamo dalla decomposizione di Gauss: questo procedimento ci consente di esplicitare meglio il carattere delle operazioni e di ottenere formule esplicite per il calcolo dei coefficienti delle matrici della decomposizione.

Osserviamo che la matrice ${}^t aa$ è definita positiva e quindi regolare. Possiamo quindi decomporla in un unico modo mediante:

$${}^t aa = \zeta \delta z$$

con $\zeta \in Z_-(n)$, $\delta \in D(n)$, $z \in Z_+(n)$. Inoltre $\delta = diag(\delta_1, ..., \delta_n)$ con

$$\delta_h = D_h({}^t aa)/D_{h-1}({}^t aa) > 0 \text{ per } h = 1, ..., n.$$

Poiché ${}^t aa$ è simmetrica, dall'unicità della decomposizione di Gauss ricaviamo ancora che

$$\zeta = {}^t z.$$

Sia

$$\sqrt{\delta} = diag(\sqrt{\delta_1}, ..., \sqrt{\delta_n})$$

dove si è scelta la determinazione reale positiva della radice quadrata. Allora

$$k = \sqrt{\delta} z \in K_+(n)$$

e abbiamo

$${}^t aa = {}^t kk.$$

Da questa uguaglianza segue immediatamente che

$$u = ak^{-1} \in \mathbf{O}(n).$$

Abbiamo così ottenuto la decomposizione di Gram $a = uk$. Essa è unica perché, se

$$a = uk$$

con $u \in \mathbf{O}(n)$ e $k \in K_+(n)$, allora

$${}^t aa = {}^t kk$$

e k è unica per l'unicità della decomposizione di Gauss. □

È importante sottolineare che abbiamo ottenuto, per i coefficienti della diagonale principale di k nella decomposizione di Gram:

$$\boxed{k_{hh} = \sqrt{\frac{D_h({}^t aa)}{D_{h-1}({}^t aa)}}}.$$

La decomposizione di Gram si può generalizzare ad altri gruppi diversi dal gruppo ortogonale euclideo. Ad esempio, consideriamo il gruppo $\mathbf{O}(1,n)$ delle trasformazioni ortogonali rispetto al prodotto di Minkowski $[\,\cdot\,|\,\cdot\,]$ su $\mathbb{R}^{n+1}$. Ricordiamo che, posto

$$I_{1,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{O}(1,n)$ è il sottogruppo di $GL(n+1)$ delle matrici a per cui

$${}^t a I_{1,n} a = I_{1,n}$$

e la sua algebra di Lie $o(1,n)$ è formata dalle $X \in \mathfrak{gl}(n+1)$ tali che

$${}^t X I_{1,n} + I_{1,n} X = 0$$

cioè dalle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^t v \\ v & Y \end{pmatrix}$$

con $v \in \mathbb{R}^n$ e $Y \in \mathfrak{o}(n)$. In questo caso otteniamo:

tm:gonbc

TEOREMA 2.7. *Sia $a \in GL(n+1)$ e supponiamo che*

$$[ae_0|ae_0] > 0.$$

Allora possiamo decomporre a in modo unico nella forma:

$$a = uk$$

con $u \in \mathbf{O}(1,n)$ e $k \in K_+(n+1)$. L'applicazione

$$\mathbf{O}(1,n) \times K_+(n+1) \ni (u,k) \to uk \in GL(n+1)$$

è iniettiva e analitica reale.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è analoga a quella svolta per la decomposizione di Gram. Osserviamo che ${}^t a I_{1,n} a$ è regolare,in quanto l'ortogonale di ae_0 è totalmente anisotropo. Quindi ${}^t a I_{1,n} a$ ammette un'unica decomposizione di Gauss

$${}^t a I_{1,n} a = \zeta \delta z$$

con $\zeta \in Z_-(n)$, $\delta \in D(n)$, $z \in Z_+(n)$. Dall'unicità della decomposizione segue che $\zeta = {}^t z$. Inoltre

$$\delta = diag(k_0^2, -k_1^2, ..., -k_n^2)$$

con numeri reali positivi $k_0, ..., k_n$. Posto

$$\Delta = diag(k_0, k_1, ..., k_n),$$

otteniamo

$$\delta = \Delta I_{1,n} \Delta.$$

Poniamo a questo punto

$$k = \Delta z \in K_+(n+1).$$

Otteniamo

$${}^t a I_{1,n} a = {}^t k I_{1,n} k.$$

Se poniamo

$$u = ak^{-1}$$

risulta allora $u \in \mathbf{O}(1,n)$ e questo ci dà la decomposizione cercata. L'unicità segue da considerazioni analoghe a quelle svolte per la decomposizione di Gram. □

Concludiamo questo paragrafo dimostrando un teorema sui sottogruppi chiusi di $GL(n)$.

tm:duequattro

TEOREMA 2.8. (i) *Sia G un sottogruppo chiuso di $GL(n)$ e sia $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n)$ la sua algebra di Lie. Se*

$$\alpha : J \to G \subset GL(n)$$

è una curva di classe $\mathcal{C}^1$, allora

$$\alpha^{-1}(t)\dot{\alpha}(t) \in \mathfrak{g} \ \ \forall t \in J.$$

(ii) *Viceversa, se*

$$A : J \to \mathfrak{g}$$

è una curva differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 0$, $t_0 \in J$, allora la soluzione del problema di Cauchy lineare:

$$\text{(C)} \begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \alpha(t)A(t) & t \in J \\ \alpha(t_0) = g_0 \in G \end{cases}$$

è una curva $\alpha : J \to G$ a valori in G di classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

DIMOSTRAZIONE. (i) Fissiamo un intorno U_0 di 0 in $\mathfrak{g}$ tale che

$$U_0 \ni X \to exp(X) \in U_e = exp(U_0)$$

sia un diffeomorfismo analitico di U_0 su un intorno U_e dell'identità di G. Sia $\bar{t} \in J$, $\bar{g} = \alpha(\bar{t})$. Allora possiamo trovare un intorno aperto connesso J_0 di $\bar{t}$ in J tale che $\alpha(J_0) \subset \bar{g}U_e$. Risulta allora univocamente determinata una curva di classe $\mathcal{C}^1$ in U_0:

$$J_0 \ni t \to X(t) \in U_0 \subset \mathfrak{g}$$

tale che

$$\alpha(t) = \bar{g} exp(X(t)) \ \ \forall t \in \bar{J}$$

e

$$X(\bar{t}) = 0.$$

Avremo allora, con

$$Y_0 = \dot{X}(\bar{t}) \in \mathfrak{g},$$

$$\dot{\alpha}(\bar{t}) = \bar{g}Y_0,$$

cioè $\alpha(\bar{t})^{-1}\dot{\alpha}(\bar{t}) = Y_0 \in \mathfrak{g}$.

(ii) Osserviamo che, per il punto (i), per ogni funzione reale di classe $\mathcal{C}^1$

$$J \ni t \to \mathfrak{g}$$

abbiamo

$$exp(-X(t))\frac{d}{dt}exp(X(t)) \in \mathfrak{g}$$

per ogni $t \in J$. Più precisamente ricordando la formula di differenziazione dell'esponenziale:

$$exp(-X(t))\frac{d}{dt}exp(X(t)) = H(X(t))\dot{X}(t)$$

ove

$$H(X) = exp(-X)\frac{I - e^{-Ad(X)}}{Ad(X)}exp(X)$$

è una applicazione analitica

$$\mathfrak{g} \ni X \to H(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

con

$$H(0) = Id_{\mathfrak{g}}.$$

Quindi il problema di Cauchy non lineare:

$$\begin{cases} exp(-X(t))\frac{d}{dt}exp(X(t)) = H(X(t))\dot{X}(t) = A(t) \\ X(t_0) = 0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione, che è una funzione di classe $\mathcal{C}^{k+1}$ definita su un intorno connesso J' di t_0 in J, a valori in $\mathfrak{g}$. Allora

$$g_0 exp(X(t))$$

è una curva di classe $\mathcal{C}^{k+1}$ definita su J' a valori in G e coincide con la soluzione α del problema di Cauchy (C) per l'unicità. Questo argomento, ripetuto a partire da un qualsiasi punto $\bar{t} \in J$ per cui $\alpha(\bar{t}) \in G$, ci dice che l'insieme dei punti $t \in J$ per cui $\alpha(t) \in G$ è aperto J. Esso è anche chiuso perché abbiamo supposto G chiuso in $GL(n)$, quindi coincide con J perché è non vuoto contenendo t_0. □

3. Curve nello spazio Euclideo

sec:qonc

Studiamo in questo paragrafo la congruenza di curve nello spazio Euclideo, cioè rispetto al gruppo $\mathbf{O}_1(n)$ delle isometrie di $\mathbb{R}^n$. Indichiamo con $(\cdot\,|\,\cdot)$ il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$ e con $|\cdot|$ la norma associata. Data una curva

$$\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$$

definita e di classe $\mathcal{C}^1$ su un intervallo compatto $[t_0, t_1]$, definiamo la sua lunghezza mediante

$$\ell(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\alpha}(t)| dt.$$

Le formule di cambiamento di variabili dell'integrale ci dicono che la lunghezza di una curva non dipende dalla sua parametrizzazione. Nel caso di una curva semplice il cui supporto sia un segmento, la lunghezza coincide con la lunghezza del segmento definita nella geometria elementare. Inoltre, se consideriamo l'immagine della curva α mediante una isometria:

$$\beta(t) = u\alpha(t) + v$$

con $u \in \mathbf{O}(n)$ e $v \in \mathbb{R}^n$ fissati, abbiamo

$$\dot{\beta}(t) = u\dot{\alpha}(t)$$

e dunque

$$|\dot{\beta}(t)| = |\dot{\alpha}(t)|$$

su $[t_0, t_1]$. La lunghezza di una curva è dunque invariante per isometrie di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo ora che due curve

$$\alpha_i : J_i \to \mathbb{R}^n$$

$(i = 1, 2)$ di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$ siano $\mathbf{O}_1(n)$ congruenti e sia

$$\begin{array}{ccc} J_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & \mathbb{R}^n \\ {\scriptstyle\sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ J_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

un diagramma commutativo che descrive la congruenza, con $\sigma : J_1 \to J_2$ un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$ e $g \in \mathbf{O}_1(n)$. Per restrizione esso definisce una $\mathbf{O}_1(n)$ congruenza di qualsiasi arco di α_1 sull'arco corrispondente di α_2 e dunque avremo, fissato $t_0 \in J_1$:

$$\int_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}_1(\xi)| d\xi = \int_{\sigma(t_0)}^{\sigma(t)} |\dot{\alpha}_2(\xi)| d\xi$$

per ogni $t \in J_1$.

Sia ora

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n$$

una curva regolare di classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$. Allora, fissato $t_0 \in J$, la funzione

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(\xi)| d\xi$$

è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$, strettamente crescente, di J su un intervallo J' di $\mathbb{R}$. La curva

$$\beta = \alpha \circ s^{-1} : J' \to \mathbb{R}^n$$

si dice ottenuta riparametrizzando α *per lunghezza d'arco*. Essa gode della proprietà che

$$|\dot{\beta}(s)| = 1 \ \ \forall s \in J'.$$

Una curva di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$ che goda di questa proprietà si dice *parametrizzata per lunghezza d'arco*. Useremo di solito la lettera s per il parametro lungo una curva parametrizzata per lunghezza d'arco e la lettera t per indicare che non si pongono speciali condizioni sulla parametrizzazione. Due diverse parametrizzazioni per lunghezza d'arco si ottengono l'una dall'altra per trasformazioni di $\mathbb{R}$ della forma:

$$s \to \pm s + s_0$$

(isometrie di $\mathbb{R}$).

Da questa discussione segue il:

LEMMA 3.1. *Siano $\alpha_i : J_i \to \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2)$ due curve parametrizzate per lunghezza d'arco. Se esse sono $\mathbf{O}_1(n)$ congruenti, è possibile determinare $g \in \mathbf{O}_1(n)$, $\epsilon = \pm 1$, $s_0 \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\alpha_2(s) = g\alpha_1(\epsilon s + s_0).$$

Ricaviamo ora dalla decomposizione di Gram gli invarianti euclidei di una curva sghemba. Sia

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n$$

una curva sghemba. Indichiamo con $A(t)$ la matrice di $GL(n)$:

$$A(t) = (D\alpha(t), ..., D^n\alpha(t)).$$

Applichiamo ad $A(t)$ la decomposizione di Gram: abbiamo

$$A(t) = E(t)K(t)$$

con

$$E(t) = (e_1(t), ..., e_n(t)) \in \mathbf{O}(n)$$

e

$$K(t) \in K_+(n).$$

Osserviamo che, se α è di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq n$, allora i coefficienti di $E(t)$ sono funzioni di classe $\mathcal{C}^{k-n+1}$ e quelli di $K(t)$ sono funzioni di classe $\mathcal{C}^{k-n}$.

La matrice $E(t)$ si dice il *riferimento di Frenet* lungo la curva α. Le sue colonne $e_1(t), ..., e_n(t)$ sono dette:

$$\begin{array}{cc} e_1(t) & \text{versore tangente} \\ e_2(t) & \text{versore normale} \\ e_3(t) & \text{versore binormale} \\ \dots & \dots \\ e_n(t) & \text{versore } (n-1)\text{-normale} \end{array} .$$

Se dovremo considerare contemporaneamente il riferimento di Frenet di più curve, indicheremo la curva considerata a esponente. Scriveremo cioè E^α, e_i^α invece di E ed e_i. Il riferimento di Frenet lungo una curva dipende soltanto dall'orientazione della curva: abbiamo osservato che un cambiamento σ della parametrizzazione cambia $A(t)$ in una matrice

$$A(\sigma(t))T_n^\sigma(t)$$

ove $T_n^\sigma(t)$ è una matrice diagonale superiore con diagonale principale

$$(\dot\sigma(t), \dot\sigma(t)^2, ..., \dot\sigma^n(t))$$

e dunque avremo

$$E^{\alpha\sigma}(t) = E^\alpha(\sigma(t))$$

se $\dot\sigma > 0$ (la riparametrizzazione conserva il verso della curva)

$$E^{\alpha\sigma}(t) = E^\alpha(\sigma(t)) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^n \end{pmatrix}$$

se $\dot\sigma < 0$ (la riparametrizzazione cambia il verso della curva). In quest'ultimo caso sarà $e_i^\alpha(\sigma(t)) = (-1)^i e_i^{\alpha\sigma}(t)$ per $i = 1, ..., n$.

Se la curva α è parametrizzata per lunghezza d'arco, allora i coefficienti sulla diagonale principale della matrice triangolare superiore $K(t)$ nella decomposizione di Gram di $A(t)$ sono degli invarianti della curva. Osserviamo che $k_{11} = 1$ e dunque si ottengono dalla diagonale di $K(t)$ $n-1$ funzioni lungo la curva invarianti rispetto all'azione di $\mathbf{O}_1(n)$. Definiamo a partire da essi le *curvature* di α mediante:

$$k_i(s) = \frac{k_{i+1,i+1}(s)}{k_{ii}(s)}.$$

Se non supponiamo la curva parametrizzata per lunghezza d'arco avremo

$$\boxed{k_i(t) = \frac{k_{i+1,i+1}(t)}{k_{ii}(t)|\dot\alpha(t)|}}.$$

L'espressione trovata nel paragrafo precedente per i coefficienti k_{ii} ci permette di esprimere le curvature mediante la matrice $A(t)$:

$$\boxed{k_i(t) = \sqrt{\frac{D_{i+1}({}^tA(t)A(t)) \cdot D_{i-1}({}^tA(t)A(t))}{D_i^2({}^tA(t)A(t)) \cdot |\dot\alpha(t)|^2}}}.$$

Il Teorema tm:duequattro 2.8. nel caso del gruppo ortogonale dà:

LEMMA 3.2. (i) *Se*

$$J \ni t \to \mathbf{O}(n)$$

è una curva differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$*, allora*

$$E^{-1}(t)\dot E(t) =^t E(t)\dot E(t) \in \mathfrak{o}(n) \ \ \forall t \in J.$$

(ii) *Assegnato un intervallo* J *in* $\mathbb{R}$*, un punto* $t_0 \in J$*, un elemento* $u_0 \in \mathbf{O}(n)$ *e una curva*

$$X : J \to \mathfrak{o}(n)$$

di classe $\mathcal{C}^k$ *con* $k \geq 0$*, la soluzione del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \dot E(t) = E(t)X(t) & t \in J \\ E(t_0) = u_0 \end{cases}$$

è una curva di classe $\mathcal{C}^{k+1}$ *a valori in* $\mathbf{O}(n)$*.*

DIMOSTRAZIONE. Diamo una dimostrazione indipendente dal Teorema tm:duequattro 2.8. (i) Differenziando l'identità

$${}^tE(t)E(t) = Id$$

troviamo

$$({*}) \qquad {}^tE'(t)E(t) +^t E(t)E'(t) = 0,$$

cioè, ponendo $X(t) =^t E(t)E'(t)$,

$${}^tX(t) + X(t) = 0$$

che ci dice che $X(t) \in \mathfrak{o}(n)$.

(ii) Poniamo $M(t) =^t E(t)E(t)$, ove E è la soluzione del problema di Cauchy in (ii). Differenziando M abbiamo allora

$$M'(t) = M(t)X(t) - X(t)M(t).$$

Poiché $M(t_0) = Id$ ne segue che $M(t) = Id$ per ogni $t \in J$ e quindi $E(t) \in \mathbf{O}(n)$. □

tm:goncc

TEOREMA 3.3. *Sia*

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n$$

una curva sghemba e sia

$$E : J \to \mathbf{O}(n)$$

il suo riferimento di Frenet. Allora la matrice antisimmetrica

$$\Omega(t) = E^{-1}(t)E'(t)$$

è della forma:

$$\Omega(t) = |\dot\alpha(t)| \begin{pmatrix} 0 & -k_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_1(t) & 0 & -k_2(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_2(t) & 0 & -k_3(t) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{n-1}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

DIMOSTRAZIONE. I coefficienti della matrice $\Omega(t) = (\omega_{ij})$ sono dati da

$$\omega_{ij} = (e_i(t)|\dot e_j(t)).$$

Poiché $e_j(t)$ è combinazione lineare di $D\alpha(t), ..., D^j\alpha(t)$, $\dot e_j(t)$ è combinazione lineare di $D\alpha(t), ..., D^j\alpha(t), D^{j+1}\alpha(t)$ e dunque ortogonale a e_i se $i > j+1$. Essendo $\Omega(t)$ antisimmetrica, si conclude che $\omega_{ij}(t) = 0$ se $|i-j| \neq 1$.

Per calcolare i coefficienti di $\Omega(t)$, supponiamo dapprima che α sia di classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Allora la $A(t)$ e quindi anche la $K(t)$ nella decomposizione di Gram di $A(t)$ è di classe $\mathcal{C}^1$. Posto

$$A'(t) = A(t)M(t)$$

otteniamo:

$$(*) \qquad \Omega(t) = K(t)M(t)K^{-1}(t) - K'(t)K^{-1}(t).$$

La matrice $M(t)$ è della forma

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1(t) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_2(t) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_3(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_n(t) \end{pmatrix}$$

e quindi possiamo facilmente calcolare $\omega_{i+1,i}$ usando $(*)$. Il secondo addendo a secondo membro è triangolare superiore e quindi non dà contributo. Otteniamo perciò

$$\omega_{i+1,i}(t) = \frac{k_{i+1,i+1}(t)}{k_{ii}(t)}$$

da cui segue la tesi. Se α è solo di classe $\mathcal{C}^n$, possiamo approssimarla uniformemente con le derivate fino all'ordine n sui sottoinsiemi compatti di J (per il teorema di Stone-Weierstrass) con una successione α_n di curve sghembe di classe $\mathcal{C}^\infty$. Per ciascuna di esse vale la conclusione del teorema e dunque l'enunciato segue per passaggio al limite, in quanto sia i coefficienti delle

matrici $\Omega_n(t)$ che quelli delle matrici $K_n(t)$ associate alle α_n convergono a quelli di $\Omega(t)$ e di $K(t)$ per ogni punto $t \in J$. □

DEFINIZIONE 3.4. Il sistema di equazioni:

$$E'(t) = E(t)\Omega(t)$$

soddisfatto dal riferimento di Frenet della curva α si dice sistema di *equazioni di Frenet* della curva.

Esso è descritto completamente dalle funzioni di curvatura, che abbiamo visto essere invarianti euclidei della curva. Esplicitiamo tale sistema di equazioni:

$$\begin{array}{ll} \dot{e}_1(t) & = v(t)k_1(t)e_2(t) \\ \dot{e}_2(t) & = v(t)[-k_1(t)e_1(t) + k_2(t)e_3(t)] \\ \dot{e}_3(t) & = v(t)[-k_2(t)e_2(t) + k_3(t)e_4(t)] \\ \cdots & \quad \cdots \\ \dot{e}_{n-1}(t) & = v(t)[-k_{n-2}(t)e_{n-2}(t) + k_{n-1}(t)e_n(t)] \\ \dot{e}_n(t) & = -\, v(t)k_{n-1}(t)e_{n-1}(t) \end{array}$$

ove abbiamo posto

$$v(t) = |\dot{\alpha}(t)|.$$

Otteniamo quindi:

TEOREMA 3.5. (i) *Siano $\alpha_i : J_i \to \mathbb{R}^n$ due curve sghembe. Condizione necessaria e sufficiente affinché siano $\mathbf{O}_1(n)$ congruenti è che, avendole parametrizzate per lunghezza d'arco, dette $k^i_j(s)$ le curvature delle due curve ($i = 1, 2,\ j = 1, ..., n-1$) risulti con $\epsilon = \pm 1$ e un $s_0 \in \mathbb{R}$):*

$$s \to \epsilon s + s_0$$

è bigettiva da J_2 su J_1 e

$$k^1_j(s) = k^2_j(\epsilon s + s_0)\ \ \forall s.$$

(ii) *Assegnate $n-1$ funzioni continue a valori positivi:*

$$k_j : J \to \mathbb{R}$$

di classe $\mathcal{C}^k$,con $k \geq 0$, un punto $t_0 \in J$, un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e un elemento $u \in \mathbf{O}(n)$, possiamo trovare una e una sola curva $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$, parametrizzata per lunghezza d'arco, con $\alpha(t_0) = x_0$, avente in t_0 riferimento di Frenet u, e avente le $k_j(t)$ come funzioni di curvatura.

DIMOSTRAZIONE. (i) La condizione è ovviamente necessaria. Per dimostrare la sufficienza, possiamo supporre che le due curve α_i siano definite

sullo stesso intervallo J e non è restrittivo supporre che $0 \in J$ e che le curvature delle due curve siano uguali per uguali valori del parametro:

$$k_j^{\alpha_1}(s) = k_j^{\alpha_2}(s) = k_j(s) \ \ \forall s \in J \ \ \forall j = 1, ..., n-1.$$

Risulterà allora associata alle due curve la stessa matrice

$$\Omega^{\alpha_1}(s) = \Omega^{\alpha_2}(s) = \Omega(s)$$

data da

$$\Omega(s) = (k_j(s)[\delta_{i,j+1} - \delta j, i+1])_{i,j=1,...,n}.$$

Allora i riferimeti di Frenet $E^{\alpha_i}(s)$ delle due curve soddisfano lo stesso sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$(*) \qquad E'(s) = E(s)\Omega(s) \ \text{ su } \ J.$$

Sia $u = E^{\alpha_1}(0) \in \mathbf{O}(n)$, $w = E^{\alpha_2}(0) \in \mathbf{O}(n)$. Allora per l'esistenza e unicità della soluzione di $(*)$ per una condizione iniziale $E(0) = g \in \mathbf{O}(n)$ assegnata, troviamo che deve essere

$$E^{\alpha_2}(s) = wu^{-1}E^{\alpha_1}(s) \ \ \forall s \in J.$$

Quindi, posto $g = wu^{-1}$, avremo in particolare

$$\dot{\alpha}_2(s) = g\dot{\alpha}_1(s) \ \ \forall s \in J$$

da cui

$$\alpha_2(s) = g\alpha_1(s) + x_0 \ \ \forall s \in J$$

per un opportuno $x_0 \in \mathbb{R}^n$. (ii) La curva cercata è l'unica soluzione delle equazioni di Frenet e del sistema

$$\dot{\alpha}(t) = e_1(t)$$

con le condizioni iniziali assegnate. □

Questo teorema ci dice che la lunghezza d'arco e le curvature costituiscono un sistema completo di invarianti indipendenti per le curve sghembe dello spazio euclideo. Dalla discussione della $\mathbf{O}_1(n)$ congruenza si deduce immediatamente quella della $\mathbf{SO}_1(n)$ congruenza. In questo caso dobbiamo prendere in considerazione un altro invariante delle curve parametriche sghembe: il segno del determinante della matrice $A(t) = (D\alpha, ..., D^n\alpha)$. Se questo è positivo, diciamo che la curva parametrica α ha *torsione positiva*, se è negativo diciamo che la curva ha *torsione negativa*. Si dice *torsione* della curva la $n-1$-esima curvatura con il segno $+$ se la torsione è positiva e con il segno $-$ se la torsione è negativa. Osserviamo che il segno della torsione è il determinante del riferimento di Frenet. Un cambiamento dell'orientazione di una curva parametrica in $\mathbb{R}^n$ ne cambia il segno della torsione se il numero $n(n+1)/2$ è dispari, mantiene inalterato il senso della torsione se esso è pari. Abbiamo dunque:

TEOREMA 3.6. *Se $n(n+1)/2$ è dispari, due curve sghembe sono $\mathbf{SO}_1(n)$ congruenti se e soltanto se sono $\mathbf{O}_1(n)$ congruenti. Se $n(n+1)/2$ è dispari, due curve sghembe sono $\mathbf{SO}_1(n)$ congruenti se e soltanto se hanno torsione dello stesso segno e sono $\mathbf{O}_1(n)$ congruenti.*

DEFINIZIONE 3.7. In uno spazio euclideo di dimensione n con $n(n+1)/2$ pari si usano definire *levogire* le curve con torsione positiva e *destrogire* le curve con torsione negativa. Il significato geometrico del segno della torsione è diverso a seconda che la dimensione n dello spazio sia pari o dispari. Nel caso della dimensione dispari è il seguente: i vettori $e_1, ..., e_{n-1}$ del riferimento di Frenet in un punto $\alpha(t)$ di una curva sghemba $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ curva determinano univocamente un iperpiano e su di esso una orientazione. Risulta cioè univocamente indviduato un vettore $\mathbf{n}$ tale che $(e_1, ..., e_{n-1}, \mathbf{n}) \in \mathbf{SO}(n)$. Diremo che i punti

$$x = \alpha(t) + \xi^1 e_1 + ... + \xi^{n-1} e_{n-1} + \xi^n \mathbf{n}$$

con $\xi^n = 0$ appartengono all'iperpiano osculatore, quelli con $\xi^n > 0$ appartengono al semipiano superiore, quelli con $\xi^n < 0$ al semipiano inferiore. Se la torsione di α è positiva, allora potremo trovare un $\epsilon > 0$ tale che $\alpha(t')$ appartenga al semipiano superiore se $t < t' < t + \epsilon$, al semipiano inferiore se $t - \epsilon < t' < t$. La situazione si scambia nel caso la torsione sia negativa. Se la dimensione n è pari, allora un arco della curva contenente $\alpha(t)$ sarà tutto contenuto nel semispazio superiore se la torsione è positiva, nel semipiano inferiore se la torsione è negativa.

Esempi

ESEMPIO 3.8. In $\mathbb{R}^2$ le curve con curvatura costante sono archi di circonferenza: infatti per $\mathbb{R} \ni k > 0$,il sistema

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = k e_2 \\ \dot{e}_2 = -k e_2 \end{cases}$$

con $(e_1(s), e_2(s)) \in \mathbf{O}(2)$ ha soluzione generale

$$e_1(s) = \begin{pmatrix} \cos(ks + s_0) \\ \sin(ks + s_0) \end{pmatrix}$$

$$e_2(s) = \begin{pmatrix} -\sin(ks + s_0) \\ \cos(ks + s_0) \end{pmatrix}$$

e dunque le curve con curvatura costante k sono descritte da:

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} k^{-1} \sin(ks + s_0) + a \\ -k^{-1} \cos(ks + s_0) + b \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Osserviamo che una curva che descrive una circonferenza risulterà avere torsione positiva o negativa a seconda che ne descriva la frontiera (per valori crescenti del parametro) in senso antiorario o orario.

ESEMPIO 3.9. Consideriamo ora curve in $\mathbb{R}^3$ con curvature $k_1, k_2 > 0$ costanti. Fissiamo un angolo $\theta \in (0, \pi/2)$ tale che

$$\tan\theta = k_1/k_2.$$

Se $(e_1(s), e_2(s), e_3(s))$ è il riferimento di Frenet lungo una curva con curvature $k_1, k_2 > 0$ costanti, consideriamo il vettore

$$w(s) = e_1(s)\cos\theta + e_3(s)\sin\theta.$$

Abbiamo allora per le equazioni di Frenet:

$$(*) \qquad \dot{w}(s) = k_1 e_2(s)\cos\theta - k_2 e_2(s)\sin\theta = 0$$

e dunque $w(s) = w$ è un vettore costante. Ricaviamo quindi:

$$(e_1(s)|w) = \cos\theta = \text{costante}.$$

Da questa otteniamo, se per esempio fissiamo $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$e_1(s) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\cos(hs + s_0) \\ \sin\theta\sin(hs + s_0) \end{pmatrix}$$

con

$$h = \frac{k_1}{\sin\theta}$$

e da questa ricaviamo che la curva cercata è isometrica a una curva della forma

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} (\cos\theta)s \\ -h^{-1}(\sin\theta)\sin(hs) \\ h^{-1}(\cos\theta)\cos(hs) \end{pmatrix}$$

a meno di traslazioni del parametro s e dell'azione del gruppo $\mathbf{O}_1(n)$. Curve di questo tipo si dicono *eliche circolari*. In generale la condizione che il rapporto tra le due curvature sia costante implica che la tangente alla curva α in ogni punto forma un angolo costante con una direzione assegnata w: infatti la $(*)$ vale quando $k_1/k_2 = \text{costante} = \tan\theta$. Curve con questa proprietà si dicono *eliche*.

Consideriamo un'elica generale. Definiamo la curva:

$$\beta(t) = \alpha(t) - tw\cos\theta.$$

Abbiamo

$$\frac{d}{dt}(w|\beta) = (e_1|w) - \cos\theta = 0$$

e dunque la curva β è una curva piana su un piano affine

$$(w|x) = \text{costante}.$$

Indichiamo con

$$(\epsilon_1, \epsilon_2)$$

il riferimento di Frenet della curva piana β. Allora abbiamo:

$$\epsilon_1 = \frac{e_1 - w\cos\theta}{sin\theta}$$

e dunque la curva β verifica le equazioni:

$$(**) \qquad \begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \frac{k_1}{\sin\theta}\epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 = -\frac{k_1}{\sin\theta}\epsilon_1 \end{cases}$$

Troviamo quindi l'equazione generale di un'elica nella forma:

$$\alpha(s) = \beta(s) + sw\cos\theta$$

per una curva piana β in un piano ortogonale a w, la cui forma si ricava dall'equazione $(**)$.

4. Complementi sulle curve nello spazio euclideo

Se $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ è una curva di classe $\mathcal{C}^n$ con:

$$A_{n-1} = (D\alpha(t), ..., D^{n-1}\alpha(t))$$

di rango $n-1$ per tutti i $t \in J$, per mezzo del procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt risulta associata ad essa una curva:

$$E : J \to \mathbf{SO}(n)$$

tale che:

$$A(t) = (D\alpha(t), ..., D^{n-1}\alpha(t), D^n\alpha(t)) = E(t)K(t)$$

dove $K(t)$ è una matrice triangolare superiore:

$$K(t) = (k_{ij}(t))$$

con $k_{ii}(t) > 0$ per $i < n$, mentre $k_{nn}(t)$ può assumere qualsiasi valore reale. Come abbiamo osservato nel §3, il numero

$$\tau(t) = |\dot{\alpha}(t)|^{-1} k^{-1}_{n-1,n-1}(t) k_{nn}(t)$$

è la *torsione* della curva α in t.

Nel caso di una curva piana, la torsione si dice *curvatura della curva orientata* e i punti in cui essa cambia di segno si dicono *flessi* della curva piana.

Nel caso di una curva piana, poiché $\mathbf{SO}(2)$ si può identificare a S^1 mediante l'isomorfismo di gruppi abeliani moltiplicativi:

$$S^1 \ni e^{i\theta} \to \rho(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathbf{SO}(2)$$

il riferimento di Frenet in $\mathbf{SO}(2)$ si può identificare a una curva

$$J \to S^1$$

che si rialza al rivestimento universale $\mathbb{R}$ di S^1 come una applicazione differenziabile:

$$\theta : J \to \mathbb{R}$$

univocamente determinata quando se ne fissi il valore in un punto $t_0 \in J$.

Le equazioni di Frenet hanno allora la forma:

$$\frac{d}{dt}\rho(\theta(t)) = \rho(\theta(t))\Omega(t)$$

e, poiché

$$\frac{d}{d\theta}\rho(\theta) = \rho(\theta + \frac{\pi}{2})$$

otteniamo

$$\dot{\theta}(t)\rho(\theta(t) + \frac{\pi}{2}) = \rho(\theta))\Omega(t).$$

Ora, possiamo scrivere

$$\Omega(t) = k(t)|\dot{\alpha}(t)|\rho(\frac{\pi}{2})$$

dove $k(t)$ è la curvatura della curva orientata α in t, e dunque le equazioni di Frenet si riducono all'unica equazione scalare:

$$\dot{\theta}(t) = |\dot{\alpha}(t)|k(t).$$

Se α è parametrizzata per lunghezza d'arco, otteniamo la formula per la curvatura orientata:

$$\boxed{k = \frac{d\theta}{ds}}$$

Possiamo quindi determinare una curva piana, nota la sua curvatura orientata in funzione della lunghezza d'arco, mediante due quadrature: avremo infatti

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^{s} k(\xi)d\xi$$

e le componenti $x(s)$ e $y(s)$ di α rispetto alle coordinate cartesiane di $\mathbb{R}^2$ si ottengono da:

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^{s} cos(\theta(\xi))d\xi$$

$$y(s) = y_0 + \int_{s_0}^{s} sin(\theta(\xi))d\xi.$$

Esempio. Determiniamo una curva piana α con la proprietà che la sua tangente in ogni punto $\alpha(t)$ formi un angolo costante $\phi \in [0, \pi/2]$ con la retta uscente dall'origine e passante per il punto $\alpha(t)$.

È conveniente introdurre coordinate polari, cioè cercare la curva nella forma

$$\begin{cases} x = r(t)\cos(\theta(t)) \\ y = r(t)\sin(\theta(t)). \end{cases}$$

La tangente alla curva in t è data da:

$$\dot{r}(t)\begin{pmatrix}\cos(\theta(t))\\ \sin(\theta(t))\end{pmatrix} + r\dot{\theta}\begin{pmatrix}-\sin(\theta(t))\\ \cos(\theta(t))\end{pmatrix}.$$

Dalla condizione:

$$|\dot{\alpha}|^{-1}|\alpha|^{-1}(\dot{\alpha}|\alpha) = \cos\phi$$

ricaviamo:

$$\dot{r}(t) = \cos\phi\sqrt{\dot{r}^2(t) + r^2\dot{\theta}^2(t)}.$$

Calcolando i quadrati delle due espressioni otteniamo:

$$\frac{\dot{r}(t)}{r(t)}\sin\phi = \pm\dot{\theta}(t)\cos\phi$$

e dunque integrando otteniamo, a seconda della scelta del segno, le due curve:

$$\log r(t)\sin\phi = \text{costante} + \theta(t)\cos\phi$$
$$\log r(t)\sin\phi = \text{costante} - \theta(t)\cos\phi.$$

I due casi estremi sono rappresentati da $\phi = 0, \pi/2$: nel primo θ è costante e la curva è una semiretta uscente dall'origine. Nel secondo r è costante e la curva è una circonferenza con centro nell'origine. Se $0 < \phi < \pi/2$, possiamo usare θ come parametro sulla curva, ottenendo:

$$r(\theta) = r_0 e^{a\theta}$$

con $a = \pm\cot\phi$. In coordinate cartesiane, avremo cioè

$$\begin{cases} x = r_0\cos\theta e^{a\theta} \\ y = r_0\sin\theta e^{a\theta} \end{cases}$$

Una curva di questo tipo si dice una *spirale logaritmica*. La sua curvatura in ogni punto è data da

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\theta}/|\frac{d\alpha}{d\theta}|.$$

Abbiamo quindi:

$$|k(\theta)| = r_0^{-1}\sin\phi e^{-a\theta}.$$

Consideriamo ora il caso delle curve in $\mathbb{R}^3$. In questo caso osserviamo che $\mathbf{SO}(3)$ è omeomorfo allo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^3$ e ha come rivestimento universale $S^3 \simeq SU(2)$. Possiamo definire l'omomorfismo di gruppi $SU(2) \to \mathbf{SO}(3)$ è mediante la rappresentazione

$$\lambda : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to \begin{pmatrix} iz & ix + y \\ ix - y & -iz \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2)$$

e l'azione aggiunta

$$SU(2) \times \mathfrak{su}(2) \ni (g, X) \to gXg^{-1} \in \mathfrak{su}(2).$$

Associamo al riferimento di Frenet

$$E : J \to \mathbf{SO}(3)$$

di una curva

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^3$$

la curva corrispondente

$$g : J \to SU(2)$$

ottenuta rialzando la E, avendo scelto in corrispondenza di un valore arbitrario di $t_0 \in J$ un elemento $g(t_0) \in SU(2)$ della fibra su $E(t_0)$. I coefficienti della $g(t)$ si dicono i *parametri di Cayley-Klein* lungo la curva.

Poiché le algebre di Lie di $\mathbf{SO}(3)$ e di $SU(2)$ sono isomorfe nell'isomorfismo:

$$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & -z \\ -y & z & 0 \end{pmatrix} \to (1/2) \begin{pmatrix} iz & -ix-y \\ -ix+y & -iz \end{pmatrix}$$

potremo riscrivere le equazioni di Frenet di una curva di $\mathbb{R}^3$ nella forma:

$$\dot{g}(t) = g(t)\tilde{\Omega}(t)$$

dove $\tilde{\Omega}$ è stata ottenuta da Ω mediante l'isomorfismo descritto sopra. Se α è parametrizzata per lunghezza d'arco, allora la matrice $\tilde{\Omega}(s)$ è definita da:

$$\tilde{\Omega}(s) = \begin{pmatrix} 0 & ik(s)+\tau(s) \\ ik(s)-\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

dove k e τ sono rispettivamente la curvatura e la torsione della curva euclidea. Scrivendo $g(s) = (g_1(s), g_2(s))$ e posto

$$\lambda(s) = k(s) + i\tau(s)$$

otteniamo allora il sistema di equazioni per vettori a valori in $S^3 \subset C^2$:

$$\dot{g}_1 = i\lambda(s)g_2$$

$$\dot{g}_2 = -i\bar{\lambda}(s)g_1.$$

che è analoga al sistema di Frenet per le curve piane, con la differenza che in questo caso i vettori e la curvatura della curva orientata assumono valori complessi. Se scriviamo

5. Curve nello spazio di Minkowski

Sia $[\,\cdot\,|\,\cdot\,]$ la forma bilineare simmetrica che definisce il prodotto scalare nello spazio di Minkowski $\mathbb{R}^{n+1}$.

DEFINIZIONE 5.1. Data una curva:

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^{n+1}$$

di classe C^1 diremo che essa è in $t \in J$

(1) *di tipo tempo* se $[\dot{\alpha}(t)|\dot{\alpha}(t)] > 0$
(2) *di tipo spazio* se $[\dot{\alpha}(t)|\dot{\alpha}(t)] < 0$
(3) *isotropa* se $[\dot{\alpha}(t)|\dot{\alpha}(t)] = 0$.

La proprietà di una curva di essere in un punto di tipo tempo, o di tipo spazio o isotropa è invariante rispetto alla $\mathbf{O}_1(1,n)$ congruenza e alla riparametrizzazione. Per continuità, una curva che sia di tipo tempo o di tipo spazio in un punto lo è in tutto un arco che contiene tale punto.

Considereremo soltanto curve di tipo tempo, che corrispondono fisicamente alle traiettorie cinematiche di particelle dotate di massa.

Analogamente alla parametrizzazione per lunghezza d'arco introdotta nel caso euclideo, possiamo introdurre su una curva di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$ una riparametrizzazione (di classe $\mathcal{C}^k$) mediante:

$$\tau(t) = \tau_0 \pm \int_{t_0}^{t} \sqrt{[\dot{\alpha}(t)|\dot{\alpha}(t)]}dt.$$

Il nuovo parametro τ si dice *tempo proprio* ed è definito a meno di una costante additiva e del segno. Sulla traiettoria di una particella si converrà di sceglierlo in modo che

$$[\dot{\alpha}(\tau)|e_0] > 0$$

(in modo che il tempo sulla traiettoria scorra dal passato verso il futuro). Chiameremo *traiettoria* una curva che sia di tipo tempo in ogni suo punto e per la quale sia

$$[\dot{\alpha}(t)|e_0] > 0 \ \ \forall t.$$

Se due traiettorie $\alpha_i : J_i \to \mathbb{R}^{n+1}$ di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$ sono $\mathbf{O}_1(1,n)$ congruenti, allora avremo

$$\alpha_2(\tau) = g\alpha_1(\tau + \tau_0) \ \ \forall \tau \in J_2$$

per opportuni $g \in \mathbf{O}_1(1,n)$ e $\tau_0 \in \mathbb{R}$.

Per studiare la $\mathbf{O}_1(1,n)$ congruenza di traiettorie sarà quindi conveniente considerarle parametrizzate rispetto al tempo proprio. Per il Teorema 2.7, tm:gonbc se $\alpha : J \to \mathbb{R}^{n+1}$ è una traiettoria sghemba abbiamo la decomposizione di Gram:

$$A(t) = (D\alpha(t), ..., D^n\alpha(t)) = E(t)K(t)$$

con $E(t) = (e_0(t), ..., e_n(t)) \in O(1,n)$, $K(t) = (k_{ij}) \in K_+(n+1)$.

DEFINIZIONE 5.2. Il primo vettore $e_0(t)$ si dice la *quadrivelocità* lungo la traiettoria.

Possiamo ripetere gli argomenti svolti nella trattazione delle curve nello spazio Euclideo. In particolare, se la traiettoria è parametrizzata rispetto al tempo proprio, definiamo le curvature mediante:

$$k_i(\tau) = \frac{k_{i+1,i+1}(\tau)}{k_{ii}(\tau)} \ \text{ per } \ i = 0, 1, ..., n-1$$

Queste funzioni sono invarianti della traiettoria rispetto all'azione di $\mathbf{O}_1(1,n)$.

TEOREMA 5.3. *La matrice $E(t)$ soddisfa l'equazione:*

$$E'(\tau) = E(\tau)\Omega(\tau)$$

ove $\Omega(\tau) \in o(1,n)$ *è la matrice:*

eq:gdcam (5.1)

$$\Omega(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & k_0(\tau) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_0(\tau) & 0 & -k_1(\tau) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_1(\tau) & 0 & -k_2(\tau) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2(\tau) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{n-1}(\tau) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_{n-1}(\tau) & 0 \end{pmatrix}.$$

L'equazione (5.1) *si può esplicitare mediante:*

eq:gdcan (5.2)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dot{e}_0 & = k_0 e_1 \\ \dot{e}_1 & = k_0 e_0 + k_1 e_2 \\ \dot{e}_2 & = -k_1 e_1 + k_2 e_3 \\ \dot{e}_3 & = -k_2 e_2 + k_3 e_4 \\ \dots & \dots \\ \dot{e}_{n-1} & = -k_{n-2} e_{n-2} + k_{n-1} e_n \\ \dot{e}_n & = -k_{n-1} e_{n-1} \end{array}}$$

Due traiettorie $\alpha_i : J_i \to \mathbb{R}^{n+1}$ $(i = 1, 2)$ *parametrizzate rispetto al tempo proprio sono congruenti se e soltanto se, dette* k_j^i $(j = 0, ..., n-1,\ i = 1, 2)$ *le rispettive curvature, possiamo trovare un numero* $\tau_0 \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$k_j^2(\tau) = k_j^1(\tau + \tau_0)\ \ \forall j = 0, ..., n-1\ \ \forall \tau \in J_2.$$

Date n *funzioni continue e positive* $k_0, ..., k_{n-1} : J \to \mathbb{R}$ *è univocamente determinata una traiettoria*

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^{n+1}$$

parametrizzata rispetto al tempo proprio per cui le k_j *siano funzioni di curvatura.*

La dimostrazione di questo teorema è la stessa dell'analogo teorema per le curve euclidee.

6. Curve nello spazio unimodulare

Il gruppo unimodulare, o il gruppo lineare speciale, è il gruppo $\mathbf{SL}(n)$ delle matrici di $\mathbf{GL}(n)$ di determinante uguale a 1. Esso è il gruppo delle trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ che preservano l'orientazione di $\mathbb{R}^n$ e il volume degli insiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$. Come nel caso delle curve euclidee e delle traiettorie nello spazio di Minkowski, è innanzi tutto conveniente determinare lungo le curve un parametro intrinseco. Sia:

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n$$

una curva sghemba di classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq n)$ e consideriamo la matrice

$$A^\alpha(t) = A(t) = (D\alpha(t), ..., D^n\alpha(t)) \;\; t \in J.$$

Una riparametrizzazione di classe $\mathcal{C}^k$

$$\sigma : J' \to J$$

cambia il suo determinante mediante:

$$\det\left(A^{\alpha\sigma}(t)\right) = \det\left(A(\sigma(t))\right) \cdot \dot{\sigma}^{n(n+1)/2}(t)$$

Ponendo:

$$u(t) = \pm \int_{t_0}^{t} |\det A(t)|^{\frac{2}{n(n+1)}} dt + u_0$$

per arbitrari $t_0 \in J$, $u_0 \in \mathbb{R}$, la u dà una riparametrizzazione di classe $\mathcal{C}^{k-n+1}$ della curva α. Se $k \geq 2n-1$, la riparametrizzazione ci dà ancora una curva sghemba β con la proprietà:

$$(*) \qquad |\det A^\beta(u)| = 1 \;\; \forall u.$$

Definizione 6.1. Un parametro u su una curva sghemba per cui valga la $(*)$ si dice *parametro unimodulare*.

Chiaramente l'immagine mediante una trasformazione di $\mathbf{SL}_1(n)$ di una curva di parametro unimodulare è ancora una curva di parametro unimodulare e dunque, per curve sghembe sufficientemente differenziabili sarà conveniente discutere il problema della congruenza rispetto al gruppo affine unimodulare introducendo lungo le curve i parametri unimodulari.

Osserviamo ancora che il segno del determinante della matrice $A(t)$ associata alla curva sghemba α è un invariante rispetto alla parametrizzazione se $n(n+1)/2$ è pari, mentre quando $n(n+1)/2$ è dispari possiamo cambiarne il segno cambiando l'orientazione sulla curva.

Sia

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n$$

una curva sghemba di parametro unimodulare di classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Abbiamo, posto al solito

$$A = (D\alpha, ..., D^n\alpha) :$$

$$0 = \frac{d}{du} det(A(u)) = det(D^1\alpha(u), ..., D^{n-1}\alpha, D^{n+1}\alpha(u))$$

e quindi $D^{n+1}\alpha(u)$ è combinazione lineare a coefficienti di classe $\mathcal{C}^{k-n-1}$ di $D\alpha(u)$,..., $D^{n-1}\alpha(u)$:

$$D^{n+1}\alpha(u) = \lambda_1(u)D\alpha(u) + ... + \lambda_{n-1}(u)D^{n-1}\alpha(u).$$

Otteniamo quindi:

$$A'(u) = A(u)M(u)$$

ove $M(u)$ è una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1(u) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_2(u) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_3(u) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1}(u) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le funzioni λ_i sono invarianti unimodulari della curva. Sia infatti $g \in \mathbf{SL}(n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo la curva

$$u \to g\alpha(u) + x_0 = \beta(u).$$

Poichè $D^j\beta = gD^j\alpha$ per $j = 1, ..., n+1$, abbiamo

$$D^{n+1}\beta(u) = \lambda_1(u)D\beta(u) + ... + \lambda_{n-1}D^{n-1}\beta(u).$$

Quindi le funzioni λ_i $(i = 1, ..., n-1)$ sono le stesse per le due curve.

DEFINIZIONE 6.2. Chiameremo queste funzioni *curvature unimodulari* di una curva sghemba.

Per il Teorema tm:duequattro 2.8 abbiamo allora

TEOREMA 6.3. *Siano $\alpha_i : J_i \to \mathbb{R}^n$ due curve sghembe con parametro unimodulare e siano λ_j^i $(i = 1, 2,\ j = 1, ..., n-1)$ le loro curvature unimodulari. Condizione necessaria e sufficiente affinchè le due curve siano $\mathbf{SL}_1(n)$ congruenti è che si possa trovare un omeomorfismo di J_2 su J_1 della forma:*

$$u \to \pm u + u_0$$

tale che per ogni $j = 1, ..., n-1$

$$\lambda_j^2(u) = \lambda_j^1(\pm u + u_0)$$

e

$$\det A^{\alpha_2}(u) \cdot \det A^{\alpha_1}(\pm u + u_0) > 0.$$

Per ogni scelta di applicazioni di classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 0)$

$$\lambda_j : J \to \mathbb{R}$$

$(j = 1, ..., n-1)$ è possibile determinare una curva sghemba con parametro unimodulare

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^n$$

di cui tali funzioni siano le curvature unimodulari.

ESEMPIO 6.4. Consideriamo le curve di $\mathbb{R}^2$ con curvatura unimodulare costante $k \in \mathbb{R}$. Esse sono allora soluzione dell'equazione:

$$D^3\alpha(u) = kD\alpha.$$

Se $k = h^2 > 0$, allora le soluzioni di questa equazione sono della forma

$$\alpha(u) = v_1h^{-2}e^{hu} + v_2h^{-2}e^{-hu} + x_0$$

con $v_1, v_2, x_0 \in \mathbb{R}^2$ e $|\det(v_1, v_2)| = 1$. A meno di una trasformazione unimodulare affine possiamo supporre $v_i = e_i$ e $x_0 = 0$. La curva α è descritta allora dalle equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = h^{-2}e^{hu} \\ y = h^{-2}e^{-hu} \end{cases}$$

ed otteniamo perciò l'iperbole equilatera:

$$xy = h^{-4}.$$

In generale, si può verificare che per l'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la curvatura unimodulare è costante ed uguale a $1/(ab)^2$ e che le iperboli sono le uniche curve a curvatura unimodulare costante positiva.

Se $k = 0$, la curva α è un polinomio di secondo grado e rappresenta quindi una qualsiasi parabola.

Se $k < 0$, otteniamo una ellisse che si ottiene per traslazione e rotazione dal una delle ellissi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $1/(ab)^2 = -k$.

CAPITOLO 22

Curve piane

1. Equazioni di Frenet delle curve piane

sec:curvepiane

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare. Indichiamo con $\mathbf{t}_\alpha(t)$ e $\nu_\alpha(t)$ il versore tangente e il versore normale alla curva nel punto $\alpha(t)$. È:

eq:baga
$$\begin{cases} \mathbf{t}_\alpha(t) = \frac{\dot\alpha(t)}{|\dot\alpha(t)|} = (\mathbf{t}^1_\alpha(t), \mathbf{t}^2_\alpha(t)) \\ \mathbf{n}_\alpha(t) = (-\mathbf{t}^2_\alpha(t), \mathbf{t}^1_\alpha(t)). \end{cases} \tag{1.1}$$

Osserviamo che:

LM:baga

LEMMA 1.1. *Se $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ è una curva piana regolare di classe $\mathbb{C}^k$, con $k \geq 1$, esiste un'applicazione $\theta_\alpha : I \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^k$, univocamente determinata a meno dell'addizione di un multiplo intero di 2π, tale che:*

eq:bagb
$$\begin{cases} \mathbf{t}_\alpha(t) = (\cos(\theta_\alpha(t)), \sin(\theta_\alpha(t))) \\ \mathbf{n}_\alpha(t) = (-\sin(\theta_\alpha(t)), \cos(\theta_\alpha(t))) \\ \qquad \forall t \in I. \end{cases} \tag{1.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Ciò segue dal fatto che $\pi : \mathbb{R} \ni \theta \to (\cos\theta, \sin\theta) \in S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ è un rivestimento e un diffeomorfismo locale. □

Le equazioni di Frenet per una curva piana sono:

eq:bagc
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}_\alpha = v(t)\, k_\alpha(t) \mathbf{n}_\alpha(t) \\ \dot{\mathbf{n}}_\alpha(t) = -v(t)\, k_\alpha(t) \mathbf{t}_\alpha(t). \end{cases} \tag{1.3}$$

Abbiamo:

$$\dot{\mathbf{t}}_\alpha = (-\sin(\theta_\alpha(t)), \cos(\theta_\alpha(t)))\dot\theta_\alpha(t)$$

Otteniamo perciò:

LEMMA 1.2. *Sia $\theta_\alpha : I \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel Lemma 1.1. Se $v_\alpha(t) = |\dot\alpha(t)|$ è la velocità lungo la curva α, abbiamo:*

LM:baga

eq:bagd
$$\frac{d\theta_\alpha(t)}{dt} = v_\alpha(t)\, k_\alpha(t). \tag{1.4}$$

Questa equazione ci permette di risolvere il problema di trovare una curva piana con curvatura e velocità assegnate mediante *quadrature*. In particolare, se supponiamo la curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizzata per lunghezza

d'arco, in modo che $v_\alpha(s) = 1$ per ogni $s \in I$, fissato un elemento $s_0 \in I$ avremo:

eq:bage (1.5) $$\theta_\alpha(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^{s} k_\alpha(s)ds.$$

Sarà quindi:

eq:bagf (1.6) $$\alpha(s) = (x_0, y_0) + \int_{s_0}^{s} (\cos(\theta_\alpha(s)), \sin(\theta_\alpha(s)))ds.$$

Se identifichiamo il piano $\mathbb{R}^2$ al piano di Gauss dei numeri complessi, la $\alpha : I \to \mathbb{C}$ si potrà anche scrivere nella forma:

eq:bagg (1.7) $$\alpha(s) = z_0 + \int_{s_0}^{s} e^{i\theta_\alpha(s)}ds.$$

OSSERVAZIONE 1.3. La curvatura con segno di una curva piana può essere definita per ogni curva regolare di classe $\mathcal{C}^2$. Se $\alpha \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$, definiremo:

eq:bagh (1.8) $$k_\alpha(t) = \frac{d\theta_\alpha(t)}{dt} \cdot \frac{1}{v_\alpha(t)} \quad \text{ove} \quad v_\alpha(t) = |\dot\alpha(t)| \quad \text{è la velocità.}$$

2. Concavità, convessità, flessi e circonferenza osculatrice

sec:circosc

Ogni curva piana regolare si può rappresentare localmente come il grafico di una funzione di una variabile. Vale infatti:

PROPOSIZIONE 2.1 (coordinata tangenziale). *Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare. Fissato un punto $t_0 \in I$, esiste un intorno aperto J di t_0 in I, un'isometria σ di $\mathbb{R}^2$ ed un diffeomorfismo crescente $\phi : (a, b) \to J$ di un intorno di $0 \in \mathbb{R}$ su J con $\phi(0) = t_0$ tale che:*

eq:bahxa (2.1) $$\sigma \circ \alpha \circ \phi(t) = (t, f_\alpha(t)) \quad \textit{per} \quad a < t < b,$$

con:

eq:bahxxa (2.2) $$f_\alpha(t) = 0(t^2) \quad \textit{per} \quad t \to 0.$$

Abbiamo:

eq:bahxb (2.3) $$\alpha(\phi(t)) = \alpha(t_0) + t\,\mathbf{t}_\alpha(t_0) + f_\alpha(t)\mathbf{n}_\alpha(t_0).$$

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo il teorema delle funzioni implicite all'applicazione: $F(t, t', \xi) = \alpha(t_0) + t\,\mathbf{t}_\alpha(t_0) + \xi\mathbf{n}_\alpha(t_0) - \alpha(t')$. Poiché:

$$\frac{\partial F(t, t', \xi)}{\partial(t', \xi)} = \big(\dot\alpha(t'), \mathbf{n}_\alpha\big)$$

ha determinante $|\dot\alpha(t_0)| \neq 0$ per $t = 0$, $t' = t_0$ e $\xi = 0$, l'equazione $F(t, t', \xi) = 0$ definisce, per t in un intorno aperto di 0 in $\mathbb{R}$, funzioni differenziabili $t' = \phi(t)$ e $\xi = f_\alpha(t)$ per cui vale la (2.3). L'isometria che trasforma $\alpha(t_0)$ in 0, $\mathbf{t}_\alpha(t_0)$ nel vettore $(1, 0)$ e $\mathbf{n}_\alpha(t_0)$ nel vettore $(0, 1)$ trasforma la curva assegnata nella forma (2.1). □

DEFINIZIONE 2.2. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare, t_0 un punto interno di I e $p_0 = \alpha(t_0)$ ed f_α la funzione definita dalla (2.3). Diciamo che α in p_0:

è *convessa* se $f_\alpha(t)$ è non negativa in un intorno di 0;

è *concava* se $f_\alpha(t)$ è non positiva in un intorno di 0;

ha un *flesso* se $f_\alpha(t)$ cambia di segno in 0.

LEMMA 2.3. *Sia $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$, definita su un intervallo aperto di $\mathbb{R}$. Sia α la curva corrispondente al grafico di f:*

$$I \ni t \to \alpha(t) = (t, f(t)) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.4}$$

La curvatura di α è allora:

$$k_\alpha(t) = \frac{\ddot{f}(t)}{(1 + \dot{f}^2(t))^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.5}$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo:

$$\mathbf{t}_\alpha(t) = \frac{(1, \dot{f}(t))}{\sqrt{1 + \dot{f}^2(t)}}, \quad \mathbf{n}_\alpha(t) = \frac{(-\dot{f}(t), 1)}{\sqrt{1 + \dot{f}^2(t)}}.$$

Poiché:

$$\dot{\mathbf{t}}_\alpha(t) = \frac{(0, \ddot{f}(t))}{\sqrt{1 + \dot{f}^2(t)}} - \frac{\ddot{f}(t)}{2(1 + \dot{f}^2(t))^2}\, \mathbf{t}_\alpha(t),$$

otteniamo:

$$k_\alpha(t) = \frac{(\dot{\mathbf{t}}_\alpha(t) | \mathbf{n}_\alpha(t))}{|\dot{\alpha}(t)|} = \frac{\ddot{f}(t)}{(1 + \dot{f}^2(t))^{\frac{3}{2}}}.$$

□

Come conseguenza, otteniamo la:

PROPOSIZIONE 2.4. *Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare di classe $\mathcal{C}^2$, $t_0 \text{int}(I)$, $p_0 = \alpha(t_0)$.*

1. *Se $k_\alpha(t) \geq 0$ in un intorno di t_0, allora α è convessa in $p_0 = \alpha(t_0)$.*
2. *Se $k_\alpha(t) \leq 0$ in un intorno di t_0, allora α è convessa in $p_0 = \alpha(t_0)$.*
3. *Se $k_\alpha(t)$ cambia segno in t_0, allora α ha in $p_0 = \alpha(t_0)$ un punto di flesso.* □

Una retta che passa per il punto $p_0 = \alpha(t_0)$ della curva α, ma sia distinta dalla retta tangente, si dirà *trasversale* ad α in p_0.

Più in generale possiamo considerare i punti di intersezione di due qualsiasi curve piane:

DEFINIZIONE 2.5. Siano $\alpha : I_\alpha \to \mathbb{R}^2$, $\beta : I_\beta \to \mathbb{R}^2$, due curve piane regolari e siano $t_0^\alpha \in I_\alpha$, $t_0^\beta \in I_\beta$, valori dei parametri per cui $\beta(t_0^\beta) = \alpha(t_0^\alpha) = p_0$. Diciamo che in p_0:

1. le due curve α e β *si secano trasversalmente* in p_0 se $\dot{\beta}(t_0^\beta) \wedge \dot{\alpha}(t_0^\alpha) \neq 0$, se cioè i vettori tangenti in p_0 alle due curve sono linearmente indipendenti;

(2) *sono tangenti* in p_0 se $\dot\beta(t_0^\beta) \wedge \dot\alpha(t_0^\alpha) = 0$, se cioè i vettori tangenti in p_0 alle due curve sono paralleli. In questo caso diremo che le due curve sono *equiorientate* se $\dot\beta(t_0^\beta) = \lambda\dot\alpha(t_0^\alpha)$ con $\lambda > 0$, che *hanno orientamenti opposti* se $\dot\beta(t_0^\beta) = \lambda\dot\alpha(t_0^\alpha)$ con $\lambda < 0$.

Siano $\alpha : I_\alpha \to \mathbb{R}^2$ e $\beta : I_\beta \to \mathbb{R}^2$ due curve piane tangenti ed equiorientate in un punto: supponiamo cioè che per un $t_0^\alpha \in I_\alpha$ ed un $t_0^\beta \in I_\beta$ risulti:

bahxc
$$\begin{cases} \beta(t_0^\beta) = \alpha(t_0^\alpha) = p_0, \\ \dot\beta(t_0^\beta) = k\dot\alpha(t_0^\alpha) \quad \text{con} \quad k > 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Risulterà allora determinato un movimento rigido σ del piano, e due applicazioni differenziabili con derivata positiva $\phi : (-a, a) \to I_\alpha$, con $\phi(0) = t_0^\alpha$ e $\psi : (-a, a) \to I_\beta$, con $\psi(0) = t_0^\beta$, per cui, nella coordinata tangenziale nel loro punto di contatto risulterà:

eq:bahb
$$\begin{gathered} \sigma \circ \alpha \circ \phi(t) = (t, f_\alpha(t)), \\ \sigma \circ \beta \circ \psi(t) = (t, f_\beta(t)), \\ -a < t < a, \quad f_\alpha(t), f_\beta(t) = 0(t^2) \quad \text{per} \quad t \to 0. \end{gathered} \tag{2.7}$$

DEFINIZIONE 2.6. Siano α e β due curve piane regolari tangenti ed equiorientate in un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$. Siano f_α e f_β come nella (2.7) Diciamo che, in p_0, la α *sta sopra* alla β se esiste $\epsilon > 0$ con $0 < \epsilon < a$ tale che $f_\alpha(t) > f_\beta(t)$ per $0 < |t| < \epsilon$; la α *sta sotto* alla β se esiste $\epsilon > 0$ con $0 < \epsilon < a$ tale che Se $f_\alpha(t) - f_\beta(t)$ cambia segno per $t = 0$ diremo invece che le due curve *si intrecciano* in p_0.

PP:bahd
PROPOSIZIONE 2.7. *Siano α e β due curve piane equiorientate in un loro punto di contatto. Se esse hanno in tale punto curvature diverse, quella con curvatura maggiore sta sopra quella con curvatura minore.*

Se $\alpha, \beta : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ sono parametrizzate per lunghezza d'arco e $\alpha(0) = \beta(0)$, $\dot\alpha(0) = \dot\beta(0)$, allora:

(1) *se $k_\alpha(s) - k_\beta(s)$ ha segno costante per $0 < |s| < a$, allora, se tale segno è positivo la α sta sopra alla β, se tale segno è negativo la α sta sotto alla β;*
(2) *se $s(k_\alpha(s) - k_\beta(s))$ ha segno costante per $0 < |s| < a$, allora le due curve si intrecciano in 0.*

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando la rappresentazione (2.7) nella coordinata tangenziale e la (2.5), osserviamo che le diseguaglianze tra le curvature sono equivalenti alle corrispondenti disuguaglianze tra le derivate seconde delle funzioni f_α ed f_β. Questo riconduce le affermazioni della proposizione alle analoghe affermazioni, che sappiamo valide per i grafici di funzioni reali di una variabile reale. □

DEFINIZIONE 2.8. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare, di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 2$. In un punto $t_0 \in I$ in cui la curvatura $k_\alpha(t_0)$ sia diversa da 0,

definiamo la *circonferenza osculatrice* ad α in $\alpha(t_0)$ come la circonferenza $C_\alpha(t_0)$, di centro $\alpha(t_0) + k_\alpha^{-1}(t_0)\mathbf{n}_\alpha(t_0)$ e raggio $k_\alpha^{-1}(t_0)$:

eq:baha (2.8) $C_\alpha(t_0) = \{p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ k_\alpha(t_0)\cdot|p-\alpha(t_0)|^2 = 2(p-\alpha(t_0)|\mathbf{n}_\alpha(t_0))\}$.

Nel caso in cui sia $k_\alpha(t_0) = 0$, il raggio della circonferenza osculatrice sarebbe infinito: conveniamo allora di identificarla con la retta tangente ad α in $\alpha(t_0)$.

OSSERVAZIONE 2.9. La curvatura di una circonfernza è il reciproco del suo raggio. La Proposizione PP:bahd 2.7 illustra quindi il significato geometrico della circonferenza osculatrice: una circonferenza di raggio r tangente alla curva α in un punto $p_0 = \alpha(t_0)$ sta *sopra* α in p_0 se $r \cdot k_\alpha(t_0) < 1$, sta *sotto* se $r \cdot k_\alpha(t_0) > 1$. La circonferenza osculatrice separa quindi la famiglia delle circonferenze tangenti che stanno sotto, da quella delle circonferenze tangenti che stanno sopra alla curva nel punto assegnato.

Come conseguenza della Proposizione PP:bahd 2.7 otteniamo ancora:

PP:bahta PROPOSIZIONE 2.10. *Supponiamo che la curvatura della curva regolare $\alpha \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ abbia un massimo o un minimo locale stretto in $t_0 \in \mathrm{int}(I)$. Allora $C_\alpha(t_0)$ non interseca α, ma le sta o sopra, se $k_\alpha(t_0)$ è un minimo locale, o sotto, se $k_\alpha(t_0)$ è un massimo locale.*

DEFINIZIONE 2.11. I punti $p_0 = \alpha(t_0)$ di una curva $\alpha \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ di classe $\mathcal{C}^2$ in cui la curvatura $k_\alpha(t)$ assuma un valore estremale (cioè un massimo o minimo locale) si dicono *vertici*.

3. Curve piane chiuse

TM:bahh TEOREMA 3.1. *Sia $\alpha \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ una curva regolare piana chiusa e semplice. Allora α ha almeno quattro vertici.*

Osserviamo che $k_\alpha(t)$, essendo una funzione continua su $[a, b]$, ammette massimo e minimo e quindi l'esistenza di almeno due vertici segue dal teorema di Weierstrass.

Osserviamo poi che, se k_α avesse due massimi locali, diciamo in t_1 e t_2, questi dividerebbero α in due archi disgiunti α' ed α'', su ciascuno dei quali k_α avrebbe un minimo locale. Ci sarebbero pertanto almeno quattro vertici. Per dimostrare il teorema sarà quindi sufficiente escludere che α possa avere soltanto un massimo ed un minimo (in questo caso assoluti). Per concludere la dimostrazione, utilizzeremo un risultato relativo alle curve convesse.

DEFINIZIONE 3.2. Una curva piana $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ si dice *convessa* se, per ogni coppia di valori distinti $t_1, t_2 \in I$ dei parametri il segmento aperto $]\alpha(t_1), \alpha(t_2)[= \{\lambda\alpha(t_1)+(1-\lambda)\alpha(t_2) \mid 0 < \lambda < 1\}$ o non interseca il supporto $\alpha(I)$ di α, oppure è contenuto nel supporto della curva α.

LEMMA 3.3. *Sia $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva chiusa semplice regolare, che supporremo di classe $\mathcal{C}^2$. Fissato un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ che non appartenga*

al supporto della curva, sia $\phi(t)$ l'angolo che la semiretta uscente da (x_0, y_0) e passante per $\alpha(t)$ forma con l'asse delle ascisse. Allora:

eq:bahya

$$\int_a^b \phi(t)dt = \pm 2\pi. \tag{3.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Parametrizziamo la curva α con i punti della circonferenza unitaria S^1; poniamo cioè:

$$\alpha(t) = r(t)(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$$

ove $t \in [-\pi, \pi]$ e $\theta(t)$ ed $r(t)$ sono funzioni periodiche di periodo 2π, ed $r(t) > 0$ per ogni t. □

PROPOSIZIONE 3.4. *Sia $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare semplice, chiusa, regolare e di classe $\mathcal{C}^2$. Sono equivalenti:*

1. *α è convessa;*
2. *per ogni suo punto, il supporto della curva è tutto contenuto in uno dei due semipiani in cui il piano è diviso dalla retta ad essa tangente.*
3. *la curvatura $k_\alpha(t)$ ha segno costante per $t \in [a, b]$.*

DIMOSTRAZIONE. (1) ⇒ (2). Supponiamo che la curva α sia convessa. Fissiamo $t_0 \in [a, b]$. A meno di comporre la α con un movimento rigido del piano e di una riparametrizzazione, possiamo supporre che $t_0 = 0$ e che $\alpha(0) = 0 \in \mathbb{R}^2$, che $\dot\alpha(0) = (1, 0)$, e che $k_\alpha(0) \geq 0$. Sia $(c, d) \ni 0$ un intervallo corrispondente ad un arco massimale di α contenente $\alpha(0)$ su cui $(\dot\alpha(t)|e_1) \neq 0$, massimale ed in cui α ammetta una rappresentazione della forma (eq:bahb 2.7): $\alpha(t) = (t, f_\alpha(t)) \in \mathbb{R}^2$. La f_α è una funzione convessa su (c, d) con $\dot f_\alpha(0) = 0$. Poiché $\dot f_\alpha(t)$ è continua su (c, d) e tende in modulo all'infinito per $t \to c, d$, abbiamo $\lim_{t\to c} f_\alpha(t) > 0$ e $\lim_{t\to d} f_\alpha(t) > 0$. Se il grafico di α non fosse tutto contenuto nel piano $\{y \geq 0\}$, ci sarebbe un $t_1 \notin [c, d]$ per cui $\alpha^2(t_1) < 0$. Allora ciascuno degli archi che congiungono $\alpha(t_1)$ ad $\alpha(c)$ e ad $\alpha(d)$ rispettivamente intersecherebbe l'asse delle ascisse. Quindi l'intersezione dell'asse delle ascisse con il supporto della curva α conterrebbe almeno tre componenti connesse. Ciò contraddice la definizione di convessità per una curva e quindi dimostra l'implicazione desiderata.

(2) ⇒ (3). Utilizziamo le rappresentazioni (eq:bahb 2.7). A meno di cambiare l'orientamento della curva, possiamo supporre sia $k_\alpha > 0$ in un punto. Si può allora dimostrare che tutte le f_α sono funzioni convesse e da questo si ottiene, per la Proposizione PP:bahd 2.7, che $k_\alpha \geq 0$ in ogni punto.

(3) ⇒ (1). Supponiamo che α non sia convessa. Possiamo trovare allora una retta $L = \{p_0 + t\vec v \mid t \in \mathbb{R}\}$, ove $\vec v$ è un vettore non nullo di $\mathbb{R}^2$ la cui intersezione col supporto di α ha almeno tre componenti connesse distinte. Siano $t_1 < t_2 < t_3$ tre numeri reali tali che i punti $p_0 + t_i\vec v$ appartengano ciascuno a una distinta componente connessa di $L \cap \alpha([a, b])$. Sia $\vec w$ un

vettore ortogonale a v e definiamo, per $t_1 \leq t \leq t_3$:

$$g(t) = \begin{cases} \inf\{s \geq 0 \mid p_0 + t\vec{v} + s\vec{w} \in \alpha([a,b])\} & \text{se tale insieme è non vuoto} \\ \sup\{s < 0 \mid\mid p_0 + t\vec{v} + s\vec{w} \in \alpha([a,b])\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Otteniamo in questo modo una funzione continua su $[t_1, t_2]$, che è di classe $\mathcal{C}^2$ in tutti i punti per cui $\dot{\alpha} \wedge \vec{v} \neq 0$ nel punto corrispondente a $p_0 + t\vec{v} + g(t)\vec{w}$. □

PP:bahk

PROPOSIZIONE 3.5. *Siano $\alpha, \beta : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ due curve regolari convesse, semplici e aperte, parametrizzate per lunghezza d'arco. Se $|k_\alpha(s)| \geq |k_\beta(s)|$ per ogni $0 \leq s \leq \ell$, allora $|\alpha(\ell) - \alpha(0)| \leq |\beta(\ell) - \beta(0)|$.*

DIMOSTRAZIONE. A meno di un'isometria del piano, possiamo supporre che gli estremi $\alpha(0), \alpha(\ell), \beta(0), \beta(\ell)$ siano sull'asse delle ascisse e che $\alpha^1(0) = \beta^1(0) = 0$, $\alpha^1(\ell), \beta^1(\ell) > 0$, e che $\alpha^2(s), \beta^2(s) < 0$ se $0 < s < \ell$. In questo modo le curvature $k_\alpha(s)$ e $k_\beta(s)$ saranno positive in tutti i punti. Abbiamo:

$$\alpha^1(\ell) = \int_0^\ell \cos\theta_\alpha(s) ds.$$

C'è un valore s_0, con $0 < s_0 < \ell$, in cui la tangente ad α è parallela all'asse delle ascisse, per cui cioè $\theta_\alpha(s_0) = 0$. Abbiamo quindi: A sua volta:

$$\theta_\alpha(s) = \int_{s_0}^s k_\alpha(\sigma) d\sigma.$$

Poiché l'arco è convesso, avremo $-\pi \leq \theta_\alpha(s) \leq \pi$. Consideriamo poi:

$$\theta^*_\beta(s) = \theta_\beta(s) - \theta_\beta(s_0) = \int_{s_0}^s k_\beta(\sigma) d\sigma.$$

Per ipotesi, $|\theta^*_\beta(s)| \leq |\theta_\alpha(s)|$ per ogni $0 \leq s \leq \ell$. Poiché il coseno è decrescente su $[0, \pi]$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \alpha^1(\ell) &= \int_0^\ell \cos|\theta_\alpha(s)| ds \\ &\leq \int_0^\ell \cos|\theta^*_\beta(s)| ds \\ &= \cos\theta_\beta(s_0) \int_{s_0}^\ell \cos\theta_\beta(s) ds - \sin\theta_\beta(s_0) \int_{s_0}^\ell \sin\theta_\beta(s) ds \\ &= \cos\theta_\beta(s_0)\beta^2(\ell). \end{aligned}$$

Infatti, poiché $\sin\theta_\beta(s)$ è la componente rispetto all'asse delle ordinate del versore tangente alla curva β:

$$\int_0^\ell \sin\theta_\beta(s) ds = \int_{s_0}^\ell \frac{d\beta^2(s)}{ds} = \beta^2(\ell) - \beta^2(0) = 0 - 0 = 0.$$

Ne segue che vale la $|\alpha(\ell) - \alpha(0)| \leq |\beta(\ell) - \beta(0)|$, ed inoltre la diseguaglianza è stretta se in qualche punto $k_\alpha(s) > k_\beta(s)$. □

DIMOSTRAZIONE. Completiamo ora la dimostrazione del Teorema 3.1. TM:bahh

Dobbiamo dimostrare, per contraddizione, che una curva semplice chiusa α non può avere soltanto due vertici. Supponiamo la curva α abbia soltanto due vertici, che cioè la curvatura abbia un unico minimo, in cui assume il valore m, ed un unico massimo, in cui assume il valore M.

Esaminiamo prima il caso in cui α sia una curva convessa.

Possiamo supporre che $\alpha : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ sia parametrizzata per lunghezza d'arco e che il massimo e il minimo della curvatura siano raggiunti per $s_{\min} = 0$ ed $s_{\max} \in]0, \ell[$. Consideriamo i due archi $\alpha' : [0, s_{\max}] \to \mathbb{R}^2$ ed $\alpha'' : [s_{\max}, \ell] \to \mathbb{R}^2$. Poiché la curvatura è una funzione monotona e continua su ciascuno dei due archi, possiamo trovare due punti u_1 sul primo, ed u_2 sul secondo, tali che:

(1) u_1 ed u_2 dividono la curva chiusa α in due archi di uguale lunghezza;
(2) la curvatura di α in u_1 ed u_2 è uguale.

Infatti, supponiamo per semplicità che $s_{\max} \leq \frac{\ell}{2}$ e scegliamo $u_1 = \alpha_1(s)$ con $0 < s < s_{\max}$. Allora $u_2 = \alpha(\frac{2s+\ell}{2})$. Se facciamo variare s tra 0 ed $s_{\max}$, la curvatura $k_\alpha(s)$ è una funzione crescente che assume tutti i valori compresi tra m ed M. In corrispondenza, la curvatura $k_\alpha(\frac{2s+\ell}{2})$ è una funzione decrescente di s, con un valore $k_\alpha(\frac{\ell}{2}) > m$ per $s = 0$ ed un valore $k_\alpha(\frac{2s_{\max}+\ell}{2}) < M$ per $s = s_{\max}$. In particolare $\{s \in]0, s_{\max}[\mid k_\alpha(\frac{2s+\ell}{2}) > k_\alpha(s)\}$ e $\{s \in]0, s_{\max}[\mid k_\alpha(\frac{2s+\ell}{2}) < k_\alpha(s)\}$ sono due sottoinsiemi non vuoti di $]0, s_{\max}[$ e separati. Ammettono quindi un unico elemento separatore s_0 e quindi le condizioni (1) e (2) sono verificate con $u_1 = \alpha(s_0)$ ed $u_2 = \alpha(\frac{2s_0+\ell}{2})$. Osserviamo a questo punto che u_1 ed u_2 dividono la curva chiusa α in due archi, di uguale lunghezza, ma la curvatura in ogni punto dell'arco che contiene $\alpha(s_{\max})$ è maggiore della curvatura in tutti i punti dell'arco che contiene $s_{\min} = 0$. Per la Proposizione 3.5, otteniamo una contraddizione. PP:bahk Ciò completa la dimostrazione nel caso di una curva convessa.

Supponiamo che la curva α abbia esattamente due punti di flesso. Ha allora un'unica tangente doppia, che la intersceca nei punti p_1 e p_2. Sostituendo all'arco tra i due punti di doppia tangenza il segmento di tangente, otteniamo una curva convessa β. Sia p_0 un punto della curva β in cui la curvatura ha massimo. Possiamo supporre che l'arco $\widehat{p_0p_1}$ abbia lunghezza non superiore a quella dell'arco $\widehat{p_0p_2}$. Sia p_3 il punto per cui i due archi di estremi p_1 e p_3 abbiano la stessa lunghezza. Allora la curvatura di $p_1\widehat{p_0}p_3$ è maggiore di quella di $p_1\widehat{p_2}p_3$. Quindi, per l'argomento precedente, la curvatura della curva α ha due massimi, e quindi anche due minimi.

Se la curva α ha due punti di flesso, vi è allora una retta nel piano che le è tangente in due punti, diciamo p_1 e p_2. Otteniamo allora una nuova curva convessa β considerando uno degli archi $\widehat{p_1p_2}$ e il segmento di retta $\overline{p_1p_2}$. La curvatura di β ha un massimo in un punto $p_3 \in \widehat{p_1p_2}$ e possiamo supporre che i due archi $\widehat{p_1p_3}$ e $\widehat{p_3p_2}$ in cui esso divide $\widehat{p_1p_2}$ soddisfino: $\ell(\widehat{p_1p_3}) \leq \ell(\widehat{p_3p_2})$. Fissiamo ora p_4 sul supporto di β in modo che i due archi di β di estremi p_1

e p_4 abbiano uguale lunghezza. Allora la curvatura di $p_1\widehat{p_3}p_4$ è maggiore di quella di $p_1\widehat{p_2}p_4$. L'argomento precedente ci mostra allora che la curvatura della curva convessa β ha almeno due massimi: quindi anche la curva α ha almeno due massimi, e dunque anche almeno due minimi.

Infine, se la curva α ha più di due punti di inflessione, chiaramente ha almeno quattro vertici. □

4. Altre proprietà delle curve chiuse

Sarà conveniente nel seguito considerare una curva piana chiusa come un'applicazione differenziabile $\alpha : S^1 \to \mathbb{R}^2$, od anche come una funzione $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, periodica di periodo $T \geq 0$.

DEFINIZIONE 4.1. Sia $\alpha : S^1 \to \mathbb{R}^2$ una curva piana chiusa continua. Se p è un punto del piano che non appartiene al suo supporto, allora l'applicazione:

eq:baka
$$S^1 \ni \sigma \to \frac{\alpha(\sigma) - p}{|\alpha(\sigma) - p|} \in S^1 \tag{4.1}$$

è un'applicazione continua. Il suo grado si indica con $\mathrm{w}_\alpha(p)$ e si dice l'*indice d'avvolgimento* della curva α intorno a p.

L'indice di avvolgimento $w_\alpha(p)$ è chiaramente invariante per omotopie di α in $\mathcal{C}(S^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{p\})$ ed è costante sulle componenti connesse del complementare $\complement(\alpha(S^1))$ del supporto di α in $\mathbb{R}^2$.

TEOREMA 4.2 (Jordan). *Sia $\alpha : S^1 \to \mathbb{R}^2$ una curva piana chiusa e continua. Allora:*

(1) *$\complement(\alpha(S^1))$ ha una sola componente connessa illimitata, su cui $w_\alpha(p) = 0$;*
(2) *se α è semplice, allora $\complement(\alpha(S^1))$ ha due sole componenti connesse. Su quella limitata il valore dell'indice di avvolgimento è costante ed uguale a ± 1.*

DEFINIZIONE 4.3. Sia $\alpha : S^1 \to \mathbb{R}^2$ una curva chiusa, differenziabile di classe $\mathcal{C}^1$, regolare. Allora l'applicazione:

eq:bakb
$$S^1 \ni \sigma \to \frac{\dot\alpha(\sigma)}{|\dot\alpha(\sigma)|} \in S^1 \tag{4.2}$$

è continua. Il suo grado si dice l'*indice di rotazione* della curva α.

Vale il:

tm:dfadd
TEOREMA 4.4. *L'indice di rotazione di una curva semplice piana regolare è ± 1, a seconda della sua orientazione.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\alpha : [0, \ell] \ni s \to (\alpha^1(s), \alpha^2(s)) \in \mathbb{R}^2$ una curva semplice chiusa regolare, parametrizzata per lunghezza d'arco. Sia $s_0 \in [0, \ell]$ un punto di minimo per la funzione $[0, \ell] \ni s \to \alpha^2(s)$. Allora $\dot\alpha(s_0) =$

$\pm(1,0)$. A meno di cambiare l'orientamento e il punto iniziale di α, possiamo supporre sia $s_0 = 0$ e $\dot\alpha(0) = (1,0) = e_1$.

Consideriamo ora il triangolo:

$$T = \{(s_1, s_2) \in [0,\ell] \times [0,\ell] \mid 0 \le s_1 \le s_2 \le \ell\}.$$

Definiamo un'applicazione continua $\Psi : T \to S^1$ mediante:

$$\Psi(s_1,s_2) = \begin{cases} \frac{\alpha(t_2)-\alpha(t_1)}{|\alpha(t_2)-\alpha(t_1)|} & \text{se} \quad 0 \le s_1 < s_2 \le \ell,\ s_2 - s_1 < \ell \\ \frac{\dot\alpha(s_1)}{|\dot\alpha(s_1)|} & \text{se} \quad 0 \le s_1 = s_2 \le \ell, \quad \text{oppure} \quad s_1 = 0,\ s_2 = \ell. \end{cases}$$

L'indice di rotazione è il grado della $[0,\ell]/\{0,\ell\} \sim S^1 \ni s \to \Psi(s,s) \in S^1$. Poiché il grado di un'applicazione di S^1 in sé è invariante per omotopia, esso sarà uguale al grado dell'applicazione $\eta : [-\ell,\ell]/\{\pm\ell\} \sim S^1 \to S^1$ definita da:

$$\eta(t) = \begin{cases} \Psi(0,\ell+t) & \text{se} \quad -\ell \le t \le 0 \\ \Psi(t,\ell) & \text{se} \quad 0 \le t \le \ell. \end{cases}$$

Quando facciamo variare t tra $-\ell$ e 0, l'immagine di η è la semicirconferenza $S^1_+ = \{(cos\theta, \sin\theta) \mid 0 \le \theta \le \pi\}$; quando facciamo variare t tra 0 ed ℓ, l'immagine di η è la semicirconferenza $S^1_+ = \{(cos\theta, \sin\theta) \mid \pi \le \theta \le 2\pi\}$; ne segue che η ha grado 1. Questo completa la dimostrazione. □

TEOREMA 4.5. *Sia $\alpha : S^1 \in \mathbb{R}^2$ una curva chiusa di classe $\mathcal{C}^2$, regolare. Condizione necessaria e sufficiente affinché α sia convessa è che sia semplice e che la sua curvatura k_α non cambi segno.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo α come una funzione periodica $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Supporremo inoltre che essa sia parametrizzata per lunghezza d'arco, dimodoché $\dot\alpha : \mathbb{R} \to S^1$ coincide con la (4.2). Rialziamo la $\dot\alpha$ ad una funzione $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Possiamo supporre per semplicità che $\dot\alpha = (1,0)$, in modo da poter scegliere $\phi(0) = 0$. Sia $\ell > 0$ la lunghezza di α.

Supponiamo ora che α sia semplice e che $k_\alpha(t)$ non cambi segno. Supponiamo per assurdo che α non sia convessa. Allora esiste un t_0, che possiamo supporre con $0 < t_0 < \ell$, tale che vi siano punti di $\alpha(\mathbb{R})$ situati da bande opposte rispetto alla tangente ad α in t_0. Ciò significa che la funzione:

$$h : \mathbb{R} \ni t \to (\alpha(t) - \alpha(t_0) | \mathbf{n}_\alpha(t_0)) \in \mathbb{R}$$

assume sia valori positivi che negativi. Poiché è periodica di periodo ℓ, avrà un massimo per un valore $t_1 \neq t_0$ ed un minimo per un valore $t_2 \neq t_0$ del parametro, che potremo scegliere con $0 \le t_1 \neq t_2 < \ell$. Le tangenti ad α nei punti t_0, t_1, t_2 sono tutte tra loro parallele. In particolare due dei vettori $\dot\alpha(t_0), \dot\alpha(t_1), \dot\alpha(t_2)$ sono uguali. Ne segue che sono uguali anche due dei valori $\{\phi(t_i) \mid i = 1,2,3\}$. Ma ϕ è monotona non decrescente, e questo implicherebbe ϕ costante su un intervallo tra due dei punti t_0, t_1, t_2, dando così una contraddizione.

Supponiamo viceversa che α sia convessa. Chiaramente deve essere semplice. Supponiamo per assurdo che la curvatura k_α cambi segno. Ci sarebbero allora punti t_1, t_2 con $0 \leq t_1 < t_2 < \ell$, con $\phi(t_1) = \phi(t_2)$ e ϕ non costante per $t \in [t_1, t_2]$. Per il Teorema tm:dfadd 4.4 esiste un punto $t_3 \in [0, \ell)$ tale che $\dot{\alpha}(t_3) = -\dot{\alpha}(t_1)$. Per la convessità, due delle tangenti nei punti $\alpha(t_1), \alpha(t_2), \alpha(t_3)$ devono coincidere. Ma in questo caso la curva deve coincidere con il segmento di tangente tra i due punti aventi tangente comune. Questo dimostra che ϕ è costante sul segmento corrispondente e che quindi k_α non cambia segno in $[0, \ell]$. □

DEFINIZIONE 4.6. La *curvatura* totale di una curva piana regolare $\alpha : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ di classe $\mathcal{C}^2$, parametrizzata per lunghezza d'arco, è il numero:

eq:bakc
$$\int_0^\ell |k_\alpha(s)|\, ds \tag{4.3}$$

TEOREMA 4.7 (Fenchel). *La curvatura totale di una curva chiusa di classe $\mathcal{C}^2$ e regolare è sempre maggiore o uguale di 2π, ed è uguale a 2π solo nel caso di una curva semplice piana convessa.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti:

$$\left| \int_0^\ell k_\alpha(s) ds \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_\alpha(s)}{ds} \right| = 2\pi$$

e dunque

$$2\pi = \left| \int_0^\ell k_\alpha(s) ds \right| \leq \int_0^{2\pi} |k_\alpha(s)|\, ds.$$

Perché valga l'uguaglianza, occorre e basta che k_α abbia segno costante, cioè che la curva α sia connvessa. □

CAPITOLO 23

Metriche Riemanniane e pseudo-Riemanniane

cp:o

1. Metriche Riemanniane e pseudo-Riemanniane. Invarianti e parametri differenziali

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathrm{g} : T\Omega \to \mathbb{R}$ una forma differenziale quadratica: ciò significa che, per ogni $x \in \Omega$, la $\mathrm{g}_x : T_x\Omega \simeq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una forma quadratica e che, se $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ è un campo di vettori di classe $\mathcal{C}^\infty$ in Ω, la $\Omega \ni x \to \mathrm{g}_x(X_x) \in \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$. La sua *matrice dei coefficienti* $(g_{i,j}(x))_{1\le i,j\le n}$ definisce un'applicazione di classe $\mathcal{C}^\infty$ a valori in $\mathbb{R}^{n^2}$.

Fissato un intero $m \ge 0$, indichiamo con $N(n,m)$ il numero di multiindici $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le m$. Possiamo allora considerare l'applicazione differenziabile:

eq:supca

$$\jmath_m(\mathrm{g}) : \Omega \ni x \to (D^\alpha_x g_{i,j})_{\substack{1\le i,j\le n \\ |\alpha|\le m}} \in \mathbb{R}^{n^2 N(n,m)}. \tag{1.1}$$

In modo analogo, se $u \in \mathcal{E}(\Omega)$, definiamo il suo *getto di ordine* m come l'applicazione differenziabile:

eq:supcaa

$$\jmath_m(u) : \Omega \ni x \to (D^\alpha u)_{|\alpha|\le m} \in \mathbb{R}^{N(n,m)}. \tag{1.2}$$

Definizione 1.1. Chiamiamo *invariante differenziale di ordine m della forma* g un'applicazione differenziabile:

eq:supcb

$$\Phi : \mathbb{R}^{n^2 N(n,m)} \to \mathbb{R} \tag{1.3}$$

tale che, per ogni diffeomorfismo $\psi : \Omega_1 \to \Omega$ di un aperto Ω_1 di $\mathbb{R}^n$ su Ω, risulti:

eq:supcc

$$\Phi(\jmath_m(\mathrm{g}(x)))|_{x=\psi(y)} = \Phi(\jmath_m(\mathrm{g} \circ d\psi(y))) \qquad \forall y \in \Omega_1. \tag{1.4}$$

Definizione 1.2. Indicheremo nel seguito con $\psi^*\mathrm{g} : T\Omega_1 \to \mathbb{R}$ la forma differenziale quadratica $\mathrm{g} \circ d\psi$ su Ω_1. Essa si dice il *pull-back* di g mediante l'applicazione differenziabile $\psi : \Omega_1 \to \Omega$.

Definizione 1.3. Siano m, k due interi non negativi. Chiamiamo *parametro differenziale di ordine m in k variabili* della forma g un'applicazione differenziabile:

eq:supcd

$$\Phi : \mathbb{R}^{n^2 N(n,m)} \times \underbrace{\mathbb{R}^{N(n,m)} \times \cdots \times \mathbb{R}^{N(n,m)}}_{k \text{ volte}} \to \mathbb{R} \tag{1.5}$$

che gode della proprietà:

eq:supce
$$\begin{aligned}&\Phi(\jmath_m(\mathrm{g}_x),\jmath_m(u_1)(x),\dots,\jmath_m(u_k)(x))|_{x=\psi(y)}\\ &\qquad=\Phi(\jmath_m(\mathrm{g}\circ d\psi_x),\jmath_m(u_1\circ\psi)(y),\dots,\jmath_m(u_k\circ\psi)(y))\\ &\forall y\in\Omega_1,\quad \forall u_1,\dots,u_k\in\mathcal{E}(\Omega),\quad \forall\text{diffeomorfismo}\quad \psi:\Omega_1\to\Omega.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Indichiamo con $g : T(\Omega)\times_\Omega T\Omega\to\mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica associata alla g:

$$g_x(v,w)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{g}(v+w)-\mathrm{g}(v)-\mathrm{g}(w)\right)\quad \forall x\in\Omega,\quad \forall v,w\in\mathbb{R}^n\simeq T_x\Omega.$$

Associamo alla g un'applicazione:

eq:supcea
$$g^\vee : T\Omega\to T^*\Omega\tag{1.7}$$

definita da:

eq:supceb
$$\begin{cases} g_x^\vee(v)\in {T^*}_x\Omega\quad \forall x\in\Omega,\quad \forall v\in\mathbb{R}^n\\ g^\vee(v)(w)=\langle w,g_x^\vee(v)\rangle=g_x(v,w)\quad \forall x\in\Omega,\quad \forall v,w\in\mathbb{R}^n.\end{cases}\tag{1.8}$$

DEFINIZIONE 1.4. Una forma differenziale quadratica $\mathrm{g}: T\Omega\to\mathbb{R}$ si dice una *metrica Riemanniana su* Ω se per ogni $x\in\Omega$ la forma quadratica g_x è *definita positiva*.

Essa si dice una *metrica pseudo-Riemanniana su* Ω se g_x è non degenere per ogni $x\in\Omega$.

Se g è non degenere, risultano univocamente determinate una:

eq:supcf
$$\begin{aligned}&\hat{\mathrm{g}} : T^*(\Omega)\to\mathbb{R}\quad \text{(forma quadratica)}\\ &\hat g : T^*(\Omega)\times_\Omega T^*\Omega\to\mathbb{R}\quad \text{(forma bilineare simmetrica)}\end{aligned}\tag{1.9}$$

mediante:

eq:supcf
$$\begin{aligned}&\hat{\mathrm{g}}(g_x^\vee(v))=\mathrm{g}_x(v)\quad \forall x\in\Omega,\quad \forall v\in\mathbb{R}^n,\\ &\hat g(g_x^\vee(v),g_x^\vee(w))=g_x(v,w)\quad \forall x\in\Omega,\quad \forall v,w\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}\tag{1.10}$$

DEFINIZIONE 1.5. Le $\hat{\mathrm{g}}$, $\hat g$ si dicono le *reciproche* delle g, g, rispettivamente, e $\hat g$ è la forma bilineare simmetrica associata alla forma quadratica $\hat{\mathrm{g}}$.

Se [g] è la matrice associata a g nella base canonica, allora la matrice associata alla g è la ${}^t[\mathrm{g}]^{-1}=[\mathrm{g}]^{-1}$. Indicheremo con $(g_{i,j}(x))$ e $(g^{i,j}(x))$ le matrici dei coefficienti di g e di $\hat{\mathrm{g}}$, rispettivamente. Ricordiamo che abbiamo:

eq:supcg
$$\sum_{j=1}^n g^{i,j}g_{j,k}=\sum_{j=1}^n g_{k,j}g^{j,i}=\delta_k^i=\begin{cases}1 & \text{se}\quad i=k\\ 0 & \text{se}\quad i\neq k.\end{cases}\tag{1.11}$$

DEFINIZIONE 1.6. Poniamo, se $u,v\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$:

eq:supch
$$\nabla_g(u,v)=\sum_{i,j=1}^n g^{i,j}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^j}.\tag{1.12}$$

Esso di dice il *parametro differenziale primo di Beltrami*.

Abbiamo infatti:

PROPOSIZIONE 1.7. *La* (1.12) *defininsce un parametro differenziale di ordine uno in due variabili.*

OSSERVAZIONE 1.8. Ne segue che anche $\nabla_g^2(u) = \nabla_g(u,u)$ è un parametro differenziale, di ordine uno in una variabile.

1.1. L'operatore di Laplace-Beltrami.

LEMMA 1.9. *Sia* g *una forma differenziale quadratica su* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, sia* $\psi : \Omega_1 \to \Omega$ *un diffeomorfismo. Allora, per ogni aperto misurabile* $\omega \subset \Omega$ *ed ogni funzione* u *integrabile su* ω*, la* $\psi^* u = u \circ \psi$ *è integrabile su* $\psi^{-1}(\omega)$ *e vale:*

$$\int_\omega u(x)\,\sqrt{|\det[\mathrm{g}](x)|}\,dx = \int_{\psi^{-1}(\omega)} \psi^* u(x')\sqrt{|\det[\psi^*\mathrm{g}](x')|}\,dx'. \tag{1.13}$$

DIMOSTRAZIONE. La verifica è una semplice applicazione delle formule di cambiamento di variabile negli integrali multipli. □

DEFINIZIONE 1.10. Si dice *parametro differenziale secondo di Beltrami*, od *operatore di Laplace-Beltrami*, l'operatore differenziale alle derivate parziali:

$$\Delta_g u = |\det[\mathrm{g}(x)]|^{-1/2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(|\det[\mathrm{g}(x)]|^{-1/2} g^{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}\right). \tag{1.14}$$

PROPOSIZIONE 1.11. *L'operatore di Laplace-Beltrami* Δ_g *è un parametro differenziale di ordine due in una variabile della metrica pseudo-Riemanniana* g*.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $u, v \in \mathcal{E}(\Omega)$, tali che $u \cdot v$ abbia supporto compatto contenuto in un plurirettangolo $\{a^i \le x^i \le b^i\}$ contenuto in Ω. Se $\psi : \Omega' \to \Omega$ è un diffeomorfismo, otteniamo:

$$\int_\Omega \nabla_g(u,v)(x)\sqrt{|\det[\mathrm{g}_x]}dx = \int_{\Omega'} \nabla_g(u,v)(\psi(y))\sqrt{|\det[(\psi^*\mathrm{g})_y]}dy$$

(per il Lemma 1.9)

$$= \int_{\Omega'} \nabla_{\psi^* g}(\psi^* u, \psi^* v)\sqrt{|\det[(\psi^*\mathrm{g})_y]}dy$$

(perché ∇_g è un parametro differenziale.)

Poiché $u \cdot v$ ha supporto compatto in Ω, possiamo integrare per parti, ottenendo:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla_g(u,v)(x)\sqrt{|\det[\mathrm{g}_x]}dx &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n g^{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^j}\sqrt{|\det[\mathrm{g}_x]}dx \\ &= -\int_\Omega v\cdot\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{|\det[\mathrm{g}_x]}\, g^{i,j}\frac{\partial u}{\partial x^i}\right)dx \\ &= -\int_\Omega v\,\Delta_g u\,\sqrt{|\det[\mathrm{g}_x]}dx.\end{aligned}$$

Analogamente, sempre mediante integrazione per parti abbiamo:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega'} \nabla_{\psi^* g}(\psi^* u,\psi^* v)(y)\sqrt{|\det[(\psi^*\mathrm{g})_y]}dy \\ &\qquad = \int_{\Omega'} \psi^* v(y)\,\Delta_{\psi^* g}(\psi^* u)(y)\sqrt{|\det[(\psi^*\mathrm{g})_y]}dy\end{aligned}$$

che, per il Lemma lm:supci 1.9, dà:

$$= \int_\Omega v\,[\Delta_{\psi^* g}(\psi^* u)](\psi(x))\sqrt{|\det[\mathrm{g}_x]}dx.$$

Poiché ques'uguaglianza vale per ogni $v \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{comp}}(\Omega)$, ne segue che:

$$\Delta_{\psi^* g}(\psi^* u) = \psi^*(\Delta_g u) \quad \forall u \in \mathcal{E}(\Omega),$$

e questo dimostra che Δ_g è un parametro differenziale. □

Esempio 1.12. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathrm{g}_x = \sum_{i=1}^n \left[dx^i\right]^2$ per ogni $x \in \Omega$. Allora:

eq:supcl (1.15)
$$\Delta_g = \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i}$$

è l'*operatore di Laplace* in n variabili.

Esempio 1.13. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e siano $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{E}(\Omega)$ funzioni reali che non si annullano in nessun punto di Ω. Consideriamo la metrica Riemanniana su Ω:

$$\mathrm{g}_x = \sum_{i=1}^n h_i^2(x)\left[dx^i\right]^2.$$

Allora:

$$\Delta_g = \frac{1}{h_1(x)\cdots h_n(x)}\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{h_1(x)\cdots h_n(x)}{h_i^2(x)}\frac{\partial u}{\partial x^i}\right).$$

Applichiamo questa formula per calcolare, ad esempio, l'operatore di Laplace in coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$. Siano:

$$\begin{cases} x^1 = \rho\sin\theta\cos\phi \\ x^2 = \rho\sin\theta\sin\phi \\ x^3 = \rho\cos\theta. \end{cases}$$

Allora

$$\mathrm{g} = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

e dunque

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right)\right).$$

ESEMPIO 1.14. Consideriamo in $\mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ la metrica pseudo-Riemanniana

$$\mathrm{g} = dt^2 - \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2.$$

Allora

$$\Delta_g = \Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial(x^i)^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$$

è l'*operatore delle onde* in 1 coordinata temporale ed n coordinate spaziali.

ESEMPIO 1.15. Consideriamo la superficie sferica di $\mathbb{R}^3$, parametrizzata mediante:

$$\begin{cases} x^1 = \sin\theta\cos\phi \\ x^2 = \sin\theta\sin\phi \\ x^3 = \cos\theta. \end{cases}$$

La sua prima forma fondamentale è:

$$g = ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2.$$

Abbiamo allora per i parametri differenziali di Beltrami:

$$\begin{aligned} \nabla_g(u,v) &= \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\frac{\partial v}{\partial\phi} \\ \Delta_g u &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}. \end{aligned}$$

2. Equazioni differenziali ai differenziali totali

sec:supd

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ e siano assegnate funzioni $b^i_j \in \mathcal{E}(\Omega)$, per $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$.

DEFINIZIONE 2.1. L'espressione

eq:supda

$$dy^i = \sum_{j=1}^{n} b^i_j(x,y)dx^j \quad \text{per} \quad i = 1,\dots,m \tag{2.1}$$

si dice *equazione differenziale ai differenziali totali*.

Una soluzione di (2.1) è un'applicazione $\phi \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^m)$, definita su un aperto U di $\mathbb{R}^n$, tale che:

$$\begin{cases} (x, \phi(x)) \in \Omega \quad \forall x \in U \\ d\phi^i(x) = \sum_{j=1}^n b^i_j(x, \phi(x)) dx^j \quad \text{per} \quad i = 1, \dots, m, \end{cases} \tag{2.2}$$

ovvero:

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial x^j} = b^i_j(x, \phi(x)) \quad \text{per} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.3}$$

TEOREMA 2.2. (1) *Se $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ sono soluzioni di (2.3), definite su un intorni U, V di $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\phi(x_0) = \psi(x_0)$, allora $\phi(x) = \psi(x)$ su un intorno $W \subset U \cap V$ di x_0 in $\mathbb{R}^n$.*

(2) *Condizione necessaria e sufficiente affinché, per ogni $(x_0, y_0) \in \Omega$ vi sia una soluzione $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ di (2.3), definita in un intorno U di x_0 in $\mathbb{R}^n$, con $\phi(x_0) = y_0$, è che siano soddisfatte le condizioni di integrabilità:*

$$\frac{\partial b^i_j}{\partial x^k} - \frac{\partial b^i_k}{\partial x^j} + \sum_{h=1}^m \left(\frac{\partial b^i_j}{\partial y^h} b^h_k - \frac{\partial b^i_k}{\partial y^h} b^h_j \right) = 0 \quad \text{su} \quad \Omega \tag{2.4}$$
$$\forall i = 1, \dots, m, \ \forall j, k = 1, \dots, n.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che le soluzioni di (2.2) sono sottovarietà integrali massimali della distribuzione vettoriale $\mathcal{D}(\Omega)$ dei campi di vettori annullati dai differenziali $dy^i - \sum_{j=1}^n b^i_j(x, y) dx^j$. Questa distribuzione è globalmente generata in Ω dai campi di vettori:

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^m b^i_j(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{2.5}$$

Sarà quindi sufficiente osservare che le (2.4) sono le condizioni necessarie e sufficienti affinché $\mathcal{D}(\Omega)$ sia completamente integrabile. La tesi è quindi una conseguenza del Teorema di Frobenius (Teorema 9.7 del Capitolo 10). □

DEFINIZIONE 2.3. Sia $F \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^\ell)$. Diciamo che $F = 0$ è un *integrale primo* del sistema differenziale ai differenziali totali (2.1) se, per ogni $j = 1, \dots, n$ esiste una matrice $M_j(x, y)$, di tipo $\ell \times \ell$, con coefficienti in $\mathcal{E}(\Omega)$, tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^n b^i_j \frac{\partial F}{\partial y^i} + M_j F = 0 \quad \text{su} \quad \Omega. \tag{2.6}$$

PROPOSIZIONE 2.4. *Se $F \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^\ell)$ ed $F = 0$ è un integrale primo del sistema differenziale ai differenziali totali (2.1), U un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ una soluzione di (2.2), con $F(x_0, \phi(x_0)) = 0$ per un $x_0 \in U$, allora $F(x, \phi(x)) = 0$ per ogni $x \in U$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\alpha : (a,b) \to U$ una curva differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$, con $a < 0 < b$ e $\alpha(0) = x_0$. Differenziando $\Phi : (a,b) \ni t \to F(\alpha(t), \phi(\alpha(t)))$, otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(t)}{dt} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial y^i}\frac{\partial \phi^i}{\partial x^j}\right)\dot\alpha^j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial y^i}b^i_j\right)\dot\alpha^j \\ &= \underbrace{\left[-\sum_{j=1}^{n} M_j(\alpha(t),\phi(\alpha(t)))\dot\alpha^j\right]}_{A(t)}\Phi(t).\end{aligned}$$

Poiché $\Phi(0) = 0$, dall'unicità della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases}\dot\Phi = A(t)\Phi \quad a < t < b \\ \Phi(0) = 0\end{cases}$$

segue che $\Phi(t) = 0$ per ogni $a < t < b$, cioè $F(\alpha(t), \phi(\alpha(t))) = 0$ per $a < t < b$. Poiché abbiamo supposto U connesso, otteniamo che che $F(x, \phi(x)) = 0$ per ogni $x \in U$. □

TM:supdd

TEOREMA 2.5. *Sia $F \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^\ell)$ ed $F = 0$ è un integrale primo del sistema differenziale ai differenziali totali (2.1). Supponiamo valga la condizione d'integrabilità:*

eq:supdg

$$(2.7)\quad \begin{cases}\dfrac{\partial b^i_j}{\partial x^k} - \dfrac{\partial b^i_k}{\partial x^j} + \displaystyle\sum_{h=1}^{m}\left(\frac{\partial b^i_j}{\partial y^h}b^h_k - \frac{\partial b^i_k}{\partial y^h}b^h_j\right) = 0 \\ \text{se } (x,y) \in \Omega \quad e \quad F(x,y) = 0, \quad \forall i = 1,\dots,m,\ \forall j,k = 1,\dots,n.\end{cases}$$

Allora, per ogni $(x_0, y_0) \in \Omega$ con $F(x_0, y_0)$ esiste un intorno aperto U di x_0 in $\mathbb{R}^n$ ed una soluzione $\phi \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ di (2.2) con $\phi(x_0) = y_0$.

DIMOSTRAZIONE. Se lo Jacobiano di F ha rango costante, allora $N = \{F = 0\}$ è una sottovarietà differenziabile di Ω. Allora la condizione (2.6) ci dice che i campi di vettori (2.5) sono tangenti alla sottovarietà differenziabile N e la (2.7) che le loro restrizioni ad N generano una distribuzione vettoriale completamente integrabile. Il Teorema 2.5 è quindi in questo caso una diretta conseguenza del teorema di Frobenius sulle varietà differenziabili.

Diamo ora una dimostrazione che non richiede nessuna ipotesi sulla F.

Per il teorema d'esistenza e unicità per le soluzioni di sistemi di equazioni differenziali ordinarie, fissato un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, per un $\epsilon > 0$ sono univocamente determinate funzioni $\psi^i(t; x)$, per $i = 1, \dots, m$, definite per

$|t| < \epsilon$, $|x - x_0| < \epsilon$, che risolvono il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi^i(t;x)}{\partial t} = \sum_{j=1}^n b_j^i(x_0 + t(x-x_0), \psi(t;x))(x^j - x_0^j) \\ \qquad\qquad \text{per } i = 1, \dots, m, \quad |t| < \epsilon \\ \psi(0,x) = y_0. \end{cases}$$

Definiamo le funzioni w_j^i ponendo:

$$\frac{\partial \psi^i(t;x)}{\partial x^j} = t b_j^i(x_0 + t(x-x_0), \psi(t;x)) + w_j^i \quad \text{per } i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n.$$

Otteniamo allora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial \psi^i(t;x)}{\partial t} &= b_j^i + \sum_{h=1}^n (x^h - x_0^h)\left\{ t\frac{\partial b_h^i}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial b_h^i}{\partial y^k}\frac{\partial \psi^k}{\partial x^j}\right\} \\ &= b_j^i + t \cdot \sum_{h=1}^n (x^h - x_0^h)\frac{\partial b_h^i}{\partial x^j} + t \cdot \sum_{k=1}^m \frac{\partial b_h^i}{\partial y^k} b_j^k + \sum_{k=1}^m \frac{\partial b_h^i}{\partial y^k} w_j^k \end{aligned}$$

e, analogamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \psi^i(t;x)}{\partial x^j} &= b_j^i + t \cdot \sum_{k=1}^m \frac{\partial b_j^i}{\partial y^k}\frac{\partial \psi^k}{\partial t} + \frac{\partial w_j^i}{\partial t} + t \cdot \sum_{h=1}^n \frac{\partial b_j^i}{\partial x^h}(x^h - x_0^h) \\ &= b_j^i + t \cdot \left(\sum_{h=1}^n \left[\sum_{k=1}^m \frac{\partial b_j^i}{\partial y^k} b_h^k + \frac{\partial b_j^i}{\partial x^h}\right](x^h - x_0^h)\right) + \frac{\partial w_j^i}{\partial t}. \end{aligned}$$

Uguagliando le due espressioni, otteniamo la

$$\frac{\partial w_j^i}{\partial t} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial b_k^i}{\partial y^k} w_j^k = t \cdot \sum_{h=1}^n (x^h - x_0^h)\left\{ \frac{\partial b_h^i}{\partial x^j} - \frac{\partial b_j^i}{\partial x^h} + \sum_{k=1}^m \left[\frac{\partial b_h^i}{\partial y^k} b_j^k - \frac{\partial b_j^i}{\partial y^k} b_h^k \right] \right\}.$$

Posto $\Phi(t) = F(x_0 + t(x - x_0), \psi(t,x))$, otteniamo:

eq:supstar

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot\Phi(t) = \sum_{j=1}^n \dfrac{\partial F}{\partial x^j}(x^j - x_0^j) + \sum_{i=1}^m \dfrac{\partial F}{\partial y^i}\dfrac{\partial \psi^i}{\partial t} \\ \qquad = \sum_{j=1}^n (x^j - x_0^j)\left\{ \dfrac{\partial F}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^m \dfrac{\partial F}{\partial y^i} b_j^i \right\} \\ \qquad = \sum_{j=1}^n (x^j - x_0^j) M_j \Phi, \\ \Phi(0) = 0. \end{cases}$$

Quindi, per il teorema di unicità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie, otteniamo che $\Phi(t) = 0$ per $|t| < \epsilon$, cioè

$$F(x_0 + t(x - x_0), \psi(t;x)) = F(x_0, y_0) = 0 \quad \forall |t| < \epsilon, \quad \forall |x - x_0| < \epsilon.$$

Per l'ipotesi fatta il secondo membro di (∗) è identicamente nullo. D'altra parte, poiché $\psi^i(0;x)$ è costante, abbiamo

$$w^i_j(0;x) = \frac{\partial \psi^i(0;x)}{\partial x^j} = 0$$

e quindi dalla (∗) otteniamo che $w^i_j = 0$ per $|t| < \epsilon$, $|x - x_0| < \epsilon$.

Questa ci dà:

$$\frac{\partial \psi^i(t;x)}{\partial x^j} = t \cdot b^i_j(x_0 + t(x - x_0), \psi(t;x)) \quad \text{se} \quad |t| < \epsilon,\ |x - x_0| < \epsilon.$$

Fissiamo allora δ con $0 < \delta < \min\{\epsilon, 1\}$. Allora

$$\phi^i(x) = \psi^i(\delta; x_0 + (x - x_0)/\delta) \quad \text{per } i = 1, \dots, m$$

è definita per $|x - x_0| < \delta^2$ e risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^i(x)}{\partial x^j} &= \frac{1}{\delta} \frac{\partial \psi^i(\delta; x_0 + (x - x_0)/\delta)}{\partial x^j} \\ &= \frac{1}{\delta} \left[\delta \cdot b^i_j(x_0 + \delta \cdot \frac{x - x_0}{\delta}, \phi(x)) \right] \\ &= b^i_j(x, \phi(x)) \qquad \text{per } |x - x_0| < \delta^2. \end{aligned}$$

□

sec:supe

3. Simboli di Christoffel e differenziazione covariante

Nei paragrafi seguenti affrontiamo il problema dell'equivalenza di metriche pseudo-Riemanniane. Per affrontare analiticamente il problema, considereremo le metriche definite su aperti di coordinate. Ci porremo cioè il problema, date due metriche pseudo-Riemanniane $g : T\Omega \to \mathbb{R}$ e $g' : T\Omega' \to \mathbb{R}$, definite su due aperti $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, di trovare sotto quali condizioni esista un diffeomorfismo $\phi : \Omega' \to \Omega$ tale che $g' = \phi^* g$. Nei coefficienti delle due metriche rispetto alle coordinate canoniche di $\mathbb{R}^n$, l'equivalenza equivale al sistema di equazioni:

eq:supea

$$\begin{cases} g'_{i,j}(y) = \sum_{h,k=1}^n g_{h,k}(x) \dfrac{\partial \phi^h(y)}{\partial y^i} \dfrac{\partial \phi^k(y)}{\partial y^j}, \\ y = \phi(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

Per scrivere le relazioni che dovranno essere soddisfatte dalle derivate parziali seconde delle soluzioni di (3.1), introduciamo i simboli di Christoffel di una metrica pseudo-Riemanniana.

DEFINIZIONE 3.1. Sia $g = \sum_{i,j=1}^n g_{i,j} dx^i dx^j$ una metrica pseudo-Riemanniana su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. I *simboli di Christoffel di prima specie di* g sono le funzioni

eq:supeb

$$\Gamma_{i,j;k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{i,k}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k} \right). \tag{3.2}$$

Indichiamo con $(g^{i,j})$ i coefficienti della reciproca. I *simboli di Christoffel di seconda specie di* g sono le funzioni:

eq:supec
$$\Gamma^k_{i,j} = \sum_{h=1}^{n} g^{k,h}\Gamma_{i,j;h}. \tag{3.3}$$

Osserviamo che i simboli di Christoffel $\Gamma_{i,j;k}$ e $\Gamma^k_{i,j}$ sono simmetrici rispetto ai due indici i, j.

PROPOSIZIONE 3.2. *Siano $g : T\Omega \to \mathbb{R}$ e $g' : T\Omega' \to \mathbb{R}$ due metriche pseudo-Riemanniane definite su aperti $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$. Se $\phi : \Omega' \to \Omega$ è un diffeomorfismo per cui $g' = \phi^* g$, allora deve risultare, per ogni $i, \alpha, \beta = 1, \dots, n$,*

eq:suped
$$\frac{\partial^2 \phi^i(y)}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = \sum_\gamma {\Gamma'}^\gamma_{\alpha,\beta}(y)\frac{\partial \phi^i(y)}{\partial y^\gamma} - \sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}(\phi(y))\frac{\partial \phi^j(y)}{\partial y^\alpha}\frac{\partial \phi^k(y)}{\partial y^\beta}. \tag{3.4}$$

Abbiamo indicato qui con ${\Gamma'}^\gamma_{\alpha,\beta}$ i simboli di Christoffel di seconda specie della metrica g'.

DIMOSTRAZIONE. Derivando l'equazione (3.1) otteniamo

eq:supee
$$A_{\alpha,\beta;\gamma} := \frac{\partial {g'}_{\alpha,\beta}}{\partial y^\gamma} = \sum_{i,j,k}\frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k}\frac{\partial \phi^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial \phi^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial \phi^k}{\partial y^\gamma} + 2\sum_{i,j} g_{i,j}\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial y^\alpha \partial y^\gamma}\frac{\partial \phi^j}{\partial y^\beta} \tag{3.5}$$

Otteniamo allora:

$$\frac{1}{2}(A_{\alpha,\gamma;\beta} + A_{\beta,\gamma;\alpha} - A_{\alpha,\beta;\gamma}) = \sum_{i,j,k}\Gamma_{i,j;k}\frac{\partial \phi^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial \phi^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial \phi^k}{\partial y^\gamma} + \sum_{i,j} g_{i,j}\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial y^\alpha \partial y^\gamma}\frac{\partial \phi^j}{\partial y^\beta}.$$

Moltiplichiamo ambo i membri per $\frac{\partial \phi^i}{\partial y^\nu} g'^{\gamma,\nu}$ e sommiamo rispetto all'indice $\gamma = 1, \dots, n$. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi^h}{\partial y^\nu}{\Gamma'}^\nu_{\alpha,\beta} = &\sum_{i,j,k,\nu,\gamma}\Gamma_{i,j;k} g'^{\gamma,\nu}\frac{\partial \phi^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial \phi^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial \phi^k}{\partial y^\gamma}\frac{\partial \phi^h}{\partial y^\nu} \\ &+ \sum_{i,j,\gamma} g_{i,k} g'^{\gamma,\nu}\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\frac{\partial \phi^j}{\partial y^\gamma}\frac{\partial \phi^h}{\partial y^\nu}.\end{aligned}$$

Poiché

$$\sum_{\gamma,\nu} g'^{\gamma,\nu}\frac{\partial \phi^k}{\partial y^\gamma}\frac{\partial \phi^h}{\partial y^\nu} = g^{k,h},$$

sommando rispetto a $\nu = 1, \dots, n$ otteniamo la (3.4). □

La (3.4) è la *formula di trasformazione dei simboli di Christoffel* [1]. Posto $x = \phi(y)$, $y = \phi^{-1}(x)$, abbiamo

$$\Gamma'^{\alpha}_{\beta,\gamma} = \sum_i \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^\beta \partial y^\gamma} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma} \right) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}, \tag{3.6}$$

$$\Gamma^i_{j,k} = \sum_\alpha \left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j \partial x^k} + \sum_{\beta,\gamma} \Gamma'^{\alpha}_{\beta,\gamma} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k} \right) \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}. \tag{3.7}$$

DEFINIZIONE 3.3. Sia $X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ un campo di vettori su Ω. Per mezzo dei simboli di Christoffel di $\mathfrak{g}$ definiamo le *derivate covarianti* di X nella metrica g mediante

$$\nabla_i X = \sum_j \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} + \sum_h \Gamma^j_{i,h} a^h \right) \frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad \text{per } i = 1, \dots, n. \tag{3.8}$$

Più in generale, se $Y = \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(\Omega)$, definiamo la *derivata covariante* di X rispetto a Y come il campo di vettori

$$\nabla_Y X = \sum_{i=1}^n b^i \nabla_i X. \tag{3.9}$$

In particolare, i simboli di Christoffel sono i coefficienti delle derivate covarianti dei campi di vettori coordinati:

$$\nabla_i \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{h=1}^n \Gamma^h_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^h}. \tag{3.10}$$

DEFINIZIONE 3.4. Si definisce ancora il *differenziale covariante* del campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ come la *forma differenziale* a valori in $T\Omega$

$$\nabla X = \sum_{i=1}^n (\nabla_i X) dx^i. \tag{3.11}$$

LEMMA 3.5. *La differenziazione covariante gode delle proprietà*

$$\nabla X + Y = \nabla X + \nabla Y \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Omega) \tag{3.12}$$

$$\nabla f X = X \otimes df + f \nabla X \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(\Omega), \quad \forall f \in \mathcal{E}(\Omega). \tag{3.13}$$

DIMOSTRAZIONE. La verifica è immediata. Osserviamo che le (3.12) e (3.13) si possono anche scrivere nella forma:

$$\nabla_Z X + Y = \nabla_Z X + \nabla_Z Y \qquad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Omega) \tag{3.14}$$

$$\nabla_Z f X = (Z(f))X + f \nabla_Z X \qquad \forall X, Z \in \mathfrak{X}(\Omega), \quad \forall f \in \mathcal{E}(\Omega), \tag{3.15}$$

$$\nabla_{fZ} X = f \nabla_Z X \qquad \forall X, Z \in \mathfrak{X}(\Omega), \quad \forall f \in \mathcal{E}(\Omega). \tag{3.16}$$

□

[1] Queste formule si chiamano anche *equazioni di gauge* della connessione definita dalla metrica g.

Sia $\phi : \Omega' \to \Omega$ un diffeomorfismo. Associamo al campo di vettori $X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ il campo di vettori

eq:supek
$$\phi^*(X) = \sum_{i,\alpha=1}^{n} a^i(x) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \qquad (x = \phi(y)), \tag{3.17}$$

ove $y^\alpha(x)$ è la componente α-esima di $\phi^{-1} : \Omega \to \Omega'$.

In modo analogo, se $\eta = \sum_{i,j} a^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ è un tensore 1-covariante e 1-controvariante, porremo

eq:supeka
$$\phi^*\eta = \sum_{i,j,\alpha,\beta} a^i_j(x) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \otimes dy^\beta. \tag{3.18}$$

PROPOSIZIONE 3.6. *Sia $\phi : \Omega' \to \Omega$ un diffeomorfismo e sia $\mathrm{g}' = \phi^*\mathrm{g}$ il pull-back di una metrica pseudo-Riemanniana g su Ω. Allora, indicando con ∇' la differenziazione covariante rispetto alla metrica g', abbiamo*

eq:supel
$$\nabla'_{\phi^*(Y)}(\phi^*(X)) = \phi^*(\nabla_Y X) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Omega), \tag{3.19}$$

cioè

eq:supela
$$\phi^*(\nabla X) = \nabla'(\phi^*(X)). \tag{3.20}$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma lm:supee 3.5 è sufficiente verificare la (eq:supel 3.19) nel caso in cui X e Y siano campi di vettori coordinati. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\nabla'_{\phi^* \frac{\partial}{\partial x^i}} \phi^* \frac{\partial}{\partial x^j} &= \nabla'_{\sum_\alpha \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \left(\sum_\beta \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right) \\
&= \sum_\alpha \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \nabla'_\alpha \left(\sum_\beta \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right) \\
&= \sum_{\alpha,\beta,k} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^\alpha} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\beta} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \Gamma'^{\gamma}_{\alpha,\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \\
&= \sum_\beta \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \Gamma'^{\gamma}_{\alpha,\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \\
&= \sum_\alpha \left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma'^{\alpha}_{\beta,\gamma} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial y^\alpha}.
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}
\phi^*(\nabla_i \frac{\partial}{\partial x^j}) &= \phi^* \left(\sum_h \Gamma^h_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^h} \right) \\
&= \sum_{h,\alpha} \Gamma^h_{i,j} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^h} \frac{\partial}{\partial y^\alpha},
\end{aligned}$$

e dunque la (eq:supel 3.19) segue dalla (eq:supedb 3.7). □

OSSERVAZIONE 3.7. Data una funzione $u \in \mathcal{E}(\Omega)$, la quantità:

eq:supef
$$u_{i,j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma^k_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x^k} \tag{3.21}$$

si dice *derivata seconda covariante* di u rispetto alla metrica g.

Si verifica che, passando a una metrica equivalente per mezzo di un cambiamento di coordinate (diffeomorfismo) $x = \phi(y)$, indicando con le lettere greche le derivate rispetto alle coordinate y, si ha

eq:supeg
$$u_{\alpha,\beta} = \sum_{i,j} u_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}. \tag{3.22}$$

Otteniamo, in termini delle derivate seconde covarianti, la scrittura dell'operatore di Laplace-Beltrami nella forma:

eq:supeh
$$\Delta_g u = \sum_{i,j} g^{i,j} u_{i,j}. \tag{3.23}$$

Verificheremo questa formula nel paragrafo seguente.

4. Proprietà dei simboli di Christoffel

pp:supfa
PROPOSIZIONE 4.1. *Sia g una metrica pseudo-Riemanniana su $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ e $\Gamma^i_{j,k}$ i suoi simboli di Christoffel di seconda specie. Valgono le relazioni:*

eq:supfa
$$\frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k} = \sum_h \Gamma^h_{i,k} g_{h,j} + \sum_h \Gamma^h_{j,k} g_{h,i}. \tag{4.1}$$

eq:supfb
$$\frac{\partial g^{i,j}}{\partial x^k} = -\sum_h \Gamma^h_{i,k} g^{h,j} - \sum_h \Gamma^h_{j,k} g^{h,i}. \tag{4.2}$$

eq:supfc
$$\frac{\partial \log \sqrt{\det(g_{i,j})}}{\partial x^i} = \sum_j \Gamma^j_{i,j}. \tag{4.3}$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dalla definizione che

$$\Gamma_{i,j;k} + \Gamma_{i,k;j} = \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i}.$$

Abbiamo ancora

$$\Gamma_{i,j;k} = \sum_h g_{k,h} \Gamma^h_{i,j},$$

e quindi si ottiene la (4.1):

$$\frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k} = \Gamma_{k,i;j} + \Gamma_{k,j;i} = \sum_h \left(g_{h,j} \Gamma^h_{i,k} + g_{h,i} \Gamma^h_{j,k} \right).$$

Per verificare la (4.2), differenziamo l'identità $\sum_h g_{i,h} g^{h,j} = \delta^j_i$. Otteniamo:

$$\frac{\partial g_{i,h}}{\partial x^k} g^{h,j} + g_{i,h} \frac{\partial g^{h,j}}{\partial x^k} = 0.$$

Quindi

$$\sum_h g_{i,h}\frac{\partial g^{h,j}}{\partial x^k} = -\sum_h g^{h,j}\sum_r \left(\Gamma^r_{i,k}g_{h,r} + \Gamma^r_{h,k}g_{r,i}\right)$$

da cui si ottiene, scambiando l'ordine delle sommatorie a secondo membro:

$$\sum_h g_{i,h}\frac{\partial g^{h,j}}{\partial x^k} = -\sum_r \Gamma^r_{i,k}\delta^j_r - \sum_{r,h} g^{h,j}\Gamma^r_{h,r}g_{r,j}.$$

Moltiplicando per $g^{s,i}$ ambo i membri, e sommando rispetto all'indice i, otteniamo:

$$\sum_h \delta^s_h\frac{\partial g^{h,j}}{\partial x^k} = -\sum_{r,i}\Gamma^r_{i,k}\delta^j_r g^{s,i} - \sum_{r,h,i} g^{h,j}\Gamma^r_{h,k}g_{r,i}g^{i,s}, \qquad \text{cioè:}$$

$$\frac{\partial g^{s,j}}{\partial x^k} = -\sum_i \Gamma^j_{i,k}g^{s,i} - \sum_h \Gamma^s_{h,k}g^{h,j},$$

che, cambiando i nomi degli indici, è la (4.2). eq:supfb

Ricaviamo ora la (4.3). eq:supfc Sia $(X^{i,j})$ la matrice aggiunta della $(x_{i,j})$: il coefficiente $X^{i,j}$ è il dederminante del minore ottenuto cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna della $(x_{i,j})$, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$. Per le formule di sviluppo di un determinante rispetto a una riga o a una colonna abbiamo:

eq:supfe (4.4) $$\det(x_{i,j}) = \sum_j x_{i,j}X^{i,j} = \sum_i x_{i,j}X^{i,j}.$$

La $X^{j,h}$ si può considerare come una funzione dei coefficienti $x_{r,s}$, e come tale è indipendente dalle $x_{i,h}$ e dalle $x_{h,j}$ per ogni $h = 1,\dots,n$. Otteniamo perciò

eq:supfd (4.5) $$\frac{\partial \det(x_{i,j})}{\partial x_{r,s}} = X^{r,s}.$$

Se $(x_{i,j})$ varia nell'aperto delle matrici invertibili e $(x^{i,j})$ denota la sua inversa, otteniamo quindi:

eq:supff (4.6) $$\frac{\partial \log|\det(x_{i,j})|}{\partial x_{r,s}} = x^{r,s}.$$

Applicando questa formula alla matrice dei coefficienti della metrica g troviamo:

$$\frac{\partial \log|\det(g_{h,k})|}{\partial x^i} = \sum_{r,s}\frac{\partial \log|\det(g_{h,k})|}{\partial x_{r,s}}\frac{\partial g_{r,s}}{\partial x^i}$$

$$= \sum_{r,s} g^{r,s}\sum_h \left(\Gamma^h_{r,i}g_{s,h} + \Gamma^h_{s,i}g_{r,h}\right) \quad = 2\sum_h \Gamma^h_{h,i},$$

da cui segue la (4.3). eq:supfc □

os:supfb

OSSERVAZIONE 4.2. La differenziazione covariante si estende ai tensori nel modo seguente. Se

$$t = \sum_{i_1,\dots,i_h;j_1,\dots,j_k} t^{i_1,\dots,i_h}_{j_1,\dots,j_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_h}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_k},$$

definiamo la sua derivata covariante rispetto al campo di vettori coordinato $\frac{\partial}{\partial x^i}$ mediante:

eq:supft

$$\begin{aligned}(\nabla_i t)^{i_1,\dots,i_h}_{j_1,\dots,j_k} &= \frac{\partial t^{i_1,\dots,i_h}_{j_1,\dots,j_k}}{\partial x^i} \\ &+ \sum_{r=1}^{h} \sum_{k} \Gamma^{i_r}_{i,k} t^{i_1,\dots,i_{r-1},k,i_{r+1},\dots,i_h}_{j_1,\dots,j_k} \\ &- \sum_{s=1}^{k} \Gamma^{s}_{i,j_s} t^{i_1,\dots,i_h}_{j_1,\dots,j_{s-1},k,j_{s+1},\dots,j_k}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Utilizzando l'Osservazione 4.2, possiamo riformulare le prime due affermazioni della Proposizione 4.1 mediante

PROPOSIZIONE 4.3. *Abbiamo*

$$\nabla(\sum_{i,j} g_{i,j} dx^i \otimes dx^j) = 0, \tag{4.8}$$

$$\nabla(\sum_{i,j} g^{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial dx^j}) = 0, \tag{4.9}$$

Utilizzando la (4.3) verifichiamo la (3.23).

$$\begin{aligned}\Delta_g u &= |\det(g_{h,k})|^{-1/2} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(|\det(g_{h,k})|^{1/2} g^{i,j} \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g^{i,j} \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) + \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{|\det(g_{h,k})|}} \frac{\partial \sqrt{|\det(g_{h,k})|}}{\partial x^j} g^{i,j} \frac{\partial u}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g^{i,j} \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial \log |\det(g_{h,k})|}{\partial x^j} g^{i,j} \frac{\partial u}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(g^{i,j} \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) + \sum_{i,j,r} \Gamma^r_{r,j} g^{i,j} \frac{\partial u}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_r \Gamma^r_{r,j} \right) \left(g^{i,j} \frac{\partial u}{\partial x^i} \right).\end{aligned}$$

Da questa, utilizzando anche le (4.2), otteniamo:

$$\begin{aligned}
\Delta_g u &= \sum_{i,j}\left(g^{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^j}+\frac{\partial g^{i,j}}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i}+\sum_h \Gamma^h_{h,j}g^{i,j}\frac{\partial u}{\partial x^i}\right)\\
&= \sum_{i,j}\left(g^{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_h \Gamma^h_{h,j}g^{i,j}\frac{\partial u}{\partial x^i}-\sum_h \Gamma^i_{j,h}g^{h,j}\frac{\partial u}{\partial x^i}-\sum_h \Gamma^j_{j,h}g^{h,i}\frac{\partial u}{\partial x^i}\right)\\
&= \sum_{i,j}\left(g^{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^j}-\sum_h \Gamma^i_{j,h}g^{h,j}\frac{\partial u}{\partial x^i}\right)\\
&= \sum_{i,j}\left(g^{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^j}-\sum_h \Gamma^h_{i,j}g^{i,j}\frac{\partial u}{\partial x^h}\right)\\
&= \sum_{i,j} g^{i,j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^j}-\Gamma^h_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x^h}\right)\\
&= \sum_{i,j} g^{i,j}u_{i,j}.
\end{aligned}$$

smp:supdd

ESEMPIO 4.4. Consideriamo il caso $n=2$. Allora i simboli di Christoffel di prima specie sono:

$$\begin{cases}
\Gamma_{1,1;1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{1,1}}{\partial x^1}\\
\Gamma_{1,1;2}=\dfrac{\partial g_{1,2}}{\partial x^1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2}\\
\Gamma_{1,2;1}=\Gamma_{2,1;1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2}\\
\Gamma_{1,2;2}=\Gamma_{2,1;2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1}\\
\Gamma_{2,2;1}=\dfrac{\partial g_{1,2}}{\partial x^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1}\\
\Gamma_{2,2;2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{2,2}}{\partial x^2}
\end{cases}$$

Nel caso della prima forma fondamentale $g=d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2$ di una porzione di superficie sferica, queste formule danno:

$$\begin{array}{lll}
\Gamma_{1,1;1}=0 & \Gamma_{1,2;1}=\Gamma_{2,1;1}=0 & \Gamma_{2,2;1}=-\sin\theta\cos\theta\\
\Gamma_{1,1;2}=0 & \Gamma_{1,2;2}=\Gamma_{2,1;2}=\sin\theta\cos\theta & \Gamma_{2,2;2}=0,
\end{array}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{1,1}=\Gamma^2_{1,1}=\Gamma^1_{1,2}=\Gamma^1_{2,1}=\Gamma^2_{2,2}=0,\\
&\Gamma^2_{1,2}=\Gamma^2_{2,1}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta},\quad \Gamma^1_{2,2}=-\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned}$$

Le derivate seconde covarianti di una funzione u sono date da:

$$u_{\theta,\theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \quad u_{\theta,\phi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \phi} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}, \quad u_{\phi,\phi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - \sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

5. Le equazioni per l'equivalenza

Utilizziamo le notazioni introdotte nel §3. Data $\phi : \Omega' \to \Omega$, introduciamo le funzioni

eq:supga (5.1) $$\omega^i_\alpha = \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\alpha} \quad \text{per} \quad i, \alpha = 1, \dots, n.$$

Possiamo riscrivere (3.4) nella forma:

eq:supgb (5.2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi^i}{\partial y^\alpha} = \omega^i_\alpha, \\ \dfrac{\partial \omega^i_\alpha}{\partial y^\beta} = \displaystyle\sum_\gamma \Gamma'^{\gamma}_{\alpha,\beta}(y)\omega^i_\gamma - \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k}(\phi(y))\omega^j_\alpha \omega^k_\beta, \end{cases}$$

ovvero come un sistema di equazioni differenziali ai differenziali totali:

eq:supgc (5.3) $$\begin{cases} d\phi^i = \sum_\alpha \omega^i_\alpha dy^\alpha, \\ d\omega^i_\alpha = \sum_\gamma \Gamma'^{\gamma}_{\alpha,\beta}(y)\omega^i_\gamma dy^\beta - \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k}(\phi(y))\omega^j_\alpha \omega^k_\beta dy^\beta. \end{cases}$$

Dalla teoria generale su tali sistemi, descritta nel §2, assegnati ad arbitrio $x_0 \in \Omega$, $y_0 \in \Omega_1$ e $\bar\omega^i_\alpha$ (per $1 \le i, j \le n$), il sistema (5.3) ammette una e una sola soluzione, purché siano soddisfatte opportune condizioni di integrabilità.

Prima di esplicitare tali condizioni di integrabilità, è opportuno osservare che, affinché la soluzione di (5.3) risolva il problema dell'equivalenza di forme, occorre che i dati iniziali stessi soddisfino condizioni opportune. Infatti, per la (3.1) occorre che valga la:

eq:supgd (5.4) $$g'_{\alpha,\beta}(y_0) = \sum_{i,j} g_{i,j}(x_0)\bar\omega^i_\alpha \bar\omega^j_\beta.$$

Queste condizioni impongono $n(n+1)/2$ condizioni indipendenti sui dati iniziali (ricordiamo che le $g_{i,j}$ e $g'_{\alpha,\beta}$ sono simmetriche). Vale la

pp:supga PROPOSIZIONE 5.1 (Christoffel). *La funzione $F : \Omega_1 \times \Omega \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$, definita da:*

eq:supge (5.5) $$F(y, x, \omega) = (F_{\alpha,\beta})_{1 \le \alpha,\beta \le n} \quad \text{con} \quad F_{\alpha,\beta} = g'_{\alpha,\beta}(y) - \sum_{i,j} g_{i,j}(x)\omega^i_\alpha \omega^j_\beta$$

è differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ ed $F = 0$ è un integrale primo del sistema (5.3).

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo:

$$\begin{aligned}A_{\alpha,\beta,\gamma} :=& \frac{\partial F_{\alpha,\beta}}{\partial y^\gamma} + \sum_h \frac{\partial F_{\alpha,\beta}}{\partial x^h}\omega^h_\gamma + \sum_{i,\mu} \frac{\partial F_{\alpha,\beta}}{\partial \omega^i_\mu}\left(\sum_\nu {\Gamma'}^{\nu}_{\mu,\gamma}\omega^i_\nu - \sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}\omega^j_\gamma\omega^k_\mu\right)\\ =& \frac{\partial g'_{\alpha,\beta}}{\partial y^\gamma} - \sum_{i,j,h}\frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^h}\omega^i_\alpha\omega^j_\beta\omega^h_\gamma - \sum_{i,j,h,k} g_{i,j}\omega^j_\beta\left(\sum_\mu {\Gamma'}^{\mu}_{\alpha,\gamma}\omega^i_\mu - \sum_{r,s}\Gamma^i_{r,s}\omega^r_\alpha\omega^s_\gamma\right)\\ &- \sum_{i,j}\omega^i_\alpha\left(\sum_\mu {\Gamma'}^{\mu}_{\beta,\gamma}\omega^j_\mu - \sum_{r,s}\Gamma^j_{r,s}\omega^r_\beta\omega^s_\gamma\right).\end{aligned}$$

Utilizzando le relazioni (4.1) per i simboli di Christoffel, troviamo che questa espressione è uguale a:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial g'_{\alpha,\beta}}{\partial y^\gamma} - \sum_{i,j,h}\omega^i_\alpha\omega^j_\beta\omega^h_\gamma\left(\sum_k \Gamma^k_{i,h}g_{k,j} + \sum_k \Gamma^k_{j,h}g_{k,i}\right)\\ &\qquad + \sum_{i,j,h,k}\omega^k_\alpha\omega^j_\beta\omega^h_\gamma\Gamma^i_{j,h}g_{i,k} + \sum_{i,j,h,k}\omega^i_\alpha\omega^j_\beta\omega^h_\gamma\Gamma^k_{j,h}g_{i,k}\\ &\qquad - \sum_{i,j,\mu} g_{i,j}\omega^j_\beta\omega^i_\mu {\Gamma'}^{\mu}_{\alpha,\gamma} - \sum_{i,j,\mu} g_{i,j}\omega^j_\alpha\omega^i_\mu {\Gamma'}^{\mu}_{\beta,\gamma}.\end{aligned}$$

Il secondo addendo della prima si elide con gli addendi della seconda riga. Applicando ancora le relazioni (4.1) dei simboli di Christoffel otteniamo

$$\begin{aligned}A_{\alpha,\beta,\gamma} &= \sum_\mu (g'_{\alpha,\mu} - \sum_{i,j} g_{i,j}\omega^i_\alpha\omega^j_\mu){\Gamma'}^{\mu}_{\beta,\gamma} + \sum_\mu (g'_{\beta,\mu} - \sum_{i,j} g_{i,j}\omega^i_\beta\omega^j_\mu){\Gamma'}^{\mu}_{\alpha,\gamma}\\ &= \sum_\mu {\Gamma'}^{\mu}_{\alpha,\gamma}F_{\beta,\mu} + \sum_\mu {\Gamma'}^{\mu}_{\beta,\gamma}F_{\alpha,\mu},\end{aligned}$$

che ci dà la relazione cercata. □

In particolare, se per una soluzione di (5.3) risulta verificata la (3.1) in un punto y_0, la (3.1) sarà allora verificata in tutti i punti di un intorno connesso di y_0 in Ω_1.

6. Curvatura di una metrica pseudo-Riemanniana

DEFINIZIONE 6.1. Data una metrica pseudo-Riemanniana g, definita su un aperto di coordinate $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definiamo i suoi *simboli di Riemann di seconda specie* come le funzioni $R^i_{j,h,k} : \Omega \to \mathbb{R}$ definite da

$$R^i_{j;h,k} = \frac{\partial \Gamma^i_{j,h}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{j,k}}{\partial x^h} + \sum_{\ell=1}^n \left(\Gamma^\ell_{j,h}\Gamma^i_{\ell,k} - \Gamma^\ell_{j,k}\Gamma^i_{\ell,h}\right) \qquad i,j,h,k = 1,\dots,n. \tag{6.1}$$

Il significato geometrico dei simboli di Riemann è dato dalla

PROPOSIZIONE 6.2. *Sia* g *una metrica pseudo-Riemanniana nell'aperto di coordinate* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Allora, rispetto alla derivazione covariante associata, abbiamo:*

eq:supha
$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i)\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{i,j;k}^{h} R^h_{k;i,j}\frac{\partial}{\partial x^h}. \tag{6.2}$$

DEFINIZIONE 6.3. Definiamo il *tensore di Riemann* mediante

eq:suphb
$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y(Z) - \nabla_Y \nabla_X(Z) - \nabla_{[X,Y]}(Z). \tag{6.3}$$

DEFINIZIONE 6.4. Chiamiamo *simboli di Riemann di prima specie* le

eq:suphc
$$R_{i,j;h,k} = \sum_{h=1}^{n} g_{j,h} R^h_{i;h,k} \tag{6.4}$$

e chiamiamo *tensore di Riemann* la forma corrispondente:

eq:suphd
$$\sum_{i,j,h,k=1}^{n} R_{i,j;h,k} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^h \otimes dx^k. \tag{6.5}$$

Il fatto che (6.5) definisca un tensore è il contenuto della

PROPOSIZIONE 6.5. *Se* $\phi : \Omega' \to \Omega$, $x = \phi(y)$, *è un diffeomorfismo, ed* $R'_{\alpha,\beta;\gamma,\delta}$ *i simboli di Riemann corrispondenti al pull-back* ϕ^*g *della metrica* g *su* Ω, *allora*

eq:suphe
$$R'_{\alpha,\beta;\gamma,\delta} = \sum_{i,j,h,k=1}^{n} R_{i,j;h,k}\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial x^h}{\partial y^\gamma}\frac{\partial x^k}{\partial y^\delta}. \tag{6.6}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che la (6.6) è equivalente alla

eq:suphf
$$R'^{\alpha}_{\ \beta;\gamma,\delta} = \sum_{i,j,h,k=1}^{n} R^i_{j;h,k}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial x^h}{\partial y^\gamma}\frac{\partial x^k}{\partial y^\delta}. \tag{6.7}$$

La proposizione segue allora da

$$\begin{aligned}
\phi^*(R(X,Y)Z) &= \phi^*[(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})(Z)] \\
&= \nabla'_{\phi^*(X)}\phi^*(\nabla_Y(Z)) - \nabla'_{\phi^*(Y)}\phi^*(\nabla_X(Z)) - \nabla'_{\phi^*([X,Y])}\phi^*(Z) \\
&= \nabla'_{\phi^*(X)}\nabla'_{\phi^*(Y)}\phi^*(Z) - \nabla'_{\phi^*(Y)}\nabla'_{\phi^*(X)}\phi^*(Z) - \nabla'_{[\phi^*(X),\phi^*(Y)]}\phi^*(Z) \\
&= R'(\phi^*(X),\phi^*(Y))\phi^*(Z).
\end{aligned}$$

□

Le (6.6) esprimono le condizioni d'integrabilità delle equazioni ai differenziali totali (5.3). Infatti, sostituendo nelle (6.6) le ω^i_α alle $\partial x^i/\partial x^\alpha$, si ottiene la condizione che le derivate seconde delle ω^i_α non dipendano dall'ordine in cui si eseguono. Le condizioni d'integrabilità sulle ϕ^i sono automaticamente verificate perché i simboli di Christoffel sono simmetrici rispetto

ai due indici in basso. Questa condizione si esprime in modo equivalente dicendo che *la torsione della connessione metrica* è nulla:

eq:suphf (6.8) $$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Omega).$$

Riassumiamo i risultati ottenuti nel seguente:

tm:suphf TEOREMA 6.6. *Siano* g *e* g′ *due metriche pseudo-Riemanniane, definite su aperti di coordinate* Ω, Ω', *rispettivamente. Condizione necessaria e sufficiente affinché, assegnato* $(x_0, y_0) \in \Omega \times \Omega'$ *si possano trovare un intorno aperto* V *di* y_0 *in* Ω', *un intorno* U *di* x_0 *in* Ω, *ed un diffeomorfismo* $\phi : V \to U$ *tale che* $\mathrm{g}'|_V = \phi^*(\mathrm{g}|_U)$ *è che sia risolubile il sistema di equazioni:*

eq:suphga (6.9) $$\frac{\partial \phi^i}{\partial y^\alpha} = \omega^i_\alpha$$

eq:suphgb (6.10) $$\frac{\partial \omega^i_\alpha}{\partial y^\beta} = \sum_\gamma \Gamma'^{\gamma}_{\alpha,\beta} \omega^i_\gamma - \sum_{j,k} \Gamma^i_{j,k} \omega^j_\alpha \omega^k_\beta$$

eq:suphgc (6.11) $$g'_{\alpha,\beta}(y_0) = \sum_{i,j} g_{i,j}(x_0) \bar\omega^i_\alpha \bar\omega^j_\beta$$

eq:suphgd (6.12) $$R'_{\alpha,\beta;\gamma,\delta}(y) = \sum_{i,j,h,k} R_{i,j;h,k}(x) \omega^i_\alpha \omega^j_\beta \omega^h_\gamma \omega^k_\delta.$$

Il sistema (6.9), (6.10), (6.11), (6.12) si dice un *sistema misto*. Infatti, le (6.9), (6.10) sono equazioni differenziali, mentre le (6.11), (6.12) sono condizioni algebriche.

7. Proprietà del tensore di curvatura

TEOREMA 7.1. *I simboli di Riemann di prima specie soddisfano alle relazioni:*

eq:supiaa (7.1) $$R_{j,i;h,k} = -R_{i,j;h,k},$$

eq:supiab (7.2) $$R_{i,j;k,h} = -R_{i,j;h,k},$$

eq:supiac (7.3) $$R_{h,k;i,j} = R_{i,j;h,k},$$

eq:supiad (7.4) $$R_{i,j;h,k} + R_{i,h;k,i} + R_{i,k;j,h} = 0.$$

Possiamo scrivere il tensore di curvatura di Riemann anche nella forma

eq:supib (7.5) $$R(X,Y,U,V) = g(Y, R(U,V)X) \qquad \forall X, Y, U, V \in \mathfrak{X}(\Omega).$$

In questo modo, le (7.1), (7.2), (7.3), (7.4) si riscrivono, in modo invariante, nella forma:

eq:supica (7.6) $$R(Y,X,U,V) = -R(X,Y,U,V)$$

eq:supicb (7.7) $$R(X,Y,V,U) = -R(X,Y,U,V)$$

eq:supicc (7.8) $$R(U,V,X,Y) = R(X,Y,U,V)$$

eq:supicd (7.9) $$R(X,Y,U,V) + R(X,U,V,Y) + R(X,V,Y,U) = 0$$

$\forall X, Y, U, V \in \mathfrak{X}(\Omega)$.

(7.10)

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo innanzi tutto la (7.7). Abbiamo:

$$\begin{aligned} R(X,Y,V,U) &= g(Y, R(V,U)X) \\ &= -g(Y, R(U,V)X) \\ &= -g(X,Y,U,V) \end{aligned}$$

in quanto chiaramente

$$R(V,U) = \nabla_V\nabla_U - \nabla_U\nabla_V - \nabla_{[V,U]} = -R(U,V) = -(\nabla_U\nabla_V - \nabla_V\nabla_U - \nabla_{[U,V]}).$$

Osserviamo poi che vale l'*identità di Bianchi*

eq:supid (7.11) $$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} &(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X)Z + (\nabla_Y\nabla_Z - \nabla_Z\nabla_Y)X + (\nabla_Z\nabla_X - \nabla_X\nabla_Z)Y \\ &\quad - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\ &= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &\quad - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\ &= \nabla_X[Y,Z] - \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Y[Z,X] - \nabla_{[Z,X]}Y + \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \qquad \text{(per l'identità di Jacobi).} \end{aligned}$$

Diostriamo poi che vale

eq:supie (7.12) $$g(R(X,Y)Z,V) = -g(Z, R(Z,Y)V) \qquad \forall X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(\Omega).$$

Utilizziamo a tale scopo l'identità

eq:supif (7.13) $$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \qquad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Omega).$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,V) &= g(\nabla_X\nabla_Y Z, V) - g(\nabla_Y\nabla_X Z, V) - g(\nabla_{[X,Y]}Z, V) \\ &= Xg(\nabla_Y Z, V) - Yg(\nabla_X Z, V) - [X,Y]g(Z,V) \\ &\quad - g(\nabla_Y Z, \nabla_X V) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y V) - g(Z, \nabla_{[X,Y]}V) \\ &= XYg(Z,V) - YXg(Z,V) - [X,Y]g(Z,V) \\ &\quad - Xg(Z, \nabla_Y V) + Yg(Z, \nabla_X V) - Yg(Z, \nabla_X V) + Xg(Z, \nabla_Y V) \\ &\quad - g(Z, \nabla_{[X,Y]}V) + g(Z, \nabla_Y\nabla_X V) - g(Z, \nabla_X\nabla_Y V) \\ &= -g(Z, R(X,Y)V). \end{aligned}$$

Resta da dimostrare la (7.8). Mostriamo che essa è una conseguenza delle (7.6), (7.7), (7.9). Verifichiamo in primo luogo che vale anche la

eq:supie (7.14) $$R(X,Y,U,V) + R(Y,U,X,V) + R(U,X,Y,V) = 0.$$

Abbiamo infatti:

$$\begin{aligned}
R(X,Y,U,V) + R(X,U,V,Y) + R(X,V,Y,U) &= 0\\
R(Y,U,X,V) + R(Y,X,V,U) + R(Y,V,U,X) &= 0\\
R(U,X,Y,V) + R(U,Y,V,X) + R(U,V,X,Y) &= 0\\
R(V,X,Y,U) + R(V,Y,U,X) + R(V,U,X,Y) &= 0
\end{aligned}$$

Sommando le quattro uguaglianze, osserviamo che i terzi addendi nelle prime tre righe si semplificano con gli addendi della quarta riga. Abbiamo perciò

$$\begin{aligned}
0 &= R(X,Y,U,V) + R(X,U,V,Y) + R(Y,U,X,V)\\
&\quad + R(Y,X,V,U) + R(U,X,Y,V) + R(U,Y,V,X)\\
&= 2(R(X,Y,U,V) + R(Y,U,X,V) + R(U,X,Y,V)).
\end{aligned}$$

Otteniamo allora:

$$\begin{aligned}
R(X,Y,U,V) &= -R(X,U,V,Y) - R(X,V,Y,U)\\
&= R(U,V,X,Y) + R(V,X,U,Y) - R(X,V,Y,U)\\
&= R(U,V,X,Y).
\end{aligned}$$

Le (7.4), (7.9), (7.14) si dicono *identità di Bianchi algebriche.* □

8. Metriche a curvatura costante

TEOREMA 8.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una metrica pseudo-Riemanniana* g *sia localmente equivalente a una metrica a coefficienti costanti è che i suoi simboli di Riemann siano identicamente nulli. Due tali metriche sono equivalenti se e soltanto se hanno la stessa segnatura.*

DIMOSTRAZIONE. Se g ha coefficienti costanti in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, i suoi simboli di Christoffel e quindi anche i suoi simboli di Riemann sono nulli. Per le (6.12) i simboli di Riemann di una qualsiasi $\mathfrak{g}'$ equivalente alla $\mathfrak{g}$ saranno quindi anch'essi nulli. Dunque la condizione è necessaria.

Per verificare la sufficienza, data una g in Ω con i simboli di Riemann identicamente nulli, fissiamo una forma bilineare simmetrica $\mathrm{g}' = \sum_{i,j} c_{i,j} dx^i \otimes dx^j$ con i coefficienti costanti e con la stessa segnatura di $\mathrm{g}(y_0)$, per un punto $y_0 \in \Omega$. Possiamo ad esempio scegliere $c_{i,j} = g_{i,j}(y_0)$. Le equazioni dell'equivalenza sono allora:

$$\begin{cases}
\frac{\partial \phi^i}{\partial y^\alpha} = \omega^i_\alpha\\
\frac{\partial \omega^i_\alpha}{\partial y^\beta} = \sum_\nu \Gamma'^{\gamma}_{\alpha,\beta} \omega^i_\gamma
\end{cases}$$

e le condizioni di integrabilità (6.12) sono banalmente verificate. Esisterà quindi una soluzione $\phi : U \to U' \subset \Omega$ con $\phi(y_0) = x_0$ tale che $\frac{\partial \phi^1(y_0)}{\partial y^\alpha} = \omega^i_\alpha(y_0) = \delta^i_\alpha$ e

$$g_{\alpha,\beta}(y) = \sum_{i,j} c_{i,j} \frac{\partial \phi^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial \phi^j}{\partial y^\beta}$$

□

DEFINIZIONE 8.2. Una metrica g, definita su un aperto di coordinate $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, è *a curvatura costante* se esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

eq:supja
$$R_{i,j,h,k} = c(g_{i,h}g_{j,k} - g_{i,k}g_{j,h}) \qquad \forall 1 \le i,j,h,k \le n, \tag{8.1}$$

o, in modo equivalente:

eq:supjb
$$R(X,Y,U,V) = c(g(X,U)g(Y,V) - g(X,V)g(Y,U)) \qquad \forall X,Y,U,V \in \mathfrak{X}(\Omega). \tag{8.2}$$

tm:spfhc
TEOREMA 8.3. *Una metrica* g *equivalente a una metrica a curvatura costante c ha la stessa curvatura costante c.*

Viceversa, se g *e* g′ *sono due metriche con la stessa segnatura e la stessa curvatura costante, definite su aperti di coordinate* Ω, Ω', *allora per ogni coppia di punti* $(x_0, y_0) \in \Omega \times \Omega'$ *esistono un intorno aperto* V *di* y_0 *in* Ω', *un intorno aperto* U *di* x_0 *in* Ω, *e un diffeomorfismo* $\phi : V \to U$, *con* $\phi(y_0) = x_0$ *e* $\mathrm{g}'|_V = \phi^*(\mathrm{g}|_U)$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che g′ sia una metrica equivalente ad una metrica g a curvatura costante. Allora, per le (6.6) abbiamo

eq:suphe
$$\begin{aligned} R'_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} &= \sum_{i,j,h,k=1}^{n} R_{i,j,h,k} \frac{\partial x^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^h}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x^k}{\partial x^\delta} \\ &= c(g_{i,h}g_{j,k} - g_{i,k}g_{j,h})\frac{\partial x^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^h}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x^k}{\partial x^\delta} \\ &= c(g_{\alpha,\gamma}g_{\beta,\delta} - g_{\alpha,\delta}g_{\beta,\gamma}). \end{aligned}$$

Viceversa, date due metriche g e g′ con la stessa segnatura e con la stessa curvatura costante, osserviamo che la condizione d'integrabilità (6.12) delle equazioni dell'equivalenza è conseguenza della

eq:suphgd
$$g'_{\alpha,\beta} = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}\omega^i_\alpha \omega^j_\beta.$$

La (6.11) si può verificare perché abbiamo supposto che le due metriche avessero la stessa curvatura. Quindi l'equivalenza locale di g e g′ segue dal Teorema 6.6. □

CAPITOLO 24

Geometria Riemanniana delle superfici

1. Alcune considerazioni euristiche

Consideriamo una superficie nello spazio ordinario. Possiamo pensare di realizzarla mediante una pellicola sottilissima di una qualche sostanza, così sottile che il suo spessore risulti trascurabile.

Date due superficie siffatte, ci poniamo il problema se sia possibile, deformando e spostando la prima, portarla a coincidere con la seconda. Se pensiamo alla realizzazione pratica di una tale operazione, ci è chiaro che le nostre speranze di successo sono condizionate dal tipo di materiale usato per costruire i nostri modelli. Le cose cambieranno molto, ad esempio, se abbiamo utilizzato sottilissime lenti di vetro, oppure carta, oppure un materiale elastico, come plastica o gomma. Un foglio di carta può essere curvato fino a sovrapporlo a una superficie cilindrica, mentre tale operazione non è possibile se invece di un foglio di carta disponiamo di una lastra di vetro. Un foglio della plastica usata per fabbricare delle palline da ping pong si potrà deformare come un foglio di carta, ma, mentre un palloncino di gomma si può deformare, ad esempio, in un elissoide con gli assi diseguali, ciò non possiamo fare con una pallina da ping pong senza romperla. Questi tre tipi di comportamento si possono idealizzare pensando a:

superficie assolutamente rigide, come il vetro, che cioè mantengono immutate le distanze relative tra i loro punti quando cerchiamo di modificare la loro posizione;

superficie piegabili ma non elastiche, come la carta o la plastica: le deformazioni a cui possiamo sottoporle mantengono immutata la lunghezza delle linee che possiamo tracciare su di esse;

superficie completamente elastiche: in questo caso possiamo cambiare sia le distanze tra i punti che le lunghezze delle linee sulla superficie.

Per avere un'idea di cosa possa accadere nei tre casi diversi, pensiamo ai problemi analoghi per linee nello spazio. Se vogliamo mantenere le distanze nello spazio tra ogni coppia di punti della linea, le trasformazioni ammissibili sono i movimenti rigidi dello spazio (rotazioni e traslazioni) e due linee sono sovrapponibili se e soltanto se hanno la stessa lunghezza e stesse curvatura e torsione nei punti corrispondenti. Se invece pensiamo a una linea realizzata con un materiale non elastico, ma deformabile, come una corda, potremo sovrapporre due linee qualsiasi purché abbiano la stessa lunghezza. Infine, nel caso del materiale elastico, due linee qualsiasi si potranno sempre

trasformare l'una nell'altra.

Mostreremo in questo capitolo il ruolo degli invarianti descritti in precedenza per lo studio dei problemi di applicabilità delle superficie rigide e delle superficie inestendibili. Nel caso delle superficie completamente elastiche gli invarianti sono di tipo topologico.

sec:sffaa

2. Superfici Riemanniane

DEFINIZIONE 2.1. Una *superficie Riemanniana* è una varietà Riemanniana di dimensione due, cioè una varietà differenziabile S di dimensione reale due su cui è assegnata una metrica $\mathrm{g} : TS \to \mathbb{R}$ definita positiva.

Sia $\mathbf{r} : \Omega \to S$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^2$, una carta locale in S. Indichiamo con $(g_{i,j})_{1\le i\le 2}$ i coefficienti della metrica rispetto alla carta locale.

Nell'Esempio 4.4 del Capitolo 23 abbiamo calcolato i suoi simboli di Christoffel:

smp:supdd cp:o

$$\Gamma_{1,1;1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^1} \qquad \Gamma_{1,1;2} = \frac{\partial g_{1,2}}{\partial x^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2} \qquad \Gamma_{1,2;1} = \Gamma_{2,1;1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma_{2,2;2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^2} \qquad \Gamma_{2,2;1} = \frac{\partial g_{1,2}}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1} \qquad \Gamma_{1,2;2} = \Gamma_{2,1;2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1}$$

Abbiamo poi:

eq:sffda

$$\begin{cases} g^{1,1} = \dfrac{g_{2,2}}{g_{1,1}g_{2,2} - g_{1,2}^2}, \\ g^{1,2} = g^{2,1} = -\dfrac{g_{1,2}}{g_{1,1}g_{2,2} - g_{1,2}^2}, \\ g^{2,2} = \dfrac{g_{1,1}}{g_{1,1}g_{2,2} - g_{1,2}^2}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Otteniamo perciò:

$$\Gamma^1_{1,1} = \frac{g_{2,2}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^1} + g_{1,2}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2} - 2g_{1,2}\frac{\partial g_{1,2}}{\partial x^1}}{2(g_{1,1}g_{2,2} - g_{1,2}^2)} \qquad \Gamma^2_{1,1} = \frac{-g_{1,2}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^1} + 2g_{1,1}\frac{\partial g_{1,2}}{\partial x^1} - g_{1,1}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2}}{2(g_{1,1}g_{2,2} - g_{1,2}^2)}$$

$$\Gamma^1_{1,2} = \Gamma^1_{2,1} = \frac{g_{2,2}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2} - g_{1,2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1}}{2(g_{1,1}g_{2,2} - g_{1,2}^2)} \qquad \Gamma^2_{1,2} = \Gamma^2_{2,1} = \frac{g_{1,1}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1} - g_{1,2}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2}}{2(g_{1,1}g_{2,2} - g_{1,2}^2)}$$

$$\Gamma^1_{2,2} = \frac{-g_{1,2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^2} + 2g_{2,2}\frac{\partial g_{1,2}}{\partial x^2} - g_{2,2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1}}{2(g_{1,1}g_{2,2} - g_{1,2}^2)} \qquad \Gamma^2_{2,2} = \frac{g_{1,1}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^2} + g_{1,2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1} - 2g_{1,2}\frac{\partial g_{1,2}}{\partial x^2}}{2(g_{1,1}g_{2,2} - g_{1,2}^2)}$$

Se $u, v \in \mathcal{E}(\Omega)$, è poi:

$$\nabla_{\mathrm{g}}^2(u) = \Delta_1(u) = \frac{g_{1,1}\left[\frac{\partial u}{\partial x^2}\right]^2 - 2g_{1,2}\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial u}{\partial x^2} + g_{2,2}\left[\frac{\partial u}{\partial x^1}\right]^2}{g_{1,1}g_{2,2} - g_{1,2}^2}$$

$$\nabla(u,v) = \frac{g_{1,1}\frac{\partial u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x^2} - g_{1,2}\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial v}{\partial x^2} - g_{1,2}\frac{\partial u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x^1} + g_{2,2}\frac{\partial u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x^2}}{g_{1,1}g_{2,2} - g_{1,2}^2}$$

$$\Delta_{\mathrm{g}}(u) = \Delta_2(u) = \frac{1}{\sqrt{g_{1,1}g_{2,2} - g_{1,2}^2}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{g_{2,2}\frac{\partial u}{\partial x^1} - g_{1,2}\frac{\partial u}{\partial x^2}}{\sqrt{g_{1,1}g_{2,2} - g_{1,2}^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{g_{1,1}\frac{\partial u}{\partial x^2} - g_{1,2}\frac{\partial u}{\partial x^1}}{\sqrt{g_{1,1}g_{2,2} - g_{1,2}^2}}\right)\right]$$

sec:sffcg

2.1. La curvatura Gaussiana. Per le proprietà di simmetria del tensore di curvatura, il tensore di curvatura della metrica di una superficie Riemanniana ha al più quattro coefficienti non nulli:

$$R_{1,2,1,2},\ R_{1,2,2,1},\ R_{2,1,1,2},\ R_{2,1,2,1},$$

legati dalle relazioni

$$R_{1,2,1,2} = -R_{1,2,2,1} = -R_{2,1,1,2} = R_{2,1,2,1}.$$

Ricordiamo l'espressione della curvatura in termini dei simboli di Christoffel:

$$R^i_{j;h,k} = \frac{\partial \Gamma^i_{j,h}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{j,k}}{\partial x^h} + \sum_{\ell=1}^{n}\left(\Gamma^\ell_{j,h}\Gamma^i_{\ell,k} - \Gamma^\ell_{j,k}\Gamma^i_{\ell,h}\right),$$
$$R_{i,j,h,k} = \sum_{\ell} g_{i,\ell}R^\ell_{j,h,k}.$$

Se indichiamo con $R'_{i,j,h,k}$ i coefficienti di una metrica g' equivalente alla g mediante un'applicazione $\phi : \Omega' \ni y \to x \in \Omega$, essi soddisfano

eq:sfca

$$\begin{aligned} R'_{1,2,1,2} &= \sum_{i,j,h,k} R_{i,j,h,k}\frac{\partial x^i}{\partial y^1}\frac{\partial x^j}{\partial y^2}\frac{\partial x^h}{\partial y^1}\frac{\partial x^k}{\partial y^2} \\ &= R_{1,2,1,2}\Big(\frac{\partial x^1}{\partial y^1}\frac{\partial x^2}{\partial y^2}\frac{\partial x^1}{\partial y^1}\frac{\partial x^2}{\partial y^2} - \frac{\partial x^1}{\partial y^1}\frac{\partial x^2}{\partial y^2}\frac{\partial x^2}{\partial y^1}\frac{\partial x^1}{\partial y^2} \\ &\quad - \frac{\partial x^2}{\partial y^1}\frac{\partial x^1}{\partial y^2}\frac{\partial x^1}{\partial y^1}\frac{\partial x^2}{\partial y^2} + \frac{\partial x^2}{\partial y^1}\frac{\partial x^1}{\partial y^2}\frac{\partial x^2}{\partial y^1}\frac{\partial x^1}{\partial y^2}\Big) \\ &= R_{1,2,1,2}\left(\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)\right)^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Poiché $\det(\mathrm{g}') = \left(\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)\right)^2 \det(\mathrm{g})$, otteniamo

TEOREMA 2.2. *La funzione*

eq:sfcb
$$K(x) = \frac{R_{1,2,1,2}(x)}{\det(\mathrm{g}_x)} \tag{2.3}$$

è un invariante differenziale della metrica g *della superficie* S.

DEFINIZIONE 2.3. L'invariante differenziale $K(x)$ si dice la *curvatura totale* o *curvatura Gaussiana* della superficie (3.1). eq:supba

3. Superfici immerse: la prima forma fondamentale

Sia M una varietà Riemanniana di dimensione $n \geq 2$, con metrica $\mathrm{h} : TM \to \mathbb{R}$. Se S è una varietà differenziabile di dimensione due ed $\mathbf{r} : S \to M$ un'immersione differenziabile, allora la $\mathrm{g} = r^*\mathrm{h}$ è una metrica Riemanniana su S.

DEFINIZIONE 3.1. La metrica Riemanniana $\mathrm{g} : TS \to \mathbb{R}$ si dice la *prima forma fondamentale* dell'immersione $\mathbf{r} : S \to M$.

DEFINIZIONE 3.2. Se $M = \mathbb{R}^n$ con la metrica Euclidea usuale e consideriamo un'applicazione regolare $\mathbf{r} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, definita su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, chiamiamo la $S = \{\mathbf{r} : \Omega \to \mathbb{R}^n\}$ una *superficie parametrica regolare*.

Se indichiamo con $| \cdot |$ la norma Euclidea di $\mathbb{R}^n$, la prima forma fondamentale di

eq:supba
$$S = \{\mathbf{r} : \Omega \to \mathbb{R}^n_y\}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2_x \tag{3.1}$$

è la forma quadratica g su $T\Omega$ definita da:

eq:supbb
$$\mathrm{g}_x(v) = |d\mathbf{r}(x)(v)|^2 \quad \forall x \in \Omega,\ \forall v \in \mathbb{R}^2. \tag{3.2}$$

Posto $v = (v^1, v^2)$, e ricordando che $dx^j(v) = v^j$ per $j = 1, 2$, possiamo scrivere la prima forma fondamentale mediante:

$$\begin{aligned} \mathrm{g}_x &= E(x)(dx^1)^2 + 2F(x)(dx^1)(dx^2) + G(x)(dx^2)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(x)(dx^i)(dx^j) \end{aligned} \tag{3.3}$$

eq:supbc

ove $(dx^i)(dx^j)(v) = v^i v^j$. Se la $\mathbf{r}$ è di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$, i coefficienti $g_{i,j}$ sono funzioni di classe $\mathcal{C}^{k-1}$ in Ω, definiti da:

eq:supbd
$$\left.\begin{aligned} E(x) = g_{1,1}(x) &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} \,\middle|\, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1}\right) \\ F(x) = g_{1,2}(x) = g_{2,1}(x) &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} \,\middle|\, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2}\right) \\ G(x) = g_{2,2}(x) &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} \,\middle|\, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{(prodotti scalari in } \mathbb{R}^n\text{)}. \tag{3.4}$$

Vale la:

eq:supbda
$$\mathrm{g}_x = {}^t d\mathbf{r}(x) \circ d\mathbf{r}(x) \qquad \forall y \in \Omega. \tag{3.5}$$

Osserviamo che, se $\beta : J \to \Omega$ è una curva piana in Ω ed $\alpha = \mathbf{r} \circ \beta : J \to \mathbb{R}^n$ la corrispondente curva su S, abbiamo:

eq:supbe (3.6) $$|\dot{\alpha}(t)|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(\beta(t)) \frac{d\beta^i}{dt} \frac{d\beta^j}{dt} = g_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t)).$$

Fissiamo un punto $y_0 \in \Omega$ e consideriamo due curve regolari $\beta_i : J \to \Omega$ con $\beta_i(t_0) = y_0$ per $i = 1, 2$. Le due curve formano in y_0 un angolo θ con:

$$\cos\theta = \frac{(\dot{\beta}_1(t_0)|\dot{\beta}_2(t_0))}{|\dot{\beta}_1(t_0)| \cdot |\dot{\beta}_2(t_0)|}.$$

L'angolo $\tilde{\theta}$ tra le curve $\alpha_i = \mathbf{r} \circ \beta_i : J \to S$ nel punto corrispondente $x_0 = \mathbf{r}(y_0) \in S$ è dato da:

eq:supbf (3.7) $$\cos\tilde{\theta} = \frac{g_{y_0}(\dot{\beta}_1(t_0), \dot{\beta}_2(t_0))}{\sqrt{\mathrm{g}_{y_0}(dot\beta_1(t_0)) \cdot \mathrm{g}_{y_0}(dot\beta_2(t_0))}}.$$

Qui g_x denota la forma bilineare simmetrica associata alla forma quadratica g_x:

eq:supbfa (3.8) $$g_x(v_1, v_2) = \frac{1}{2}(\mathrm{g}_x(v_1+v_2) - \mathrm{g}_x(v_1) - \mathrm{g}_x(v_2)) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2.$$

In particolare, per l'angolo $\tilde{\omega}$ tra le curve su S che corrispondono alle parallele alle coordinate in x_0 abbiamo:

eq:supbfb (3.9) $$\cos\tilde{\omega} = \frac{F(x_0)}{\sqrt{E(x_0)G(x_0)}}, \quad \sin\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{E(x_0)G(x_0) - F^2(x_0)}{E(x_0)G(x_0)}}.$$

In particolare $F(x_0) = 0$ è condizione necessaria e sufficiente affinché le corrispondenti delle linee coordinate preservino l'ortogonalità.

L'area di un parallelogrammo del piano è il prodotto delle lunghezze di due lati adiacenti per il valore assoluto del seno dell'angolo compreso. Il differenziale $d\mathbf{r}(x_0)$ trasforma il quadrato unitario con lati paralleli agli assi coordinati in un parallelogrammo con lati $\frac{\partial \mathbf{r}(x_0)}{\partial x^i}$, che ha area:

eq:supbfc (3.10)
$$\begin{aligned} &\sqrt{E(x_0)} \cdot \sqrt{G(x_0)} \cdot \sin\tilde{\omega} \\ &\qquad = \sqrt{E(x_0)} \cdot \sqrt{G(x_0)} \cdot \sqrt{\frac{E(x_0)G(x_0) - F^2(x_0)}{E(x_0)G(x_0)}} \\ &\qquad = \sqrt{E(x_0)G(x_0) - F^2(x_0)} \\ &\qquad = \sqrt{\det(\mathrm{g}(y_0))}. \end{aligned}$$

Definizione 3.3. Se ω è un aperto di Ω misurabile, definiamo l'*area* della porzione di superficie regolare $\mathbf{r}(\omega) \subset S$ mediante:

eq:supbg (3.11) $$\mathrm{area}(\mathbf{r}(\omega)) = \iint_\omega \sqrt{EG - F^2} dx^1 dx^2 = \iint_\omega \sqrt{\det(\mathrm{g}_x)} dx.$$

Osserviamo che, se $\phi : \Omega_1 \to \Omega$ è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^1$, per la superficie parametrica regolare $\mathbf{r} \circ \phi : \Omega_1 \to S$ abbiamo $d(\mathbf{r} \circ \phi) = d\mathbf{r} \circ d\phi$ e quindi:

$$ {}^t d(\mathbf{r} \circ \phi) \circ d(\mathbf{r} \circ \phi) = {}^t d\phi \circ {}^t d\mathbf{r} \circ d\mathbf{r} \circ d\phi. $$

Indichiamo con $\tilde{\mathrm{g}}$ la prima forma fondamentale di $\mathbf{r} \circ \phi$. Otteniamo allora, se ω_1 è un aperto misurabile di Ω_1:

$$ \begin{aligned} \iint_{\omega_1} \sqrt{\det(\tilde{\mathrm{g}}_{x'})} dx' &= \iint_{\omega_1} \sqrt{\det(\mathrm{g}_{\phi(x')})}\, |\det(d\phi(x'))| dx' \\ &= \iint_{\phi(\omega_1)} \sqrt{\det(\mathrm{g}_x)} dx \end{aligned} $$

Questa invarianza rispetto alla parametrizzazione ci permette quindi di definite l'elemento d'area su S:

DEFINIZIONE 3.4. Chiamiamo la:

eq:supbh (3.12) $$ dS = \sqrt{\det(\mathrm{g}_x)} dx^1 dx^2 $$

elemento d'area sulla superficie S, espresso nella parametrizzazione (eq:supba 3.1).

seecsffordd

4. Sistemi di coordinate

4.1. Coordinate ortogonali.

DEFINIZIONE 4.1. Diciamo che le coordinate di una carta locale $\mathbf{r} : \Omega \to S$ di una superficie Riemanniana S sono *ortogonali* se, in tali coordinate $x^1 = u$, $x^2 = v$, risulta

eq:sffdzc (4.1) $$ \mathrm{g} = g_{1,1} du^2 + g_{2,2} dv^2. $$

In coordinate ortogonali abbiamo formule più semplici per i simboli di Christoffel, i parametri differenziali e la curvatura Gaussiana:

eq:sffsca (4.2)
$$ \begin{aligned} &\Gamma_{1,1;1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^1} \qquad \Gamma_{1,2;1} = \Gamma_{2,1;1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2} \qquad \Gamma_{2,2;1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1} \\ &\Gamma_{1,1;2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2} \qquad \Gamma_{1,2;2} = \Gamma_{2,1;2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1} \qquad \Gamma_{2,2;2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^2} \end{aligned} $$

(4.3)
$$ \begin{cases} g^{1,1} = 1/g_{1,1} \\ g^{1,2} = g^{2,1} = 0 \\ g^{2,2} = 1/g_{2,2}. \end{cases} $$

eq:sffscc (4.4)
$$ \begin{aligned} &\Gamma^1_{1,1} = \frac{1}{2g_{1,1}}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^1} \qquad \Gamma^1_{1,2} = \Gamma^1_{2,1} = \frac{1}{2g_{1,1}}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2} \qquad \Gamma^1_{2,2} = \frac{1}{2g_{1,1}}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1} \\ &\Gamma^2_{1,1} = -\frac{1}{2g_{2,2}}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2} \qquad \Gamma^2_{1,2} = \Gamma^2_{2,1} = \frac{1}{2g_{2,2}}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1} \qquad \Gamma^2_{2,2} = \frac{1}{2g_{2,2}}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^2} \end{aligned} $$

$$\nabla^2(u) = \Delta_1(u) = \frac{1}{g_{1,1}}\left[\frac{\partial u}{\partial x^1}\right]^2 + \frac{1}{g_{2,2}}\left[\frac{\partial u}{\partial x^2}\right]^2 \tag{4.5}$$

$$\nabla(u,v) = \frac{1}{g_{1,1}}\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial v}{\partial x^1}\frac{1}{g_{2,2}}\frac{\partial u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x^2} \tag{4.6}$$

$$\Delta_{\mathrm{g}}(u) = \Delta_2(u) = \frac{1}{\sqrt{g_{1,1}g_{2,2}}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{1,1}}}\frac{\partial u}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{2,2}}}\frac{\partial u}{\partial x^2}\right)\right] \tag{4.7}$$

È poi

$$R_{1,2,1,2} = g_{2,1}R^1_{1,1,2} + g_{2,2}R^2_{1,1,2} = g_{2,2}R^2_{1,1,2},$$

e quindi

$$\begin{aligned}
R^2_{1,1,2} &= \frac{\partial\Gamma^2_{1,1}}{\partial x^2} - \frac{\partial\Gamma^2_{1,2}}{\partial x^1} + \Gamma^1_{1,1}\Gamma^2_{1,2} - \Gamma^1_{1,2}\Gamma^2_{1,1} + \Gamma^2_{1,1}\Gamma^2_{2,2} - \Gamma^2_{1,2}\Gamma^2_{2,1}\\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{g^2_{2,2}}\left(\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1}\right)^2\right)\\
&+ \frac{1}{4}\frac{1}{g_{1,1}g_{2,2}}\left(\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2}\right)^2\right)\\
&- \frac{1}{2g_{2,2}}\left(\frac{\partial^2 g_{1,1}}{\partial[x^2]^2} + \frac{\partial^2 g_{2,2}}{\partial[x^1]^2}\right)
\end{aligned}$$

Otteniamo quindi la formula per la curvatura:

eq:sffortk

$$\begin{aligned}
K = &-\frac{1}{2g_{1,1}g_{2,2}}\left(\frac{\partial^2 g_{1,1}}{\partial[x^2]^2} + \frac{\partial^2 g_{2,2}}{\partial[x^1]^2}\right)\\
&+ \frac{1}{4g^2_{1,1}g_{2,2}}\left(\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2}\right)^2\right)\\
&+ \frac{1}{4g_{1,1}g^2_{2,2}}\left(\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1}\right)^2\right).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.2. Coordinate isoterme.

Definizione 4.2. Chiamiamo *isoterme* coordinate locali $\mathbf{r} : \Omega \to S$ per cui $\mathbf{r}^*(\mathrm{g})$ sia conforme alla metrica Euclidea su $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Richiediamo cioè che, per le coordinate $x^1 = u$, $x^2 = v$ risulti:

eq:sffdc

$$\mathrm{g} = \lambda(u,v)(du^2 + dv^2). \tag{4.9}$$

Abbiamo allora

$$\Gamma_{1,1;1} = \Gamma_{1,2;2} = \Gamma_{2,1;2} = -\Gamma_{2,2;1} = \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}$$

$$\Gamma_{2,2;2} = \Gamma_{1,2;1} = \Gamma_{2,1;1} = -\Gamma_{1,1;2} = \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial x^2}$$

e quindi

$$\Gamma^1_{1,1} = \Gamma^2_{1,2} = \Gamma^2_{2,1} = -\Gamma^1_{2,2} = \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}$$
$$\Gamma^2_{2,2} = \Gamma^1_{1,2} = \Gamma^1_{2,1} = -\Gamma^2_{1,1} = \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^2}.$$

È poi

$$R_{1,2,1,2} = g_{2,1}R^1_{1,1,2} + g_{2,2}R^2_{1,1,2} = \lambda R^2_{1,1,2}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
R^2_{1,1,2} &= \frac{\partial\Gamma^2_{1,1}}{\partial x^2} - \frac{\partial\Gamma^2_{1,2}}{\partial x^1} + \Gamma^1_{1,1}\Gamma^2_{1,2} - \Gamma^1_{1,2}\Gamma^2_{1,1} + \Gamma^2_{1,1}\Gamma^2_{2,2} - \Gamma^2_{1,2}\Gamma^2_{2,1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\right) \\
&+ \frac{1}{4}\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^2}\right)^2 \\
&- \frac{1}{4}\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\right)\right]
\end{aligned}$$

Poiché $\lambda^{-1}\dfrac{\partial\lambda}{\partial x^i} = \dfrac{\partial\log\lambda}{\partial x^i}$ e $\det(\mathrm{g}) = \lambda^2$, otteniamo in questo caso:

eq:sffdd (4.10)
$$K = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log\lambda = -\frac{\Delta\log\lambda}{2\lambda},$$

ove Δ è il Laplaciano nelle coordinate Euclidee di $\mathbb{R}^2$. Infatti

$$K = \frac{R_{1,2,1,2}}{\det(\mathrm{g})} = \frac{\lambda R^2_{1,1,2}}{\lambda^2} = -\frac{\Delta\log\lambda}{2\lambda}.$$

Dimostreremo (Teorema 2.10 del Capitolo 26): tm:klk ansuprim

Teorema 4.3 (esistenza di coordinate isoterme). *Esistono coordinate isoterme nell'intorno di ogni punto di una superficie Riemanniana S.*

cr:sffdd Corollario 4.4. *Sia S una superficie in $\mathbb{R}^n$ e siano* g *e K la sua prima forma fondamentale e la sua curvatura. Allora la curvatura K' della prima forma fondamentale della superficie $S' = R\cdot S = \{R\cdot y \mid y\in S\}$ è data da*

eq:sffde (4.11)
$$K'(Ry) = R^{-2}K(y) \qquad \forall y\in S.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{r}:\Omega\to S\subset\mathbb{R}^n$ una parametrizzazione locale isoterma. Allora la $\mathbf{r}_R:\Omega\ni(u,v)\to\mathbf{r}_R(u,v) = R\cdot\mathbf{r}(u,v)\in\mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione isoterma di S'. Se

$$\mathrm{g} = \lambda(du^2 + dv^2),$$

è la prima forma fondamentale di S nelle coordinate isoterme (u, v), la prima forma fondamentale g' di S' nelle coordinate isoterme (u, v) è

$$\mathrm{g}' = R^2\lambda(du^2 + dv^2).$$

Allora

$$K' = -\frac{\Delta \log(R^2\lambda)}{R^2\lambda} = -\frac{\Delta \log \lambda}{R^2\lambda} = \frac{K}{R^2}.$$

□

Esempio 4.5. Consideriamo la parametrizzazione della sfera unitaria meno un punto data dall'inversa della proiezione stereografica:

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right) \in \mathbb{R}^3.$$

Abbiamo

$$\mathbf{r}_u = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}\left(1-u^2+v^2, -2uv, 2u\right)$$
$$\mathbf{r}_v = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}\left(-2uv, 1+u^2-v^2, 2v\right).$$

Otteniamo

$$g_{1,1} = g_{2,2} = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}, \qquad g_{1,2} = g_{2,1} = 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned} K &= -\frac{(1+u^2+v^2)^2}{8}\Delta \log\left(\frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}\right) \\ &= \frac{(1+u^2+v^2)^2}{4}\Delta \log(1+u^2+v^2) \\ &= \frac{(1+u^2+v^2)^2}{4}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{2u}{1+u^2+v^2}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2v}{1+u^2+v^2}\right]\right) \\ &= \frac{(1+u^2+v^2)^2}{4}\left(\frac{4}{1+u^2+v^2} - \frac{4u^2}{(1+u^2+v^2)^2} - \frac{4v^2}{(1+u^2+v^2)^2}\right) \\ &= \frac{(1+u^2+v^2)^2}{4}\cdot\frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} = 1 \end{aligned}$$

Tenuto conto del Corollario cr:sffdd 4.4, otteniamo che *la curvatura della sfera di raggio R è $1/R^2$.*

Esempio 4.6. Un'applicazione regolare di classe $\mathcal{C}^1$, definita su un aperto Ω del piano complesso, $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ si dice *olomorfa* se il suo differenziale $df : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ è $\mathbb{C}$-lineare.

Se S è una superficie in $\mathbb{C}^n$, ogni parametrizzazione locale $\mathbf{r} : \Omega \to S \subset \mathbb{C}^n$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ per cui $f(u+iv) = \mathbf{r}(u, v)$ sia olomorfa è isoterma.

sec:cordgeod

4.3. Coordinate geodetiche.

DEFINIZIONE 4.7. Le coordinate $x^1 = u$, $x^2 = v$ di una parametrizzazione $\mathbf{r} : \Omega \to S$ di una superficie Riemanniana S si dicono *geodetiche polari* se l'espressione della metrica g in tali coordinate è della forma

eq:sffdf

$$\mathrm{g} = du^2 + \lambda^2(u, v)dv^2. \tag{4.12}$$

PROPOSIZIONE 4.8. *Siano (u, v) coordinate locali sulla superficie Riemanniana S, in cui la metrica si esprima mediante la* (4.12). *La curvatura Gaussiana di S è allora data, nelle coordinate (u, v), dalla formula*

eq:sffdg

$$K = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2}. \tag{4.13}$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{1,1,1} = \Gamma_{1,1,2} = \Gamma_{1,2,1} = \Gamma_{2,1,1} = 0\\
&\Gamma_{1,2,2} = \Gamma_{2,1,2} = -\Gamma_{2,2,1} = \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial u}\\
&\Gamma_{2,2,2} = \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial v},
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{1,1} = \Gamma^1_{1,2} = \Gamma^1_{2,1} = \Gamma^2_{1,1} = 0\\
&\Gamma^1_{2,2} = -\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial u}\\
&\Gamma^2_{1,2} = \Gamma^2_{2,1} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\\
&\Gamma^2_{2,2} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Ancora, abbiamo

$$R_{1,2,1,2} = \lambda^2 R^2_{1,1,2}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
R^2_{1,1,2} &= \frac{\partial\Gamma^2_{1,1}}{\partial x^2} - \frac{\partial\Gamma^2_{1,2}}{\partial x^1} + \Gamma^1_{1,1}\Gamma^2_{1,2} - \Gamma^1_{1,2}\Gamma^2_{1,1} + \Gamma^2_{1,1}\Gamma^2_{2,2} - \Gamma^2_{1,2}\Gamma^2_{2,1}\\
&= -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right) - \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2\\
&= -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2}
\end{aligned}$$

ci dà $R_{1,2,1,2} = -\lambda\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u^2}$, da cui otteniamo

$$K = \frac{R_{1,2,1,2}}{\det(\mathrm{g})} = -\frac{\lambda\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial u^2}}{\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2}.$$

□

I parametri differenziali, nelle coordinate geodetiche, sono dati da

$$\nabla^2_{\mathrm{g}}\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)^2$$

eq:sffdhx (4.14)
$$\nabla_{\mathrm{g}}(\phi,\psi) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)$$

$$\Delta_{\mathrm{g}}\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial u} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial v}.$$

TEOREMA 4.9. *Sia y_0 un punto di una superficie Riemanniana S. Possiamo allora trovare un intorno aperto U di y_0 in S e un'applicazione differenziabile $\mathbf{r} : [0, R) \times \mathbb{R} \to S$ tale che*

eq:sffdiia (4.15)
$$\begin{cases} \mathbf{r}(0, v) = y_0 & \forall v \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(u, v + 2\pi) & \forall u \in [0, R), \quad \forall v \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

e tale che $\mathbf{r}(u, v)$ definisca coordinate locali geodetiche polari nell'intorno di ogni punto di $U \setminus \{y_0\}$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo coordinate locali x^1, x^2 in y_0. A meno di una trasformazione lineare di coordinate, possiamo supporre che nel punto y_0 sia $\mathrm{g} = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$. Per il teorema di esistenza e unicità e dipendenza dai parametri per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie, possiamo trovare un numero reale $R > 0$ tale che per ogni numero reale v assegnato il sistema

eq:suffda (4.16)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\phi^i(u,v)}{\partial u^2} + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \Gamma^i_{j,k}\frac{\partial\phi^j(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\phi^k(u,v)}{\partial u} = 0, \quad -R < u < R \\ \phi(0, v) = x_0 \\ \dfrac{\partial\phi(0,v)}{\partial u} = (\cos v, \sin v) \end{cases}$$

abbia una e una sola soluzione. Osserviamo che

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v}\right]_{u=0} = (-\sin v, \cos v).$$

Quindi esiste un R', con $0 < R' \leq R$, tale che la matrice Jacobiana $\dfrac{\partial\phi}{\partial(u,v)}$ abbia determinante diverso da 0 per $0 < u < R'$. Possiamo quindi scegliere (u, v) come coordinate locali vicino ad ogni punto di un intorno U di y_0, distinto da y_0.

Calcoliamo i coefficienti della metrica g nelle nuove coordinate. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left(\sum_{j,k} g_{j,k}\frac{\partial\phi^j(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\phi^k(u,v)}{\partial u}\right) &= \sum_{i,j,k}\frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^i(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\phi^j(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\phi^k(u,v)}{\partial u}\\ &\quad + 2\sum_{j,k} g_{j,k}\frac{\partial^2\phi^j(u,v)}{\partial u^2}\frac{\partial\phi^k(u,v)}{\partial u}\\ &= \sum_{i,j,k}\left(2\frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i} - \sum_h g_{i,h}\Gamma^h_{j,k}\right)\frac{\partial\phi^i}{\partial u}\frac{\partial\phi^j}{\partial u}\frac{\partial\phi^k}{\partial u}\\ &= 0\end{aligned}$$

Questo ci dice che, essendo $\sum_{j,k} g_{j,k}\frac{\partial\phi^j(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\phi^k(u,v)}{\partial u} = 1$ per $u = 0$, questa quantità rimane uguale ad 1 per ogni $-R \le u \le R$.

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left(\sum_{j,k} g_{j,k}\frac{\partial\phi^j(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\phi^k(u,v)}{\partial v}\right) &= \sum_{i,j,k}\frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^i}{\partial u}\frac{\partial\phi^j}{\partial u}\frac{\partial\phi^k}{\partial v}\\ &\quad + \sum_{j,k} g_{j,k}\frac{\partial^2\phi^j}{\partial u^2}\frac{\partial\phi^k}{\partial v} + \sum_{j,k} g_{j,k}\frac{\partial\phi^j}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial\phi^k}{\partial v}\\ &= \sum_{i,j,k}\frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^i}{\partial u}\frac{\partial\phi^j}{\partial u}\frac{\partial\phi^k}{\partial v} - \sum_{j,k,h,\ell} g_{j,k}\Gamma^j_{h,\ell}\frac{\partial\phi^h}{\partial u}\frac{\partial\phi^\ell}{\partial u}\frac{\partial\phi^k}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(g_{j,k}\frac{\partial\phi^j}{\partial u}\frac{\partial\phi^k}{\partial v}\right)\\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^i}{\partial v}\frac{\partial\phi^j}{\partial u}\frac{\partial\phi^k}{\partial v}\end{aligned}$$

e, poiché il terzo addendo si annulla perché l'espressione in parentesi è costantemente uguale a 1

$$\begin{aligned}&= \sum_{i,j,k}\left[\frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k} - \sum_h g_{h,k}\Gamma^h_{i,j}\right]\frac{\partial\phi^i}{\partial u}\frac{\partial\phi^j}{\partial u}\frac{\partial\phi^k}{\partial v}\\ &= \sum_{i,j,k}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i,k}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k}\right) - \Gamma_{i,j;k}\right]\frac{\partial\phi^i}{\partial u}\frac{\partial\phi^j}{\partial u}\frac{\partial\phi^k}{\partial v} \quad = \quad 0\end{aligned}$$

Poiché $\sum_{j,k} g_{j,k}\frac{\partial\phi^j}{\partial u}\frac{\partial\phi^k}{\partial v}$ è uguale a 0 quando $u = 0$, esso rimarrà uguale a 0 per ogni $-R \le u \le R$.

Questo dimostra che l'espressione

$$\left(\sum_{j,k} g_{j,k}\frac{\partial\phi^j}{\partial u}\frac{\partial\phi^k}{\partial u}\right)du^2 + 2\left(\sum_{j,k} g_{j,k}\frac{\partial\phi^j}{\partial u}\frac{\partial\phi^k}{\partial v}\right)du\,dv + \left(\sum_{j,k} g_{j,k}\frac{\partial\phi^j}{\partial v}\frac{\partial\phi^k}{\partial v}\right)dv^2$$

della metrica g nelle coordinate u, v è della forma (4.12). □

ESEMPIO 4.10. Fissati due numeri reali α, r con $\alpha \in [0, 2\pi)$, $r \in \mathbb{R}$, consideriamo la porzione di superficie in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{r}(u,v) = (u\cos\alpha, (u\sin\alpha + r)\cos v, (u\sin\alpha + r)\sin v)$$
$$u\sin\alpha + r \neq 0.$$

La superficie assegnata è una porzione di piano per $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, di cilindro per $\alpha = 0, \pi$, di cono circolare quando $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ con $k = 0, 1, 2, 3$. Abbiamo

$$\begin{cases} \mathbf{r}_u = (\cos\alpha, \sin\alpha\cos v, \sin\alpha\sin v) \\ \mathbf{r}_v = (0, -(u\sin\alpha + r)\sin v, (u\sin\alpha + r)\cos v) \end{cases}$$

e quindi

$$\mathrm{g} = du^2 + (u\sin\alpha + r)^2 dv^2.$$

La sua curvatura è data da

$$K = -\frac{1}{u\sin\alpha + r}\frac{\partial^2(u\sin\alpha + r)}{\partial u^2} = 0.$$

ESEMPIO 4.11. Consideriamo l'espressione della superficie sferica nelle coordinate sferiche

$$\mathbf{r}(u,v) = (\cos u, \sin u\cos v, \sin u\sin v).$$

Abbiamo:

$$\mathbf{r}_u = (-\sin u, \cos u\cos v, \cos u\sin v),$$
$$\mathbf{r}_v = (0, -\sin u\sin v, \sin u\cos v)$$

e quindi

$$\mathrm{g} = du^2 + \sin^2 u\, dv^2.$$

Queste sono coordinate geodetiche polari e quindi otteniamo:

$$K = -\frac{1}{\sin u}\frac{d^2\sin u}{du^2} = 1.$$

5. Superfici di rotazione

Consideriamo una curva piana $\alpha : (a,b) \ni s \to (\alpha^1(s), \alpha^2(s)) \in \mathbb{R}^2$, parametrizzata per lunghezza d'arco, con $\alpha^2(s) > 0$, $\dot\alpha^1(s) \neq 0$, per ogni $s \in (a,b)$. La superficie che si ottiene facendo ruotare la curva α intorno all'asse delle x è descritta parametricamente da

eq:sffdj (5.1) $$\mathbf{r}(s,\theta) = (\alpha^1(s), \alpha^2(s)\cdot\cos\theta, \alpha^2(s)\cdot\sin\theta).$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathbf{r}_s = (\dot\alpha_1(s), \dot\alpha^2(s)\cdot\cos\theta, \dot\alpha^2(s)\cdot\sin\theta) \\ \mathbf{r}_\theta = (0, -\alpha^2(s)\cdot\sin\theta, \alpha^2(s)\cdot\cos\theta) \end{cases}$$

ci dà

eq:sffdk (5.2) $$\mathrm{g} = ds^2 + [\alpha^2(s)]^2 d\theta^2.$$

Le (s, θ) sono quindi coordinate geodetiche polari e possiamo perciò calcolare la curvatura della superficie nella forma

eq:sffdl (5.3) $$K(s,\theta) = -\frac{\ddot{\alpha}^2(s)}{\alpha_2(s)}.$$

Indichiamo con $\kappa_\alpha(s)$ la curvatura della curva piana α e con $\mathbf{n}_\alpha(s) = (-\dot{\alpha}^2(s), \dot{\alpha}^1(s))$ il suo versore normale. Poiché

$$\ddot{\alpha}(s) = \kappa_\alpha(s)\mathbf{n}_\alpha(s),$$

otteniamo che

$$\ddot{\alpha}^2(s) = \kappa_\alpha(s)\dot{\alpha}^1(s)$$

e quindi

eq:sffdm (5.4) $$K(s,\theta) = -\kappa_\alpha(s)\frac{\dot{\alpha}^1(s)}{\alpha^2(s)}.$$

Se la curva α non è parametrizzata per lunghezza d'arco, abbiamo:

eq:sffdn (5.5) $$\kappa_\alpha(t) = \frac{\dot{\alpha}^1(t)\ddot{\alpha}^2(t) - \dot{\alpha}^2(t)\ddot{\alpha}^1(t)}{[\dot{\alpha}^1(t)]^2 + [\dot{\alpha}^2(t)]^2}.$$

Da questo ricaviamo la formula generale per la curvatura totale di una superficie di rotazione:

eq:sffdo (5.6)
$$\begin{aligned} K(t,\theta) &= -\kappa_\alpha(t)\frac{\dot{\alpha}^1(t)}{\alpha^2(t)\sqrt{[\dot{\alpha}^1(t)]^2 + [\dot{\alpha}^2(t)]^2}} \\ &= -\frac{\dot{\alpha}^1(t)\left[\dot{\alpha}^1(t)\ddot{\alpha}^2(t) - \dot{\alpha}^2(t)\ddot{\alpha}^1(t)\right]}{\alpha^2(t)\left([\dot{\alpha}^1(t)]^2 + [\dot{\alpha}^2(t)]^2\right)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Esempio 5.1. Il paraboloide di rotazione

$$x = y^2 + z^2,$$

è ottenuto facendo ruotare intorno all'asse x la curva piana $t \to \alpha(t) = (t^2, t)$, $t > 0$. La sua curvatura è data da

$$\kappa_\alpha(t) = -\frac{2}{1 + 4t^2}.$$

La curvatura della superficie corrispondente è dunque

$$K(t,\theta) = \frac{4}{(1 + 4t^2)^{3/2}}.$$

In generale, la

eq:sffdda (5.7) $$\mathrm{g} = du^2 + \lambda^2(u)\, d\theta^2,$$

in cui la funzione λ dipende solo dalla variabile u, è la prima forma fondamentale di una superficie di rotazione:

eq:sffddb
$$\begin{cases} x = a\lambda(u)\cos(\theta/a) \\ y = a\lambda(u)\sin(\theta/a) \\ z = \psi_a(u) \end{cases} \tag{5.8}$$

ove

eq:sffddc
$$\psi_a(u) = \int_{u_0}^{u} \sqrt{1 - a^2\dot{\lambda}^2(t)}\, dt. \tag{5.9}$$

5.1. Superici di rotazione a curvatura costante. Fissato un numero reale K_0, otteniamo una superficie di rotazione con curvatura costante K_0, nella forma (5.8), (5.9), risolvendo l'equazione differenziale:

eq:sffddk
$$\frac{d^2\lambda}{du^2} + K_0\lambda = 0. \tag{5.10}$$

Le soluzioni della (5.10) sono date dalle:

$$\begin{aligned} K_0 = -k^2 < 0 \quad &\longrightarrow \quad \lambda(u) = A\exp(ku) + B\exp(-ku), \\ K_0 = 0 \quad &\longrightarrow \quad \lambda(u) = Au + B, \\ K_0 = k^2 > 0 \quad &\longrightarrow \quad \lambda(u) = A\cos(ku) + B\sin(ku), \\ &\text{con} \quad A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Per il Teorema 8.3 del Capitolo 23, due metriche Riemanniane con la stessa curvatura costante sono equivalenti, in particolare superfici con la stessa curvatura costante sono applicabili l'una sull'altra facendo corrispondere a un punto della prima un arbitrario punto della seconda. Gli esempi sopra ci permettono di ottenere, per ogni curvatura costante assegnata, famiglie di superfici di rotazione con tale curvatura.

Osserviamo che, in generale, hanno curvatura costante K_0 metriche (4.12) con

$$\begin{aligned} K_0 = -k^2 < 0 \quad &\longrightarrow \quad \lambda(u) = A(v)\exp(ku) + B(v)\exp(-ku) \\ K_0 = 0 \quad &\longrightarrow \quad \lambda(u) = A(v)u + B(v) \\ K_0 = k^2 > 0 \quad &\longrightarrow \quad \lambda(u) = A(v)\cos(ku) + B(v)\sin(ku), \end{aligned}$$

in cui le $A(v)$ e $B(v)$ sono arbitrarie funzioni differenziabili di v. Se Le $A(v)$ e $B(v)$ *non* sono costanti, queste non sono prime forme fondamentali di superfici di rotazione.

6. Grafici

Consideriamo una superficie parametrica regolare di $\mathbb{R}^3$, assegnata come grafico di una funzione di due variabili $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$:

eq:supffdda
$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, \phi(u, v)). \tag{6.1}$$

Abbiamo

eq:supffddb (6.2) $$\mathrm{g} = (1+\phi_u^2)du^2 + 2\phi_u\phi_v du\,dv + (1+\phi_v^2)dv^2.$$

Otteniamo quindi per i coefficienti di Christoffel

eq:supffddc (6.3) $$\Gamma^i_{j,k} = \frac{\phi_{x^i}\phi_{x^j.x^k}}{1+\phi_u^2+\phi_v^2} \quad \text{con} \quad x^1 = u,\ x^2 = v.$$

Risulta allora

eq:supffddd (6.4) $$K = \frac{\phi_{u,u}\phi_{v,v} - \phi_{u,v}^2}{(1+\phi_u^2+\phi_v^2)^2}.$$

ESEMPIO 6.1. Consideriamo il paraboloide ellittico

$$z = a^2x^2 + b^2y^2.$$

La formula della curvatura ci dà

$$K = \frac{4a^2b^2}{(1+4a^4x^2+4b^4y^2)^2}.$$

Il punto di curvatura massima nel vertice $(0,0,0)$, in cui $K = 4a^2b^2$. La curvatura è sempre positiva e tende a 0 quando $(x,y,z) \to \infty$.

ESEMPIO 6.2. Consideriamo il paraboloide iperbolico

$$z = a^2x^2 - b^2y^2.$$

Otteniamo

$$K = -\frac{4a^2b^2}{(1+4a^4x^2+4b^4y^2)^2}.$$

La curvtura è sempre negativa. È uguale a $-4a^2b^2$ nel vertice $(0,0,0)$ e tende a 0 per $(x,y,z) \to \infty$.

ESEMPIO 6.3. Consideriamo l'elissoide S in $\mathbb{R}^3$, definito da

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1, \quad \text{con } a,b,c > 0.$$

Rappresentiamo $S \cap \{z > 0\}$ come grafico:

$$z = \phi(x,y) = \frac{1}{c}\sqrt{1-a^2x^2-b^2y^2}.$$

Abbiamo

$$\begin{cases} a^2x + c^2zz_x = 0, \\ b^2y + c^2zz_y = 0, \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} z_x = -\dfrac{a^2x}{c^2z}, \\ z_x = -\dfrac{b^2y}{c^2z}. \end{cases}$$

Differenziando ancora otteniamo

$$\begin{cases} a^2 + c^2z_x^2 + c^2zz_{x,x} = 0, \\ c^2z_xz_y + c^2zz_{x,y} = 0, \\ b^2 + c^2z_y^2 + c^2zz_{y,y} = 0. \end{cases}$$

Sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} z_{x,x} = -\dfrac{a^2(c^2z^2 + a^2x^2)}{c^4z^3}, \\ z_{x,y} = -\dfrac{a^2b^2xy}{c^4z^3} \\ z_{y,y} = -\dfrac{b^2(c^2z^2 + b^2y^2)}{c^4z^3}, \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} c^8z^6(z_{x,x}z_{y,y} - z_{x,y}^2) &= a^2b^2\left[(c^2z^2 + a^2x^2)(c^2z^2 + b^2y^2) - a^2b^2x^2y^2\right] \\ &= a^2b^2(c^4z^4 + a^2c^2x^2z^2 + b^2c^2y^2z^2) \\ &= a^2b^2(c^2z^2)(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) \\ &= a^2b^2c^2z^2. \end{aligned}$$

Abbiamo poi

$$1 + z_x^2 + z_y^2 = 1 + \frac{a^4x^2}{c^4z^2} + \frac{b^4y^2}{c^4z^2} = \frac{a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2}{c^4z^2},$$

da cui ricaviamo per la curvatura

$$\begin{aligned} K(x,y) &= \frac{a^2b^2c^8z^4}{c^6z^4(a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2)^2} \\ &= \frac{a^2b^2c^2}{(a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2)^2}. \end{aligned}$$

I punti stazionari per la curvatura sono nei sei vertici dell'elissoide. Possiamo trovarli, ad esempio, utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Otteniamo

$$\begin{cases} a^4x = \lambda a^2x \\ b^4y = \lambda b^2y \\ c^4z = \lambda c^2z \\ a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1, \end{cases}$$

che dà le soluzioni $(\pm(1/a), 0, 0)$, $(0, \pm(1/b), 0)$, $(0, 0, \pm 1/c)$, ove K assume, rispettivamente, i valori (b^2c^2/a^2), (a^2c^2/b^2), (a^2b^2/c^2).

Esempio 6.4. Consideriamo ora l'iperboloide a due falde

$$c^2z^2 = 1 + a^2x^2 + b^2y^2.$$

Sulla falda contenuta in $z > 0$, la z è funzione di x e y. Allora

$$\begin{cases} c^2zz_x = a^2x, \\ c^2zz_y = b^2y, \\ c^2zz_{x,x} = a^2 - c^2z_x^2, \\ zz_{x,y} = -z_xz_y, \\ c^2zz_{y,y} = b^2 - c^2z_y^2. \end{cases}$$

Da queste ricaviamo:

$$\begin{cases} z_{x,x} = \dfrac{a^2(c^2z^2 - a^2x^2)}{c^4z^3}, \\ z_{x,y} = -\dfrac{a^2b^2xy}{c^4z^3}, \\ z_{y,y} = \dfrac{b^2(x^2z^2 - b^2y^2)}{c^4z^3}. \end{cases}$$

Abbiamo perciò

$$\begin{aligned} c^8z^6(z_{x,x}z_{y,y} - z_{x,y}^2) &= a^2b^2[(c^2z^2 - a^2x^2)(c^2z^2 - b^2y^2) - a^2b^2x^2y^2] \\ &= a^2b^2(c^4z^4 - b^2c^2y^2z^2 - a^2c^2x^2z^2) \\ &= a^2b^2c^2z^2(c^2z^2 - b^2y^2 - a^2x^2) \\ &= a^2b^2c^2z^2 \end{aligned}$$

$$1 + z_x^2 + z_y^2 = \frac{a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2}{c^4z^2}$$

da cui:

$$K = \frac{a^2b^2c^8z^4}{c^6z^4(a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2)^2} = \frac{a^2b^2c^2}{(a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2)^2}.$$

Gli unici punti stazionari della curvatura corrispondono ai due vertici $(0, 0, \pm(1/c))$, in cui essa ha un valore massimo (a^2b^2/c^2). È $0 < K \leq (a^2b^2/c^2)$, e la curvatura tende a zero per $(x, y, z) \to \infty$.

Esempio 6.5. Consideriamo ora l'iperboloide a una falda

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 1 + c^2z^2.$$

Ripetendo i calcoli fatti nel caso dell'iperboloide a due falde, otteniamo

$$K = -\frac{a^2b^2c^2}{(a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2)^2}.$$

La ricerca di massimi e minimi locali per la curvatura, ad esempio utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ci dà come soluzioni i punti $(\pm(1/a), 0, 0)$ e $(0, \pm(1/b), 0)$, il cui la curvatura vale $-(b^2c^2/a^2)$ e $-(a^2c^2/b^2)$, rispettivamente.

7. Il problema dell'applicabilità

Siano S ed S' due superfici Riemanniane, con metriche g e g$'$, rispettivamente. Fissati $p_0 \in S$ e $p_0' \in S'$, ci proponiamo di determinare sotto quali condizioni esista un diffeomorfismo $\phi : U' \to U$ di un intorno U' di p_0' in S' su un intorno U di p_0 in S tale che $\phi^*(\mathrm{g}) = \mathrm{g}'$.

Definizione 7.1. In questo caso diciamo che la S è *applicabile* sulla S' in modo da far corrispondere p_0 a p_0'.

Questo problema si chiama dunque il *problema dell'applicabilità locale.*

Siano Ω, Ω' due aperti di $\mathbb{R}^2$ e consideriamo due parametrizzazioni regolari di classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\mathbf{r} : \Omega \to S \quad \text{ed} \quad \mathbf{r}' : \Omega' \to S',$$

in p_0 e p_0', rispettivamente.

Indichiamo con K, K' le curvature Gaussiane di S, S'.

Poiché la curvatura è un invariante differenziale, condizione necessaria per l'applicabilità è che

eq:supffeaaa sec:supffea

$$K'(p_0') = K(p_0). \tag{7.1}$$

7.1. Caso I. Consideriamo le due funzioni $K = K(x^1, x^2)$ e $\nabla^2_{\mathrm{g}} K(x^1, x^2)$ su Ω. Se nel punto $x_0 \in \Omega$ corrispondente a $p_0 \in S$ risulta

eq:supffeaa

$$D(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial K}{\partial x^1} & \frac{\partial K}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \nabla^2_{\mathrm{g}} K}{\partial x^1} & \frac{\partial \nabla^2_{\mathrm{g}} K}{\partial x^2} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{in} \quad x_0, \tag{7.2}$$

allora $D(x) \neq 0$ in un intorno aperto ω di x_0 in Ω. Per il teorema delle funzioni implicite, $(u, v) = (K(x^1, x^2), \nabla^2_{\mathrm{g}} K(x^1, x^2))$ definisce un diffeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^2$ in un intorno di x_0, e quindi una nuova parametrizzazione [1] di S in un intorno di p_0. Chiaramente, condizione necessaria per l'applicabilità è che sia verificata la (7.1) e che valga inoltre

$$D'(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial K'}{\partial y^1} & \frac{\partial K'}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \nabla^2_{\mathrm{g}'} K'}{\partial y^1} & \frac{\partial \nabla^2_{\mathrm{g}'} K'}{\partial y^2} \end{pmatrix} \neq 0$$

nel punto $y_0 \in \Omega'$ corrispondente a p_0'. Sarà quindi condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità che, nelle nuove coordinate $u' = K'(y^1, y^2)$, $v' = \nabla^2_{\mathrm{g}'} K'$, risulti:

$$\tilde{g}'_{i,j}(u, v) = \tilde{g}_{i,j}(u, v) \quad \text{per} \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

per u, v in un intorno di $(K(x_0), \nabla^2_{\mathrm{g}} K(x_0)) = (K'(y_0), \nabla^2_{\mathrm{g}'} K'(y_0))$ in $\mathbb{R}^2$.

Possiamo ragionare in modo analogo se

eq:supffeak

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial K}{\partial x^1} & \frac{\partial K}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \Delta_{\mathrm{g}} K}{\partial x^1} & \frac{\partial \Delta_{\mathrm{g}} K}{\partial x^2} \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

[1] Nelle nuove coordinate

$$\begin{cases} \mathrm{g} = \tilde{g}_{1,1} du^2 + 2\tilde{g}_{1,2} du\, dv + \tilde{g}_{2,2} dv^2 & \text{con} \\ \tilde{g}_{1,1} = \dfrac{\nabla^2_{\mathrm{g}}(\nabla^2_{\mathrm{g}} K)}{\nabla^2_{\mathrm{g}} K \cdot \nabla^2_{\mathrm{g}}(\nabla^2_{\mathrm{g}} K) - \nabla_{\mathrm{g}}(K, \nabla^2_{\mathrm{g}} K)}, \\ \tilde{g}_{1,2} = -\dfrac{\nabla_{\mathrm{g}}(K, \nabla^2_{\mathrm{g}} K)}{\nabla^2_{\mathrm{g}} K \cdot \nabla^2_{\mathrm{g}}(\nabla^2_{\mathrm{g}} K) - \nabla_{\mathrm{g}}(K, \nabla^2_{\mathrm{g}} K)}, \\ \tilde{g}_{2,2} = \dfrac{\nabla^2_{\mathrm{g}} K}{\nabla^2_{\mathrm{g}} K \cdot \nabla^2_{\mathrm{g}}(\nabla^2_{\mathrm{g}} K) - \nabla_{\mathrm{g}}(K, \nabla^2_{\mathrm{g}} K)}. \end{cases}$$

è $\neq 0$ in x_0, utilizzando $(K, \Delta_{\mathrm{g}} K)$, in un intorno di $(K(x_0), \Delta_{\mathrm{g}} K(x_0))$, come coordinate canoniche in un intorno di $p_0 \in S$.

Osserviamo che, nelle situazioni qui considerate, vi è *al più* un diffeomorfismo che applichi tra loro le due superficie facendo corrispondere p_0 ad p_0'. Inoltre, per nessun punto $p \neq p_0$ di un intorno di p_0 in S vi è un'isometria locale di S che applichi p_0 in p.

sec:supffeb

7.2. Caso II. Consideriamo ora il caso in cui risultino

eq:supffeba
$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial K}{\partial x^1} & \frac{\partial K}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \nabla^2_{\mathrm{g}} K}{\partial x^1} & \frac{\partial \nabla^2_{\mathrm{g}} K}{\partial x^2} \end{pmatrix} = 0, \qquad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial K}{\partial x^1} & \frac{\partial K}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \Delta_{\mathrm{g}} K}{\partial x^1} & \frac{\partial \Delta_{\mathrm{g}} K}{\partial x^2} \end{pmatrix} = 0 \tag{7.4}$$

in un intorno di x_0, e sia $dK(x_0) \neq 0$.

Dimostriamo il

lm:supffea

LEMMA 7.2. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ ed $u, v \in \mathcal{E}(\Omega)$. Se*

$$du(x_0) \neq 0 \tag{7.5}$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x^1} & \frac{\partial u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x^1} & \frac{\partial v}{\partial x^2} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{7.6}$$

allora possiamo trovare un intorno aperto U di x_0 in Ω ed una funzione λ, di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno di $u(U)$, tale che

eq:supffebc
$$v(x) = \lambda(u(x)) \quad \text{in} \quad U. \tag{7.7}$$

DIMOSTRAZIONE. Utilizzando il teorema delle funzioni implicite, possiamo ricondurci al caso in cui $u(x) = x^1$. Allora la condizione

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x^1} & \frac{\partial v}{\partial x^2} \end{pmatrix} = 0$$

significa che

$$\frac{\partial v}{\partial x^2} = 0,$$

e quindi in un intorno di x_0 la v è funzione della sola x^1, cioè si ottiene la (7.7). □

Per le (7.4), ricaviamo dal Lemma 7.2 che, per opportune funzioni reali di una variabile ϕ_1, ϕ_2, abbiamo

$$\begin{cases} \nabla^2_{\mathrm{g}} K(x) = \phi_1(K(x)), \\ \Delta_{\mathrm{g}} K(x) = \phi_2(K(x)). \end{cases}$$

Osserviamo che, per l'ipotesi che $dK \neq 0$, abbiamo $\phi_1(K) > 0$ e possiamo perciò considerare la funzione

$$\mu(K) = \exp\left(- \int_{K_0}^{K} \frac{\phi_2(k)}{\phi_1(k)} dk \right).$$

Poniamo $\delta(x) = 1/\sqrt{\det(\mathrm{g}_x)}$ e definiamo

$$\alpha_1(x) = \mu(K(x))\delta\left(g_{1,2}\frac{\partial K}{\partial x^1} - g_{1,1}\frac{\partial K}{\partial x^2}\right),$$
$$\alpha_2(x) = \mu(K(x))\delta\left(g_{2,2}\frac{\partial K}{\partial x^1} - g_{1,2}\frac{\partial K}{\partial x^2}\right).$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^2} =& \frac{\partial}{\partial x^1}\left[\mu(K(x))\delta\left(g_{2,2}\frac{\partial K}{\partial x^1} - g_{1,2}\frac{\partial K}{\partial x^2}\right)\right] \\
&- \frac{\partial}{\partial x^2}\left[\mu(K(x))\delta\left(g_{1,2}\frac{\partial K}{\partial x^1} - g_{1,1}\frac{\partial K}{\partial x^2}\right)\right] \\
=& \left[\frac{\partial \mu(K(x))}{\partial x^1}\right]\delta\left(g_{2,2}\frac{\partial K}{\partial x^1} - g_{1,2}\frac{\partial K}{\partial x^2}\right) \\
&+ \left[\frac{\partial \mu(K(x))}{\partial x^2}\right]\delta\left(g_{1,2}\frac{\partial K}{\partial x^1} - g_{1,1}\frac{\partial K}{\partial x^2}\right) \\
&+ \mu(K(x))\delta\Delta_{\mathrm{g}}K \\
=& -\mu(K)\delta\frac{\Delta_{\mathrm{g}}K}{\nabla^2_{\mathrm{g}}K}\left[g_{2,2}\left(\frac{\partial K}{\partial x^1}\right)^2\right. \\
&\left. -2g_{1,2}\left(\frac{\partial K}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial K}{\partial x^2}\right) + g_{1,1}\left(\frac{\partial K}{\partial x^2}\right)^2\right] \\
&+ \mu(K)\delta\Delta_{\mathrm{g}}K \\
=& -\mu(K)\delta\frac{\Delta_{\mathrm{g}}K}{\nabla^2_{\mathrm{g}}K}\nabla^2_{\mathrm{g}}K + \mu(K)\delta\Delta_{\mathrm{g}}K = 0.
\end{aligned}$$

Quindi $\alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2$ è un differenziale chiuso e perciò esatto in un intorno di x_0. Possiamo quindi definire una funzione $\theta(x)$ tale che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial x^1} = \alpha_1, \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x^2} = \alpha_2. \end{cases}$$

Abbiamo

$$\det\left(\frac{\partial(K,\theta)}{\partial(x^1,x^2)}\right) = \delta^{-1}\mu(K)\nabla^2_{\mathrm{g}}K \neq 0$$

e dunque K e θ definiscono coordinate locali in un intorno di x_0. Abbiamo

$$\nabla_{\mathrm{g}}(K,\theta) = 0, \quad \nabla^2(\theta) = \mu^2(K)\nabla^2_{\mathrm{g}}K.$$

La metrica nelle nuove coordinate si esprime mediante

$$\mathrm{g} = \frac{dK^2}{\nabla^2_{\mathrm{g}} K} + \frac{d\theta^2}{\mu^2(K)\nabla^2_{\mathrm{g}} K}.$$

Nella nuova variabile

$$u = \int_{K_0}^{K} \frac{dk}{\sqrt{\alpha_1(k)}}$$

otteniamo

$$\mathrm{g} = du^2 + \lambda^2(u) d\theta^2$$

con

$$\lambda(u) = \frac{1}{\mu\sqrt{\alpha_1}},$$

che è la prima forma fondamentale di una superficie di rotazione.

Perché la S sia applicabile sulla S' facendo corrispondere p_0 a p'_0 occorrerà allora che la curvatura K' di S' soddisfi in un intorno di p'_0 le analoghe delle (7.4) e

$$\begin{cases} \nabla_{\mathrm{g}'} K' = \phi_1(K'), \\ \Delta_{\mathrm{g}'} K' = \phi_2(K'). \end{cases}$$

Osserviamo ancora che in questo caso vi è un gruppo locale a un parametro di isometrie di S, corrispondenti alle rotazioni intorno all'asse di una superficie di rotazione.

sec:supffec

7.3. Caso III. Abbiamo già trattato il caso della curvatura costante: il Teorema 8.3 del Capitolo 23 ci dice che due superfici con la stessa curvatura costante sono localmente applicabili, e che ad ogni punto della prima si può far corrispondere nell'isometria locale un qualsiasi punto della seconda.

8. La seconda forma fondamentale di una superficie

sec:sfff

La *seconda forma fondamentale* di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è una forma differenziale simmetrica $\mathrm{b} : TS \times_S TS \to \mathbb{R}$ che descrive, in modo invariante rispetto alle isometrie di $\mathbb{R}^3$, il modo in cui la S è immersa in $\mathbb{R}^3$.

Prima di definire la seconda forma fondamentale, dobbiamo definire il concetto di superficie orientata e di versore normale di una superficie orientata.

Definizione 8.1. Sia S una superficie Riemanniana con metrica g. Un'orientazione su S è una forma alternata $\omega : TS \times_S TS \to \mathbb{R}$ tale che

eq:sfffaa

$$|\omega(X,Y)|^2 + |g(X,Y)|^2 = g(X,X)g(Y,Y) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(S). \tag{8.1}$$

È sempre possibile definire localmente un'orientazione, e, quando sia possibile definire globalmente un'orientazione su S, questa è univocamente determinata a meno di moltiplicazione per ± 1 su ciascuna componente connessa di S.

Una superficie S su cui sia possibile definire un'orientazione si dice *orientabile* e, una volta che una delle sue due orientazioni sia stata scelta, la chiameremo una superficie *orientata*.

DEFINIZIONE 8.2. Sia ω un'orientazione su S e $p \in S$. Una coppia di vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T_pS$ si dice *orientata positivamente* se $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) > 0$, *orientata negativamente* se $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) < 0$. Un sistema di coordinate $\mathbf{r} : \Omega \to S$ si dice orientato positivamente, o negativamente, a seconda che le coppie di vettori $(d\mathbf{r}(\partial/\partial x^1), d\mathbf{r}(\partial/\partial x^1)$ siano orientati positivamente o negativamente.

DEFINIZIONE 8.3. Se S è una superficie orientata di $\mathbb{R}^3$ si dice *versore normale* alla superficie S il campo vettoriale $S \ni p \to \mathbf{n}(p) \in \mathbb{R}^3$ tale che, per ogni scelta di due vettori tangenti $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ di T_pS per cui $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ sia orientato positivamente, la terna $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{n}(p))$ è orientata positivamente in $\mathbb{R}^3$, è cioè (identificando i vettori a vettori numerici colonna)

eq:sfffxa
$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{n}) > 0. \tag{8.2}$$

DEFINIZIONE 8.4. Sia S una superficie di $\mathbb{R}^3$. Sia ∇ la derivazione covariante definita dalla prima forma fondamentale g su S e sia D la derivazione covariante in $\mathbb{R}^3$, rispetto alla metrica Euclidea. Dati due campi di vettori X e Y tangenti alla superficie S, e indichiamo ancora con X e Y loro arbitrarie estensioni ad un intorno aperto di S in $\mathbb{R}^3$. Definiamo la *seconda forma fondamentale* di S mediante

eq:sfffd
$$\mathrm{b}_x(X, Y) = (\mathbf{n}_S(x) | D_X Y) = (\mathbf{n}_S(x) | D_Y X). \tag{8.3}$$

L'uguaglianza tra il secondo e il terzo membro è conseguenza del fatto che $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$ è ancora tangente ad S nei punti di S.

LEMMA 8.5. *Sia $\mathbf{r} : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione regolare orientata positivamente della superficie S. Allora la seconda forma fondamentale ha, rispetto alle coordinate, l'espressione:*

eq:sfffxb
$$\begin{aligned} \mathrm{b} &= -(d\mathbf{n} \mid d\mathbf{r}) = -\sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial n^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^j} dx^i dx^j \\ &= (\mathbf{n} \mid [d\mathbf{r}]^2) = \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{i,j=1}^{2} n^\alpha \frac{\partial^2 r^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j. \end{aligned} \tag{8.4}$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$d\mathbf{r}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}.$$

Quindi

$$D_{d\mathbf{r}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \widetilde{\frac{\partial r^\beta}{\partial x^j}}\right) \frac{\partial}{\partial y^\beta}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{b} &= \left(\mathbf{n} \mid D_{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} \right) dx^i dx^j \\ &= \left(\mathbf{n} \mid \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^i dx^j \end{aligned}$$

□

Per il Lemma 8.7 lm:sfffa la seconda forma fondamentale non dipende dalla parametrizzazione scelta per definirla. Possiamo quindi supporre, per semplicità, che S sia un grafico. Allora $\mathbf{r}(x^1, x^2) = (x^1, x^2, f(x^1, x^2))$ ed una base dei campi di vettori tangenti alla superficie è data dai vettori

$$X_1 = \sum_h \frac{\partial r^h}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^h} = \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad X_2 = \sum_h \frac{\partial r^h}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^h} = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

Abbiamo ancora

$$\mathbf{n}_S = \frac{(-f_{x^1}, -f_{x^2}, 1)}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2}}$$

e

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j} = (0, 0, f_{x^i, x^j}).$$

Quindi, nel caso di un grafico, la seconda forma fondamentale è data da

eq:sfffe (8.5)
$$\mathrm{b}_x = \frac{\sum_{i,j=1}^2 f_{x^i, x^j} dx^i dx^j}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2}}.$$

La nostra affermazione segue quindi dal fatto che

$$D_{X_i} X_j = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^3} \qquad \text{per} \quad i, j = 1, 2.$$

La formula (8.3) eq:sfffd permette di definire la seconda forma fondamentale per ogni ipersuperficie orientata di una qualsiasi varietà Riemanniana.

S una superficie in $\mathbb{R}^3$. La Sia $\mathbf{r} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione regolare locale di una superficie orientata di $\mathbb{R}^3$. Ricordiamo che il *versore normale* della superficie S è definito da

eq:sfffa (8.6)
$$\mathbf{n}_s(x) = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} \right|} \quad (\text{ove } \times \text{ indica il } \textit{prodotto vettore in } \mathbb{R}^3).$$

Le sue componenti sono quindi

$$\begin{cases} n^1_S(x) = \dfrac{\det\begin{pmatrix} \frac{\partial r^2}{\partial x^1} & \frac{\partial r^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial r^3}{\partial x^1} & \frac{\partial r^3}{\partial x^2} \end{pmatrix}}{\det(\mathrm{g}_x)} \\ n^2_S(x) = \dfrac{\det\begin{pmatrix} \frac{\partial r^3}{\partial x^1} & \frac{\partial r^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial r^1}{\partial x^1} & \frac{\partial r^1}{\partial x^2} \end{pmatrix}}{\det(\mathrm{g}_x)} \\ n^1_S(x) = \dfrac{\det\begin{pmatrix} \frac{\partial r^1}{\partial x^1} & \frac{\partial r^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial r^2}{\partial x^1} & \frac{\partial r^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}}{\det(\mathrm{g}_x)}. \end{cases}$$

DEFINIZIONE 8.6. La seconda forma fondamentale della superficie S si esprime nella parametrizzazione mediante

eq:sfffb

$$\begin{cases} \mathrm{b}_x = -(d\mathbf{n}_S(x) \mid \mathbf{r}(x)) = -\displaystyle\sum_{i,j,h} \frac{\partial n^h_S(x)}{\partial x^i}\frac{\partial r^h(x)}{\partial x^j} dx^i dx^j \\ \qquad = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} b_{i,j}(x) dx^i dx^j. \end{cases} \tag{8.7}$$

Poiché i vettori $\frac{\partial \mathbf{r}(x)}{\partial x^j}$ sono ortogonali ad $\mathbf{n}_S(x)$, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\mathbf{n}_S(x) \,\middle|\, \frac{\partial \mathbf{r}(x)}{\partial x^j}\right) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{n}_S(x)}{\partial x^i} \,\middle|\, \frac{\partial \mathbf{r}(x)}{\partial x^j}\right) + \left(\mathbf{n}_S(x) \,\middle|\, \frac{\partial^2 \mathbf{r}(x)}{\partial x^i \partial x^j}\right) \end{aligned}$$

e quindi è anche

eq:sfffc

$$\mathrm{b}_x = \sum_{i,j} b_{i,j} dx^i dx^j = \sum_{i,j} \left(\mathbf{n}_S(x) \,\middle|\, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j}\right). \tag{8.8}$$

lm:sfffa

LEMMA 8.7. *Se $\phi : \Omega' \to \Omega$ è un diffeomorfismo, detta f' la seconda forma fondamentale della superficie parametrica regolare $\mathbf{r}' = \mathbf{r} \circ \phi : \Omega' \to \mathbb{R}^3$ abbiamo*

eq:sfffe

$$\mathrm{b}'_y = \sum b^2_{i,j,\alpha,\beta=1} \frac{\partial \phi^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial \phi^j}{\partial y^\beta} dy^\alpha dy^\beta. \tag{8.9}$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial \phi^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial \phi^j}{\partial y^\beta} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}.$$

La tesi segue perché il secondo addendo a secondo membro è tangente alla superficie S, e quindi perpendicolare alla sua normale $\mathbf{n}_S$. □

OSSERVAZIONE 8.8. Data una superficie orientata di $\mathbb{R}^3$ ed un numero reale ϵ sufficientemente piccolo, possiamo definire una ϵ-deformazione normale della S nel modo seguente. Se $\mathbf{r} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione regolare di una porzione di S, ed Ω' un aperto relativamente compatto di Ω, per ϵ sufficientemente piccolo la $\mathbf{r}_\epsilon(x) = \mathbf{r}(x) + \epsilon \mathbf{n}_S(x)$ è ancora una superficie parametrica regolare. La sua forma fondamentale è

$$\mathrm{g}_x^{(\epsilon)} = (d\mathbf{r}_\epsilon(x)|d\mathbf{r}_\epsilon(x)) = \mathrm{g}_x - 2\epsilon \mathrm{b}_x + 0(\epsilon^2),$$

onde

$$\mathrm{b}_x = -\frac{1}{2}\frac{d}{d\epsilon}\mathrm{g}^{(\epsilon)}\Big|_{\epsilon=0}$$

ci dice che, a meno di un fattore di proporzionalità, la seconda forma fondamentale è la variazione prima della prima forma fondamentale quando questa si deformi in una superficie ad essa parallela.

9. Le equazioni fondamentali per le superfici in $\mathbb{R}^3$

sec:sffg

PROPOSIZIONE 9.1. *Sia $\mathbf{r} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ una porzione di superficie parametrica regolare. Abbiamo allora*

eq:sffga (9.1)
$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k} + b_{i,j}\mathbf{n}_S$$

eq:sffgb (9.2)
$$\frac{\mathbf{n}_S}{\partial x^i} = -\sum_{h,k=1}^{2} g^{h,k} b_{h,i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i,j;k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(\mathbf{r}_{x^j}|\mathbf{r}_{x^k}) + \frac{\partial}{\partial x^j}(\mathbf{r}_{x^i}|\mathbf{r}_{x^k}) - \frac{\partial}{\partial x^k}(\mathbf{r}_{x^i}|\mathbf{r}_{x^j})\right) \\
&= \frac{1}{2}\big((\mathbf{r}_{x^i,x^j}|\mathbf{r}_{x^k}) + (\mathbf{r}_{x^j}|\mathbf{r}_{x^i,x^k}) + (\mathbf{r}_{x^i,x^j}|\mathbf{r}_{x^k}) + (\mathbf{r}_{x^i}|\mathbf{r}_{x^j,x^k}) \\
&\quad - (\mathbf{r}_{x^i,x^k}|\mathbf{r}_{x^j}) - (\mathbf{r}_{x^i}|\mathbf{r}_{x^j,x^k})\big) \\
&= (\mathbf{r}_{x^i,x^j}, \mathbf{r}_{x^k})
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j} = \sum_{h,k} g^{h,k}(\mathbf{r}_{x^i,x^j}|\mathbf{r}_{x^h})\mathbf{r}_{x^k} + (\mathbf{r}_{x^i,x^j}|\mathbf{n}_S)\mathbf{n}_S,$$

che ci dà la (9.1).

Abbiamo poi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}_S}{\partial x^i} &= \sum_{h,k} g^{h,k}([\mathbf{n}_S]_{x^i}|\mathbf{r}_{x^h})\mathbf{r}_{x^k} + ([\mathbf{n}_S]_{x^i}|\mathbf{n}_S)\mathbf{n}_S \\
&= -\sum_{h,k} b^{h,k} b_{i,h} \mathbf{r}_{x^k}
\end{aligned}$$

perché $([\mathbf{n}_S]_{x^i}|\mathbf{n}_S) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}(\mathbf{n}_S|\mathbf{n}_S) = 0$. □

TEOREMA 9.2 (Teorema egregium di Gauss). *La curvatura della prima forma fondamentale è il rapporto tra il determinante della prima e della seconda forma fondamentale:*

eq:sffgc (9.3)
$$K_{\mathrm{g}} = \frac{\det(\mathrm{b}_x)}{\det(\mathrm{g}_x)} = \frac{b_{1,1}b_{2,2} - b_{1,2}^2}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché il secondo membro di (9.3) è invariante rispetto a riparametrizzazioni della superficie S, possiamo considerare il caso in cui la S sia un grafico $\Omega \ni (x^1, x^2) \to (x^1, x^2, f(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^3$. La curvatura K è data allora dalla (6.4):

$$K = \frac{f_{x^1,x^1} f_{x^2,x^2} - f_{x^1,x^2}^2}{(1 + f_{x_1}^2 + f_{x^2}^2)^2}.$$

Poiché

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}_x &= (1 + f_{x^1}^2)(dx^1)^2 + 2 f_{x^1} f_{x^2} dx^1 dx^2 + (1 + f_{x^2}^2)(dx^2)^2 \\
\mathrm{b}_x &= (1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2)^{-1/2} \sum_{i,j} f_{x^i,x^j} dx^i dx^j
\end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{g}_x) &= (1 + f_{x^1}^2)(1 + f_{x^2}^2) - f_{x^1}^2 f_{x^2}^2 = 1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2 \\
\det(\mathrm{b}_x) &= (1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2)^{-1} (f_{x^1,x^1} f_{x^2,x^2} - f_{x^1,x^2}^2)
\end{aligned}$$

da cui si ottiene la (9.3). □

Abbiamo inoltre:

TEOREMA 9.3 (Equazioni di Codazzi-Mainardi). *La seconda forma fondamentale soddisfa*

eq:sffgd (9.4)
$$\frac{\partial b_{i,j}}{\partial x^h} - \frac{\partial b_{i,h}}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^{2} (\Gamma_{i,j}^k b_{k,h} - \Gamma_{i,h}^k b_{k,j}) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\frac{\partial b_{i,j}}{\partial x^h} = (\mathbf{r}_{x^i,x^j,x^k} | \mathbf{n}_S) + (\mathbf{r}_{x^i,x^j} | [\mathbf{n}_S)]_{x^k}).$$

Poiché, per la (9.2)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}_{x^i,x^j} | [\mathbf{n}_S)]_{x^k}) &= -\sum_{h,k} g^{h,k} b_{h,i} (\mathbf{r}_{x^i,x^j} | \mathbf{r}_{x^k}) \\
&= -\sum_{h,\ell} g^{h,\ell} b_{h,k} \Gamma_{i,j;\ell} = -\sum_{h} \Gamma_{i,j}^h b_{h,k}
\end{aligned}$$

otteniamo le equazioni di Codazzi Mainardi da:

$$\begin{aligned}\frac{\partial b_{i,j}}{\partial x^h} - \frac{\partial b_{i,h}}{\partial x^j} &= (\mathbf{r}_{x^i,x^j,x^h}|\mathbf{n}_S) + (\mathbf{r}_{x^i,x^j}|[\mathbf{n}_S)]_{x^h}) \\ &\quad - (\mathbf{r}_{x^i,x^h,x^j}|\mathbf{n}_S) - (\mathbf{r}_{x^i,x^h}|[\mathbf{n}_S)]_{x^j}) \\ &= (\mathbf{r}_{x^i,x^j}|[\mathbf{n}_S)]_{x^h}) - (\mathbf{r}_{x^i,x^h}|[\mathbf{n}_S)]_{x^j}) \\ &= -\sum_k \Gamma^k_{i,j} b_{h,k} + \sum_k \Gamma^k_{i,h} b_{j,k}.\end{aligned}$$

□

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali ai differenziali totali che determina una superficie parametrica regolare in $\mathbb{R}^3$:

eq:sffge (9.5)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial r^i}{\partial x^j} = \omega^i_j & i = 1,2,3,\ j = 1,2 \\ \dfrac{\partial \omega^i_j}{\partial x^k} = \displaystyle\sum_{h=1}^{2} \Gamma^h_{j,k}\omega^i_h + b_{j,k} n^i_S & i = 1,2,3,\ j,k = 1,2 \\ \dfrac{\partial n^i_S}{\partial x^j} = -\displaystyle\sum_{h,k+1}^{2} g^{h,k} b_{h,j}\omega^i_k & i = 1,2,3,\ j = 1,2. \end{cases}$$

PROPOSIZIONE 9.4. *L'equazione di Gauss (9.3) e le equazioni di Codazzi-Mainardi (9.4) esprimono le condizioni di inegrabilità del sistema ai differenziali totali (9.5).*

DIMOSTRAZIONE. Le equazioni di Gauss e di Codazzi-Mainardi esprimono l'uguaglianza delle derivate seconde $\frac{\partial^2 \omega^i_j}{\partial x^h \partial x^k}$ e $\frac{\partial^2 \omega^i_j}{\partial x^k \partial x^h}$. Le $\frac{\partial^2 r^i}{\partial x^h \partial x^k} = \frac{\partial^2 r^i}{\partial x^k \partial x^h}$ sono conseguenza della simmetria dei simboli di Christoffel $\Gamma^i_{h,k}$ rispetto agli indici h, k. Ci resta soltanto da verificare la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial^2 \mathbf{n}_S}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{n}_S}{\partial x^j \partial x^i}.$$

Tenuto conto della terza delle (9.5), questa diventa

$$\begin{aligned}&\sum_{h,k=1}^{n} \left(\frac{\partial g^{h,k}}{\partial x^i} b_{h,j}\omega^r_k + g^{h,k}\frac{\partial b_{h,j}}{\partial x^i}\omega^r_k + g^{h,k} b_{h,j} \left[\sum_s \Gamma^s_{i,k}\omega^r_s + b_{i,k} n^r_S \right] \right) \\ &\quad = \sum_{h,k=1}^{n} \left(\frac{\partial g^{h,k}}{\partial x^j} b_{h,i}\omega^r_k + g^{h,k}\frac{\partial b_{h,i}}{\partial x^j}\omega^r_k + g^{h,k} b_{h,i} \left[\sum_s \Gamma^s_{j,k}\omega^r_s + b_{j,k} n^r_S \right] \right)\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned}\sum_{h,k} g^{h,k}\left(\frac{\partial b_{h,j}}{\partial x^i}-\frac{\partial b_{h,i}}{\partial x^j}\right)\omega_k^r \\ +\sum_{h,k,s} g^{h,k}\left(b_{h,j}\Gamma^s_{i,k}-b_{h,i}\Gamma^s_{j,k}\right)\omega_s^r \\ +\sum_{h,k}\left(\frac{\partial g^{h,k}}{\partial x^i}b_{h,j}-\frac{\partial g^{h,k}}{\partial x^j}b_{h,i}\right)\omega_k^r \\ +\sum_{h,k} g^{h,k}\left(b_{h,j}b_{i,k}-b_{h,i}b_{j,k}\right)n_S^r \;=\; 0.\end{aligned}$$

Ricordando l'espressione delle derivate dei coefficienti della forma reciproca $g^{h,k}$:

$$\frac{\partial g^{i,j}}{\partial x^k}=-\sum_h\left(\Gamma^i_{k,h}g^{h,j}+\Gamma^j_{k,h}g^{h,j}\right)$$

otteniamo la condizione d'integrabilità nella forma

$$\begin{aligned}\sum_{h,k} g^{h,k}\left(\frac{\partial b_{h,j}}{\partial x^i}-\frac{\partial b_{h,i}}{\partial x^j}\right)\omega_k^r+\sum_{h,k,s} g^{h,k}\left(b_{h,j}\Gamma^s_{i,k}-b_{h,i}\Gamma^s_{j,k}\right)\omega_s^r \\ +\sum_{h,r,s} g^{s,k}\left(\Gamma^h_{j,s}b_{h,i}-\Gamma^h_{i,s}b_{h,j}\right)\omega_k^r+\sum_{h,k,s} g^{s,h}\left(\Gamma^k_{j,s}b_{h,i}-\Gamma^k_{i,s}b_{h,j}\right)\omega_k^r \;=\; 0.\end{aligned}$$

Scambiando gli indici s e k, ci accorgiamo che il secondo ed il quarto addendo sono uno l'opposto dell'altro. Otteniamo quindi la condizione dell'integrabilità nella forma

$$\sum_{h,k} g^{h,k}\left(\frac{\partial b_{h,j}}{\partial x^i}-\frac{\partial b_{h,i}}{\partial x^j}+\sum_s\left[\Gamma^s_{j,h}b_{s,i}-\Gamma^s_{i,h}b_{s,j}\right]\right)\omega_k^r=0,$$

da cui risulta che esse sono conseguenza delle equazioni di Codazzi-Mainardi (9.4). □

10. Superfici con prima e seconda forma fondamentale assegnate

Per quanto dimostrato nel paragrafo 8, se sono soddisfatte le equazioni di Gauss (9.3) e di Codazzi-Mainardi (9.4), il sistema ai differenziali totali (9.5) ammette una ed una sola soluzione locale per arbitrarie condizioni iniziali assegnate:

$$\begin{cases}\mathbf{r}(x_0)=y_0\in\mathbb{R}^3\\ \omega^i_j(x_0)=\bar\omega^i_j\in\mathbb{R}\\ \mathbf{n}_S(x_0)=\bar{\mathbf{n}}\in\mathbb{R}^3.\end{cases}\tag{10.1}$$

Occorrerà però, affinché la soluzione trovata rappresenti una superficie di $\mathbb{R}^3$, che siano verificate anche le condizioni

eq:sffhb (10.2)
$$\begin{cases} |\mathbf{n}_S(x)| = 1 & \forall x \\ (\mathbf{n}_S(x) \mid \boldsymbol{\omega}_i(x)) = 0 & \forall x,\ i = 1,2 \\ (\boldsymbol{\omega}_i(x) \mid \boldsymbol{\omega}_j(x)) = g_{i,j}(x) & \forall x,\ i = 1,2 \\ \left(\mathbf{n}_S(x) \left| \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i(x)}{\partial x^j}\right.\right) = b_{i,j}(x) & \forall x,\ 1 \le i,j \le 2. \end{cases}$$

dove abbiamo indicato con $\boldsymbol{\omega}_i$ il vettore di componenti $(\omega_i^1, \omega_i^2, \omega_i^3)$.

Dimostriamo quindi il seguente

lm:sffha LEMMA 10.1. *La*

eq:sffhab (10.3)
$$\begin{pmatrix} |\mathbf{n}_S|^2 - 1 \\ (\mathbf{n}_S \mid \boldsymbol{\omega}_i) \\ g_{i,j} - (\boldsymbol{\omega}_i \mid \boldsymbol{\omega}_j) \end{pmatrix} = 0$$

è un integrale primo del sistema (9.5).

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(|\mathbf{n}_S|^2 - 1\right) &= 2\sum_{\alpha=1}^{3} n_S^\alpha \frac{\partial n_S^\alpha}{\partial x^i} \\ &= -2\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{h,k=1}^{2} g^{h,k} b_{h,i}\omega_k^\alpha n_S^\alpha \\ &= -2\sum_{h,k=1}^{2} g^{h,k} b_{h,i}(\mathbf{n}_S \mid \boldsymbol{\omega}_k). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^\ell}(\mathbf{n}_S \mid \boldsymbol{\omega}_j) &= \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\omega_j^\alpha \frac{\partial n_S^\alpha}{\partial x^\ell} + n_S^\alpha \frac{\partial \omega_j^\alpha}{\partial x^\ell}\right) \\
&= -\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_j^\alpha \sum_{h,k=1}^{2} g^{h,k} b_{h,\ell}\omega_k^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{3} n_S^\alpha \left(b_{j,\ell} n_S^\alpha + \sum_{h=1}^{2}\Gamma_{j,\ell}^h \omega_h^\alpha\right) \\
&= -sum_{h,k} g^{h,k} b_{h,\ell}(\boldsymbol{\omega}_j \mid \boldsymbol{\omega}_k) + b_{j,\ell}|\mathbf{n}_S|^2 + \sum_{h=1}^{2}\Gamma_{j,\ell}^h(\mathbf{n}_S \mid \boldsymbol{\omega}_h) \\
&= b_{j,\ell}(|\mathbf{n}_S|^2 - 1) + b_{j,\ell} + \sum_{h,k=1}^{2} g^{h,k}(g_{j,k} - (\boldsymbol{\omega}_j \mid \boldsymbol{\omega}_k)) b_{k,\ell} \\
&\quad - \sum_{h,k=1}^{2} g^{h,k} g_{j,k} b_{k,\ell} + \sum_{h=1}^{2}\Gamma_{j,\ell}^h(\mathbf{n}_S|\boldsymbol{\omega}_h) \\
&= b_{j,\ell}(|\mathbf{n}_S|^2 - 1) + \sum_{h,k=1}^{2} g^{h,k}(g_{j,k} - (\boldsymbol{\omega}_j \mid \boldsymbol{\omega}_k)) b_{k,\ell} \\
&\qquad\qquad + \sum_{h=1}^{2}\Gamma_{j,\ell}^h(\mathbf{n}_S|\boldsymbol{\omega}_h).
\end{aligned}$$

In fine

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^h}\left(g_{i,j} - (\boldsymbol{\omega}_i \mid \boldsymbol{\omega}_j)\right) &= \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^h} - \sum_{r=1}^{2}\left(\Gamma_{i,h}^r(\boldsymbol{\omega}_j \mid \boldsymbol{\omega}_r) + \Gamma_{j,h}^r(\boldsymbol{\omega}_i \mid \boldsymbol{\omega}_r)\right) \\
&\quad - b_{i,h}(\boldsymbol{\omega}_j \mid \mathbf{n}_S) - b_{j,h}(\boldsymbol{\omega}_i \mid \mathbf{n}_S) \\
&= \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^h} - \sum_{r=1}^{2}\Gamma_{i,h}^r g_{j,r} - \sum_{r=1}^{2}\Gamma_{j,h}^r g_{i,r} \\
&\quad + \sum_{r=1}^{2}\Gamma_{i,h}^r(g_{j,r} - (\boldsymbol{\omega}_j \mid \boldsymbol{\omega}_r)) + \sum_{r=1}^{2}\Gamma_{j,h}^r(g_{i,r} - (\boldsymbol{\omega}_i \mid \boldsymbol{\omega}_r)) \\
&\quad - b_{i,h}(\boldsymbol{\omega}_j \mid \mathbf{n}_S) - b_{j,h}(\boldsymbol{\omega}_i \mid \mathbf{n}_S)
\end{aligned}$$

L'espressione nella terzultima riga è nulla per le proprietà dei simboli di Christoffel che esprimono il fatto che la derivata covariante della metrica, rispetto alla connessione di Levi-Civita, è nulla. La dimostrazione è quindi completa. □

LEMMA 10.2. *Una soluzione di* (9.5) *che soddisfi* (10.3)*, soddisfa anche*

eq:sffhac (10.4)
$$\left(\mathbf{n}_S \left| \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial x^j}\right.\right) = g_{i,j}.$$

DIMOSTRAZIONE. Il secondo gruppo delle equazioni (9.5) si scrive in forma vettoriale

eq:sffhac
$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_j}{\partial x^k} = \sum_{h=1}^{2} \Gamma^h_{j,k} \boldsymbol{\omega}_h + b_{j,k} \mathbf{n}_S. \tag{10.5}$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{n}_S$ i due membri di questa uguaglianza e utilizzando le (9.5), otteniamo la (10.5). □

Otteniamo così il seguente

th:sffha
TEOREMA 10.3. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$, su cui sono assegnate due forme differenziali quadratiche $\mathrm{g}, \mathrm{b} : T\Omega \to \mathbb{R}$, con g definita positiva. Se le due forme soddisfano le equazioni di Gauss (9.3) e di Codazzi-Mainardi (9.4), fissato un punto $x_0 \in \Omega$ ed assegnati $y_0 \in \mathbb{R}^3$, $\bar{\mathbf{n}}_S, \bar{\boldsymbol{\omega}}_1, \bar{\boldsymbol{\omega}}_2 \in \mathbb{R}^3$ che soddisfino:*

eq:sffhf
$$|\bar{\mathbf{n}}_S| = 1, \quad (\bar{\mathbf{n}}_S \mid \bar{\boldsymbol{\omega}}_i) = 0, \quad (\bar{\boldsymbol{\omega}}_i \mid \bar{\boldsymbol{\omega}}_j) = g_{i,j}(x_0) \qquad \text{per } i, j = 1, 2, \tag{10.6}$$

esiste un intorno U di x_0 in Ω e una superficie regolare $S = \{\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3\}$ con

eq:sffhe
$$\begin{cases} \mathbf{r}(x_0) = y_0, \quad \dfrac{\partial \mathbf{r}(x_0)}{\partial x^i} = \bar{\boldsymbol{\omega}}_i, \text{ per } i = 1, 2, \\ \bar{\mathbf{n}}_S = \text{normale ad } S \text{ in } y_0. \end{cases} \tag{10.7}$$

tale che $\mathrm{g}|_U$ e $\mathrm{b}|_U$ siano la prima e la seconda forma fondamentale di $S|_U = \{\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3\}$, rispettivamente.

Due superficie parametriche regolari, definite per valori dei parametri in un intorno di x_0 in Ω, e che abbiano prima e seconda forma fondamentale g e b dove sono definite, e soddisfino entrambe le (10.7), coincidono in un intorno di x_0 in Ω.

Osserviamo che il sistema (9.5) è lineare. Ricordiamo che avevamo esplicitamente trovato una soluzione di un sistema differenziale ai differenziali totali riconducendoci alla risoluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Tenuto conto di questo, possiamo dare una versione *globale* del Teorema 10.3.

TEOREMA 10.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ connesso e semplicemente connesso. Siano g, b assegnate come nell'enunciato del Teorema 10.3. Allora esiste una ed una sola superficie parametrica regolare $S = \{\mathbf{r} : \Omega \to \mathbb{R}^3\}$ che abbia g, b come prima e seconda forma fondamentale e soddisfi le condizioni iniziali (10.7), per dati iniziali che verifichino le (10.6).*

Da questa discende il

COROLLARIO 10.5. *Siano $S_i = \{\mathbf{r}_i : \Omega \to \mathbb{R}^3\}$, per $i = 1, 2$, sono due superfici parametriche regolari, definite sullo stesso insieme aperto connesso di parametri Ω. Se le due superfici hanno la stessa prima e seconda forma fondamentale, allora esiste un movimento rigido $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che*

eq:sffhk
$$\tau \circ \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2. \tag{10.8}$$

DIMOSTRAZIONE. Le equazioni (9.5) sono invarianti rispetto a movimenti rigidi dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$. Fissato un qualsiasi punto $x_0 \in \Omega$, vi è uno ed un solo movimento rigido di $\mathbb{R}^3$ che trasformi $\mathbf{r}_1(x_0)$ in $\mathbf{r}_2(x_0)$, trasformando al tempo stesso i vettori $\frac{\partial \mathbf{r}_1(x_0)}{\partial x^i}$ nei vettori $\frac{\partial \mathbf{r}_2(x_0)}{\partial x^i}$ ed $\mathbf{n}_{S_1}(x_0)$ in $\mathbf{n}_{S_2}(x_0)$. Allora $\mathbf{r}_2$ e $\tau \circ \mathbf{r}_1$ risolvono le (9.5) con gli stessi dati iniziali, e quindi coincidono sulla componente connessa di x_0 in Ω. □

11. Superfici con curvatura Gaussiana assegnata

sec:sffi

Sia $S = \{\mathbf{r} : \Omega \to \mathbb{R}^3\}$ una superficie parametrica regolare. Ricordiamo la formula delle derivate seconde della $\mathbf{r}$:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{r}}{\partial x^i \partial x^j} = \sum_{h=1}^{2} \Gamma^h_{j,k} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^h} + b_{j,k}\mathbf{n}_S.$$

Indichiamo con

eq:sffia

$$\omega^\alpha_{j,k} = \frac{\partial^2 r^\alpha}{\partial x^j \partial x^k} - \sum_{h=1}^{2} \Gamma^h_{j,k} \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^h} \tag{11.1}$$

le derivate seconde covarianti delle componenti r^α del vettore $\mathbf{r}$. Abbiamo allora

$$\omega^\alpha_{1,1}\omega^\alpha_{2,2} - \omega^\alpha_{1,2}\omega^\alpha_{2,1} = (b_{1,1}b_{2,2} - b_{1,2}b_{2,1})[n^\alpha_S]^2.$$

Poniamo $\omega^\alpha_i = \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^i}$. La matrice

$$\begin{pmatrix} \omega^1_1 & \omega^1_2 & n^1_S \\ \omega^2_1 & \omega^2_2 & n^2_S \\ \omega^3_1 & \omega^3_2 & n^3_S \end{pmatrix}$$

è ortogonale rispetto alla forma bilineare simmetrica

$$\begin{pmatrix} g^{1,1} & g^{1,2} & 0 \\ g^{2,1} & g^{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi lo è anche la sua trasposta. In particolare otteniamo

eq:sffib

$$\nabla^2_{\mathrm{g}} r^\alpha = \sum_{h,k} g^{h,k} \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^h} \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^k} = 1 - [n^\alpha_S]^2 \quad \text{per} \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{11.2}$$

Diamo un'altra dimostrazione della formula (11.2). Con $D = \det(\mathrm{g})$, e abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{2} g^{i,j}\omega^\alpha_i \omega^\alpha_j &= \frac{1}{D}\left(g_{1,1}\omega^\alpha_1\omega^\alpha_1 - 2g_{1,2}\omega^\alpha_1\omega^\alpha_2 + g_{1,1}\omega^\alpha_2\omega^\alpha_2\right) \\ &= \frac{1}{D}\sum_{\beta=1}^{3}\left(\omega^\alpha_1\omega^\alpha_1\omega^\beta_2\omega^\beta_2 - 2\omega^\alpha_1\omega^\alpha_2\omega^\beta_1\omega^\beta_2 + \omega^\alpha_2\omega^\alpha_2\omega^\beta_1\omega^\beta_1\right) \\ &= \frac{1}{D}\sum_{\beta\neq\alpha}\left(\omega^\alpha_1\omega^\beta_2 - \omega^\alpha_2\omega^\beta_1\right)^2 \\ &= 1 - [n^\alpha_S]^2 \end{aligned}$$

perché le $\pm(\omega_1^\alpha\omega_2^\beta - \omega_2^\alpha\omega_1^\beta)/D^{1/2}$, con $\beta \neq \alpha$, sono le componenti diverse dalla componente α-esima del versore normale $\mathbf{n}_S$.

Abbiamo quindi ottenuto

eq:sffic
$$\omega^\alpha_{1,1}\omega^\alpha_{2,2} - \omega^\alpha_{1,2}\omega^\alpha_{2,1} = (b_{1,1}b_{2,2} - b_{1,2}b_{2,1})(1 - \nabla^2_{\mathrm{g}} r^\alpha), \tag{11.3}$$

da cui, dividendo per $D = \det(\mathrm{g})$, otteniamo l'*equazione di Monge-Ampère*:

eq:sffid
$$\frac{\omega^\alpha_{1,1}\omega^\alpha_{2,2} - \omega^\alpha_{1,2}\omega^\alpha_{2,1}}{D} = K(1 - \nabla^2_{\mathrm{g}} r^\alpha). \tag{11.4}$$

Questa equazione si esprime completamente per mezzo della prima forma fondamentale. Essa si chiama la *prima equazione dell'applicabilità*.

Il problema di trovare, assegnata una metrica Riemanniana g su un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$, una superficie parametrica regolare $S = \{\mathbf{r} : \Omega \to \mathbb{R}^3\}$ di cui g sia la prima forma fondamentale è legato al problema analitico dell'esistenza di soluzioni con gradiente piccolo della prima equazione dell'applicabilità.

Supporremo nel seguito che *l'equazione* (11.4) *ammetta soluzione locale nell'intorno di qualsiasi punto di* Ω.

sec:sffj
11.1. L'equazione di Monge-Ampère e l'applicabilità. Sia $w \in \mathcal{E}(\Omega)$ una soluzione dell'equazione di Monge-Ampère

eq:sffja
$$\det \begin{pmatrix} w_{x^1,x^1} & w_{x^1,x^2} \\ w_{x^2,x^1} & w_{x^2,x^2} \end{pmatrix} = \det(\mathrm{g})\, K\, (1 - \nabla^2_{\mathrm{g}} w), \tag{11.5}$$

che soddisfi la condizione

eq:sffjb
$$\nabla^2_{\mathrm{g}} w(x) < 1 \quad \forall x \in \Omega. \tag{11.6}$$

Allora la forma quadratica

eq:sffjc
$$\mathrm{g}' = \sum_{i,j=1}^{n} \left(g_{i,j} - \frac{\partial w}{\partial x^i}\frac{\partial w}{\partial x^j} \right) dx^i dx^j \tag{11.7}$$

è definita positiva. Dimostriamo che

lm:sffja
LEMMA 11.1. *La* g' *ha curvatura nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo limitarci a verificare il lemma sotto le ulteriori ipotesi che

(1) $w(x) = x^1$,
(2) x^1, x^2 sono coordinate ortogonali, cioè

$$\mathrm{g} = g_{1,1}[dx^1]^2 + g_{2,2}[dx^2]^2.$$

Allora

$$w_{x^i,x^j} = \Gamma^1_{i,j} \quad \text{per} \quad i,j = 1,2$$

e l'equazione di Monge-Ampère dà

$$\Gamma^1_{1,1}\Gamma^1_{2,2} - \left(\Gamma^1_{1,2}\right)^2 = g_{1,1}g_{2,2}K\left(1 - \frac{1}{g_{1,1}}\right),$$

cioè

$$(*) \qquad \frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1} - \left(\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2}\right)^2 + 4g_{1,1}^2 g_{2,2}(g_{1,1}-1)K = 0.$$

La curvatura in coordinate ortogonali è data da

$$4g_{1,1}^2 g_{2,2}^2\, K = g_{1,1}\left[\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1}\right)^2\right] + g_{2,2}\left[\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^2}\right)^2\right] - 2g_{1,1}g_{2,2}\left[\frac{\partial^2 g_{1,1}}{\partial x^2\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{2,2}}{\partial x^1\partial x^1}\right].$$

Sostituendo nella $(*)$ otteniamo

$$g_{2,2}\left[\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1} - \left(\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2}\right)^2\right] + (g_{1,1}-1)\left[g_{1,1}\left(\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1}\right)^2\right) + g_{2,2}\left(\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2}\right)^2\right) - 2g_{1,1}g_{2,2}\left[\frac{\partial^2 g_{1,1}}{\partial x^2\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{2,2}}{\partial x^1\partial x^1}\right]\right] = 0$$

Dividendo per $g_{1,1}$ otteniamo

$$(g_{1,1}-1)\left(\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1}\right)^2\right) + g_{2,2}\left(\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial g_{1,1}}{\partial x^2}\right)^2\right) - 2(g_{1,1}-1)g_{2,2}\left[\frac{\partial^2 g_{1,1}}{\partial x^2\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{2,2}}{\partial x^1\partial x^1}\right] = 0$$

Ma il primo membro è proprio la curvatura della metrica

$$\mathrm{g}' = (g_{1,1}-1)[dx^1]^2 + g_{2,2}[dx^2]^2.$$

Vedrifichiamo che possiamo ricondurci alle ipotesi (1), (2). Per verificare che la curvatura di g' è nulla in un punto $x_0 \in \Omega$, osserviamo che o w è costante in un intorno di x_0, nel qual caso $K = 0$ e $\mathrm{g}' = \mathrm{g}$, oppure x_0 è aderente all'insieme dei punti in cui dw, e quindi $\nabla^2_{\mathrm{g}} w$, è diverso da 0. Basterà quindi dimostrare che g' ha curvatura nulla in tali punti. Fissato un punto $\bar{x}$ con $dw(\bar{x}) \neq 0$, si definiscono nuove coordinate vicino ad $\bar{x}$ scegliendo una delle coordinate uguale a w e l'altra come soluzione dell'equazione

$$X(u) = \sum_{i,j=1}^{2} g^{i,j}\frac{\partial w}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^j} = 0.$$

[Consideriamo un campo di vettori $X = \sum_{i=1}^{2} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, con $a^1 \neq 0$, definito in un intorno di $0 \in \mathbb{R}^2$. Sia $\phi(t,u)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} \\ \phi(0,u) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Per $(t,u) = (0,0)$ abbiamo:

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial (t,u)}\right|_{\substack{t=0 \\ u=0}} = \begin{pmatrix} a(0) & 0 \\ b(0) & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi per il teorema delle funzioni implicite possiamo esprimere le coordinate (t,u) in funzione delle x^1, x^2 in un intorno di $0 \in \mathbb{R}^2$. Con $t = t(x^1,x^2)$, $u = u(x^1,x^2)$ otteniamo allora

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial x^1} & \frac{\partial t}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x^1} & \frac{\partial u}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{\partial \phi^1}{\partial u} \\ b & \frac{\partial \phi^2}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

In particolare $u(x^1,x^2)$ è soluzione dell'equazione differenziale alle derivate parziali $X(u) = 0$ e $du \neq 0$ perché la matrice Jacobiana $\frac{\partial(t,u)}{\partial(x^1,x^2)}$ ha determinante diverso da 0.]

□

Possiamo ora dimostrare il

TEOREMA 11.2. *Sia* g *una metrica Riemanniana definita su un aperto* Ω *di* $\mathbb{R}^2$. *Fissato* $x_0 \in \Omega$, *possiamo trovare un intorno aperto* U *di* x_0 *in* Ω *e una superficie parametrica regolare* $S = \{\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3\}$ *tale che* $\mathrm{g}|_U$ *sia la prima forma fondamentale di* S.

DIMOSTRAZIONE. Sia $w \in \mathcal{E}(U)$ una soluzione di (11.5), (11.6), (11.7). Poiché g' ha curvatura nulla per il Lemma 11.1, a meno di restringere l'intorno U, possiamo trovare un diffeomorfismo $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^2$ tale che

$$\mathrm{g}'|_U = \phi^*([dy^1]^2 + [dy^2]^2).$$

Basterà allora definire

$$\mathbf{r}(x) = \begin{pmatrix} \phi^1(x) \\ \phi^2(x) \\ w(x) \end{pmatrix}$$

per ottenere una superficie parametrica regolare con prima forma fondamentale g. □

CAPITOLO 25

Superficie nello spazio euclideo

1. Generalità sulle superficie di $\mathbb{R}^3$

DEFINIZIONE 1.1. Si dice *superficie* di classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) una sottovarietà chiusa S, differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, di dimensione 2, di un aperto A di $\mathbb{R}^3$.

Per la definizione di varietà differenziabile, dato un qualsiasi punto $p \in S$, possiamo trovare un intorno aperto U di p in $\mathbb{R}^3$, un aperto V di $\mathbb{R}^2$ e una immersione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$:

$$\mathbf{r} : V \to \mathbb{R}^3$$

tale che

eq:gunaa (1.1) $$\mathbf{r}(V) = U \cap S.$$

Per il teorema delle funzioni implicite, ciò equivale al fatto che per ogni punto $p \in S$ si possa trovare un intorno U di p in $\mathbb{R}^3$ e una funzione di classe $\mathcal{C}^k$:

eq:gunab (1.2) $$f : U \to \mathbb{R}$$

tale che:

eq:gunac (1.3) $$S \cap U = \{x \in U | f(x) = 0\}$$

e:

eq:gunad (1.4) $$df(x) \neq 0 \ \ \forall x \in U$$

ovvero:

eq:gunada (1.5) $$\nabla f(x) = {}^t(\partial f(x)/\partial x^1, \partial f(x)/\partial x^2, \partial f(x)/\partial x^3) \neq 0 \ \ \forall x \in U.$$

Diremo che *la funzione f definisce S in un intorno di p.* Due funzioni che definiscano S in un intorno di un suo punto p hanno in p gradienti proporzionali. In particolare è sempre possibile, sostituendo alla f la $|\nabla f|^{-1} f$, supporre:

eq:gunae (1.6) $$|\nabla f(x)| = 1 \ \ \forall x \in S \cap U.$$

Un qualsiasi vettore che sia multiplo di $\nabla f(p)$ si dice *normale* o *ortogonale* alla superficie S nel punto p.

DEFINIZIONE 1.2. Un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ si dice *tangente* alla superficie S in un punto p se

$$(\nabla f(p) | v) = 0$$

per una qualsiasi funzione f che definisce S in un intorno di p. I vettori tangenti ad S nel punto p formano un sottospazio vettoriale di dimensione 2, che si dice *spazio tangente* ad S in p e si indica con T_pS.

Se S è definita da (1.1) in un intorno di p e $p = \mathbf{r}(y_0)$ per $y_0 \in V$, allora i vettori

$$\partial\mathbf{r}(y_0)/\partial y^1, \partial\mathbf{r}(y_0)/\partial y^2$$

formano una base di T_pS.

DEFINIZIONE 1.3. L'insieme:

eq:gunadf (1.7) $$TS = \{(x, X) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 | x \in S,\ X \in T_xS\}$$

è una sottovarietà differenziabile (di classe $\mathcal{C}^{k-1}$) di $\mathbb{R}^6$ che si dice il *fibrato tangente* di S.

Abbiamo un'applicazione naturale di proiezione:

eq:gunadg (1.8) $$\pi : TS \ni (x, X) \to x \in S$$

la cui fibra nel punto x è lo spazio tangente ad S in x.

DEFINIZIONE 1.4. Diciamo che S è *orientatabile* se è possibile definire una funzione:

$$\mathbf{n} : S \to S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 | |v| = 1\}$$

tale che $\mathbf{n}(p)$ sia normale a S in ogni punto p di S. Una tale funzione risulta necessariamente di classe $\mathcal{C}^{k-1}$ e, se S è connessa, è univocamente determinata quando se ne conosca il valore in un qualsiasi punto della superficie. Diremo che S è *orientata* se è orientabile e su di essa è stata fissata una tale funzione $\mathbf{n}$. Osserviamo che per ogni punto p di S potremo allora determinare una funzione f che definisce S in un intorno U di p in modo che:

eq:gunadh (1.9) $$\nabla f(x) = \mathbf{n}(x)\ \ \forall x \in S \cap U.$$

Il prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$ ci permette di definire un'applicazione differenziabile:

$$g : TS \times_S TS = \{(x, X, Y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 | x \in S,\ X, Y \in T_xS\} \to \mathbb{R}$$

mediante:

eq:gunadi (1.10) $$g(x; X, Y) = g_x(X, Y) = (X|Y).$$

La g si dice *metrica Riemanniana* o *prima forma fondamentale* su S.

2. Curve su una superficie e riferimenti di Darboux

Sia S una superficie orientata di classe $\mathcal{C}^1$ in $\mathbb{R}^3$ e sia

$$\alpha : J \to \mathbb{R}^3$$

una curva regolare di classe $\mathcal{C}^1$ con supporto contenuto in S.

DEFINIZIONE 2.1. Si dice *riferimento di Darboux* della curva α la curva

$$J \ni t \to E(t) = (e_1(t), e_2(t), e_3(t)) \in \mathbf{SO}(3)$$

definita dalle condizioni:

(i) $e_1(t) = \dot\alpha(t)/|\dot\alpha(t)|$ è il versore tangente alla curva;
(ii) $e_3(t) = \mathbf{n}(\alpha(t))$ è la normale alla superficie S nel punto $\alpha(t)$.

Il riferimento di Darboux è una curva di classe $\mathcal{C}^{k-1}$ in $\mathbf{SO}(3)$ se la curva α è regolare di classe $\mathcal{C}^k$ e la superficie S è di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$. Supponiamo $k > 1$. Allora $E(t)$ è differenziabile e soddisfa un sistema di equazioni della forma:

eq:gunba
$$E'(t) = E(t)\Omega(t) \quad \text{ove} \quad \Omega : J \to \mathfrak{o}(3) \tag{2.1}$$

è una curva di classe $\mathcal{C}^{k-2}$:

eq:gunbb
$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{21}(t) & -\omega_{31}(t) \\ \omega_{21}(t) & 0 & -\omega_{32}(t) \\ \omega_{31}(t) & \omega_{32}(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Queste equazioni si dicono *equazioni di Darboux* e possiamo esplicitarle nella forma:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot e_1 &= e_2\omega_{21} + e_3\omega_{31} \\ \dot e_2 &= -e_1\omega_{21} + e_3\omega_{32} \\ \dot e_3 &= -e_1\omega_{31} - e_2\omega_{32} \end{aligned}} \tag{2.3}$$

Se parametrizziamo α per lunghezza d'arco, i coefficienti della matrice Ω sono degli invarianti euclidei della curva rispetto alla superficie S e si dicono:

$\omega_{21}(t)/\lvert\dot\alpha(t)\rvert$	curvatura geodetica
$\omega_{31}(t)/\lvert\dot\alpha(t)\rvert$	curvatura normale
$\omega_{32}(t)/\lvert\dot\alpha(t)\rvert$	torsione geodetica

Osserviamo che un cambiamento dell'orientazione della curva non cambia la curvatura normale e la torsione geodetica, mentre cambia di segno la curvatura geodetica. Osserviamo ancora che le tre funzioni definite lungo la curva possono assumere qualsiasi valore reale, a differenza delle curvature introdotte con il sistema di riferimento di Frenet.

PROPOSIZIONE 2.2. *La curvatura normale e la torsione geodetica dipendono solo dalla tangente alla curva e non dalla sua normale e binormale: curve sulla superficie S che abbiano lo stesso vettore tangente in un punto hanno in tale punto la stessa curvatura normale e torsione geodetica.*

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$\alpha : J \to S$$

una curva regolare di classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$ su una superficie orientata S di classe $\mathcal{C}^k$. Estendiamo $\mathbf{n}$ a una funzione di classe $\mathcal{C}^{k-1}$ definita in un intorno aperto di S. Allora

$$\mathbf{n} \circ \alpha : J \to S^3$$

è una curva di classe $\mathcal{C}^{k-1}$ ed abbiamo quindi, fissato $t_0 \in J$, lo sviluppo di Taylor:

$$\mathbf{n} \circ \alpha(t) = \mathbf{n} \circ \alpha(t_0) + \sum \partial \mathbf{n}(\alpha(t_0))/\partial x^i \cdot \dot{\alpha}^i(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|).$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \dot{e}_3(t_0) &= -e_1(t_0)\omega_{31}(t_0) - e_2(t_0)\omega_{32}(t_0) \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{n} \circ \alpha)(t_0) \\ &= \sum \partial \mathbf{n}(\alpha(t_0))/\partial x^i \cdot \dot{\alpha}^i(t_0) \end{aligned}$$

dove $\alpha^i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ sono le componenti del vettore $\alpha(t)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Questa relazione ci mostra che ω_{31} e ω_{32} dipendono solo talla tangente di α in t_0. □

Dalla proposizione precedente segue che ω_{31} e ω_{32} definiscono delle applicazioni

$$TS \to \mathbb{R}$$

positivamente omogenee sulle fibre di TS.

Sia f una funzione che definisce la superficie S in un intorno U di $p \in S$, con $\nabla f(x) = \mathbf{n}(x)$ su $S \cap U$. Indichiamo con

$$Hf(x) = (\partial^2 f(x)/\partial x^i \partial x^j)_{1 \leq i,j \leq 3}$$

l'hessiano della funzione f nel punto x di U. Fissata una curva

$$\alpha : [-R, R] \to S$$

di classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$ con $\alpha(0) = p$ e detto (e_1, e_2, e_3) il suo riferimento di Darboux, otteniamo:

$$\dot{e}_3 = \frac{d}{dt}\nabla f(\alpha) = Hf(\alpha)\dot{\alpha}.$$

Allora dalle equazioni di Darboux ricaviamo:

$$\omega_{31} = -(\dot{e}_3|e_1) = -|\dot{\alpha}|^{-1} \cdot {}^t\dot{\alpha} Hf(\alpha)\dot{\alpha}.$$

Definizione 2.3. Definiamo la forma bilineare simmetrica sulle fibre di TS:

$$TS \times_S TS \ni (x, X, Y) \to h_x(X, Y) = -{}^t X Hf(x) Y \in \mathbb{R}.$$

Essa prende il nome di *seconda forma fondamentale* della superficie S.

Otteniamo allora la formula:

$$\boxed{\text{curvatura normale} = \frac{h_\alpha(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})}{g_\alpha(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})}} \tag{2.4}$$

Calcoliamo ora la torsione geodetica. Abbiamo:

$$\omega_{32} = -(\dot{e}_3|e_2) = -(Hf(\alpha)\dot{\alpha}|e_2).$$

Poiché

$$e_2 = e_3 \times e_1$$

(prodotto vettore) ricaviamo

$$\omega_{32} = |\dot{\alpha}|^{-1}\det(\dot{\alpha}, \nabla f(\alpha), Hf(\alpha)\dot{\alpha}).$$

Se indichiamo con

$$\mathbf{h} : TS \to TS$$

l'applicazione, lineare e simmetrica sulle fibre di TS, associata alla seconda forma fondamentale mediante

$$h_x(X, Y) = (\mathbf{h}(x)X|Y) \ \ \forall x \in S, \ \forall X, Y \in T_xS$$

possiamo scrivere allora

$$\boxed{\text{torsione geodetica} = -\frac{\det(\dot{\alpha}, \mathbf{n}(\alpha), \mathbf{h}(\alpha)\dot{\alpha})}{g(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})}} \tag{2.5}$$

Calcoliamo ora le espressioni delle curvature normale e geodetica e della torsione geodetica rispetto alla curvatura e torsione della curva pensata come curva euclidea in $\mathbb{R}^3$.

Sia (a_1, a_2, a_3) il riferimento di Frenet in $\mathbf{SO}(3)$ di una curva sghemba

$$\alpha : [-R, R] \to \mathbb{R}^3$$

con supporto contenuto in S ed (e_1, e_2, e_3) il suo riferimento di Darboux. Poiché $a_1 = e_1$, per ogni $t \in [-R, R]$,

$$(a_2(t), a_3(t)) \ \text{ e } \ (e_3(t), -e_2(t))$$

sono basi ortonormali ugualmente orientate di $T_{\alpha(t)}S$. Esse possono quindi essere ottenute l'una dall'altra mediante una rotazione. Risulta pertanto definita, unica a meno di addizione di un multiplo intero di 2π, una funzione:

$$[-R, R] \ni t \to \theta(t) \in \mathbb{R}$$

tale che, posto

$$\rho(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

sia

$$(e_3, -e_2) = (a_2, a_3)\rho(\theta)$$

cioè

$$\begin{cases} e_3 = a_2\cos\theta + a_3\sin\theta \\ e_2 = a_2\sin\theta - a_3\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = e_3\cos\theta + e_2\sin\theta \\ a_3 = e_3\sin\theta - e_2\cos\theta\,. \end{cases}$$

Dalle equazioni di Frenet ricaviamo allora che, detta k la curvatura e τ la torsione della curva α,

$$\boxed{\begin{array}{rcl}\text{curvatura geodetica} & = & k\sin\theta \\ \text{curvatura normale} & = & k\cos\theta\end{array}} \tag{2.6}$$

Osserviamo che θ è l'angolo che la normale alla curva forma con la normale alla superficie. Ponendo:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{raggio di curvatura} = k^{-1}a_2 \\ \text{raggio di curvatura geodetica} = e_2/\text{curvatura geodetica} \\ \text{raggio di curvatura normale} = e_3/\text{curvatura normale}\end{array}} \tag{2.7}$$

possiamo dire che i raggi di curvatura normali e geodetico sono le proiezioni del raggio di curvatura rispettivamente sulla normale alla superficie e sul piano tangente alla superficie.

Infine dalle equazioni di Frenet:

$$\begin{cases}\dot{a}_1 = ka_2 \\ \dot{a}_2 = -ka_1 + \tau a_3 \\ \dot{a}_3 = -\tau a_2\end{cases}$$

e dalle equazioni di Darboux ricaviamo:

$$\begin{aligned}\dot{e}_3 &= -e_1\omega_{31} - e_2\omega_{32} \\ &= \frac{d}{dt}(a_2\cos\theta + a_3\sin\theta) \\ &= -k\cos\theta\,|\dot{\alpha}|\,e_1 - (|\dot{\alpha}|\tau + \dot{\theta})e_2\end{aligned}$$

che ci dà:

$$\boxed{\text{torsione geodetica} = \tau + |\dot{\alpha}|^{-1}\dot{\theta}}. \tag{2.8}$$

3. Linee geodetiche su una superficie

Sia S una superficie di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 2$. Una curva α su S si dice una *linea geodetica* se ha in ogni suo punto curvatura geodetica nulla. Per le equazioni di Darboux, condizione necessaria e sufficiente affinché una curva sia geodetica è che soddisfi l'equazione:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}/|\dot{\alpha}|) = |\dot{\alpha}|^{-1}h_\alpha(\dot{\alpha},\dot{\alpha})\mathbf{n}(\alpha).$$

Osserviamo che questa equazione è invariante rispetto a riparametrizzazioni della curva α. Potremo quindi supporre, nello studio delle curve geodetiche, che la curva sia parametrizzata in modo che risulti

$$|\dot{\alpha}| = \text{costante}$$

lungo una linea geodetica.

TEOREMA 3.1. *Per ogni punto $p \in S$ ed ogni vettore $v \in T_pS$ diverso da 0, possiamo trovare $R > 0$ e una e una sola curva geodetica*

$$[-R, R] \ni t \to \alpha(t) \in S$$

tale che:

$$\begin{cases} \alpha(0) = p \\ \dot{\alpha}(0) = v \\ |\dot{\alpha}(t)| = |v| \quad \forall t \in [-R, R] \end{cases}$$

L'unicità va intesa nel senso che due curve geodetiche con queste proprietà coincidono sull'intervallo comune di definizione.

DIMOSTRAZIONE. Sia f una funzione che definisce S in un intorno U di $p \in S$ in $\mathbb{R}^3$, con $\nabla f(x) = \mathbf{n}(x)$ su $S \cap U$. Consideriamo allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \alpha : [R, R] \to U \text{ di classe } \mathcal{C}^2 \\ \ddot{\alpha} + {}^t\dot{\alpha} H f(\alpha) \dot{\alpha}\, \nabla f(\alpha) = 0 \\ \alpha(0) = p \in S \\ \dot{\alpha}(0) = v \in T_pS \end{cases}$$

Esso ammette, per la teoria generale delle equazioni differenziali ordinarie, una soluzione unica definita in un intorno $[-R, R]$ di 0, che dipende dalle condizioni iniziali. Questa soluzione sarà una linea geodetica purché il suo supporto sia contenuto in S. Differenziando

$$(\dot{\alpha} | \nabla f(\alpha)) = \frac{d}{dt} f(\alpha)$$

e tenendo conto dell'equazione, abbiamo:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\dot{\alpha} | \nabla f(\alpha)) \\ &= (\ddot{\alpha} | \nabla f(\alpha)) + (\dot{\alpha} | H f(\alpha) \dot{\alpha}) \\ &= \big(\nabla f(\alpha) | \ddot{\alpha} + {}^t\dot{\alpha} H f(\alpha) \dot{\alpha}\, \nabla f(\alpha)\big) = 0 \end{aligned}$$

e dunque, poiché in 0 abbiamo:

$$(\dot{\alpha}(0) | \nabla f(\alpha(0))) = (v | \mathbf{n}(p)) = 0$$

in quanto $v \in T_pS$, ne segue che:

$$f(\alpha(t)) = \text{costante} = f(\alpha(0)) = f(p) = 0$$

e dunque la curva α ha supporto in S. □

ESEMPIO 3.2. Sia $S = S^2$ la sfera di raggio 1 e centro 0 in $\mathbb{R}^3$. Essa è definita globalmente dalla funzione

$$f(x) = (1/2)(|x|^2 - 1)$$

in modo che

$$\mathbf{n}(x) = x \ \ \forall x \in S^2.$$

L'hessiano di f è la matrice identità I e quindi le linee geodetiche su S^2 soddisfano il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + c^2\alpha = 0 \\ \alpha(0) = x \in S^2 \\ \dot{\alpha}(0) = v \ \text{ con } \ (v|x) = 0, \ \ |v| = c \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale assegnata è della forma:

$$\alpha(t) = v_1 \cos(ct) + v_2 \sin(ct)$$

con arbitrari vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ e le condizioni iniziali ci danno

$$\begin{cases} v_1 = x \\ v_2 = v/c. \end{cases}$$

Otteniamo così le curve

$$t \to x\cos(ct) + v/c \sin(ct).$$

Il supporto di tale curva è la circonferenza in cui il piano per l'origine generato da x e v interseca S^2. Le linee geodetiche sono quindi le circonferenze di raggio 1 contenute in S^2 (cerchi massimi).

Esempio 3.3. Consideriamo ora il cilindro Q di $\mathbb{R}^3$ di equazione

$$x^2 + y^2 = 1.$$

(Abbiamo indicato con x, y, z le coordinate in $\mathbb{R}^3$. Scegliamo la funzione f uguale a

$$f(x) = (1/2)(x^2 + y^2 - 1).$$

Abbiamo in ogni punto di Q

$$\mathbf{n}(x, y, z) = {}^t(x, y, 0)$$

e l'hessiano di f è la matrice:

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'equazione delle linee geodetiche su Q è allora data da:

$$\begin{cases} \ddot{x} + c^2 x = 0 \\ \ddot{y} + c^2 y = 0 \\ \ddot{z} = 0 \\ x(0) = \xi, \ \ y(0) = \eta, \ \ z(0) = \zeta \\ \text{con } \ \xi^2 + \eta^2 = 1 \\ \dot{x}(0) = v_x \ \ \dot{y}(0) = v_y \ \ \dot{z}(0) = v_z \\ \text{con } \ \xi v_x + \eta v_y = 0, \ \ v_x^2 + v_y^2 = c^2. \end{cases}$$

Se $c > 0$ la soluzione generale del sistema è della forma:

$$\begin{cases} x(t) = a_x \cos(ct) + b_x \sin(ct) \\ y(t) = a_y \cos(ct) + b_y \sin(ct) \\ z(t) = a_z + b_z t \end{cases}$$

per opportune costanti $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z \in \mathbb{R}$. Le condizioni iniziali ci danno:

$$a_x = \xi a_y = \eta \qquad a_z = \zeta$$
$$b_x = v_x/c b_y = v_y/c \quad b_z = v_z.$$

Troviamo quindi:

$$\begin{cases} x(t) = \xi \cos(ct) + (v_x/c) \sin(ct) \\ y(t) = \eta \cos(ct) + (v_y/c) \sin(ct) \\ z(t) = \zeta + v_z t, \end{cases}$$

che è un'elica circolare. Se $c = 0$, allora $v_x = v_y = 0$ e dunque le geodetiche sono le linee verticali:

$$\begin{cases} x(t) = \xi \\ y(t) = \eta \\ z(t) = \zeta + v_z t. \end{cases}$$

Quindi le linee geodetiche sul cilindro Q sono le eliche circolari con asse uguale all'asse del cilindro e le linee verticali.

Le linee geodetiche godono inoltre di una importante proprietà variazionale: gli archi di geodetica che congiungono due punti p, q di S sono gli estremali del funzionale della lunghezza d'arco

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \sqrt{(\dot\alpha|\dot\alpha)dt}$$

sotto le condizioni

$$\alpha(a) = p \alpha(b) = q$$

con il vincolo

$$\alpha([a, b]) \subset S.$$

e le linee geodetiche parametrizzate con velocità costante sono gli estremali dell'integrale dell'energia

$$\int_a^b (\dot\alpha|\dot\alpha)dt$$

sotto le condizioni

$$\alpha(a) = p, \quad \alpha(b) = q$$

con il vincolo:

$$\alpha([a, b]) \subset S.$$

In particolare se un arco ha lunghezza minima tra gli archi che congiungono due punti p e q di S e hanno supporto in S, allora è un arco di geodetica su S.

4. Linee di curvatura su una superficie

DEFINIZIONE 4.1. Si dice *linea di curvatura* sulla superficie S una curva la cui torsione geodetica sia nulla in ogni punto.

Dall'espressione della torsione geodetica rispetto alla seconda forma fondamentale, troviamo che, se

$$\alpha : J \to S$$

è una linea di curvatura su S allora

$$\det(\dot{\alpha}, \mathbf{n}(\alpha), \mathbf{h}(\alpha)\dot{\alpha}) = 0.$$

Il vettore nella seconda colonna è ortogonale ai vettori della prima e della terza colonna, quindi potremo scrivere la condizione mediante:

$$\mathbf{h}(\alpha)\dot{\alpha} = \lambda\dot{\alpha}$$

per una funzione

$$\lambda : J \to \mathbb{R}.$$

Questa equazione ci dice che in ogni punto $p = \alpha(t)$ il numero $\lambda(t)$ è un autovalore dell'applicazione simmetrica

$$\mathbf{h}(p) : T_pS \to T_pS.$$

Sappiamo che un'applicazione simmetrica in uno spazio euclideo di dimensione 2 ammette due autovalori reali.

DEFINIZIONE 4.2. Un punto $p \in S$ si dice un *punto ombelicale* o *ombelico* di S se i due autovalori reali di $\mathbf{h}(p)$ coincidono, *non ombelicale* se i due autovalori sono distinti.

Abbiamo per i noti risultati sulle applicazioni simmetriche negli spazi euclidei:

PROPOSIZIONE 4.3. *Per un punto non ombelicale passano al più due linee di curvatura. Le loro tangenti sono tra loro ortogonali.*

DEFINIZIONE 4.4. Gli autovettori di $\mathbf{h}(p)$ si dicono *direzioni principali* sulla superficie S in p e gli autovalori corrispondenti k_1, k_2 le *curvature principali* di S in p.

Il loro prodotto

$$K = k_1\, k_2$$

si dice *curvatura gaussiana* o *curvatura totale* di S in p e la loro somma

$$k_m = k_1 + k_2$$

curvatura media di S in p. I punti di una superficie si classificano inoltre come:

$$\begin{aligned} \text{ellittici} \quad &\text{se} \quad K > 0 \\ \text{parabolici} \quad &\text{se} \quad K = 0 \\ \text{iperbolici} \quad &\text{se} \quad K < 0 \end{aligned}$$

Se f è una funzione che definisce S vicino al punto p, possiamo approssimare al secondo ordine la f mediante il polinomio di Taylor, ottenendo una superficie quadrica che approssima S vicino a p a meno di infinitesimi di ordine superiore al secondo. Se scegliamo coordinate cartesiane in $\mathbb{R}^3$ in modo che $p = 0$, $\mathbf{n}(p) = {}^t(0,0,1)$ e ${}^t(1,0,0), {}^t(0,1,0)$ siano le direzioni principali, la quadrica cercata ha la forma:

$$z = k_1 x^2 + k_2 y^2.$$

(Nota che ogni quadrica $z = k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2$ con k_3 arbitrario approssima ancora la superficie S al secondo ordine.)

Esercizio 4.5. Si verifichi che tutti i punti di un elissoide, di un paraboloide ellittico, di un iperboloide a due falde sono ellittici, che tutti i punti di un iperboloide a una falda e di un paraboloide iperbolico sono iperbolici, che tutti i punti di un cilindro o di un cono sono parabolici.

Teorema 4.6. *Sia p un punto non ombelicale di S e sia $v \in T_pS$ una direzione principale di S in p. Possiamo allora trovare una e una sola linea di curvatura (a meno di riparametrizzazioni)*

$$\alpha : [-R, R] \to S$$

tale che

$$\begin{cases} \alpha(0) = p, \\ \dot\alpha(0) = v. \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia f una funzione che definisce S in un intorno U di p, tale che $\nabla f(x) = \mathbf{n}(x)$ su $S \cap U$. La condizione perché α sia una linea di curvatura si può allora esprimere mediante:

$$Hf(\alpha)\dot\alpha = \lambda\dot\alpha + \mu\nabla f(\alpha).$$

La condizione che:

$$(\nabla f(x)|\nabla f(x)) = 1 \qquad \forall x \in S \cap U$$

ci dà:

$$(\nabla f(x)|\nabla f(x)) = 1 + \sigma(x)f(x)$$

in un intorno di S in U e quindi differenziando troviamo:

$$Hf(x)\nabla f(x) = (1/2)\sigma(x)\nabla f(x) \qquad \forall x \in S \cap U.$$

Quindi $\nabla f(x)$ è un autovettore di $Hf(x)$ per ogni $x \in S \cap U$. Sommando a f un multiplo di f^2, possiamo supporre che $Hf(p)$ abbia in p tre autovalori distinti. Essi definiscono quindi in un intorno U di p in $\mathbb{R}^3$ tre funzioni (di classe $\mathcal{C}^{k-2}$ se S è di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 2$):

$$\lambda_i : U \to \mathbb{R}$$

con:

$$\lambda_i(x) \neq \lambda_j(x) \qquad \text{se} \qquad 1 \leq i \leq j \leq 3, \qquad \forall x \in U.$$

Possiamo quindi trovare funzioni $v_i(x)$ definite (e anch'esse di calsse $\mathcal{C}^{k-2}$) in un intorno U' di p in U tali che:

$$Hf(x)v_i(x) = \lambda_i(x)v_i(x) \qquad \forall i = 1, 2, 3, \qquad \forall x \in U'.$$

Infatti, essendo i tre autovalori $\lambda_i(x)$ distinti, possiamo per ogni $i = 1, 2, 3$ trovare un minore due per due della matrice $Hf(p) - \lambda_i(p)I$ con determinante diverso da zero. Supponiamo ad esempio che $(\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j - \lambda_1 \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ abbia determinante diverso da zero in p. Allora tale determinante sarà diverso da zero in un intorno di p ed in esso potremo ricavare $v_1(x)$ ponendo:

$$v_1(x) = {}^t(v_1^1(x), v_1^2(x), 1)$$

e ricavando v_1^1, v_1^2 mediante la regola di Cramer dal sistema lineare:

$$\begin{cases} [\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^1 \partial x^1} - \lambda_1(x)]v_1^1(x) + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^1 \partial x^2} v_1^2(x) = -\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^1 \partial x^3} \\ \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^1 \partial x^2})v_1^1(x) + [\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2 \partial x^2} - \lambda_1(x)]v_1^2(x) = -\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2 \partial x^3} \end{cases}$$

Possiamo poi, a meno di riordinare gli autovettori, supporre che $v_1(p)$ sia proporzionale a v e che $v_3(p)$ sia proporzionale a $\nabla f(p)$. Avremo allora $v_3(x)$ proporzionale a $\mathbf{n}(x)$ in $S \cap W$ per un intorno W di p in $\mathbb{R}^3$ per cui $S \cap W$ sia connesso e dunque $v_1(x)$, essendo perpendicolare a $v_3(x)$, sarà per $x \in S \cap W$ un vettore tangente a S. Se $v = cv_1(p)$, troviamo la linea di curvatura cercata come soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \alpha : [-R, R] \to W \qquad \text{di classe} \qquad \mathcal{C}^1 \\ \dot{\alpha}(t) = cv_1(\alpha) \\ \alpha(0) = p. \end{cases}$$

Se α ha supporto in S, allora è certamente una linea di curvatura:

$$\det(\dot{\alpha}, \mathbf{n}(\alpha), \mathbf{h}(\alpha)\dot{\alpha}) = \det(\dot{\alpha}, \mathbf{n}(\alpha), Hf(\alpha)\dot{\alpha}) = 0$$

perché la prima e la terza colonna del determinante sono proporzionali. Per mostrare che α ha supporto in S, conviene introdurre una parametrizzazione:

$$\mathbf{r} : A \to \mathbb{R}^3,$$

diffeomorfismo di un aperto A di $\mathbb{R}^2$ su un intorno aperto di p in S. Cerchiamo allora la curva α nella forma:

$$\alpha = \mathbf{r} \circ \beta$$

ove

$$\beta : [-R, R] \to A$$

è una curva piana. Abbiamo allora:

$$\dot{\alpha}(t) = \sum_1^2 \frac{\partial \mathbf{r}(\beta(t))}{\partial y^i} \dot{\beta}^i(t).$$

D'altra parte, poiché $v_1(\mathbf{r}(y))$ è un vettore tangente a S per ogni $y \in A$, potremo scrivere in un unico modo:

$$v_1(\mathbf{r}(y)) = \sum_1^2 u_i(y) \frac{\partial \mathbf{r}(y)}{\partial y^i}.$$

per opportune funzioni $u_i : A \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^{k-2}$. Otteniamo quindi per la curva β il sistema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\beta}^1(t) = u_1(\beta(t)) \\ \dot{\beta}^2(t) = u_2(\beta(t)) \\ \beta(0) = y_0 \end{cases}$$

se $y_0 \in A$ è il punto per cui:

$$\mathbf{r}(y_0) = p.$$

Esso ammette una soluzione unica in un intervallo $[-R, R]$ e si verifica allora facilmente che $\alpha = \mathbf{r} \circ \beta$ coincide con la soluzione del precedente problema. □

Nell'ultima parte della dimostrazione abbiamo provato il seguente fatto generale:

Osservazione 4.7. Sia S una superficie chiusa in un aperto U di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v} : U \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione continua tale che:

$$\mathbf{v}(x) \in T_x S \qquad \forall x \in S.$$

Allora ogni soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \alpha : [-R, R] \to U \qquad \text{di classe} \qquad \mathcal{C}^1 \\ \dot{\alpha}(t) = \mathbf{v}(\alpha(t)) \\ \alpha(0) = p \end{cases}$$

con dato iniziale p in S ha supporto in S.

Vale il seguente teorema, di cui non daremo qui la dimostrazione:

Teorema 4.8. *Una porzione di una superficie S che sia tutta di punti ombelicali, è o una porzione di piano o una porzione di sfera.*

Tutte le curve su S che passano per un punto ombelicale hanno uguale curvatura normale in tale punto. Se un punto p è non ombelicale, possiamo scegliere le direzioni principali v_1, v_2 in tale punto in modo che formino, insieme a $\mathbf{n}(x)$, un riferimento in $\mathbf{SO}(3)$. Dato un qualsiasi vettore non nullo $v \in T_p S$, sarà univocamente determinato l' angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ di cui deve ruotare il riferimento di Darboux in p di una curva su S con vettore tangente v per sovrapporsi al riferimento $(v_1, v_2, \mathbf{n}(p))$:

$$(e_1(p), e_2(p)) = (v_1, v_2)\rho(\theta).$$

Abbiamo:

$$e_1(p) = v/|v| = v_1 \cos\theta + v_2 \sin\theta.$$

La formula della curvatura normale dà:

$$\begin{aligned}\text{curvatura normale} &= h_p(e_1, e_1)\\ &= h_p(v_1\cos\theta + v_2\sin\theta, v_1\cos\theta + v_2\sin\theta)\\ &= (\cos^2\theta)h_p(v_1, v_1) + (\sin^2\theta)h_p(v_2, v_2)\\ &\text{(perché } v_1, v_2 \text{ sono una base ortonormale per } h_p)\\ &= k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta\end{aligned}$$

dove si sono indicate con k_1 e k_2 le due curvature principali di S in p. Questa formula vale naturalmente anche quando il punto sia ombelicale: in tal caso infatti $k_1 = k_2$ e l'ultimo membro dell'uguaglianza è sempre uguale a tale valore comune.

Il prodotto delle curvature normali di due curve che si sechino ortogonalmente in p sarà dato da:

$$\begin{aligned}&(\cos^2\theta k_1 + \sin^2\theta k_2)(\cos^2\theta k_2 + \sin^2\theta k_1)\\ &= (\cos^4\theta + \sin^4\theta)k_1k_2 + 2\sin^2\theta\cos^2\theta(k_1^2 + k_2^2)\\ &= k_1k_2 + 2(k_1 - k_2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta\end{aligned}$$

dove θ è l'angolo tra il riferimento delle direzioni principali e quello delle tangenti alle due curve e dunque è minimo se e soltanto se le due tangenti alle curve sono direzioni principali.

5. Il Teorema di Gauss-Bonnet

Stabiliamo innanzi tutto, in termini di forme differenziali, le equazioni fondamentali di una superficie.

Sia S una superficie di classe $\mathcal{C}^3$ in $\mathbb{R}^3$. Fissato un punto $p \in S$, possiamo determinare in un intorno aperto U di p in $\mathbb{R}^3$ un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^2$:

$$\mathfrak{e} : U \to \mathbf{SO}(3)$$

tale che, posto:

$$\mathfrak{e} = (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3)$$

risulti:

$$\mathfrak{e}_3(x) = \mathbf{n}(x) \qquad \forall x \in S \cap U.$$

Sono allora definite in U tre forme differenziali:

$$\omega^i : U \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

tali che:

$$v = \sum_{i=1}^{3} \omega^i(x)(v)\mathfrak{e}_i(x)$$

se $x \in U$ e $v \in \mathbb{R}^3$, ovvero

$$dx = \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{e}_i\omega^i \qquad \text{in} \qquad U.$$

Definiamo allora le forme differenziali ω_j^i per $1 \leq i, j \leq 3$ su U, con $\omega_j^i = -\omega_i^j$, ponendo:

$$(*) \qquad d\mathfrak{e}_i = \omega_i^j \mathfrak{e}_j$$

per $i = 1, 2, 3$, dove per il secondo membro si considera valida la convenzione per cui indici uguali in alto e in basso si intendono sommati. Abbiamo:

$$\begin{aligned} 0 &= dd\mathfrak{e}_1 \\ &= d\mathfrak{e}_2 \wedge \omega_1^2 + d\mathfrak{e}_3 \wedge \omega_1^3 + \mathfrak{e}_2 d\omega_1^2 + \mathfrak{e}_3 d\omega_1^3 \\ &= \mathfrak{e}_i(\omega_2^i \wedge \omega_1^2 + \omega_3^i \wedge \omega_1^3) + \mathfrak{e}_2 d\omega_1^2 + \mathfrak{e}_3 \wedge d\omega_1^3 \\ &= \mathfrak{e}_3(\omega_2^3 \wedge \omega_1^2 + d\omega_1^3) + \mathfrak{e}_2(\omega_3^2 \wedge \omega_1^3 + d\omega_1^2). \end{aligned}$$

Da questa, e dalla relazione analoga che si ottiene da $dd\mathfrak{e}_2 = 0$, ricaviamo le formule:

$$(5.1) \qquad \boxed{\begin{aligned} d\omega_1^2 &= -\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 \\ d\omega_1^3 &= \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 \\ d\omega_2^3 &= -\omega_1^3 \wedge \omega_1^2 . \end{aligned}}$$

Osserviamo ora che dalle equazioni $(*)$ si ricava che:

$$(5.2) \qquad \omega_2^3 = (\mathfrak{e}_3 | d\mathfrak{e}_2) = -(\mathfrak{e}_2 | d\mathfrak{e}_3)\omega_1^3 \qquad = (\mathfrak{e}_3 | d\mathfrak{e}_1) = -(\mathfrak{e}_1 | d\mathfrak{e}_3)$$

per le relazioni di ortogonalità tra le colonne di $\mathfrak{e}$. Utilizzando queste relazioni, possiamo calcolare $d\omega_1^2$ nei punti di $S \cap U$. Infatti in tali punti, se f è una funzione che definisce localmente S, abbiamo:

$$\mathfrak{e}_3 = \nabla f$$

e quindi

$$d\mathfrak{e}_3 = Hf\, dx + \text{un multiplo di} \qquad \omega^3.$$

In particolare:

$$d\mathfrak{e}_3 = Hf(\mathfrak{e}_1)\omega^1 + Hf(\mathfrak{e}_2)\omega^2 + \text{un multiplo di} \qquad \omega^3.$$

Da questo ricaviamo che:

$$\omega_j^3 = -\sum_{i=1}^{2} (\mathfrak{e}_j | Hf(\mathfrak{e}_i))\omega^i + \text{un multiplo di} \qquad \omega^3$$

per $j = 1, 2$ e dunque, poiché il determinante della matrice

$$((\mathfrak{e}_i | Hf(\mathfrak{e}_j))_{1 \leq i,j \leq 2}$$

è la curvatura Gaussiana K di S, troviamo:

$$(5.3) \qquad \boxed{d\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2 + \text{un multiplo di} \qquad \omega^3.}$$

Ricordiamo:

PROPOSIZIONE 5.1 (Formula di Stokes). *Se A è un aperto di una superficie orientata S, la cui frontiera orientata è una curva ∂A di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti e ξ è una forma differenziale di classe $\mathcal{C}^1$ definita in un intorno di S, allora*

$$\boxed{\int_{\partial A} \xi = \iint_A d\xi}.$$

Otteniamo dalla formula di Stokes:

TEOREMA 5.2 (Formula di Gauss-Bonnet). *Sia A un aperto di S contenuto nella regione $S \cap U$, con frontiera orientata ∂A di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti. Allora*

$$\boxed{\int_{\partial A} \omega_1^2 + \iint_A K\omega^1 \wedge \omega^2 = 0} \tag{5.4}$$

Diamo ora una interpretazione geometrica dei due integrandi della formula di Gauss-Bonnet. Osservando che $\omega^1 \wedge \omega^2$ è l'elemento d'area sulla superficie S:

$$\iint_A K\omega^1 \wedge \omega^2 = \iint_A K dS.$$

Per interpretare l'integrale sul contorno, calcoliamo il valore della forma differenziale ω_1^2 lungo una curva α con supporto in $S \cap U$. Sia (e_1, e_2, e_3) il suo riferimento di Darboux. Risulterà allora determinato, a meno di multipli interi di 2π, l'angolo θ di cui bisogna ruotare il riferimento di Darboux per sovrapporlo al riferimento fissato $\mathfrak{e}$:

$$(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)\rho(\theta) = (e_1, e_2)$$

ove

$$\rho(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{cases} e_1 = \mathfrak{e}_1 \cos\theta + \mathfrak{e}_2 \sin\theta \\ e_2 = -\mathfrak{e}_1 \sin\theta + \mathfrak{e}_2 \cos\theta \end{cases}$$

dove le $\mathfrak{e}_i$ sono valutate nei punti $\alpha(t)$ e θ è una funzione del parametro della curva. Derivando otteniamo:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 =& e_2\omega_{21} + e_3\omega_{31} \\
=& d\mathfrak{e}_1(\dot\alpha)\cos\theta + d\mathfrak{e}_2(\dot\alpha)\sin\theta + \dot\theta(-\mathfrak{e}_1\sin\theta + \mathfrak{e}_2\cos\theta) \\
=& \mathfrak{e}_2\omega_1^2(\dot\alpha)\cos\theta + \mathfrak{e}_3\omega_1^3(\dot\alpha)\cos\theta - \mathfrak{e}_1\omega_1^2(\dot\alpha)\sin\theta + \mathfrak{e}_3\omega_2^3(\dot\alpha)\sin\theta + \dot\theta e_2 \\
=& (e_1\sin\theta + e_2\cos\theta)\omega_1^2(\dot\alpha)\cos\theta + e_3(\omega_1^3(\dot\alpha)\cos\theta + \omega_2^3(\dot\alpha)\sin\theta) \\
& - (e_1\cos\theta - e_2\sin\theta)\sin\theta + \dot\theta e_2 \\
=& e_2(\omega_1^2(\dot\alpha) + \dot\theta) + e_3\omega_{31}.
\end{aligned}$$

La forma ω_1^2 lungo la curva è data quindi da:

$$\omega_1^2(\dot{\alpha}) = \omega_{21} - \dot{\theta}.$$

Ora,

$$\omega_{21} = |\dot{\alpha}| \cdot \text{curvatura geodetica}.$$

Indichiamo con k_g la curvatura geodetica. Possiamo allora riscrivere la formula di Gauss-Bonnet mediante:

$$\boxed{\int_{\partial A} k_g ds = \int_{\partial A} d\theta - \iint_A K dS}$$

Se ∂A è una curva di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, frontiera di un aperto A di S connesso e semplicemente connesso, e se $\delta\theta_1, ..., \delta\theta_n$ sono le differenze degli angoli che le tangenti alla curva formano tra loro nei punti di discontinuità, vale allora:

$$\int_{\partial A} d\theta + \sum_{i=1}^{n} \delta\theta_i = 2\pi.$$

Otteniamo dunque finalmente:

$$\boxed{\int_{\partial A} k_g ds + \sum_{i=1}^{n} \delta\theta_i = 2\pi - \iint_A K dS}$$

Per superficie con curvatura gaussiana costante otteniamo, per i triangoli con lati geodetici, le classiche formule dell'area della geometria non euclidea. Nota che in questo caso la somma

$$\delta\theta_1 + \delta\theta_2 + \delta\theta_3$$

è la somma degli angoli esterni del triangolo.

CAPITOLO 26

Analisi sulle superfici di Riemann

ansuprim

1. Superfici di Riemann

Sia X una varietà topologica paracompatta di dimensione due.

DEFINIZIONE 1.1. Un *atlante olomorfo* su X è il dato di una famiglia $\mathcal{A} = \{U_i, \phi_i\}_{i\in I}$ di aperti U_i di X e di omeomorfismi $\phi_i \ni p \to \phi_i(p) \in V_i \subset \mathbb{C}$ tali che:

(*i*) $\bigcup_{i\in I} U_i = X$;
(*ii*) $\phi_{i,j} : \phi_i(U_i \cap U_j) \ni z \to \phi_j \circ \phi_i^{-1}(z) \in \phi_j(U_j \cap U_i)$ è olomorfa per ogni coppia di indici $i, j \in I$ tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Dua atlanti olomorfi $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ si dicono *equivalenti* se $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ è ancora un atlante olomorfo. Questa relazione è una relazione di equivalenza nella famiglia degli atlanti olomorfi di X. Una classe di equivalenza $\mathfrak{J}$ di atlanti olomorfi su X si dice una *stuttura complessa* su X.

Una *superficie di Riemann* è una varietà topologica X di dimensione real due su cui sia stata fissata una struttura complessa $\mathfrak{J}$. Una $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{C}$ che appartenga a un atlante olomorfo di $\mathfrak{J}$ si dice una *carta locale olomorfa*, o semplicemente *carta locale*, in X.

Dall'identificazione di Gauss $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ segue che ogni superficie di Riemann ha un'unica struttura di varietà differenziabile reale di dimensione due, in cui gli atlanti di $\mathfrak{J}$ definiscono atlanti differenziabili mediante l'identificazione $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

Una metrica Riemanniana g su una superficie di Riemann X si dice *compatibile con la struttura complessa*, o *conforme*, se in ogni coordinata locale olomorfa $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ su un aperto U di X risulta:

$$g = g(z)\,(dx^2 + dy^2) = g(z)\ \cdot dz \cdot d\bar{z}\,. \tag{1.1}$$

Per il teorema di Korn-Lichtenstein (Teorema 1.9), ogni varietà differenziabile di dimensione due *orientabile* ammette una struttura complessa compatibile con la sua struttura differenziabile: più precisamente dimostreremo che ogni metrica Riemanniana su una varietà orientabile è *compatibile con*, o *conforme a* una struttura complessa. Poiché ogni varietà differenziabile ammette una metrica Riemanniana, ciò implica che la struttura differenziabile di ogni varietà differenziabile orientabile di dimensione due contiene atlanti olomorfi.

Una funzione differenziabile f, definita su un aperto Ω di una superficie di Riemann X, si dice *olomorfa* in Ω se per ogni carta locale olomorfa $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{C}$ con $U \subset \Omega$ la funzione $f \circ \phi^{-1}$ è olomorfa sull'aperto $\phi(U)$ di $\mathbb{C}$.

In generale, se X_1 ed X_2 sono due superfici Riemann, un'applicazione $f : X_1 \to X_2$ si dice *olomorfa* se per ogni $p \in X_1$ esistono carte locali olomorfe $\phi_1 : U_1 \to \phi_1(U_1) \subset \mathbb{C}$ e $\phi_2 : U_2 \to \phi_2(U_2) \subset \mathbb{C}$ in X_1 ed X_2 rispettivamente, con $p \in U_1$, $f(U_1) \subset U_2$, tali che $\mathbb{C} \supset \phi_1(U_1) \ni z \to \phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}(z) \in \phi_2(U_2) \subset \mathbb{C}$ sia olomorfa.

ESEMPIO 1.2. Un aperto X di $\mathbb{C}$ è una superficie di Riemann con la struttura complessa descritta dall'atlante $\{X, \mathrm{id}_X\}$, dove id_X è la funzione identità su X: $X \ni z \to z \in X \subset \mathbb{C}$.

ESEMPIO 1.3. La retta proiettiva complessa $\mathbb{P} = \mathbb{CP}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è una superficie di Riemann con la struttura complessa descritta dall'atlante che consiste dei due aperti $U_0 = \mathbb{C}$ e $U_\infty = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ con le funzioni coordinate $\phi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ e $\phi_\infty : U_\infty \to \mathbb{C}$ definita da:

$$\phi_\infty(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{se} \quad z \neq \infty \\ 0 & \text{se} \quad z = \infty\,. \end{cases}$$

Osserviamo che le funzioni di transizione sono $\phi_{0,\infty}(z) = \phi_{\infty,0}(z) = \frac{1}{z}$, olomorfe su $\phi_0(U_0 \cap U_\infty) = \phi_\infty(U_0 \cap U_\infty) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

ESEMPIO 1.4. Sia X il cilindro $\mathbb{R} \times S^1 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Se $w = e^{ik} \in S^1$, con $k \in \mathbb{R}$ e $-\pi < k \leq \pi$, per ogni $z \in S^1 \setminus \{-w\}$ vi è un unico numero reale $s = s_w(z)$ con $|s| < \pi$ e $z = \exp(i(k+s))$. Poniamo $U_w = \mathbb{R} \times \big(S^1 \setminus \{-w\}\big)$ e definiamo $\phi_w : U_w \ni (t, z) \to t + i s_w(z) \in \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[\subset \mathbb{C}$. Definiamo su X una struttura complessa mediante l'atlante $\mathcal{A} = \{(U_w, \phi_w)\}_{w \in S^1}$. Osserviamo che le funzioni di transizione ϕ_{w_1,w_2} sono della forma $z \to z + \lambda$ con $\lambda \in i\mathbb{R}$ e quindi sono olomorfe.

ESEMPIO 1.5. Se X è una superficie di Riemann e Ω un aperto di X, allora Ω ha un'unica struttura di superficie di Riemann che rende l'inclusione $\Omega \ni p \to p \in X$ olomorfa.

Nei paragrafi successivi di questo capitolo richiamiamo alcune nozioni di analisi che ci saranno utili nello studio successivo delle proprietà geometriche delle superfici di Riemann.

2. Laplaciano su una superficie di Riemann

Sia X una varietà reale di dimensione 2, su cui sia assegnata una metrica Riemanniana g. In coordinate locali x^1, x^2 scriviamo [1] $g = g_{ij} dx^i dx^j$ e

[1] Useremo nel seguito la convenzione che indici ripetuti in alto e in basso si intendono sommati.

poniamo $\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1}$, cioè, tenuto conto del fatto che (g_{ij}) è simmetrica,

$$g^{ij} = (-1)^{i+j} g_{ij}/(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\,, \quad i,j = 1,2.$$

Poniamo ancora:

$$|g| = \det g = \det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2\,, \quad d\lambda = \sqrt{|g|}\ dx^1\, dx^2\,. \tag{2.1}$$

Se X è orientata, e $dx^1 \wedge dx^2$ è positivo rispetto all'orientazione prescelta, associamo alla metrica g la 2-forma ω_g che, nelle coordinate locali, si scrive $\omega_g = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge dx^2$.

Date due funzioni $u,\ v \in \mathcal{C}^2(X)$ le espressioni

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|}\, g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right) \tag{2.2}$$

$$\Delta_1 u = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial u}{\partial x^j} \tag{2.3}$$

$$\nabla(u,v) = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial v}{\partial x^j} \tag{2.4}$$

non dipendono dalla scelta delle coordinate: essi si chiamano i *parametri differenziali di Beltrami*. In particolare Δ_2 si dice l'*operatore di Laplace-Beltrami* sulla varietà Riemanniana (X, g).

Vale l'importante relazione:

TEOREMA 2.1. *Se $u \in \mathcal{C}^2(X)$, $v \in \mathcal{C}^1(X)$ e $u \cdot v$ ha supporto compatto in X, allora:*

$$\iint_X \Delta_2 u \cdot v\, d\lambda \;=\; -\iint_X \nabla(u,v)\, d\lambda\,. \tag{2.5}$$

Se X è una superficie di Riemann e la metrica g è compatibile con la struttura complessa, allora la parte reale e la parte immaginaria di una coordinata locale complessa z definiscono coordinate *isoterme* e dunque è:

$$\begin{cases} g \;=\; h\, dz\, d\bar{z}\,, \quad \text{cioè} \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} = (h\, \delta_{ij}) \\ (g^{ij}) = \begin{pmatrix} h^{-1} & 0 \\ 0 & h^{-1} \end{pmatrix} = (h^{-1}\, \delta^{ij}) \\ |g| = h^2, \quad d\lambda = \frac{i}{2} h\, dz\, d\bar{z}\,. \end{cases} \tag{2.6}$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{cases} \Delta_2 u = h^{-1}(z)\Delta u \qquad \text{ove } \Delta = 4\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \text{ è il Laplaciano usuale} \\ \Delta_1 u = h^{-1}(z)\left(\left|\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|^2 + \left|\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right|^2\right) \\ \nabla(u,v) = h^{-1}(z)\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial v}{\partial \bar{z}} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right) \end{cases} \tag{2.7}$$

Quindi le formule del teorema precedente per l'operatore di Laplace-Beltrami si semplificano in una carta locale alle formule usuali per il Laplaciano su un aperto di $\mathbb{C}$.

Fissiamo un aperto $\Omega \subset X$. Introduciamo gli spazi di Hilbert:

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \quad d\lambda - \text{misurabile con} \quad \iint_\Omega |f|^2 d\lambda < +\infty \right\}, \tag{2.8}$$

con la norma

$$\|f\|_{0,\Omega} = \left(\iint_\Omega |f|^2 d\lambda \right)^{1/2} \tag{2.9}$$

e lo spazio

$$H_0^1(\Omega) = \text{completamento di } \mathcal{C}^1_{comp}(\Omega) \tag{2.10}$$

rispetto alla norma

$$\|f\|_{1,\Omega} = \left(\iint_\Omega \Delta_1(u)\, d\lambda + \iint_\Omega |f|^2 d\lambda \right)^{1/2}. \tag{2.11}$$

Se $m \geq 0$, possiamo poi definire gli spazi di Sobolev $H^m(\Omega)$, nel caso in cui Ω sia un aperto relativamente compatto di X. Essi consistono dell'insieme di tutte le (classi di equivalenza di) funzioni f definite in Ω tali che, per ogni aperto coordinato $U \xrightarrow{\phi} V \subset \mathbb{R}^2$ ed ogni $V' \Subset V$, le restrizioni delle $f \circ \phi^{-1}$ a $\phi(U \cap \Omega) \cap V'$ appartengano allo spazio di Sobolev $H^m(\phi(U \cap \Omega) \cap V')$.

Indicheremo poi con $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni continue su $\overline{\Omega}$ con le loro derivate fino all'ordine k e con le derivate k-esime Hölderiane di esponente α.

Ricordiamo, che poiché X ha dimensione due, il teorema d'immersione di Sobolev dà l'inclusione:

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^{m-2,\alpha} \quad \forall m \geq 2,\ \forall 0 \leq \alpha < 1\,. \tag{2.12}$$

Infine, definendo mediante partizione dell'unità e coordinate locali una norma Hilbertiana sugli spazi $H^m(\Omega)$, otteniamo per il *teorema di Rellich* inclusioni compatte $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m'}(\Omega)$ se $0 \leq m' < m$.

Definizione 2.2. Se Ω è un aperto di X, chiamiamo *armonica in* Ω una funzione a valori reali $u : \Omega \to \mathbb{R}$, definita e di classe $\mathcal{C}^2$ in Ω, che soddisfi l'equazione di Laplace-Beltrami omogenea $\Delta_2 u = 0$. Indicheremo con $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}(\Omega)$ lo spazio vettoriale reale delle funzioni armoniche in Ω.

Per l'operatore Δ_2 valgono i risultati della teoria ellittica variazionale, che richiameremo nel seguito. Molti dei risultati che esponiamo in questo paragrafo sono validi in generale per il Laplaciano di una varietà Riemanniana di dimensione arbitraria.

TEOREMA 2.3. *Sia X una superficie di Riemann, e sia Ω un aperto relativamente compatto di X. Allora il sottospazio $\mathbf{N}(\Omega) = \mathcal{H}^{\mathbb{R}}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ ha dimensione finita e per ogni $f \in L^2(\Omega)$ tale che $\iint_\Omega f \cdot v \, d\lambda = 0$ per ogni $v \in \mathbf{N}(\Omega)$ esiste $u \in H^1_0(\Omega)$ tale che*

$$-\iint_\Omega \nabla(u, w)\, d\lambda = \iint_\Omega f \cdot w \, d\lambda \qquad \forall w \in H^1_0(\Omega)\,. \tag{2.13}$$

È allora $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ e $\Delta_2 u = f$ nel senso delle distribuzioni.

Supponiamo poi che Ω sia connesso e che $\partial\Omega$ sia unione finita di curve regolari di classe $\mathcal{C}^\infty$ e $\neq \emptyset$ (in particolare richiediamo che ogni componente di $\partial\Omega$ contenga almeno due punti, e dunque infiniti punti). Allora $\mathbf{N}(\Omega) = \{0\}$.

Vale inoltre, sotto queste ipotesi, il risultato di regolarità: se $f \in H^k(\Omega)$ ($k \geq 0$), allora $u \in H^{k+2}(\Omega)$ e, se $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$, con $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, allora $u \in \mathcal{C}^{k+2,\alpha}(\Omega)$.

Sia Ω un aperto relativamente compatto di X, localmente connesso in ogni punto di $\partial\Omega$, con $\partial\Omega \neq \emptyset$ unione disgiunta di un numero finito di curve regolari di classe $\mathcal{C}^\infty$. Allora chiamiamo $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ una *sottovarietà con bordo di X*.

Possiamo quindi trarre dal teorema precedente l'enunciato:

Se $\overline{\Omega}$ è una sottovarietà con bordo di X, connessa e compatta, allora

$$\Delta_2 : H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \ni u \to \Delta_2 u \in L^2(\Omega) \tag{2.14}$$

è un isomorfismo lineare.

Per dualità ricaviamo che anche la sua aggiunta:

$$\Delta_2^* : L^2(\Omega) \to \left(H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\right)^* \tag{2.15}$$

è un isomorfismo.

Per i teoremi di inclusione di Sobolev, poiché X ha dimensione due, le funzioni di $H^2(\Omega)$ sono continue in Ω. In particolare, per ogni punto $P \in \Omega$ l'applicazione

$$\delta_P : H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \ni v \to v(P) \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

è lineare e continua. Quindi esiste una funzione $\gamma_P \in L^2(\Omega)$ tale che

$$\iint_\Omega \gamma_P(x) \Delta_2 u(x)\, d\lambda(x) = u(P) \qquad \forall u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\,. \tag{2.17}$$

Per il teorema di regolarità, la γ_P, poiché risolve l'equazione $\Delta_2 \gamma_P = \delta_P$ nel senso delle distribuzioni, è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e armonica nell'aperto $\Omega \setminus \{P\}$.

Da queste considerazioni deduciamo il teorema relativo all'esistenza di funzioni di Green:

TEOREMA 2.4. *Sia $\overline{\Omega}$ una sottovarietà con bordo, compatta e connessa, di X. Allora per ogni punto $P \in \Omega$ esiste una funzione $G_P \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}(\Omega \setminus \{P\}) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{P\})$ tale che $G_P = 0$ su $\partial\Omega$ e $\Delta_2 G_P = \delta_P$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia Ω_1 un intorno aperto di Ω tale che $\overline{\Omega}_1$ sia ancora una sottovarietà con bpordo compatta e connessa di X. Sia γ_P la soluzione dell'equazione variazionale $\Delta_2 \gamma_P = \delta_P$ costruita, come in precedenza, per l'aperto Ω_1. Allora la restrizione di γ_P a $\partial\Omega$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$. Sia $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ una funzione tale che $\psi = \gamma_P$ su $\partial\Omega$. Se w è la soluzione del problema di Dirichelet:

$$\begin{cases} w \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \\ \Delta_2 w = \Delta_2 \psi \quad \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.18}$$

allora $G_P = \gamma_{P|_{\overline{\Omega}}} + w - \psi$ soddisfa tutte le condizioni richieste. □

Se X è una superficie di Riemann e la metrica è compatibile con la struttura complessa di X, possiamo costruire la funzione di Green senza far uso della dualità. Infatti, in una coordinata locale z con $z(P) = 0$, poiché $g = h(z)\, dz\, d\bar{z}$, la $u = \frac{h(0)}{2\pi} \log |z|$ è soluzione locale di $\Delta_2 u = \delta_P$. Estendiamo la u a una funzione $\tilde{u}$, di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $X \setminus \{P\}$, che coincida con u in un intorno di P. Allora $\Delta_2 \tilde{u} = f + \delta_P$, ove $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ è identicamente nulla in un intorno di P. Se $P \in \Omega \subset \overline{\Omega}$ per una sottovarietà con bordo connessa e compatta di X, possiamo trovare una soluzione w del problema:

$$\begin{cases} w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \\ w = \tilde{u} \quad \text{su} \quad \partial\Omega \\ \Delta_2 w = f \quad \text{in} \quad \Omega\,. \end{cases} \tag{2.19}$$

Allora $G_P = \tilde{u} - w$ è la funzione di Green cercata.

Ancora, nel caso delle superficie di Riemann, è facile ricondurre il principio di continuazione unica al risultato analogo per le funzioni olomorfe su aperti di $\mathbb{C}$. Esso comunque è conseguenza del fatto che l'operatore di Laplace-Beltrami è ellittico del second'ordine:

TEOREMA 2.5. *Sia Ω un aperto connesso di X e sia $u \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}(\Omega)$, nulla con tutte le sue derivate parziali (rispetto a un qualsiasi sistema di coordinate locali) nel punto $p \in \Omega$. Allora $u = 0$ in Ω.*

[cf. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III.*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 274. Springer-Verlag, Berlin, 1994. viii+525 pp. ISBN 3-540-13828-5 Springer], Theorem 17.2.6, p.14 e le indicazioni storico-bibliografiche alla fine del Capitolo 17 dell'op.cit. Nel caso delle due variabili, possiamo comunque ricondurci sempre - localmente - al caso delle superfici di Riemann mediante la scelta di coordinate isoterme (Teorema di Korn-Lichtenstein).]

Dalla costruzione delle funzioni γ_p traiamo il:

TEOREMA 2.6. *Sia $\overline{\Omega}$ una sottovarietà con bordo connessa e compatta di X e sia $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tale che*

$$\iint_\Omega f \cdot v \, d\lambda \;=\; 0 \qquad \forall v \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}(\Omega)\,. \tag{2.20}$$

Allora esiste una e una sola $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tale che $\Delta_2 u = f$.

DIMOSTRAZIONE. Sia Ω' un intorno aperto di $\overline{\Omega}$ in X, tale che $\overline{\Omega}'$ sia anch'essa una varietà connessa, compatta, con bordo di X.

Sia $u \in H^2(\Omega') \cap H_0^1(\Omega')$ sia la soluzione del problema di Dirichelet

$$\begin{cases} \Delta_2 u = f & \text{in} \quad \Omega' \\ u = 0 & \text{su} \quad \partial\Omega'\,. \end{cases}$$

Sia G_p la funzione di Green relativa a Ω' e ad un punto $p \in \Omega' \setminus \overline{\Omega}$. Allora risulta:

$$\iint_\Omega f(x) G_p(x)\, d\lambda(x) \;=\; 0$$

in quanto G_p è armonica in Ω. Sia $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega')$, uguale a 1 in un intorno di p. Abbiamo allora:

$$\iint_{\Omega'} \Delta_2(\phi(x)u(x))\, G_p(x) d\lambda(x) = u(p)$$

perché G_p risolve $\Delta_2 G_p = \delta_p$ nel senso delle distribuzioni. D'altra parte, poiché $1-\phi$ è nulla in un intorno di p, della ω una palla coordinata tale che $\phi = 1$ in un intorno di $\overline{\omega}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega'} \Delta_2 \left((1-\phi)\, u\right)\, G_p \, d\lambda &= \iint_{\Omega' \setminus \omega} \Delta_2 \left((1-\phi)\, u\right)\, G_p \, d\lambda \\ &= \iint_{\Omega' \setminus \omega} (1-\phi)\, u\, \Delta_2 G_p \, d\lambda \;=\; 0 \end{aligned}$$

mediante integrazione per parti, in quanto $(1-\phi)\, u$ si annulla con tutte le derivate su $\partial\omega$ e G_p ed u si annullano su $\partial\Omega'$. Sommando otteniamo $u(p) = 0$ e dunque, essendo $u = 0$ su $\Omega' \setminus \overline{\Omega}$, per il principio di continuazione unica è anche $u = 0$ sulla componente connessa di $\Omega' \setminus \overline{\Omega}$ in $\Omega' \setminus \operatorname{supp} f$, onde u ha supporto compatto in Ω. □

Da questo teorema ricaviamo il

TEOREMA 2.7 (Teorema di approssimazione di Runge). *Siano $\Omega \subset \Omega'$ due aperti connessi di X, tali che $\overline{\Omega}$ e $\overline{\Omega}'$ siano sottovarietà con bordo compatte di X e $\Omega' \setminus \Omega$ non abbia componenti connesse compatte. Allora le restrizioni ad Ω delle funzioni di $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}(\Omega')$ formano un sottospazio denso di $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE. La tesi segue dal teorema di Hahn-Banach: infatti ogni funzionale lineare e continuo su $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}(\Omega)$ si può rappresentare mediante

$$\mathcal{H}^{\mathbb{R}}(\Omega) \ni u \to \iint_{\Omega} f\, u\, d\lambda \qquad \text{con} \quad f \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)\,.$$

□

Come conseguenza abbiamo:

TEOREMA 2.8. *Sia X una superficie di Riemann connessa e non compatta. Allora per ogni $f \in \mathcal{C}^{\infty}(X)$ esiste una $u \in \mathcal{C}^{\infty}(X)$ tale che $\Delta_2 u = f$ in X.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo una successione crescente di aperti $\{X_n\}$ in X tali che, (i) per ogni n, $\overline{X}_n$ sia una sottovarietà con bordo compatta di X; (ii) per ogni n sia $X_n \Subset X_{n+1}$; (iii) per ogni n, l'aperto $X_{n+1} \setminus \overline{X}_n$ non abbia componenti connesse compatte.

Per ogni n sia u_n la soluzione del problema di Dirichelet:

$$\begin{cases} u \in H^2(X_n) \cap H_0^1(X_n) \\ \Delta_2 u_n = f \quad \text{su} \quad X_n\,. \end{cases}$$

Dico che allora possiamo trovare una successione $\{v_n\}$ con $v_n \in \mathcal{C}^{\infty}(X_n)$, $\Delta_2 v_n = f$ su X_n e $\sup_{X_{n-1}} |v_{n+1} - v_n| < 2^{-n}$.

Infatti, possiamo porre $v_1 = u_1$. Supponiamo per ricorrenza di aver già definito v_1, v_2 ... v_n. Osserviamo allora che $u_{n+1} - v_n$ è armonica in X_n. Per il teorema di approssimazione di Runge possiamo trovare allora una funzione w, armonica in $X_{n=1}$, tale che $|u_{n+1} - v_n - w| < 2^{-(n+1)}$ in tutti i punti di $\overline{X}_{n-1}$. Poniamo allora $v_{n+1} = u_{n+1} - w$.

Costruita la successione $\{v_n\}$, otteniamo la u ponendo

$$u = v_n + \sum_{h>0} (v_{n+h} - v_{n+h-1}) \quad \text{su} \quad X_n\,.$$

□

COROLLARIO 2.9. *Per ogni $f \in \mathcal{E}'(X)$ tale che $\langle f\,,\, u\rangle = 0$ per ogni $u \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}(X)$, esiste $g \in \mathcal{E}'(X)$ tale che $\Delta_2 g = f$ nel senso delle distribuzioni.*

DIMOSTRAZIONE. Questo corollario è conseguenza del teorema appena dimostrato nel caso in cui X sia una superficie di Riemann connessa non compatta e del primo teorema di esistenza nel caso in cui X sia compatta. Infatti in entrambi i casi si conclude che $\Delta : \mathcal{C}^{\infty}(X) \to \mathcal{C}^{\infty}(X)$ ha immagine chiusa e quindi anche la sua aggiunta $\Delta_2 : \mathcal{E}'(X) \to \mathcal{E}'(X)$ ha immagine chiusa, che coincide con l'annullatore in $\mathcal{E}'(X)$ del nucleo di $\Delta : \mathcal{C}^{\infty}(X) \to \mathcal{C}^{\infty}(X)$. □

Da questo corollario possiamo ricavare una dimostrazione del

tm:klk

TEOREMA 2.10 (Korn-Lichtenstein). *Sia X una varietà Riemanniana di dimensione due, e sia $p \in X$. Esistono coordinate isoterme in un intorno di p in X.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un intorno aperto connesso Ω di p in X, tale che $\overline{\Omega}$ sia una sottovarietà con bordo compatta di X e Ω sia semplicemente connesso. Sia Φ_p lo spazio delle serie formali con centro in p: cioè $\Phi_p = \mathcal{C}^\infty(\Omega)/\mathcal{F}_p$ dove abbiamo indicato con $\mathcal{F}_p$ l'ideale di $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ delle funzioni che si annullano di ordine infinito (vale a dire con tutte le derivate parziali in un qualsiasi sistema di coordinate in p). Su Φ_p consideriamo la topologia di Fréchet della convergenza dei singoli coefficienti delle serie di Taylor. Il duale Φ_p' è allora lo spazio delle distribuzioni con supporto in $\{p\}$, che denotiamo con $\mathcal{E}'_{\{p\}}$. Per passaggio al quoziente definiamo Δ_2 su Φ_p. Se $T \in \mathcal{E}'_{\{p\}}$, e $T(\phi) = 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}(\Omega)$, per il corollario precedente abbiamo $T = \Delta_2 S$ per qualche $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Ma, essendo Ω connesso e semplicemente connesso, il principio di continuazione unica ci dice che $S \in \mathcal{E}'_{\{p\}}$. Risulta allora $T(\phi) = 0$ per ogni $\phi \in \Phi_p$ che soddisfa $\Delta_2\phi = 0$. Ne segue che ogni soluzione formale $\phi \in \Phi_p$ di $\Delta_2\phi = 0$ è approssimabile con serie di Taylor di funzioni $u \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}(\Omega)$.

A questo punto, avendo scelto coordinate locali x^1, x^2 in p, costruiamo una qualsiasi soluzione formale ϕ con $d\phi(p) \neq 0$. Una sua approssimante $u \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}}(\Omega)$ sarà allora tale che $du(p) \neq 0$. A questo punto, troviamo in un intorno di p una primitiva v della forma differenziale chiusa

$$\sqrt{|g|}\left(g^{2j}\frac{\partial u}{\partial x^j}dx^1 - g^{1j}\frac{\partial u}{\partial x^j}dx^2\right).$$

Le u, v sono allora coordinate isoterme in un intorno di p. □

OSSERVAZIONE 2.11. Si può dare una dimostrazione più generale del teorema di Korn-Lichtenstein sotto l'ipotesi che la varietà X sia solo di classe $\mathcal{C}^1$.

COROLLARIO 2.12. *Su ogni varietà di Riemann orientabile di dimensione reale due si possono definire due sole strutture di varietà complessa - tra loro coniugate - compatibili con la metrica Riemanniana g su X.*

OSSERVAZIONE 2.13. Sulle superficie di Riemann valgono il teorema di Stokes e quindi tutti i risultati della teoria delle funzioni olomorfe di una variabile complessa e delle funzioni meromorfe che sono legate al calcolo dei residui.

TEOREMA 2.14. *Sia X una superficie di Riemann, Ω un aperto relativamente compatto di X tale che $\overline{\Omega}$ sia una sottovarietà con bordo compatta di X. Allora:*

Date $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$ ed $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$,

vi è una ed una sola $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ *che risolve il problema di Dirichelet:*

$$\begin{cases} \Delta_2 u = f & in \quad \Omega \\ u = \phi & su \quad \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{2.21}$$

Tale u *è in* $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

3. Il complesso di deRham

Sia X una superficie di Riemann. Indichiamo con $\mathcal{E}^{(j)}(X)$ lo spazio delle forme differenziali esterne, a coefficienti complessi di classe $\mathcal{C}^\infty$, su X. Il complesso di deRham si può allora scrivere

$$0 \dashrightarrow \mathbb{C} \dashrightarrow \mathcal{E}^{(0)}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}(X) \to 0\,. \tag{3.1}$$

Data una 1-forma α, la condizione che

eq:formdbb

$$d\alpha = 0 \tag{3.2}$$

è necessaria perché l'equazione

eq:formdbc

$$du = \alpha \tag{3.3}$$

possa avere soluzione. Condizione necessaria e sufficiente affinché una uno-forma α sia esatta (cioè che la (3.3) ammetta soluzione) è che sia verificata la:

$$\oint_\gamma \alpha = 0 \tag{3.4}$$

per ogni laccetto γ in X.Supponiamo che X sia connessa e compatta. Allora una due-forma $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ è esatta (cioè è uguale al differenziale di una uno-forma) se, e soltanto se,

$$\iint_X \omega = 0\,. \tag{3.5}$$

Definizione 3.1. Posto $\mathcal{E}^{(j)}(X) = 0$ per $j \neq 0, 1, 2$, definiamo i quozienti:

$$\mathrm{H}^j(X) = \frac{\ker\left(d : \mathcal{E}^{(j)}(X) \to \mathcal{E}^{(j+1)}(X)\right)}{d\left(\mathcal{E}^{(j-1)}(X)\right)} \tag{3.6}$$

gruppi di coomologia di deRham di X.

In particolare $\mathrm{H}^0(X) = \{u \in \mathcal{E}^{(0)}(X) \,|\, du = 0\}$ è il sottospazio delle funzioni localmente costanti su X. Se X è connesso, $\mathrm{H}^0(X) \simeq \mathbb{C}$ ed in genereale $\mathrm{H}^0(X) \simeq \mathbb{C}^{\pi_0(X)}$ se $\pi_0(X)$ indica l'insieme delle componenti connesse di X.

4. Il complesso di deRham a coefficienti compatti

La coomologia di deRham definita nel paragrafo precedente è isomorfa alla coomologia singolare a coeffienti in $\mathbb{C}$ (teorema di deRham). In questo paragrafo definiremo la coomologia di deRham a supporti compatti e dimostreremo un risultato che indica come essa si colleghi all'omologia singolare a coefficienti in $\mathbb{C}$.

lm:lemmmdda

LEMMA 4.1. *Sia κ una curva chiusa semplice regolare sulla superficie di Riemann X. Possiamo costruire una 1-forma differenziale chiusa $\eta = \eta_\kappa \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, con supporto compatto in X, tale che:*

$$\iint_X \eta \wedge \alpha = \int_\kappa \alpha \qquad \forall \alpha \in \mathcal{E}^{(1)}(X) \quad \text{con} \quad d\alpha = 0\,. \tag{4.1}$$

eq:formuladgd

La 1-forma a supporto compatto η è univocamente determinata, modulo il differenziale di una funzione a supporto compatto.

DIMOSTRAZIONE. Supporremo nel corso della dimostrazione che X sia connessa. Questa non è una restrizione, perché la κ appartiene a una componente connessa di X ed a questa ci possiamo ricondurre nella discussione che segue.

Fissiamo su X una metrica Riemanniana g compatibile con la struttura complessa. Sia d_g la distanza associata su X. Possiamo fissare un numero reale $\epsilon > 0$ tale che $\Omega_\epsilon = \{p \in X \,|\, d_g(x,\kappa) < \epsilon\}$ sia un aperto relativamente compatto di X, con frontiera regolare, e che $\Omega_\epsilon \setminus |\kappa|$ consista di due componenti connesse $\Omega_\epsilon^\pm$, di cui κ rappresenti la frontiera comune. Possiamo supporre che la curva orientata κ sia una parte della frontiera di Ω_ϵ^-. Scegliamo una funzione reale f, di classe $\mathcal{C}^\infty$ in X, con supporto in Ω_ϵ che sia uguale a 1 in un intorno di $|\kappa|$ e consideriamo la forma $\eta_\kappa \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ definita da:

$$\eta_\kappa = \begin{cases} df & \text{in} \quad \Omega_\epsilon^- \\ 0 & \text{in} \quad X \setminus \Omega_\epsilon^-\,. \end{cases} \tag{4.2}$$

Se α è una 1-forma chiusa di classe $\mathcal{C}^\infty$ in X:

$$\begin{aligned} \iint_X \eta_\kappa \wedge \alpha &= \iint_{\Omega_\epsilon^-} \eta_\kappa \wedge \alpha \\ &= \iint_{\Omega_\epsilon^-} df \wedge \alpha \\ &= \iint_{\Omega_\epsilon^-} d(f\,\alpha) \\ &= \int_\kappa f\alpha = \int_\kappa \alpha\,. \end{aligned}$$

Se $\eta' \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ è un'altra forma a supporto compatto che soddisfa (4.1), allora la differenza $\beta = \eta - \eta'$ soddisfa:

$$\iint_X \beta \wedge \alpha = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathcal{E}^{(1)}(X) \quad \text{con} \quad d\alpha = 0\,.$$

Se γ è una qualsiasi curva semplice chiusa, regolare di classe $\mathcal{C}^\infty$, in X, possiamo costruire, nello stesso modo in cui abbiamo costruito la η_κ nella prima parte della dimostrazione, una forma chiusa a supporto compatto η_γ per cui risulta:

$$\int_\gamma \beta = \iint_X \eta_\gamma \wedge \beta = 0\,.$$

Questa condizione ci dice che esiste una funzione $u \in \mathcal{E}^{(0)}(X)$ tale che $\beta = du$. Se X è compatta, non c'è altro da dimostrare. Se X non è compatta, osserviamo che la u è localmente costante sul complementare del compatto $\mathrm{supp}(\beta) \subset X$. Possiamo scegliere la u uguale a zero su una delle componenti connesse non relativamente compatte di $X \setminus \mathrm{supp}(\beta)$. Se $X \setminus \mathrm{supp}(\beta)$ ha una sola componente connessa non relativamente compatta, la u ha supporto compatto e non c'è altro da dimostrare. Consideriamo quindi il caso in cui $X \setminus \mathrm{supp}(\beta)$ abbia almeno due componenti connesse non relativamente compatte e fissiamo due punti p e q che appartengano a due componenti connesse non relativamente compatte distinte. Possiamo allora trovare una curva $\gamma : \mathbb{R} \to X$, regolare di classe $\mathcal{C}^\infty$, con $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e $\gamma(t)$ divergente per $t \to \pm\infty$. Ripetiamo ora per la curva γ una costruzione analoga a quella che abbiamo fatto all'inizio della dimostrazione per la κ: costruiamo un intorno tubolare U di γ in X:

$$U = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \{p \in X \,|\, d_g(p, \gamma(t)) < \epsilon(t)\}$$

per una funzione $\epsilon(t) > 0$ tale che, per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato, la curva γ divida il disco $B_t = \{p \in X \,|\, d_g(p, \gamma(t)) < \epsilon(t)\}$ in due componenti connesse $B_t^\pm$, in modo tale che $B_t \setminus |\gamma| = B^+ \cup B^-$ e B_t^- contenga nella sua frontiera la curva orientata $\gamma \cap B_t$. Possiamo ancora supporre che B_0 e B_1 siano contenuti, con le loro chiusure, in $X \setminus \mathrm{supp}(\beta)$. L'intorno tubolare U risulterà diviso dalla curva γ in due componenti connesse $U^\pm$. Fissiamo a questo punto una funzione $F \in \mathcal{E}^{(0)}(X)$ con $\mathrm{supp}(F) \subset U$ e $F(x) = 1$ in un intorno U' di $|\gamma|$ in U. Allora

$$\alpha = \begin{cases} dF & \text{in} \quad U^- \\ 0 & \text{in} \quad X \setminus U^- \end{cases}$$

è una 1-forma differenziale chiusa, di classe $\mathcal{C}^\infty$, in X. Possiamo supporre che U abbia frontiera regolare di classe $\mathcal{C}^\infty$. Consideriamo ora un dominio D^-, con frontiera regolare a tratti, contenuto in U^-, tale che δD^- consista dell'arco di γ che congiunge p a q, di un arco della frontiera di U, e di due archi che congiungano rispettivamente p e q alla frontiera di U e non

intersechino il supporto di β. Otteniamo allora:

$$\begin{aligned}
0 &= \iint_X \beta \wedge \alpha \\
&= \iint_{D^-} \beta \wedge \alpha && \text{perché } \operatorname{supp}(\beta \wedge \alpha) \subset D^- \\
&= \iint_{D^-} \beta \wedge dF && \text{perché } \alpha = dF \text{ in } D^- \subset U^- \\
&= -\int_{\gamma \cap \delta D^-} \beta && \text{perché } F \cdot \beta = 0 \text{ su } \delta D^- \setminus |\gamma| \text{ e } F = 1 \text{ su } |\gamma| \\
&= -\int_{\gamma \cap \delta D^-} du \\
&= u(p) - u(q)\,.
\end{aligned}$$

Questo dimostra che u è costante su $X \setminus \operatorname{supp}(\beta)$ e quindi, poiché è nulla su una delle componenti non relativamente compatte di $X \setminus \operatorname{supp}(\beta)$, è nulla su tutte le componenti connesse non relativamente compatte di $X \setminus \operatorname{supp}(\beta)$ ed ha quindi supporto compatto. □

DEFINIZIONE 4.2. Indichiamo con $\mathcal{E}^{(j)}_{\text{comp}}(X)$ il sottospazio di $\mathcal{E}^{(j)}(X)$ delle forme che hanno supporto compatto in X. Abbiamo il *complesso di deRham a supporti compatti*:

$$0 \to \mathcal{E}^{(0)}_{\text{comp}}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)}_{\text{comp}}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}_{\text{comp}}(X) \to 0\,. \tag{4.3}$$

I quozienti:

$$\mathrm{H}^j_{\text{comp}}(X) = \frac{\ker d : \mathcal{E}^{(j)}_{\text{comp}}(X) \to \mathcal{E}^{(j+1)}_{\text{comp}}(X)}{d\left(\mathcal{E}^{(j-1)}_{\text{comp}}(X)\right)}$$

(dove si è posto $\mathcal{E}^{(j)}_{\text{comp}}(X) = 0$ se $j \neq 0, 1, 2$) si dicono i *gruppi di coomologia di deRham a coefficienti compatti.*

Il Lemma precedente si può quindi riformulare nel modo seguente:

PROPOSIZIONE 4.3. *Una curva semplice chiusa κ di classe $\mathcal{C}^\infty$ di una superficie di Riemann X determina un'unica classe di coomologia di deRham a coefficienti compatti $[\kappa] \in \mathrm{H}^1_{\text{comp}}(X)$ tale che la (4.1) valga per ogni $\eta \in [\kappa]$.*

Osserviamo che $\mathrm{H}^0_{\text{comp}}(X)$ è la somma diretta di tante copie di $\mathbb{C}$ quante sono le componenti connesse compatte di X. Se X non ha componenti connesse compatte, allora $\mathrm{H}^0_{\text{comp}}(X) = \{0\}$, mentre in generale $\mathrm{H}^0_{\text{comp}}(X) = \coprod_{\{K \in \pi_0(X),\, K \Subset X\}} \mathbb{C}$.

I risultati di questo paragrafo e quelli richiamati nel paragrafo precedente si possono riassumere nel seguente:

TEOREMA 4.4 (Teorema di dualtità). *Sia X una superficie di Riemann, sia j un intero con $0 \leq j \leq 2$ e siano $\xi \in \mathrm{H}^j(X)$ e $\mu \in \mathrm{H}^{2-j}_{\text{comp}}(X)$ due classi*

di coomologia di deRham, di cui la seconda con supporto compatto. Allora il valore dell'integrale:

$$(*) \qquad \iint_X \alpha \wedge \beta \qquad \text{con} \quad \alpha \in \xi,\ \beta \in \mu$$

è indipendente dalla scelta dei rappresentanti $\alpha \in \xi$ e $\beta \in \mu$.

L'applicazione

(4.4)

$$\mathrm{H}^j(X) \times \mathrm{H}^{2-j}_{\mathrm{comp}}(X) \ni (\xi, \mu) \to \langle \xi | \mu \rangle := \iint_X \alpha \wedge \beta \in \mathbb{C} \quad (\alpha \in \xi,\ \beta \in \mu)$$

è un accoppiamento di dualità. [2] *In particolare:*

(*i*) *Se $\alpha \in \mathcal{E}^j(X)$ e $d\alpha = 0$, condizione necessaria e sufficiente affinché esista $u \in \mathcal{E}^{(j-1)}(X)$ tale che $du = \alpha$ è che*

$$\iint_X \alpha \wedge \beta = 0 \qquad \forall \beta \in \mathcal{E}^{2-j}_{\mathrm{comp}}(X) \text{ con } d\beta = 0\,. \tag{4.5}$$

(*ii*) *Se $\beta \in \mathcal{E}^j_{\mathrm{comp}}(X)$ e $d\beta = 0$, condizione necessaria e sufficiente affinché esista $v \in \mathcal{E}^{(j-1)}_{\mathrm{comp}}(X)$ tale che $dv = \beta$ è che*

$$\iint_X \alpha \wedge \beta = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathcal{E}^{2-j}(X) \text{ con } d\alpha = 0\,. \tag{4.6}$$

5. Forme differenziali su una superficie di Riemann

sec:sectdd

Sia X una superficie di Riemann. Lo spazio $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ delle 1-forme differenziali di classe $\mathcal{C}^\infty$ a coefficienti complessi su X si può decomporre nella somma diretta di due sottospazi, che indicheremo rispettivamente con $\mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ ed $\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$. Il sottospazio $\mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ (risp. $\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$) contiene tutte le $\alpha \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ tali che, per ogni aperto U di X ed ogni $u \in \mathcal{O}(U)$, risulta $\alpha \wedge d\bar{u} = 0$ (risp. $\alpha \wedge du = 0$).

Se z è una coordinata locale su un aperto U di X, abbiamo $\mathcal{E}^{(1,0)}(U) = \mathcal{E}^{(0)}\, dz$ ed $\mathcal{E}^{(0,1)}(U) = \mathcal{E}^{(0)}\, d\bar{z}$ (ove, se $z = x + iy$, è $dz = dx + idy$, e $d\bar{z} = dx - idy$).

Risultano così definiti, su una superficie di Riemann X, due operatori:

$$\partial : \mathcal{E}^{(0)}(X) \to \mathcal{E}^{(1,0)}(X) \quad \text{e} \quad \bar{\partial} : \mathcal{E}^{(0)}(X) \to \mathcal{E}^{(0,1)}(X) \tag{5.1}$$

e possiamo scrivere

$$d = \partial + \bar{\partial}\,. \tag{5.2}$$

I due operatori ∂ e $\bar{\partial}$ si esprimono, in una coordinata olomorfa locale z, mediante:

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial z} dz\,,\ \bar{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \quad \text{se} \quad u \in \mathcal{E}^{(0)}(X)\ , \tag{5.3}$$

[2] Ciò significa che è bilineare e che (*i*): $\langle \xi | \mu \rangle = 0$ per ogni $\mu \in \mathrm{H}^{2-j}_{\mathrm{comp}}(X)$ se e soltanto se $\xi = 0$, (*ii*) $\langle \xi | \mu \rangle = 0$ per ogni $\xi \in \mathrm{H}^j(X)$ se e soltanto se $\mu = 0$.

ove abbiamo posto:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Osserviamo che condizione necessaria e sufficiente affinché $f \in \mathcal{O}(X)$ sia olomorfa è che $\bar{\partial} f = 0$ in X.

Una 1-forma si esprime in coordinate locali mediante $\alpha = a\,dx + b\,dy$, ovvero $\alpha = u\,dz + v\,d\bar{z}$, ove $a = u + v$, $b = i(u - v)$. Abbiamo allora:

$$\begin{cases} \partial\alpha = \frac{\partial a}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial b}{\partial z} dz \wedge dy = \frac{\partial v}{\partial z}\, dz \wedge d\bar{z} \\ \bar{\partial}\alpha = \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dx + \frac{\partial b}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dy = -\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\, dz \wedge d\bar{z}\,. \end{cases} \tag{5.4}$$

Osserviamo che, per ogni funzione $u \in \mathcal{E}^{(0)}(X)$, risulta:

$$\partial\bar{\partial} u = -\bar{\partial}\partial u = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dz \wedge d\bar{z} = -\frac{i}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy\,. \tag{5.5}$$

Quindi, per ogni aperto Ω di X, avremo:

$$\mathcal{H}(\Omega) =: \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{\mathbb{R}} = \{u \in \mathcal{E}^{(0)}(\Omega) \,|\, \partial\bar{\partial} u = 0\} \tag{5.6}$$

per ogni scelta di una metrica g compatibile con la struttura complessa.

Indichiamo con $\Delta : \mathcal{E}^{(0)}(X) \to \mathcal{E}^{(2)}(X)$ l'operatore differenziale alle derivate parziali del secondo ordine definito da:

$$\Delta u = 2i\,\partial\bar{\partial}\, u \qquad \forall u \in \mathcal{E}^{(0)}(X)\,. \tag{5.7}$$

Poiché, fissata una metrica Riemanniana g compatibile con la struttura complessa, con 2-forma associata ω_g, risulta:

$$\Delta u = (\Delta_2 u)\,\omega_g \qquad \forall u \in \mathcal{E}^{(0)}(X)\,, \tag{5.8}$$

per la discussione svolta nel paragrafo precedente, se X è connesso e compatto, una $u \in \mathcal{E}^{(0)}(X)$ che soddisfi $\partial\bar{\partial} u = 0$, cioè $\Delta\, u = 0$, è costante, e l'equazione

$$\begin{cases} u \in \mathcal{E}^{(0)}(X) \\ \Delta\, u = 2i\,\partial\bar{\partial} u = f \in \mathcal{E}^{(2)}(X) \end{cases} \tag{5.9}$$

ha soluzione se e soltanto se

$$\iint_X \omega = 0\,. \tag{5.10}$$

Se invece X è una superficie di Riemann connessa e non compatta, allora per ogni $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ esiste una $u \in \mathcal{E}^{(0)}(X)$ tale che $\Delta u = 2i\,\partial\bar{\partial} u = \omega$.

Ricordiamo che per le 1-forme vale il:

Teorema 5.1 (Formula di Stokes). *Se ω è una 1-forma in X e D è una due-catena, allora:*

$$\int_{\delta D} \omega = \iint_D d\omega\,. \tag{5.11}$$

Come conseguenza della formula di Stokes, elenchiamo nella proposizione seguente alcune formule utili di integrazione per parti.

PROPOSIZIONE 5.2. *Sia X una superficie di Riemann e sia $\Omega \subset X$ un aperto relativamente compatto, con frontiera di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti.*

(I) *Siano $\alpha \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ ed $f \in \mathcal{E}^{(0)}(X)$. Allora:*

$$\int_{\delta\Omega} f\alpha = \iint_{\Omega} f\, d\alpha + \iint_{\Omega} (df) \wedge \alpha\,. \tag{5.12}$$

(II) *Se $\alpha \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ è chiusa, allora:*

$$\int_{\delta\Omega} \alpha \,=\, 0\,. \tag{5.13}$$

(III) *Siano $\alpha \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ ed $f \in \mathcal{E}^{(0)}(X)$. Se $\mathrm{supp}(\alpha) \cap \mathrm{supp}(f)$ è compatto in X, allora:*

$$\iint_{\Omega} f\, d\alpha = \iint_{\Omega} \alpha \wedge df\,. \tag{5.14}$$

TEOREMA 5.3. *Siano $\phi, \psi \in \mathcal{E}^{(0)}(X)$, con $\mathrm{supp}(\phi) \cap \mathrm{supp}(\psi)$ compatto in X. Allora:*

$$\iint_X \phi \Delta\psi = \iint_X \psi \Delta\phi\,. \tag{5.15}$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti:

$$\begin{aligned}
\psi\, \partial\bar\partial\phi - \phi\, \partial\bar\partial\psi &= \psi\, \partial\bar\partial\phi + \phi\, \bar\partial\partial\psi \\
&= \psi\, d\bar\partial\phi + \phi\, d\partial\psi \\
&= d(\psi\, \bar\partial\phi + \phi\, \partial\psi) - d\psi \wedge \bar\partial\phi - d\phi \wedge \partial\psi \\
&= d(\psi\, \bar\partial\phi + \phi\, \partial\psi) - \partial\psi \wedge \bar\partial\phi - \bar\partial\phi \wedge \partial\psi \\
&= d(\psi\, \bar\partial\phi + \phi\, \partial\psi)\,.
\end{aligned}$$

La tesi è allora una conseguenza del teorema di Stokes: poiché il differenziale $\psi\, \bar\partial\phi + \phi\, \partial\psi$ ha supporto compatto, otteniamo:

$$\iint_X \psi \Delta\phi - \iint_X \phi \Delta\psi = 2i \iint_X d(\psi\, \bar\partial\phi + \phi\, \partial\psi) = 0\,.$$

□

Da questa formula, e dal teorema di regolarità per le soluzioni deboli (cioè nel senso delle distribuzioni) delle equazioni ellittiche, ricaviamo:

TEOREMA 5.4 (Lemma di Weyl). *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione (a valori complessi) $u \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(X)$ sia armonica (coincida cioè quasi ovunque con una funzione di $\mathcal{H}(X)$) è che:*

$$\iint_X u \Delta\phi \,=\, 0 \qquad \forall \phi \in \mathcal{E}^{(0)}(X) \quad \text{con} \quad \mathrm{supp}(\phi) \Subset X\,. \tag{5.16}$$

6. Operatore $*$, forme armoniche e forme olomorfe

Sia X una superficie di Riemann e fissiamo su di essa una metrica conforme g. Indichiamo con ω_g la due-forma canonica definita nella coordinata locale $z = x + iy$ da:

$$\omega_g = \sqrt{|g|}\, dx \wedge dy\,. \tag{6.1}$$

La metrica g definisce dei prodotti scalari, che indichiamo con $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_g$, sulle fibre degli $\mathcal{E}^{(j)}$. Definiamo l'operatore:

$$* : \mathcal{E}^{(m)}(X) \to \mathcal{E}^{(2-m)}(X)\,, \quad m = 0, 1, 2 \tag{6.2}$$

mediante:

$$\beta \wedge (*\alpha) = (\alpha|\beta)_g \omega_g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{E}^{(j)}(X)\ \ j = 0, 1, 2\,. \tag{6.3}$$

In coordinate locali valgono le espressioni:

$$\begin{cases} *u = u \cdot \omega_g \quad \text{se} \quad u \in \mathcal{E}^{(0)}(X)\,, \\ *(a\,dx + b\,dy) = -b\,dx + a\,dy \quad \text{se} \quad \alpha = a\,dx + b\,dy \in \mathcal{E}^{(1)}(X)\,, \\ *\eta = v/\sqrt{|g|} \quad \text{se} \quad \eta = v\,dx \wedge dy \in \mathcal{E}^{(2)}(X)\,. \end{cases} \tag{6.4}$$

Osserviamo che $* : \mathcal{E}^{(1)}(X) \to \mathcal{E}^{(1)}(X)$ dipende solo dalla struttura complessa e non dalla metrica conforme g fissata.

Vale inoltre la formula:

eq:formuladce

$$\Delta u = d(*(du)) = 2i\partial\bar\partial u \qquad \forall u \in \mathcal{E}^{(0)}(X)\,. \tag{6.5}$$

Definizione 6.1. Una 1-forma $\alpha \in \mathcal{E}^{(1)}$ si dice:

esatta se $\alpha = d\,u$ per qualche $u \in \mathcal{E}^{(0)}(X)$;
coesatta se $*\alpha = d\,v$ per qualche $v \in \mathcal{E}^{(0)}(X)$;
chiusa se $d\alpha = 0$;
cochiusa se $d(*\alpha) = 0$;
armonica se per ogni punto $p \in X$ possiamo trovare un intorno aperto Ω di p e una funzione $u \in \mathbb{C} \otimes \mathcal{H}(\Omega)$ tale che $\alpha|_\Omega = du$.

Indicheremo nel seguito con $\mathcal{H}^{(1)}(X)$ lo spazio vettoriale delle forme armoniche su X.

Proposizione 6.2. *Una 1-forma $\alpha \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ è armonica se e solo se è chiusa e cochiusa.*

Dimostrazione. Infatti, se α è armonica, $d\alpha = 0$ perché α è localmente esatta. La formula (6.5) ci dice poi che α è cochiusa.

Viceversa, se α è chiusa, abbiamo localmente $\alpha = du$. Essendo anche cochiusa, avremo anche $d(*(du)) = 0$ e, per la (6.5), la u risulta armonica dov'è definita. □

Definizione 6.3. Sia Ω un aperto di X. Una 1-forma $\alpha \in \mathcal{E}^{(1)}(\Omega)$ si dice *olomorfa* se per ogni punto p di Ω esiste un intorno aperto U_p di p in Ω e una funzione olomorfa $u \in \mathcal{O}(U_p)$ tale che $\alpha|_{U_p} = du$. Le 1-forme olomorfe su X formano un sottospazio vettoriale $\Omega(X)$ di $\mathcal{E}^{(1,0)}(X)$.

pp:proposizionedeb

PROPOSIZIONE 6.4. *Sia X una superficie di Riemann ed Ω un aperto di X.*

(*a*) *Se $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, allora du è un differenziale olomorfo.*
(*b*) *Se $u, v \in \mathcal{O}(\Omega)$, allora $u\,dv$ è un differenziale olomorfo in Ω.*
(*c*) *Supponiamo che z sia una coordinata locale definita su Ω. Un differenziale $\alpha = u\,dz + v\,d\bar{z} \in \mathcal{E}^{(1)}(\Omega)$ è olomorfo se e soltanto se: (*i*) $v = 0$, (*ii*) $u \in \mathcal{O}(\Omega)$.*
(*d*) *Una forma $\alpha \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ è olomorfa se e soltanto se $\alpha \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ e $d\alpha = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. (*a*) Sia $u \in \mathcal{E}^{(0)}(\Omega)$. Se z è una coordinata locale su un aperto $U \subset \Omega$, allora $\partial u = u_z \partial z$, ove $u_z = \partial u/\partial z$. La condizione che ∂u sia un differenziale olomorfo equivale perciò al fatto che $\bar\partial\partial u = 0$, cioè che $u \in \mathcal{H}(\Omega)$.

(*b*) Se $u, v \in \mathcal{O}(\Omega)$, abbiamo $d(u\,dv) = 0$. Infatti, se z è una coordinata locale su un aperto $U \subset \Omega$, $u\,dv = u\,(\partial v/\partial z)\,dz$ e quindi $d\,(u\,dv) = \bar\partial\,(u\,(\partial v/\partial z)) \wedge dz$ e il secondo membro è uguale a zero in quanto $\bar\partial\,(u\,(\partial v/\partial z)) = 0$ perché $u\,(\partial v/\partial z)$ è olomorfa in U. Poiché $u\,dv$ è chiusa, essa è localmente esatta. Ma se $u\,dv = df$ su un aperto $U \subset \Omega$, con $f \in \mathcal{E}^{(0)}(U)$, avremo $\partial f = u\,dv$ e $\bar\partial f = 0$. Quindi f è olomorfa in U e ciò dimostra che $u\,dv$ è un differenziale olomorfo.

(*c*) Supponiamo ora che su Ω sia definita una coordinata locale z. Se $\alpha = u\,dz + v\,d\bar{z} \in \mathcal{E}^{(1)}(\Omega)$ è un differenziale olomorfo, allora per ogni punto p di Ω possiamo trovare un intorno aperto U di p in Ω e una $f \in \mathcal{O}(U)$ tale che $df = \alpha$. Poiché $df = (\partial f/\partial z)\,dz$, avremo $u|_U = (\partial f/\partial z) \in \mathcal{O}(U)$ e $v|_U = 0$. Poiché una funzione localmente olomorfa è olomorfa e una funzione localmente nulla è nulla, concludiamo che $v = 0$ e $u \in \mathcal{O}(\Omega)$. Per la (*b*), le (*i*) e (*ii*) sono anche sufficienti affinché α sia un differenziale olomorfo.

(*d*) Sia Ω un qualsiasi aperto di X. Se $u \in \mathcal{O}(\Omega)$, chiaramente $du \in \mathcal{E}^{(1,0)}(\Omega)$ ed è esatta. Quindi una forma olomorfa appartiene ad $\mathcal{E}^{(1,0)}(\Omega)$ ed è chiusa perché localmente esatta. Viceversa, se $\alpha \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ è chiusa, essa è localmente esatta. Fissiamo un qualsiasi aperto U di X su sui α sia esatta. Se $u \in \mathcal{E}^{(0)}(U)$ soddisfa $du = \alpha$, abbiamo $\partial u = du = \alpha$ e $\bar\partial u = 0$. Quindi $u \in \mathcal{O}(U)$. Per l'arbitrarietà di U questo dimostra che $\alpha \in \Omega(X)$. □

PROPOSIZIONE 6.5. *Sia X una superficie di Riemann. Una 1-forma α è armonica se e soltanto se esistono due forme olomorfe α_1 e α_2 tali che*

eq:rmff

$$\alpha = \alpha_1 + \overline{\alpha}_2\,. \tag{6.6}$$

Le forme $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega(X)$ in (6.6) sono univocamente determinate.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che, se $\alpha = \alpha^{(1,0)} + \alpha^{(0,1)}$ è la decomposizione di α nelle sue componenti in $\mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ ed $\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$, abbiamo:

$$*\,\alpha = -i\,\alpha^{(1,0)} + i\,\alpha^{(0,1)}\,. \tag{6.7}$$

La forma α è armonica se e soltanto se è al tempo stesso chiusa e cochiusa. Queste condizioni sono equivalenti al fatto che sia $\alpha^{(1,0)}$ che $\alpha^{(0,1)}$ siano forme chiuse. Per il punto (d) della Proposizione 6.4, $\alpha_1 = \alpha^{(1,0)}$ ed $\alpha_2 = \overline{\alpha^{(0,1)}}$ sono olomorfe. L'unicità segue dal fatto dall'unicità della decomposizione $\mathcal{E}^{(1)} = \mathcal{E}^{(1,0)}(X) \oplus \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$. □

Osserviamo che $*^2 = * \circ * : \mathcal{E}^{(1)} \to \mathcal{E}^{(1)}$ è l'applicazione che fa corrispondere ad ogni forma α la sua opposta $(-\alpha)$. Possiamo quindi caratterizzare i sottospazi $\mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ e $\mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ di $\mathcal{E}^{(1)}$ come gli autospazi relativi rispettivamente agli autovalori $(-i)$ e i dell'operatore $*$. Otteniamo in particolare la caratterizzazione:

PROPOSIZIONE 6.6. *Sia X una superficie di Riemann. Una 1-forma α è olomorfa se una delle condizioni seguenti è soddisfatta:*

(1) *Esiste una forma armonica β tale che $\alpha = \beta + i(*\beta)$;*
(2) *$d\alpha = 0$ e $*\alpha = -i\alpha$.*

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che la (2) sia necessaria e sufficiente segue subito dal fatto che $\mathcal{E}^{(1,0)}$ è l'autospazio relativo all'autovalore $(-i)$ dell'operatore $*$ su $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ e dalla (d) della Proposizione 6.4.

Supponiamo ora che β sia armonica. Allora è chiusa e cochiusa e quindi $\alpha = \beta + i(*\beta)$ è chiusa. Inoltre $*(\beta + i(*\beta)) = (*\beta) - i\beta = (-i)(\beta + i(*\beta))$ implica che $\alpha \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ e quindi $\alpha \in \Omega(X)$ per la (d) della Proposizione 6.4.

Viceversa, se $\alpha \in \Omega(X)$, allora sia α che $\bar{\alpha}$ sono differenziali armonici. Poniamo $\beta = (\alpha - \bar{\alpha})/2$. Allora β è un differenziale armonico, $*\beta = -i(\alpha + \bar{\alpha})$ e quindi $\alpha = \beta + i(*\beta)$ è la decomposizione in (1). □

7. Spazi di Hilbert di forme differenziali

Sia X una superficie di Riemann. Abbiamo osservato che l'applicazione $* : \mathcal{E}^{(1)}(X) \to \mathcal{E}^{(1)}(X)$ è definita in modo invariante a partire dalla struttura complessa di X.

Sia Ω un qualsiasi aperto di X e indichiamo con $\mathcal{E}^{(1)}_{\text{comp}}(\Omega)$ lo spazio delle 1-forme di $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ che hanno supporto compatto contenuto in Ω. Su di esso possiamo considerare la norma pre-Hilbertiana $\| \cdot \|_\Omega$ definita da:

$$\|\alpha\|^2_\Omega := \iint_\Omega \alpha \wedge (*\overline{\alpha}) \qquad \text{per} \quad \alpha \in \mathcal{E}^{(1)}_{\text{comp}}(\Omega)\,. \tag{7.1}$$

Indichiamo con $\mathcal{L}^{(1)}(\Omega)$ il completamento di $\mathcal{E}^{(1)}_{\text{comp}}(\Omega)$ rispetto a questa norma. Gli elementi di $\mathcal{L}^{(1)}(\Omega)$ sono le 1-*forme di quadrato sommabile* su Ω. Osserviamo che, se $z = x + iy$ è una coordinata locale in un aperto $U \subset \Omega$, allora la restrizione ad U di una 1-forma $\alpha \in \mathcal{L}^{(1)}(\Omega)$ si può rappresentare come una 1-forma $u\,dz + v\,d\bar{z}$, con u e v funzioni (a valori complessi) misurabili e

$$\alpha \wedge (*\overline{\alpha}) = i\,(u\bar{u} + v\bar{v})\,dz \wedge d\bar{z} = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right) dx \wedge dy \qquad \text{in} \quad U\,. \tag{7.2}$$

Lo spazio $\mathcal{L}^{(1)}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert per il prodotto scalare:

$$(\alpha_1|\alpha_2)_\Omega = \iint_\Omega \alpha_1 \wedge (*\overline{\alpha}_2) \qquad \text{per} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{L}^{(1)}(\Omega)\,. \tag{7.3}$$

Osserviamo che l'operatore $*$ si estende con continuità a una isometria dello spazio di Hilbert $\mathcal{L}^{(1)}(\Omega)$. Si verifica infatti facilmente che $((*\alpha_1)|(*\alpha_2))_\Omega = (\alpha_1|\alpha_2)_\Omega$ per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{E}^{(1)}_{\text{comp}}(\Omega)$ e quindi per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{L}^{(1)}(\Omega)$.

PROPOSIZIONE 7.1. *Sia Ω un aperto relativamente compatto della superficie di Riemann X, con frontiera $\delta\Omega$ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, e siano $\alpha \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, $f \in \mathcal{E}^{(0)}(X)$. Allora:*

eq:rmfx
$$(df \mid *\alpha)_\Omega = \iint_\Omega f\, d\overline{\alpha} - \int_{\delta\Omega} f\,\overline{\alpha}\,. \tag{7.4}$$

DIMOSTRAZIONE. Il primo membro della (7.4) è l'integrale su Ω della forma differenziale $-(df)\wedge\overline{\alpha}$. Osserviamo che $-(df)\wedge\overline{\alpha} = -d(f\,\overline{\alpha}) + f\,d\overline{\alpha}$, ed applichiamo la formula di Stokes per ottenere (7.4). □

PROPOSIZIONE 7.2. *Sia Ω un aperto relativamente compatto della superficie di Riemann X, con frontiera $\delta\Omega$ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, e siano $\phi, \psi \in \mathcal{E}^{(0)}(X)$. Allora:*

$$\begin{aligned}(d\phi|d\psi)_\omega &= \iint_\Omega \phi\,\Delta\bar{\psi} + \int_{\delta\Omega} *(\phi\, d\bar{\psi}) \\ &= \iint_\Omega (\Delta\phi)\,\bar{\psi} + \int_{\delta\Omega} *(\bar{\psi}\, d\phi)\,.\end{aligned} \tag{7.5}$$

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo la formula di Stokes, tenendo presente che

$$d\phi \wedge (*d\bar{\psi}) = d\left(\phi\,(*d\bar{\psi})\right) - \phi\, d(*d\bar{\psi}) \quad \text{e} \quad d(*d\bar{\psi}) = \Delta\bar{\psi}.$$

La seconda uguaglianza si ottiene dalla prima coniugando ambo i membri e scambiando tra loro ϕ e ψ. □

PROPOSIZIONE 7.3. *Sia Ω un aperto relativamente compatto della superficie di Riemann X, con frontiera $\delta\Omega$ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, e siano $\phi, \psi \in \mathcal{E}^{(0)}(X)$. Allora:*

eq:rmgf
$$(d\phi| * d\psi)_\Omega \;=\; -\int_{\delta\Omega} \phi\,(d\bar{\psi}) \;=\; \int_{\delta\Omega} \bar{\psi}\,(d\phi)\,. \tag{7.6}$$

DIMOSTRAZIONE. Il primo membro della (7.6) è l'integrale su Ω della forma

$$-d\phi\wedge d\bar{\psi} = -d(\phi\, d\bar{\psi}) = d(\bar{\psi}\, d\phi).$$

La formula (7.6) è quindi conseguenza della formula di Stokes. □

PROPOSIZIONE 7.4. *Sia Ω un aperto relativamente compatto della superficie di Riemann X, con frontiera $\delta\Omega$ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, sia $f \in \mathcal{E}^{(0)}(X)$ e sia $\alpha \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ una 1-forma chiusa. Allora:*

eq:formuladfg
$$\int_{\delta\Omega} f\,\alpha \;=\; \iint_\Omega df\wedge\alpha\,. \tag{7.7}$$

DIMOSTRAZIONE. La (7.7) segue dalla formula di Stokes e dal fatto che $d(f\,\alpha) = df \wedge \alpha$ perché abbiamo supposto che α sia chiusa. □

PROPOSIZIONE 7.5. *Sia Ω un aperto relativamente compatto della superficie di Riemann X, con frontiera $\delta\Omega$ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, e siano $f \in \mathcal{O}(X)$ una funzione olomorfa ed $\alpha \in \Omega(X)$ una forma olomorfa su X. Allora:*

$$\iint_\Omega df \wedge \overline{\alpha} = 2\int_{\delta\Omega} (\mathrm{Re}\, f)\,\overline{\alpha} = 2i \int_{\delta\Omega} (\mathrm{Im}\, f)\,\overline{\alpha}\,. \tag{7.8}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che $f\,\alpha \in \Omega(X)$. In particolare $f\,\alpha$ è una 1-forma chiusa e quindi anche $\bar{f}\,\overline{\alpha}$ è chiusa e $\int_{\delta\Omega} \bar{f}\,\overline{\alpha} = 0$. Questa relazione si può scrivere:

$$2\int_{\delta\Omega} (\mathrm{Re}\, f)\,\overline{\alpha} = 2i \int_{\delta\Omega} (\mathrm{Im}\, f)\,\overline{\alpha} = \int_{\delta\Omega} f\,\overline{\alpha}\,.$$

La tesi segue allora dalla (7.7) (con $\overline{\alpha}$ al posto di α). □

8. Forme armoniche e coomologia di deRham

In questo paragrafo studieremo in particolare la coomologia di deRham delle superficie di Riemann compatte.

Vale il seguente:

TEOREMA 8.1. *Sia X una superficie di Riemann compatta. L'applicazione:*

$$\mathcal{H}^{(1)}(X) \ni \alpha \to [\alpha] \in \mathrm{H}^1(X)\,, \tag{8.1}$$

che associa ad ogni 1-forma armonica in X la sua classe di coomologia di deRham, è un isomorfismo lineare.

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo innanzi tutto che l'applicazione è iniettiva. Se $\alpha \in \mathcal{H}^{(1)}(X)$ ed esiste una $u \in \mathcal{E}^{(0)}(X)$ tale che $\alpha = du$, allora abbiamo:

$$\begin{aligned}
\|\alpha\|_X^2 &= \iint_X \alpha \wedge (*\bar{\alpha}) \\
&= \iint du \wedge (*\bar{\alpha}) \\
&= \iint d(u \wedge (*\bar{\alpha})) \qquad \text{perché } \bar{\alpha} \text{ è cochiusa} \\
&= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{per la formula di Stokes}
\end{aligned}$$

e quindi $\alpha = 0$.

Sia ora $\alpha \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ una 1-forma chiusa. Osserviamo ora che, sempre per la formula di Stokes, risulta

$$\iint_X d(*\alpha) = 0\,.$$

Per i risultati sull'operatore di Laplace che abbiamo richiamato nel §5, esiste una $u \in \mathcal{E}^{(0)}(X)$ tale che $d(*du) = \Delta u = d(*\alpha)$. Allora $\alpha - du$ è una forma armonica, coomologa ad α in $\mathrm{H}^1(X)$. □

DEFINIZIONE 8.2. Una curva semplice chiusa γ su X *separa* X se $X \setminus |\gamma|$ non è connesso.

Abbiamo:

TEOREMA 8.3. *Se esiste sulla superficie di Riemann X una curva semplice chiusa che non la separa, allora la classe di coomologia $[\gamma]$ di γ è $\neq 0$. Quindi esiste su X un differenziale armonico $\neq 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché γ non separa X, vi è una curva semplice chiusa κ che interseca γ in un solo punto p. Sia U un intorno tubolare di $|\gamma|$ in X, che $|\gamma|$ divide in due componenti connesse $U^{\pm}$, con γ parte della frontiera orientata di U^-. Se f è una funzione di $\mathcal{E}^{(0)}(X)$ con supporto in un intorno tubolare U di $|\gamma|$, uguale a 1 in un intorno tubolare $U' \subset U$ di $|\gamma|$, e poniamo

$$\eta_\gamma = \begin{cases} df & \text{in} \quad U^- \\ 0 & \text{in} \quad X \setminus U^- \,. \end{cases}$$

Allora:

$$\langle [\kappa], [\gamma] \rangle = \int_\kappa \eta_\gamma = 1 \neq 0$$

dimostra che le classi di coomologia $[\kappa]$ e $[\gamma]$ non sono nulle. □