

**Lezioni sulla Teoria delle Connessioni e la
Geometria Riemanniana**

Mauro Nacinovich

Indice

Capitolo 1. Fibrati principali	7
1.1. Gruppi di Lie	7
1.2. Sottogruppi di Lie	10
1.3. La forma di Maurer-Cartan	11
1.4. Gruppi di Lie di trasformazioni	14
1.5. Fibrati principali	14
1.6. Morfismi di fibrati principali	16
1.7. Spazi omogenei	18
1.8. Il fibrato dei sistemi di riferimento	20
1.9. Riduzione del gruppo strutturale e \mathbf{G} -strutture	21
1.10. \mathbf{G} -strutture su una varietà differenziabile	23
1.11. Rappresentazioni lineari e fibrati vettoriali	24
Capitolo 2. Connessioni principali	29
2.1. La distribuzione verticale	29
2.2. Il concetto di connessione principale	31
2.3. Pullback di una connessione principale	33
2.4. Il fibrato delle connessioni principali	33
2.5. Automorfismi di una connessione principale	34
2.6. Forme di Christoffel ed equazioni di gauge	35
2.7. Sollevamento orizzontale di campi di vettori	37
2.8. Sollevamento orizzontale di cammini e trasporto parallelo	37
2.9. Il gruppo di ologonomia	39
Capitolo 3. Differenziazione covariante e curvatura	43
3.1. Differenziale di forme tensoriali e pseudotensoriali	43
3.2. Differenziazione covariante di sezioni di fibrati vettoriali	44
3.3. Espressione locale del differenziale covariante	45
3.4. Forma di curvatura ed equazioni di struttura	47
3.5. Connessioni piatte	48
3.6. La famiglia delle connessioni principali	48
3.7. Rappresentazione aggiunta e tensore di curvatura	49
3.8. Trasporto parallelo di vettori	50
3.9. Differenziazione covariante secondo Koszul	51
3.10. Il Teorema di Ambrose-Singer	53
3.11. L'ologonomia infinitesima	54
3.12. Connessioni invarianti canoniche su spazi omogenei	55

3.13. Connessioni invarianti	56
Capitolo 4. Varietà affini e Riemanniane	63
4.1. Connessioni e varietà affini	63
4.2. Forme di torsione e di curvatura	64
4.3. Derivazione covariante, torsione e curvatura	65
4.4. Interpretazione geometrica della torsione e della curvatura	69
4.5. Esistenza di connessioni simmetriche	71
4.6. Derivazione covariante lungo una curva	71
4.7. Forme e simboli di Christoffel	72
4.8. Parallelismo	75
4.9. Geodetiche	75
4.10. Espressione in coordinate delle equazioni di struttura	77
4.11. Metriche pseudo-Riemanniane e connessione di Levi-Civita	80
4.12. Espressioni locali	82
4.13. Connessioni lineari su varietà dotate di una connessione affine	84
Capitolo 5. Connessioni affini invarianti sugli spazi omogenei	87
5.1. Rappresentazione lineare d'isotropia	87
5.2. Connessioni affini canoniche su spazi omogenei riduttivi	89
5.3. Connessioni affini invarianti	91
5.4. Connessioni invarianti su spazi riduttivi	95
Capitolo 6. Applicazione esponenziale e campi di Jacobi	99
6.1. L'applicazione esponenziale	99
6.2. Intorni normali ed intorni convessi	100
6.3. Definizione dei campi di Jacobi	101
6.4. Campi di Jacobi su una varietà Riemanniana	104
6.5. Punti coniugati	106
Capitolo 7. Varietà Riemanniane	109
7.1. Metriche Riemanniane e pseudo-Riemanniane	109
7.2. Estensione della metrica ai fibrati tensoriali	112
7.3. Geodetiche e distanza Riemanniana	113
7.4. Il funzionale dell'energia	115
7.5. Varietà di Riemann compatte	117
7.6. Il teorema di Hopf-Rinow	118
7.7. Varietà Riemanniane con curvatura negativa	120
Capitolo 8. Algebre di Clifford e Spinori	125
8.1. Algebre di Clifford	125
8.2. Involuzioni dell'algebra di Clifford	127
8.3. I gruppi spinoriali	128
Capitolo 9. Operatori differenziali sulle varietà Riemanniane	135
9.1. Elemento di volume ed operatore di Hodge	135
9.2. Codifferenziale, operatore di Laplace-Beltrami, divergenza	136

9.3. Il Laplaciano naturale	142
9.4. Il Laplaciano di Lichnerowicz	144
9.5. Laplaciano sulle forme differenziali alternate	146
Capitolo 10. Immersioni, isometrie, campi di Killing	151
10.1. Immersioni pseudo-Riemanniane	151
10.2. Isometrie	157
10.3. Campi di Killing	157
10.4. Proprietà algebriche del tensore di curvatura	158
10.5. La curvatura sezionale	162
10.6. Varietà totalmente geodetiche	164
Capitolo 11. Metriche invarianti	167
11.1. Metriche pseudo-Riemanniane su spazi omogenei	167
11.2. La connessione di Levi-Civita sugli spazi omogenei	168
Capitolo 12. Metriche di Einstein	171
12.1. Proprietà del tensore di curvatura	171
12.2. Curvatura sezionale	172
12.3. Il tensore di Ricci	173
12.4. Un Teorema di Myers	174
Capitolo 13. Spazi simmetrici	177
13.1. Spazi affini localmente simmetrici	177
13.2. Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni	180
13.3. Automorfismi affini e isometrie	185
13.4. Spazi Riemanniani globalmente simmetrici	191
13.5. Coppie simmetriche e simmetriche Riemanniane	194

CAPITOLO 1

Fibrati principali

ch: fp

1.1. Gruppi di Lie

Definizione 1.1.1. Un *gruppo di Lie* è un gruppo \mathbf{G} su cui è fissata una struttura di varietà differenziabile per cui l'operazione di gruppo $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (a, b) \rightarrow ab^{-1} \in \mathbf{G}$ sia differenziabile.

Poiché \mathbf{G} è localmente connesso, la componente connessa dell'identità \mathbf{G}^0 di \mathbf{G} è connessa per archi ed è un sottogruppo normale aperto e chiuso in \mathbf{G} .

\mathbf{G}^0 è numerabile all'infinito e quindi condizione necessaria e sufficiente affinché lo sia anche \mathbf{G} è che il quoziente \mathbf{G}/\mathbf{G}^0 sia al più numerabile.

Per ogni elemento a di \mathbf{G} , le

$$\begin{aligned} \text{le traslazioni a sinistra :} & & L_a : \mathbf{G} \ni g &\rightarrow ag \in \mathbf{G}, \\ \text{le traslazioni a destra :} & & R_a : \mathbf{G} \ni g &\rightarrow ga \in \mathbf{G}, \\ \text{gli automorfismi interni :} & & \text{ad}(a) : \mathbf{G} \ni g &\rightarrow aga^{-1} \in \mathbf{G}, \end{aligned}$$

sono diffeomorfismi di \mathbf{G} in sé.

A volte scriveremo per semplicità

$$aX \text{ per } L_{a*}(X) \text{ ed } Xa \text{ per } R_{a*}(X), \text{ se } a \in \mathbf{G}, X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G}).$$

Definizione 1.1.2. Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{G})$ si dice *invariante a sinistra* se $aX = L_{a*}(X) = X$, per ogni $a \in \mathbf{G}$.

Proposizione 1.1.3. I campi di vettori invarianti a sinistra formano una sottoalgebra di Lie reale $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$ di $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$. L'applicazione

eq:lg.s

$$(1.1.1) \quad T_e \mathbf{G} \ni X_e \rightarrow \{X_a = L_{a*}(X_e) \mid a \in \mathbf{G}\} \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$$

è un isomorfismo lineare. □

Definizione 1.1.4. Indichiamo con \mathfrak{g} , e chiamiamo *algebra di Lie* di \mathbf{G} , lo spazio vettoriale $T_e \mathbf{G}$, con la struttura di algebra di Lie reale che rende (1.1.1) un isomorfismo di algebre di Lie.

Notazione 1.1.5. Denoteremo con $X^* \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$ il campo di vettori invariante a sinistra corrispondente all'elemento X di \mathfrak{g} .

prop1213

Proposizione 1.1.6. Il campo $X^* \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$ genera un gruppo a un parametro $\phi_X(t)$ di diffeomorfismi di \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. Sia $X \in \mathfrak{g}$. Se $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{G})$ è una curva integrale di X^* , abbiamo $\dot{\gamma} = \gamma \cdot X$. Il flusso $\phi_X(a, t)$ di X^* soddisfa quindi la

$$\phi_X(a, t) = ab^{-1}\phi_X(b, t) \quad \forall a, b \in \mathbf{G},$$

ed, a priori, per $|t|$ sufficientemente piccolo. Questa formula ci permette di estendere la definizione di $\phi_X(a, t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se infatti $\phi_X(e, t)$ è definita per $|t| < \epsilon$, dalla

$$\phi_X(a, t + s) = \phi_X(\phi_X(a, t), s) = \phi_X(a, t)\phi_X(e, s)$$

ricaviamo che la $\phi_X(a, t)$ definita su un intervallo $(t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$, si può estendere all'intervallo $(t_1 - \epsilon, t_2 + \epsilon)$ ponendo

$$\phi_X(a, t) = \phi_X(a, t')\phi_X(e, t''), \quad \text{se } t' \in (t_1, t_2), \quad |t''| < \epsilon, \quad t = t' + t''. \quad \square$$

Definizione 1.1.7. L'applicazione

$$\text{eq:gl.0.1} \quad (1.1.2) \quad \mathfrak{g} \ni X \longrightarrow \exp(X) = \phi_X(e, 1) \in \mathbf{G}$$

si dice l'*applicazione esponenziale* di \mathbf{G} .

Poiché

$$(1.1.3) \quad \exp((t_1 + t_2)X) = \exp(t_1X)\exp(t_2X) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

l'insieme $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo abeliano di \mathbf{G} .

Definizione 1.1.8. $\{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$ si dice *il sottogruppo a un parametro di \mathbf{G} generato da $X \in \mathfrak{g}$* .

Proposizione 1.1.9. *Il gruppo a un parametro di diffeomorfismi di \mathbf{G} generato dal campo di vettori invariante a sinistra $X^* \in \mathfrak{g}$ associato ad $X \in \mathfrak{g}$ è descritto dalla*

$$\text{eq:gl.1.2} \quad (1.1.4) \quad \mathbf{G} \times \mathbb{R} \ni (a, t) \longrightarrow \phi_X(a, t) = a \cdot \exp(tX) \in \mathbf{G}. \quad \square$$

Proposizione 1.1.10 (coordinate di prima specie). *L'applicazione esponenziale definisce un diffeomorfismo di un intorno aperto di 0 in \mathfrak{g} su un intorno aperto di e in \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, il differenziale in 0 dell'applicazione esponenziale è l'identità e quindi la tesi è conseguenza del teorema dell'applicazione inversa. \square

Esempio 1.1.11. Il gruppo delle matrici reali $n \times n$ invertibili $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie, di dimensione n^2 . La sua algebra di Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali $n \times n$ e l'esponenziale coincide con quello definito per le matrici:

$$(1.1.5) \quad \exp(X) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} X^h.$$

Il suo sottogruppo $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ delle matrici con determinante 1 è anch'esso un gruppo di Lie. Ha dimensione $(n^2 - 1)$ e la sua algebra di Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ è formata dalle matrici reali con traccia nulla.

Esempio 1.1.12. Il gruppo delle matrici complesse $n \times n$ invertibili $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ è un gruppo di Lie di dimensione $2n^2$. La sua algebra di Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ consiste di tutte le matrici complesse $n \times n$. L'esponenziale anche in questo caso coincide con l'esponenziale di matrici.

Il suo sottogruppo normale

$$\text{eq:gl.0.0a} \quad (1.1.6) \quad \mathbf{SL}(n, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \mid \det a = 1\}$$

è un gruppo di Lie di dimensione $2n^2 - 1$, con algebra di Lie

$$\text{eq:gl.0.0b} \quad (1.1.7) \quad \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \text{tr}(A) = 0\}.$$

Esempio 1.1.13. Il gruppo ortogonale

$$(1.1.8) \quad \mathbf{O}(n) = \{a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \mid {}^t a = a^{-1}\}$$

è un gruppo di Lie compatto di dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$. La sua algebra di Lie

$$\text{eq:gl.0.00} \quad (1.1.9) \quad \mathfrak{o}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A + {}^t A = 0\}$$

consiste delle matrici reali antisimmetriche.

Il suo sottogruppo normale

$$\text{eq:gl.0.000} \quad (1.1.10) \quad \mathbf{SO}(n) = \{a \in \mathbf{O}(n) \mid \det a = 1\}$$

ha indice due in $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{O}(n)$ ed $\mathbf{SO}(n)$ hanno la stessa algebra di Lie $\mathfrak{o}(n)$.

Se $n \geq 3$, il gruppo fondamentale di $\mathbf{SO}(n)$ è isomorfo a \mathbb{Z}_2 . Il suo rivestimento fondamentale, a due fogli, è un gruppo di Lie compatto, che si indica con $\mathbf{Spin}(n)$ e si dice *gruppo di spin*.

Esempio 1.1.14. Il *gruppo unitario* è il gruppo

$$\text{eq:gl.0.2} \quad (1.1.11) \quad \mathbf{U}(n) = \{a \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \mid a^* = a^{-1}\}$$

è un gruppo di Lie compatto di dimensione n^2 , con algebra di Lie

$$\text{eq:gl.0.3} \quad (1.1.12) \quad \mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid A + A^* = 0\}.$$

Il *gruppo speciale unitario*

$$\text{eq:gl.0.4} \quad (1.1.13) \quad \mathbf{SU}(n) = \{a \in \mathbf{U}(n) \mid \det a = 1\}$$

è un suo sottogruppo di Lie normale, di dimensione $n^2 - 1$, con algebra di Lie

$$\text{eq:gl.0.5} \quad (1.1.14) \quad \mathfrak{su}(n) = \{A \in \mathfrak{u}(n) \mid \text{tr} A = 0\}.$$

Abbiamo un isomorfismo di gruppi di Lie $\mathbf{SU}(2) \simeq \mathbf{Spin}(3)$.

Esempio 1.1.15. Indichiamo con J_n la matrice $(2n) \times (2n)$

$$\text{eq:gl.0.6} \quad (1.1.15) \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Il gruppo

$$\text{eq:gl.0.7} \quad (1.1.16) \quad \mathbf{Sp}(n) = \{a \in \mathbf{U}(2n) \mid J_n a = J_n \bar{a}\}$$

si dice il *gruppo simplettico compatto*, o *simplettico unitario*, o *simplettico ortogonale*. Ha dimensione $n(2n + 1)$ ed algebra di Lie

$$\text{eq:gl.0.8} \quad (1.1.17) \quad \mathfrak{sp}(n) = \{A \in \mathfrak{u}(2n) \mid A J_n + J_n \bar{A} = 0\}.$$

1.1.1. La rappresentazione aggiunta.

Proposizione 1.1.16. Per ogni $a \in \mathbf{G}$, il differenziale nell'identità $\text{Ad}(a)$ dell'automorfismo $\text{ad}(a)$ di \mathbf{G} definisce un automorfismo dell'algebra di Lie \mathfrak{g} .

DIMOSTRAZIONE. Siano $X \in \mathfrak{g}$ ed $a \in \mathbf{G}$. Abbiamo, con le notazioni introdotte in precedenza per i differenziali delle traslazioni a destra ed a sinistra,

$$[\text{ad}_a]_*(X_x^*) = aX^*a^{-1} = axXa^{-1} = axa^{-1}(aXa^{-1}) = [\text{ad}(a)(X)]_{\text{ad}(a)(x)}^*.$$

Questo dimostra che i campi X^* ed $(\text{Ad}(a)(X))^*$ sono $\text{ad}(a)$ -correlati e perciò

$$[(\text{ad}(a))_*X^*, (\text{ad}(a))_*Y^*] = (\text{ad}(a))_*([X^*, Y^*]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Qundi il diffeomorfismo $\text{ad}(a)$ definisce un automorfismo dell'algebra di Lie $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$. La tesi segue perché, per definizione, $[X^*, Y^*] = [X, Y]^*$. \square

Indichiamo con $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ il gruppo

$$\text{eq: 1215} \quad (1.1.18) \quad \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{\lambda \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \mid [\lambda(X), \lambda(Y)] = \lambda([X, Y]), \forall X, Y \in \mathfrak{g}\}.$$

degli automorfismi dell'algebra di Lie reale \mathfrak{g} .

Si verifica immediatamente che

Proposizione 1.1.17. L'applicazione $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{Ad}(a) \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ è un omomorfismo di gruppi. \square

Definizione 1.1.18. L'omomorfismo $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{Ad}(a) \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ si dice la *rappresentazione aggiunta di \mathbf{G}* .

1.2. Sottogruppi di Lie

Definizione 1.2.1. Un sottogruppo \mathbf{H} di \mathbf{G} è un suo *sottogruppo di Lie* se è anche una sottovarietà differenziabile di \mathbf{G} , e con tale struttura differenziabile è un gruppo di Lie.

L'algebra di Lie \mathfrak{h} di un sottogruppo di Lie \mathbf{H} di \mathbf{G} è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} . Infatti i campi di vettori invarianti a sinistra su \mathbf{H} sono restrizioni ad \mathbf{H} di campi di vettori invarianti a sinistra di \mathbf{G} .

Viceversa, per ogni sottoalgebra di Lie \mathfrak{h} di \mathfrak{g} il sottogruppo \mathbf{H} di \mathbf{G} generato da $\exp(\mathfrak{h})$ è un sottogruppo di Lie connesso di \mathbf{G} . Questo è conseguenza del fatto che i campi di vettori invarianti a sinistra corrispondenti agli elementi di \mathfrak{h} generano una distribuzione vettoriale di rango costante formalmente (e quindi totalmente) integrabile in \mathbf{G} .

Ogni omomorfismo differenziabile $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ di gruppi di Lie determina un omomorfismo $d\phi(e) : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ delle loro algebre di Lie. Il viceversa non è sempre vero; lo è quando \mathbf{G}_1 è semplicemente connesso.

In particolare, la $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{ad}(a) \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ definisce un'applicazione $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \text{Ad}(a) \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$, che si dice la *rappresentazione lineare aggiunta di \mathbf{G}* .

Vale il

thm: 1612

Teorema 1.2.2. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie, con algebra di Lie \mathfrak{g} .

(1) Se \mathbf{H} è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} , la sua algebra di Lie è

$$(1.2.1) \quad \mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp(tX) \in \mathbf{H}, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Ogni sottogruppo chiuso \mathbf{H} di \mathbf{G} è un suo sottogruppo di Lie.

Esempio 1.2.3 (Gruppi lineari). Un *gruppo lineare* è un sottogruppo chiuso di un gruppo $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$.

Per il *teorema di Ado*¹, ogni algebra di Lie su un campo \mathbb{k} è isomorfa ad una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$.

Per un teorema di Djokovic², ogni algebra di Lie reale è l'algebra di Lie di un gruppo lineare.

Tutti i gruppi di Lie compatti sono isomorfi a gruppi lineari.

Si può definire sul rivestimento universale $\widetilde{\mathbf{G}}$ di un gruppo di Lie connesso una struttura di gruppo di Lie per cui la proiezione canonica $\widetilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ sia un omomorfismo di gruppi di Lie.

I rivestimenti universali $\widetilde{\mathbf{SL}}(n, \mathbb{R})$ dei gruppi di Lie $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ sono gruppi di Lie che non sono isomorfi a gruppi lineari.

1.3. La forma di Maurer-Cartan

1.3.1. Forme differenziali a valori vettoriali. Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita ed M una varietà differenziabile. Indichiamo con $\Omega^h(M, V)$ lo spazio delle forme differenziali alternate di grado h a valori in V . Esse sono le applicazioni $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineari alternate :

$$\alpha: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{h \text{ volte}} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, V).$$

Ad esse si estende in modo naturale la definizione del differenziale. Naturalmente, se V non ha una struttura di algebra reale, non ha senso considerare il prodotto esterno di due forme a valori in V . Nel caso in cui V sia un'algebra, possiamo estendere la definizione del prodotto esterno in modo che, sulle forme di grado zero, coincida puntualmente con il prodotto definito in V . In particolare, nel caso delle algebre di Lie, possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 1.3.1. Se $V = \mathfrak{a}$ è un'algebra di Lie reale, il *prodotto esterno* di due forme differenziali $\alpha \in \Omega^p(M, \mathfrak{a})$, $\beta \in \Omega^q(M, \mathfrak{a})$, è la forma $[\alpha \wedge \beta] \in \Omega^{p+q}(M, \mathfrak{a})$ definita da:

$$[\alpha \wedge \beta](X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q} \\ 1 \leq \sigma_1 < \cdots < \sigma_p \leq p+q \\ 1 \leq \sigma_{p+1} < \cdots < \sigma_{p+q} \leq p+q}} \varepsilon(\sigma) [\alpha(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_p}), \beta(X_{\sigma_{p+1}}, \dots, X_{\sigma_{p+q}})].$$

Il prodotto si estende poi per bilinearità a tutto $\Omega^*(M, \mathfrak{a})$.

¹Matrix representations of Lie algebras, Usp. Mat. Nauk **2** (1947), pp. 159-173.

²A closure theorem for analytic subgroups of a real Lie group, Can.Math. Bull. **19** (1976), pp. 435-439.

In particolare, se α e β sono 1-forme a valori in \mathfrak{a} , abbiamo:

$$\begin{aligned} [\alpha \wedge \beta](X, Y) &= [\alpha(X), \beta(Y)] - [\alpha(Y), \beta(X)], \\ [\alpha \wedge \alpha](X, Y) &= 2[\alpha(X), \alpha(Y)], \end{aligned} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

1.3.2. Forme differenziali invarianti. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} .

Definizione 1.3.2. Una forma differenziale $\omega \in \Omega^*(\mathbf{G})$ si dice *invariante a sinistra* se $L_a^* \omega = \omega$ per ogni $a \in \mathbf{G}$.

Per una forma $\omega \in \Omega^1(\mathbf{G})$ di grado uno essere invariante a sinistra è equivalente al fatto che, per ogni campo di vettori $X \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$ invariante a sinistra su \mathbf{G} , la funzione $\omega(X)$ sia costante. Analogamente, una forma omogenea $\alpha \in \Omega^q(\mathbf{G})$ è invariante a sinistra se, e soltanto se, per ogni scelta di $X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{L}(\mathbf{G})$, la funzione $\alpha(X_1, \dots, X_q)$ è costante.

1.3.3. La forma di Maurer-Cartan.

Teorema 1.3.3. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} . L'applicazione

$$\text{eq: 12321} \quad (1.3.1) \quad \mathbf{G} \times \mathfrak{g} \ni (a, X) \longrightarrow aX \in T\mathbf{G}$$

è un diffeomorfismo. In particolare, i gruppi di Lie sono varietà differenziabili parallelizzabili ed $\mathfrak{X}(\mathbf{G})$ è il $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{G})$ -modulo generato da $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione inversa della (1.3.1) è la

$$T\mathbf{G} \ni v \rightarrow (\pi(v), \pi(v)^{-1} \cdot v) \in \mathbf{G} \times \mathfrak{g},$$

ove $\pi : T\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ è la proiezione canonica del fibrato tangente sulla base. \square

Proposizione 1.3.4. L'applicazione

$$\text{eq: 12322} \quad (1.3.2) \quad \omega_{\mathbf{G}} \ni v \longrightarrow \pi(v)^{-1} \cdot v \in \mathfrak{g}$$

è una forma differenziale invariante a sinistra a valori in \mathfrak{g} . \square

Osserviamo che

$$\text{eq: 12323} \quad (1.3.3) \quad \omega_{\mathbf{G}}(X_a^*) = X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Definizione 1.3.5. La $\omega_{\mathbf{G}}$ si dice la *forma di Maurer-Cartan* del gruppo \mathbf{G} .

Proposizione 1.3.6. La forma di Maurer-Cartan $\omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(\mathbf{G}, \mathfrak{g})$ di Lie \mathbf{G} è invariante a sinistra e soddisfa l'**equazione di Maurer-Cartan**

$$(1.3.4) \quad d\omega_{\mathbf{G}} + \frac{1}{2} [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}] = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $X, Y \in \mathfrak{g}$. Allora :

$$\begin{aligned} d\omega_{\mathbf{G}}(X^*, Y^*) &= X^* \omega_{\mathbf{G}}(Y^*) - Y^* \omega_{\mathbf{G}}(X^*) - \omega_{\mathbf{G}}([X^*, Y^*]) \\ &= -[\omega_{\mathbf{G}}(X^*), \omega_{\mathbf{G}}(Y^*)] \\ &= -\frac{1}{2} [\omega_{\mathbf{G}} \wedge \omega_{\mathbf{G}}](X^*, Y^*). \end{aligned}$$

Poiché $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$ genera $\mathfrak{X}(M)$ come $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{G})$ -modulo, otteniamo la tesi. \square

Lemma 1.3.7. (1) *La forma di Maurer-Cartan $\omega_{\mathbf{G}}$ di \mathbf{G} soddisfa:*

$$(1.3.5) \quad R_a^* \omega_{\mathbf{G}} = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega_{\mathbf{G}}.$$

(2) *Ogni forma differenziale $\eta \in \Omega^1(\mathbf{G}, V)$, invariante a sinistra su \mathbf{G} è della forma $\eta = T \circ \omega_{\mathbf{G}}$, per un'applicazione lineare $T : \mathfrak{g} \rightarrow V$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{g}$, abbiamo

$$R_{a*}(X^*) = R_{a*} \circ L_{a^{-1}*}(X^*) = \text{Ad}(a^{-1})_*(X^*) = (\text{Ad}(a^{-1})(X))^*.$$

Ciò significa che, per $X \in \mathfrak{g}$, il campo $R_{a*}(X^*)$ è ancora invariante a sinistra (perché le traslazioni a sinistra commutano con le traslazioni a destra) e coincide con il campo di vettori invariante a sinistra corrispondente all'elemento $\text{Ad}(a^{-1})(X) \in \mathfrak{g}$.

Se $\eta \in \Omega^1(\mathbf{G}, V)$ è invariante a sinistra, abbiamo $\eta = T \circ \omega_{\mathbf{G}}$ con

$$T = \eta(e) : \mathfrak{g} = T_e \mathbf{G} \rightarrow V. \quad \square$$

es1217

Esempio 1.3.8. Consideriamo $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ come un aperto dello spazio Euclideo \mathbb{R}^{n^2} ed identifichiamo la sua algebra di Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ con lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$. Utilizzando la (1.3.1), rappresentiamo il suo spazio tangente $T\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ come il prodotto cartesiano $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. In particolare, $\mathfrak{X}(\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}))$ si identifica allo spazio $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$. Poiché la traslazione a sinistra R_a è la restrizione a $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ della moltiplicazione a sinistra per la matrice a , che è un'applicazione lineare, il suo differenziale coincide in ogni punto con la moltiplicazione a sinistra per a . In particolare, i campi di vettori invarianti a sinistra corrispondono alle applicazioni

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \ni x \longrightarrow xA \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

al variare di A in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. In questo sistema di coordinate, la forma di Maurer-Cartan di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ è la

$$\theta_{\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})} = x^{-1} dx.$$

In modo analogo, i campi di vettori invarianti a destra su $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ si scrivono nella forma

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \ni x \longrightarrow Ax \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

al variare di A in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

La forma che associa ad ogni vettore v tangente in x il valore A in e del campo di vettori invariante a destra $*A$ con $*A_x = v$ è dato da

$$dx \circ x^{-1} = \text{ad}(x) \circ \theta_{\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})}.$$

La discussione nell'Esempio 1.3.8 ^{es1217} giustifica la

Notazione 1.3.9. Se $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{G})$ è un arco differenziabile nel gruppo di Lie \mathbf{G} , poniamo

$$\alpha^{-1}(t)\dot{\alpha}(t) = \theta_{\mathbf{G}}(\dot{\alpha}(t)), \quad \dot{\alpha}(t)\alpha^{-1}(t) = \text{ad}(\alpha(t))\theta_{\mathbf{G}}(\dot{\alpha}(t)).$$

Concludiamo questo paragrafo con una costruzione che generalizza l'esponenziale.

prop: fp. 1.1

Proposizione 1.3.10. Siano \mathbf{G} un gruppo di Lie, con algebra di Lie \mathfrak{g} .

Sia I un connesso di \mathbb{R} , $t_0 \in I$, $g_0 \in \mathbf{G}$ ed $X \in \mathcal{C}^k(I, \mathfrak{g})$, con $k \geq 0$. Allora sono univocamente determinati $a, b \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbf{G})$ tali che

eq: gl. 1.88

$$(1.3.6) \quad \begin{cases} a(t_0) = g_0, \\ a^{-1}(t)\dot{a}(t) = X(t) \quad \forall t \in I, \end{cases}$$

eq: gl. 1.8p

$$(1.3.7) \quad \begin{cases} b(t_0) = g_0, \\ \dot{b}(t)b^{-1}(t) = X(t) \quad \forall t \in I. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato è conseguenza del fatto che le traslazioni a sinistra agiscono sulle soluzioni a valori in \mathbf{G} dell'equazione $\alpha^{-1}(t)\dot{\alpha}(t) = X(t)$, ed analogamente le traslazioni a destra agiscono sulle soluzioni a valori in \mathbf{G} dell'equazione $\dot{\beta}(t)\beta^{-1}(t) = X(t)$, e possiamo quindi ripetere l'argomento utilizzato nella dimostrazione della Proposizione 1.1.6. \square

1.4. Gruppi di Lie di trasformazioni

Definizione 1.4.1. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie e P una varietà differenziabile. Chiamiamo *azione differenziabile a destra* di \mathbf{G} su P un'applicazione differenziabile:

FRMAA

$$(1.4.1) \quad P \times \mathbf{G} \ni (\sigma, a) \rightarrow \sigma \cdot a \in P$$

tale che, per ogni $a \in \mathbf{G}$ l'applicazione (*traslazione a destra*):

FRMA

$$(1.4.2) \quad R_a : P \ni \sigma \rightarrow \sigma \cdot a \in P$$

sia un diffeomorfismo di P in sé e

FRMB

$$(1.4.3) \quad (\sigma \cdot a_1) \cdot a_2 = \sigma \cdot (a_1 a_2) \quad \forall \sigma \in P, \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbf{G}.$$

L'azione di \mathbf{G} su P si dice *effettiva* se

$$(\sigma \cdot a = \sigma, \forall \sigma \in P) \implies a = e.$$

L'azione di \mathbf{G} su P si dice *libera* se

$$(\exists \sigma \in P \text{ t.c. } \sigma \cdot a = \sigma) \implies a = e.$$

L'azione di \mathbf{G} su P si dice *transitiva* se

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in P \quad \exists a \in \mathbf{G} \text{ t.c. } \sigma_1 \cdot a = \sigma_2.$$

1.5. Fibrati principali

Definizione 1.5.1. Siano $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato differenziabile e \mathbf{G} un gruppo di Lie. Un'azione differenziabile a destra di \mathbf{G} su ξ è un'azione differenziabile a destra di \mathbf{G} su P che operi sulle fibre di ξ .

Richiediamo cioè che

eq: 1632

$$(1.5.1) \quad P_p a = P_p, \quad \forall p \in M, \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

In particolare, per ogni $a \in \mathbf{G}$, la traslazione a destra R_a su P definisce un'equivalenza di ξ in sé.

Definizione 1.5.2. Un *fibrato principale* è il dato di un fibrato differenziabile ξ , di un gruppo di Lie \mathbf{G} , che si dirà il suo *gruppo strutturale*, e di un'azione differenziabile a destra di \mathbf{G} su ξ che sia libera e transitiva sulle fibre di ξ .

Richiediamo cioè che valgano la ^{eq:1632}(1.5.1) e che inoltre

$$\text{eq:1633} \quad (1.5.2) \quad \sigma \in P, \quad a, b \in \mathbf{G}, \quad \sigma \cdot a = \sigma \cdot b \implies a = b,$$

$$\text{eq:1633} \quad (1.5.3) \quad \forall p \in M, \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in P_p, \quad \exists a \in \mathbf{G} \text{ tale che } \sigma_2 = \sigma_1 \cdot a.$$

L'unico elemento $a \in \mathbf{G}$ per cui vale la ^{eq:1633}(1.5.3) si indica con $\sigma_1^{-1}\sigma_2$.

Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale, con gruppo strutturale \mathbf{G} .

Definizione 1.5.3. Un suo *atlante di trivializzazione* $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ è il dato di un ricoprimento aperto $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ di M e, per ogni indice $\alpha \in I$, di una sezione $\sigma_\alpha \in \Gamma_\xi(U_\alpha, P)$.

Alla coppia $(U_\alpha, \sigma_\alpha)$ corrisponde la *trivializzazione locale*

$$\text{eq:14.3.6} \quad (1.5.4) \quad \Xi_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \ni (p, a) \longrightarrow \sigma_\alpha(p) \cdot a \in P|_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha).$$

Per ogni coppia di indici $\alpha, \beta \in I$ con $U_{\alpha, \beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ definiamo

$$\text{eq:14.3.7} \quad (1.5.5) \quad \psi_{\alpha, \beta} : U_{\alpha, \beta} \ni p \longrightarrow \sigma_\alpha^{-1}(p)\sigma_\beta(p) \in \mathbf{G}.$$

Le $\{\psi_{\alpha, \beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha, \beta}, \mathbf{G}) \mid U_{\alpha, \beta} \neq \emptyset\}$ si dicono le *funzioni di transizione* dell'atlante \mathcal{A} .

Proposizione 1.5.4. Siano ξ un fibrato principale ed $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ un suo atlante di trivializzazione. Le sue funzioni di transizione $\{\psi_{\alpha, \beta}\}$ soddisfano le condizioni

$$\text{eq:14.3.8} \quad (1.5.6) \quad \psi_{\alpha, \alpha}(p) = e, \quad \forall p \in U_{\alpha, \alpha} = U_\alpha,$$

$$\text{eq:14.3.9} \quad (1.5.7) \quad \psi_{\alpha, \beta}\psi_{\beta, \gamma} = \psi_{\alpha, \gamma} \quad \text{su } U_{\alpha, \beta, \gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma. \quad \square$$

Teorema 1.5.5. Siano M una varietà differenziabile, \mathbf{G} un gruppo di Lie, $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di M . Sia data una famiglia

$$\{\psi_{\alpha, \beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha, \beta}, \mathbf{G}) \mid U_{\alpha, \beta} \neq \emptyset\}$$

di funzioni che soddisfino le ^{eq:14.3.8}(1.5.6), ^{eq:14.3.9}(1.5.7). Allora esiste un fibrato principale ξ su M , con gruppo strutturale \mathbf{G} , per cui le $\psi_{\alpha, \beta}$ siano le funzioni di transizione di un atlante di trivializzazione corrispondente al ricoprimento $\{U_\alpha\}$. Tale fibrato è unico, a meno di diffeomorfismi che commutino con l'azione di \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. Definiamo

$$P^\# = \bigsqcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times \mathbf{G}.$$

Per le ^{eq:14.3.8}(1.5.6) ed ^{eq:14.3.9}(1.5.7), la

$$U_\alpha \times \mathbf{G} \ni (p, a) \sim (q, b) \in U_\beta \times \mathbf{G} \iff (p = q, \quad b = a\psi_{\alpha, \beta}(p))$$

è una relazione d'equivalenza su P^\sharp . Poniamo $P = P^\sharp / \sim$. Indichiamo con $\iota_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \rightarrow P^\sharp$ le applicazioni naturali. Detta $\varpi : P^\sharp \rightarrow P$ la proiezione nel quoziente, otteniamo per ogni α applicazioni

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \xrightarrow{\iota_\alpha} \iota_\alpha(U_\alpha \times \mathbf{G}) \subset P^\sharp \xrightarrow{\varpi} \varpi \circ \iota(U_\alpha \times \mathbf{G}) = P|_{U_\alpha},$$

che sono omeomorfismi su aperti di P . Risulta allora definita su P un'unica struttura di varietà differenziabile che renda le Ψ_α diffeomorfismi.

Definiamo $\pi : P \rightarrow M$ in modo che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbf{G} & \xrightarrow{\Psi_\alpha} & P \\ \text{pr}_{U_\alpha} \downarrow & & \downarrow \pi \\ U_\alpha & \xrightarrow[\subset]{} & M \end{array}$$

sia commutativo. Otteniamo così un fibrato differenziabile $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$, su cui definiamo un'azione a destra di \mathbf{G} che renda commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbf{G} \times \mathbf{G} & \xrightarrow{\Psi_\alpha \times \text{id}_{\mathbf{G}}} & P \times \mathbf{G} \\ (p,a,b) \rightarrow (p,ab) \downarrow & & \downarrow (p,a) \rightarrow p \cdot a \\ U_\alpha \times \mathbf{G} & \xrightarrow[\Psi_\alpha]{} & P. \end{array}$$

Abbiamo cioè

$$\begin{aligned} \pi(\Psi_\alpha(p, a)) &= p, \\ \Psi_\alpha(p, a) \cdot b &= \Psi_\alpha(p, ab). \end{aligned}$$

In questo modo $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ acquista una struttura di fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} .

Per ogni α ,

$$\sigma_\alpha : U_\alpha \ni p \longrightarrow \Psi_\alpha(p, e) \in P$$

è una sezione differenziabile di P su U_α ed $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$ è un suo atlante di trivializzazione di ξ , con funzioni di transizione $\{\psi_{\alpha,\beta}\}$.

Se $\xi' = (P' \xrightarrow{\pi'} M)$ è un altro fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} , che ammette un atlante di trivializzazione $\mathcal{A}' = \{(U_\alpha, \sigma'_\alpha) \mid \alpha \in I\}$, con $\sigma'^{-1}_\alpha \sigma'_\beta = \psi_{\alpha,\beta}$, definiamo un'equivalenza $f : P \rightarrow P'$ ponendo

$$f(\Psi_\alpha(p, a)) = \sigma'_\alpha(p) \cdot a, \quad \forall \alpha \in I, \quad p \in U_\alpha, \quad a \in \mathbf{G}.$$

La condizione che le $\{\psi_{\alpha,\beta}\}$ siano le funzioni di transizione di \mathcal{A}' ci dice che la f è ben definita. \square

1.6. Morfismi di fibrati principali

Siano $\xi_i = (P_i \xrightarrow{\pi_i} M_i)$, $i = 1, 2$, due fibrati principali, con gruppi strutturali \mathbf{G}_i .

Definizione 1.6.1. Un *morfismo di fibrati principali* di ξ_1 in ξ_2 è il dato di un morfismo di fibrati differenziabili

$$\text{eq: 14.4a.1} \quad (1.6.1) \quad \begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{F} & P_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2, \end{array}$$

e di un omomorfismo $\phi : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{G}_2$ di gruppi di Lie che renda commutativo il diagramma

$$\text{eq: 14.4a.2} \quad (1.6.2) \quad \begin{array}{ccc} P_1 \times \mathbf{G}_1 & \xrightarrow{F \times \phi} & P_2 \times \mathbf{G}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_1 & \xrightarrow{F} & P_2, \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono definite dalle azioni dei gruppi.

Diciamo che $(f, F, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un'*immersione* se F è un'immersione. In questo caso ϕ è un monomorfismo di gruppi.

Se F è un'inclusione, diciamo che $(f, F, \phi) : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ è un'*inclusione* di fibrati principali. In questo caso, se $M_1 = M_2$ ed $f = \text{Id}_M$, diciamo che ξ_1 è un *sottofibrato principale* di ξ_2 , o che è stato *ottenuto da* ξ_2 mediante una *riduzione del gruppo strutturale*.

Abbiamo la

Proposizione 1.6.2. Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} , e \mathbf{G}' un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} . Condizione necessaria e sufficiente affinché ξ ammetta una riduzione del gruppo strutturale a \mathbf{G}' è che ammetta un atlante di trivializzazione con funzioni di transizione a valori in \mathbf{G}' .

DIMOSTRAZIONE. La condizione è ovviamente necessaria. Dimostriamone la sufficienza.

Fissato un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ di ξ con funzioni di transizione $\psi_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathbf{G}')$, sia

$$P' = \bigcup_{\alpha \in I} \{\sigma_\alpha(p) \cdot a \mid p \in U_\alpha, a \in \mathbf{G}'\}.$$

Con la struttura differenziabile per cui le

$$\Psi'_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G}' \ni (p, a) \longrightarrow \sigma(p) \cdot a \in P' \cap P_{U_\alpha}$$

siano diffeomorfismi, P' è una sottovarietà differenziabile di P . La restrizione $\pi' = \pi|_{P'}$ definisce un sottofibrato differenziabile $\xi' = (P' \xrightarrow{\pi'} M)$, che è principale con gruppo strutturale \mathbf{G}' , ed è una riduzione di ξ a \mathbf{G}' . \square

1.7. Spazi omogenei

Se \mathbf{G} è un gruppo ed \mathbf{H} un suo sottogruppo, indichiamo con \mathbf{G}/\mathbf{H} l'insieme delle sue classi laterali sinistre, definito dalla relazione d'equivalenza

$$a \sim b \iff a\mathbf{H} = b\mathbf{H} \iff a^{-1}b \in \mathbf{H}.$$

Il gruppo \mathbf{G} agisce su \mathbf{G}/\mathbf{H} mediante le *traslazioni a sinistra*

$$\ell_a : \mathbf{G}/\mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}, \quad \text{con} \quad \ell_a(\pi(b)) = \pi(ab), \quad \forall a, b \in \mathbf{G}.$$

Se \mathbf{G} è un gruppo topologico, consideriamo su \mathbf{G}/\mathbf{H} la topologia quoziente. Le traslazioni a sinistra sono allora omeomorfismi di \mathbf{G}/\mathbf{H} in sé.

Proposizione 1.7.1. *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico ed \mathbf{H} un suo sottogruppo. La proiezione nel quoziente $\pi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$ è un'applicazione aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se U è un aperto di \mathbf{G} , allora

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in U} g\mathbf{H} = \bigcup_{h \in \mathbf{H}} Uh$$

è aperto perché unione di aperti. □

thm: 14.4.0

Teorema 1.7.2. *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico ed \mathbf{H} un suo sottogruppo.*

Il quoziente \mathbf{G}/\mathbf{H} è uno spazio regolare se, e soltanto se, \mathbf{H} è un sottogruppo chiuso di \mathbf{G} .

In particolare, \mathbf{G} è uno spazio regolare se e soltanto se è uno spazio³ T_1 e ciò equivale al fatto che $\{e\}$ sia un chiuso di \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. Se \mathbf{H} è un sottogruppo chiuso del gruppo topologico \mathbf{G} , allora tutte le sue classi laterali sinistre sono chiusi di \mathbf{G} e quindi \mathbf{G}/\mathbf{H} è uno spazio topologico T_1 . Viceversa, se \mathbf{G}/\mathbf{H} è T_1 , allora $\mathbf{H} = \pi^{-1}(\pi(e))$ è chiuso.

Supponiamo dunque che \mathbf{H} sia chiuso. Siano F un chiuso di \mathbf{G}/\mathbf{H} e g un elemento di \mathbf{G} con $\pi(g) \notin F$. Poiché \mathbf{G} è un gruppo topologico, l'applicazione

$$\lambda : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \ni (a, b) \longrightarrow a^{-1}b \in \mathbf{G}$$

è continua. Il chiuso $\pi^{-1}(F)$ di \mathbf{G} non contiene $g = \lambda(e, g)$. Possiamo perciò trovare intorno aperti U_e di e ed U_g di g in \mathbf{G} tali che

$$g_1^{-1}g_2 \notin \pi^{-1}(F) \quad \text{per ogni} \quad g_1 \in U_e, g_2 \in U_g.$$

Consideriamo gli insiemi:

$$\tilde{U}_g = \pi^{-1}(\pi(U_g)) \text{ e } \tilde{V} = \bigcup \{R_a(U_e) \mid a \in \pi^{-1}(F)\} = \bigcup \{L_a(\pi^{-1}(F)) \mid a \in U_e\}.$$

Poiché la proiezione π è aperta, il primo è un aperto saturo che contiene g e il secondo un aperto saturo che contiene $\pi^{-1}(F)$. Dimostriamo che $\tilde{U}_g \cap \tilde{V} = \emptyset$. Se così non fosse, potremmo trovare $g_1 \in U_g, g_2 \in \mathbf{H}, g_3 \in U_e, g_4 \in \pi^{-1}(F)$ tali che $g_1g_2 = g_3g_4$.

³Uno spazio topologico X soddisfa l'assioma di separazione T_1 se tutti i suoi sottoinsiemi finiti sono chiusi; soddisfa l'assioma di separazione T_3 se dati un punto a di X ed un chiuso A di X che non contenga a , esistono aperti disgiunti U e V con $a \in U$ ed $A \subset V$; è regolare se soddisfa entrambi gli assiomi T_1 e T_3 .

Da questa relazione troviamo $g_3^{-1}g_1 = g_4g_2^{-1} \in \pi^{-1}(F)$, che contraddice la scelta di U_e ed U_g .

Ciò dimostra che \mathbf{G}/\mathbf{H} soddisfa l'assioma T_3 e quindi è regolare. \square

Consideriamo ora la situazione in cui \mathbf{G} sia un gruppo di Lie.

Teorema 1.7.3. *Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie ed \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso. Vi è allora sul quoziente $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ un'unica struttura di varietà differenziabile per cui $\xi = (\mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M)$, ove π è la proiezione sul quoziente, sia un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{H} .*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema ^{thm:14.4.0} 1.7.2, M è uno spazio di Hausdorff e la proiezione $\pi : \mathbf{G} \rightarrow M$ ^{thm:1612} è aperta.

Per il Teorema ^{thm:1612} 1.2.2, \mathbf{H} è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} . Siano \mathfrak{g} l'algebra di Lie di \mathbf{G} ed \mathfrak{h} la sottoalgebra di \mathfrak{g} corrispondente ad \mathbf{H} .

Scegliamo un complemento lineare \mathfrak{m} di \mathfrak{h} in \mathfrak{g} , di modo che

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}.$$

L'applicazione

$$f : \mathfrak{m} \times \mathbf{H} \ni (X, a) \longrightarrow \exp(X) \cdot a \in \mathbf{G}$$

è differenziabile. Lo spazio tangente di $\mathfrak{m} \times \mathbf{H}$ in $(0, e_{\mathbf{H}})$ è $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ e $df(0, e_{\mathbf{H}})$ è l'identità su \mathfrak{g} . Per il teorema delle funzioni implicite esistono allora intorno aperti N_0 di 0 in \mathfrak{m} , V di $e_{\mathbf{H}}$ in \mathbf{H} , ed U di $e_{\mathbf{G}}$ in \mathbf{G} tali che

$$N_0 \times V \ni (X, h) \longrightarrow f(X, h) = \exp(X)h \in U$$

sia un diffeomorfismo. In particolare,

$$V = U \cap \mathbf{H}, \quad \exp(N_0) \cap \mathbf{H} = f(N_0 \times \{e_{\mathbf{H}}\}) \cap \mathbf{H} = \{e_{\mathbf{G}}\}.$$

La composizione di π con la restrizione ad N_0 dell'esponenziale definisce quindi un omeomorfismo di N_0 su un aperto W di M , ed abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} N_0 \times V & \xrightarrow{f} & U \\ \text{pr}_m \downarrow & & \downarrow \pi \\ N_0 & \xrightarrow{\eta} & W. \end{array}$$

Definiamo un atlante su $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ ponendo

$$\mathcal{A} = \{(V_a = \ell_a(V_e), y_a = \eta^{-1} \circ \ell_{a^{-1}}) \mid a \in \mathbf{G}\},$$

dove abbiamo indicato con ℓ_a la traslazione a sinistra su M definita dall'elemento a :

$$\ell_a : M \ni \pi(b) \longrightarrow \pi(L_a(b)) = \pi(ab) \in M, \quad \forall a, b \in \mathbf{G},$$

per cui abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xrightarrow{L_a} & \mathbf{G} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\ell_a} & M. \end{array}$$

Le funzioni di transizione sono

$$\begin{aligned}
 y_a \circ y_b^{-1} &= \eta^{-1} \circ \ell_{a^{-1}} \circ \ell_b \circ \eta : y_b(V_a \cap V_b) \rightarrow y_b(V_a \cap V_b) \\
 &= \eta^{-1} \circ \ell_{a^{-1}b} \circ \pi \circ \exp|_W \\
 &= \eta^{-1} \circ \pi \circ L_{a^{-1}b} \circ \exp|_W \\
 &= \text{pr}_m \circ F^{-1} \circ L_{a^{-1}b} \circ \exp|_W
 \end{aligned}$$

e quindi l'atlante è differenziabile.

L'azione a destra di \mathbf{H} su \mathbf{G} , restrizione del prodotto su \mathbf{G} , è differenziabile e definisce su ξ una struttura di fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{H} . \square

Esempio 1.7.4. L'applicazione $\pi : \mathbf{SO}(n+1) \ni a \rightarrow ae_0 \in S^n$, ove e_0 è un vettore di lunghezza unitaria in \mathbb{R}^{n+1} , definisce un fibrato principale con base S^n , spazio totale $\mathbf{SO}(n+1)$ e gruppo strutturale $\mathbf{SO}(n)$.

Esempio 1.7.5. Sia n un intero positivo. Il gruppo $\mathbf{T}^+(n, \mathbb{R})$ delle matrici diagonali superiori con determinante diverso da zero è un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. Lo spazio omogeneo $F = \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})/\mathbf{T}^+(n, \mathbb{R})$ è una varietà differenziabile compatta di dimensione $n(n-1)/2$, che si dice *varietà bandiera reale completa*.

1.8. Il fibrato dei sistemi di riferimento

Sia $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ un fibrato vettoriale di rango n su una varietà differenziabile M di dimensione m . Ad esso associamo in modo canonico un fibrato principale $F(\eta)$, con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Il suo spazio totale è

eq: 14.7.0

$$(1.8.1) \quad F(\eta) = \sqcup_{p \in M} F_p(\eta), \quad \text{con} \quad F_p(\eta) = \{\text{isomorfismi lineari } \sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow E_p\}.$$

e la proiezione $\pi : F(\eta) \rightarrow M$ associa a $\sigma \in F_p(\eta)$ il punto p . Una trivializzazione locale di $F(\eta)$ è descritta dal dato di n sezioni $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(U, E)$, definite su un aperto U di M , per cui $s_1(p), \dots, s_n(p)$ siano linearmente indipendenti in E_p per ogni $p \in U$. Ad esse associamo la sezione

$$\sigma(p) : \mathbb{R}^n \ni (k^1, \dots, k^n) \rightarrow \sum_{i=1}^n k^i s_i(p) \in E_p.$$

Questo definisce su $F(\eta)$ una struttura di fibrato principale con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Definizione 1.8.1. Il fibrato principale $F(\eta)$, con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, associato al fibrato vettoriale $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ mediante la (1.8.1) si dice il *fibrato dei sistemi di riferimento* di η .

Esso è caratterizzato dal fatto che le sue sezioni locali definiscono trivializzazioni locali di η . Viceversa, vale la

prop: 14.7.2

Proposizione 1.8.2. Ad ogni fibrato principale $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$, con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, possiamo associare un fibrato vettoriale $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ di rango n , unico a meno di isomorfismi, di cui ξ sia il fibrato dei sistemi di riferimento.

DIMOSTRAZIONE. Se $\sigma_1, \sigma_2 \in P$ stanno sulla stessa fibra di ξ , indichiamo con $\sigma_1^{-1}\sigma_2$ l'unico elemento $a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ tale che $\sigma_2 = \sigma_1 \cdot a$. Fissiamo un atlante di trivializzazione $\{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ di ξ . Sull'unione disgiunta

$$\mathbb{E} = \bigsqcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \times \mathbb{R}^n)$$

definiamo la relazione di equivalenza

$$\begin{aligned} U_\alpha \times \mathbb{R}^n \ni (p_\alpha, v_\alpha) &\sim (p_\beta, v_\beta) \in U_\beta \times \mathbb{R}^n \\ \iff (p_\alpha = p_\beta, (\sigma_\alpha(p_\alpha))^{-1}\sigma_\beta(p_\beta)v_\beta &= v_\alpha). \end{aligned}$$

Il quoziente $E = \mathbb{E}/\sim$ è lo spazio totale di un fibrato vettoriale differenziabile su M , di rango n , di cui ξ è il fibrato dei sistemi di riferimento. \square

Abbiamo quindi:

thm: 14.5.1

Teorema 1.8.3. La $\eta \longleftrightarrow F(\eta)$ è una corrispondenza biunivoca tra la categoria dei fibrati vettoriali di rango n su M , modulo equivalenza, e quella dei fibrati principali su M con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, modulo equivalenza.

Definizione 1.8.4. Il fibrato dei sistemi di riferimento del fibrato tangente di una varietà differenziabile M si indica con $F(M)$ e si dice il *fibrato dei sistemi di riferimento su M* . Indichiamo con $F(M)$ il suo spazio totale.

Abbiamo

Proposizione 1.8.5. Ogni diffeomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_2$ di varietà differenziabili si rialza ad un unico isomorfismo di fibrati principali che renda commutativo il diagramma

eq: 14.5.2

(1.8.2)

$$\begin{array}{ccc} F(M_1) & \xrightarrow{\tilde{f}} & F(M_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2. \end{array}$$

1.9. Riduzione del gruppo strutturale e G-strutture

Il Teorema [1.8.3](#) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra fibrati vettoriali e fibrati principali con gruppo strutturale $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Osserviamo che, se avessimo ristretto la costruzione della [Proposizione 1.8.2](#) ad un sottofibrato principale ξ' di ξ , con gruppo strutturale $\mathbf{G} < \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, avremmo ottenuto un fibrato vettoriale canonicamente isomorfo a quello associato a ξ .

Definizione 1.9.1. Siano $\eta = (E \xrightarrow{\omega} M)$ un fibrato vettoriale reale di rango n e \mathbf{G} un sottogruppo di $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione di η è un suo atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ tale che

eq: dn7.3a

$$(1.9.1) \quad g_{\alpha\beta}(p) = \sigma_\alpha^{-1}(p) \circ \sigma_\beta(p) \in \mathbf{G} \quad \text{per } p \in U_\alpha \cap U_\beta, \quad \forall \alpha, \beta \in I.$$

Due \mathbf{G} -atlanti di trivializzazione \mathcal{A} ed \mathcal{A}' , sono *equivalenti* se $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ è ancora un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione.

L'unione di tutti i \mathbf{G} -atlanti di trivializzazione equivalenti ad un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione assegnato è un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione massimale.

Una \mathbf{G} -struttura, o *riduzione a \mathbf{G} del gruppo strutturale* è il dato di una classe di equivalenza di \mathbf{G} -atlanti di trivializzazione di η , ovvero di un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione massimale.

Una carta locale di trivializzazione (U, σ_U) di η è *compatibile* con la \mathbf{G} -struttura se appartiene al suo \mathbf{G} -atlante di trivializzazione massimale.

Vale la

Proposizione 1.9.2. *Siano \mathbf{G} un sottogruppo di Lie del gruppo lineare $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ ed $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ è un fibrato vettoriale di rango n , dotato di una \mathbf{G} -struttura. Esiste, unica a meno di isomorfismi, una riduzione $F_{\mathbf{G}}(\eta) = (F(\eta) \xrightarrow{\pi} M)$, con gruppo strutturale \mathbf{G} , di $F(\eta)$, tale che ogni sezione differenziabile locale di $F(\eta)$ definisca una trivializzazione locale di η compatibile con la \mathbf{G} -struttura.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un \mathbf{G} -atlante di trivializzazione compatibile $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ e definiamo

$$F_{\mathbf{G}}(\eta) = \bigcup_{\alpha \in I} \{\sigma_\alpha(p) \cdot a \mid p \in U_\alpha, a \in \mathbf{G}\}.$$

Si verifica facilmente che $F_{\mathbf{G}}(\eta)$ è lo spazio totale di una \mathbf{G} -riduzione di $F(\eta)$. \square

Definizione 1.9.3. Il \mathbf{G} -fibrato principale $F_{\mathbf{G}}(\eta) = (F(\eta) \rightarrow M)$ si dice il fibrato dei \mathbf{G} -sistemi di riferimento di η .

Siano $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ ed $\eta' = (E' \xrightarrow{\varpi'} M')$ due fibrati vettoriali di rango n . Un isomorfismo di fibrati vettoriali

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\ \varpi \downarrow & & \downarrow \varpi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

si rialza ad un isomorfismo dei corrispondenti fibrati dei sistemi di riferimento

$$\begin{array}{ccc} F(\eta) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & F(\eta') \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M', \end{array} \quad \text{con } \tilde{f}_*(\sigma) = \tilde{f}_* \circ \sigma \in F_{\pi(\sigma)}(\mathbb{R}^n, E'_{\pi(\sigma)}).$$

Definizione 1.9.4. Siano η, η' due fibrati vettoriali dotati di una \mathbf{G} -struttura. Un isomorfismo (f, \tilde{f}) di η in η' è un \mathbf{G} -isomorfismo se

eq: 14.8.a

$$(1.9.2) \quad \tilde{f}_*(F_{\mathbf{G}}(\eta)) = F_{\mathbf{G}}(\eta').$$

Se i due fibrati hanno la stessa base ed f è l'identità, chiamiamo il corrispondente \mathbf{G} -isomorfismo una \mathbf{G} -equivalenza.

Proposizione 1.9.5. Sia $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ un fibrato vettoriale di rango n . A meno di equivalenza, le \mathbf{G} -strutture su η sono in corrispondenza biunivoca con le \mathbf{G} -riduzioni del fibrato $F(\eta)$ dei suoi sistemi di riferimento. \square

Sia \mathbf{G} un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$. Se $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ è un ricoprimento aperto di M , indichiamo con $\mathfrak{C}^q(\mathcal{U}, \mathbf{G})$ l'insieme delle q -catene di applicazioni di classe \mathcal{C}^∞ del ricoprimento \mathcal{U} , a valori in \mathbf{G} :

$$\text{eq: dn7.4} \quad (1.9.3) \quad \mathfrak{C}^q(\mathcal{U}, \mathbf{G}) = \{(g_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q} \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q}, \mathbf{G}))\}.$$

Indichiamo poi con

$$\text{eq: dn7.5} \quad (1.9.4) \quad \mathfrak{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbf{G}) = \{(g_{\alpha, \beta} \in \mathfrak{C}^1(\mathcal{U}, \mathbf{G})) \mid g_{\alpha, \beta} g_{\beta, \gamma} = g_{\alpha, \gamma} \text{ su } U_{\alpha, \beta, \gamma}, \forall \alpha, \beta, \gamma\},$$

e scriviamo

$$\text{eq: dn7.6} \quad (1.9.5) \quad \delta(g_\alpha) = (g_\alpha \circ g_\beta^{-1}) \in \mathfrak{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbf{G}), \quad \forall (g_\alpha) \in \mathfrak{C}^0(\mathcal{U}, \mathbf{G}).$$

Proposizione 1.9.6. Siano $(g_{\alpha, \beta}), (g'_{\alpha, \beta}) \in \mathfrak{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbf{G})$ funzioni di transizione delle trivializzazioni di due fibrati vettoriali di rango n

$$\xi = (E \xrightarrow{\varpi} M) \quad e \quad \xi' = (E' \xrightarrow{\varpi'} M)$$

sulla stessa base M , entrambi con gruppo strutturale \mathbf{G} . Condizione necessaria e sufficiente affinché i due fibrati siano \mathbf{G} -equivalenti è che esista una $(h_\alpha) \in \mathfrak{C}^0(\mathcal{U}, \mathbf{G})$ tale che

$$\text{eq: dn7.7} \quad (1.9.6) \quad g'_{\alpha, \beta} = h_\alpha g_{\alpha, \beta} h_\beta^{-1} \quad \text{su } U_{\alpha, \beta}, \quad \forall \alpha, \beta.$$

In particolare, il fibrato ξ è \mathbf{G} -equivalente al fibrato banale se, e soltanto se, $(g_{\alpha, \beta}) = \delta(h_\alpha)$ per qualche $(h_\alpha) \in \mathfrak{C}^0(\mathcal{U}, \mathbf{G})$. \square

Esempio 1.9.7. Ogni fibrato vettoriale di rango n ammette una $\mathbf{O}(n)$ -struttura. Sia infatti $\eta = (E \xrightarrow{\varpi} M)$ un fibrato vettoriale di rango n ed $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ un suo atlante di trivializzazione, con $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ ricoprimento aperto localmente finito di M . Sia $\{\chi_\alpha\}$ una partizione differenziabile dell'unità subordinata ad \mathcal{U} . Possiamo allora definire un prodotto scalare sulle fibre di E ponendo

$$g(v_1, v_2) = \sum_{U_\alpha \ni p} \chi_\alpha(p) (\sigma_\alpha^{-1}(v_1) \mid \sigma_\alpha^{-1}(v_2)), \quad \forall p \in M, \quad \forall v_1, v_2 \in E_p.$$

La $\mathbf{O}(n)$ struttura su η associata alla metrica g si può ottenere dall'atlante \mathcal{A} applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alle basi $\sigma_\alpha(p)(e_1), \dots, \sigma_\alpha(p)(e_n)$ di E_p rispetto al prodotto scalare $g_p = g|_{E_p}$.

1.10. G-strutture su una varietà differenziabile

Definizione 1.10.1. Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Se \mathbf{G} è un sottogruppo di Lie del gruppo lineare $\mathbf{GL}(m, \mathbf{R})$ chiamiamo \mathbf{G} -struttura su M una \mathbf{G} -struttura sul suo fibrato tangente.

Osservazione 1.10.2. Il concetto di \mathbf{G} -struttura ci permette di considerare in modo concettualmente unitario diverse geometrie su M . Ad esempio:

- un'orientazione su M è equivalente ad una $\mathbf{GL}^+(m, \mathbb{R})$ -struttura;
- una misura di Radon di classe \mathcal{C}^∞ equivale ad una $\mathbf{SL}(m, \mathbb{R})$ -struttura;
- una metrica Riemanniana corrisponde a una $\mathbf{O}(m)$ -struttura;
- una struttura quasi-compessa è una $\mathbf{GL}_m(\mathbb{C})$ -struttura ($m = 2n$ pari);
- una struttura quasi-Hermitiana è una $\mathbf{U}(n)$ -struttura ($m = 2n$ pari);
- una struttura quasi-simpletica è una $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ -struttura ($m = 2n$ pari)⁴;
- una $\mathbf{1}$ -struttura si dice un *parallelismo completo*.

Esempio 1.10.3. La fibrazione canonica $\mathbf{SO}(n+1) \rightarrow S^n$ è una $\mathbf{SO}(n)$ -riduzione del fibrato dei sistemi di riferimento di S^n e quindi una $\mathbf{SO}(n)$ -struttura su S^n .

La fibrazione canonica $\mathbf{SO}(n+1) \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ è una $\mathbf{O}(n)$ -riduzione del fibrato dei sistemi di riferimento di $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ e quindi una struttura Riemanniana su $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$.

La fibrazione canonica $\mathbf{SU}(n+1) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è una $\mathbf{U}(n)$ -riduzione del fibrato dei sistemi di riferimento su $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ e quindi una struttura quasi-Hermitiana su $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

1.11. Rappresentazioni lineari e fibrati vettoriali

sec:1211

1.11.1. Fibrati vettoriali associati a rappresentazioni. La costruzione della Proposizione 1.8.2 si generalizza al caso di fibrati principali generali e di rappresentazioni lineari del loro gruppo strutturale.

Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale su M , con gruppo strutturale \mathbf{G} .

Fissata una rappresentazione lineare di dimensione finita $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$, definiamo su $P \times V$ una relazione di equivalenza ponendo

eq:1110 (1.11.1) $(\sigma, v) \sim (\sigma \cdot a, \rho(a^{-1})(v)) \quad \forall \sigma \in P, \forall v \in V, \forall a \in \mathbf{G}.$

Proposizione 1.11.1. Il quoziente $E_V = (P \times V)/\sim$ è lo spazio totale di un fibrato vettoriale $\xi_V = (E_V \xrightarrow{\pi_V} M)$ con fibra tipica V . La proiezione nel quoziente $\varpi : P \times V \rightarrow E_V$ definisce un morfismo di fibrati vettoriali che rende commutativo il diagramma

eq:14.7.2

(1.11.2)
$$\begin{array}{ccc} P \times V & \xrightarrow{\varpi} & E_V \\ \text{pr}_P \downarrow & & \downarrow \pi_V \\ P & \xrightarrow{\pi} & M. \end{array}$$

Definizione 1.11.2. $\xi_V = (E_V \xrightarrow{\pi_V} M)$ è il fibrato vettoriale associato a ξ e alla rappresentazione lineare (ρ, V) del suo gruppo strutturale.

Notazione 1.11.3. Se $\sigma \in P$ e $v \in V$, indicheremo con σv il vettore $\varpi(\sigma, v) \in E_V$ ed analogamente, se $\alpha = \varpi(\sigma, v)$, scriveremo $v = \sigma^{-1}\alpha$.

Riassumiamo questa costruzione nell'enunciato:

⁴ Ricordiamo che $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathbf{SL}(2n, \mathbb{R}) \mid a\Omega a = \Omega\}$ per una matrice antisimmetrica $(2n) \times (2n)$ non degenere Ω .

Proposizione 1.11.4. Sia ξ un fibrato principale sulla varietà differenziabile M , con gruppo strutturale \mathbf{G} . Ad ogni rappresentazione lineare ρ di \mathbf{G} su uno spazio vettoriale V , risulta associato un fibrato vettoriale ξ_V su M , con fibra tipica V , tale che (1.11.2) sia un diagramma commutativo di morfismi di fibrati vettoriali. \square

Definizione 1.11.5. Chiamiamo le sezioni differenziabili del fibrato vettoriale ξ_V quantità di tipo (ρ, V) .

Una sezione $s \in \Gamma(M, E_V)$ del fibrato ξ_V si rialza alla funzione $\tilde{s} \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$, definita da

$$\text{eq: 1111} \quad (1.11.3) \quad \tilde{s}(\sigma) = \sigma^{-1}s(\pi(\sigma)).$$

Definizione 1.11.6. Chiamiamo la \tilde{s} il *sollevamento* su P della sezione s .

Proposizione 1.11.7. Condizione necessaria e sufficiente affinché una $f \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$ sia il sollevamento di una sezione di ξ_V è che risulti

$$\text{eq: 1112} \quad (1.11.4) \quad f(\sigma a) = \rho(a^{-1})f(\sigma), \quad \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G}.$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza immediata della (1.11.1). Infatti

$$(\sigma a)f(\sigma a) = \varpi(\sigma, \rho(a)\rho(a^{-1})f(\sigma)) = \varpi(\sigma, f(\sigma)) = \sigma f(\sigma).$$

Quindi il valore di $\sigma f(\sigma)$ dipende solo da $\pi(\sigma)$ e possiamo perciò definire una sezione differenziabile s di ξ_V ponendo $s(\pi(\sigma)) = \sigma f(\sigma)$ per ogni $\sigma \in P$. \square

Notazione 1.11.8. Indichiamo con $\mathcal{E}_\rho(P, V)$ lo spazio delle $f \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$ che soddisfano la (1.11.4). eq: 1112

Proposizione 1.11.9. La (1.11.3) stabilisce un isomorfismo lineare $s \leftrightarrow \tilde{s}$ tra $\Gamma(M, E_V)$ ed $\mathcal{E}_\rho(P, V)$. prop: 1.34 \square

Esempio 1.11.10. Sia $F(M) = (F(M) \xrightarrow{\pi} M)$ il fibrato dei sistemi di riferimento di una varietà differenziabile M .

Il fibrato associato alla rappresentazione canonica di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ su \mathbb{R}^m è il fibrato tangente $TM \rightarrow M$.

Il fibrato associato alla rappresentazione duale

$$\mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \ni a \rightarrow {}^t a^{-1} \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m)$$

è il fibrato cotangente $T^*M \rightarrow M$.

I fibrati tensoriali $T^{p,q}M$ sono associati alle rappresentazioni tensoriali:

$$\begin{aligned} & \rho(a)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q) \\ &= a(v_1) \otimes \cdots \otimes a(v_p) \otimes {}^t a^{-1}(w_1) \otimes \cdots \otimes {}^t a^{-1}(w_q) \\ & \forall v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Osservazione 1.11.11. La Proposizione 1.11.9 ci permette di associare ad ogni sezione differenziabile del fibrato ξ_V una funzione a valori in V . Come abbiamo visto, alle funzioni definite su una varietà differenziabile e a valori in uno spazio vettoriale si possono applicare le diverse operazioni del calcolo differenziale. Ad esempio, possiamo calcolarne il differenziale e le derivate rispetto a campi di vettori. prop: 1.34

sec:12112

1.11.2. Forme tensoriali e pseudotensoriali. Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} e $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ una sua rappresentazione lineare reale di dimensione finita.

Definizione 1.11.12. Una q -forma alternata $\phi \in \Omega^q(P, V)$ si dice *pseudotensoriale di tipo* (ρ, V) se soddisfa

eq:cop.3.1

$$(1.11.5) \quad R_a^* \phi = \rho(a^{-1}) \cdot \phi \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

La ϕ si dice *tensoriale* se è anche *orizzontale*, cioè se è pseudotensoriale ed inoltre

eq:cop.3.2

$$(1.11.6) \quad \phi(X_1, \dots, X_q) = 0 \quad \text{quando almeno uno degli } X_i \text{ sia verticale.}$$

Indichiamo con $\Omega_{\rho}^q(P, V)$ lo spazio delle q -forme pseudotensoriali di tipo (ρ, V) e con $\Omega_{\rho,0}^q(P, V)$ il sottospazio delle q -forme tensoriali di tipo (ρ, V) .

Esempio 1.11.13. Su $F(M)$ la *forma canonica*⁵

eq:14.6.3

$$(1.11.7) \quad \theta = \sigma^{-1} d\pi \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m).$$

è una 1-forma tensoriale per la rappresentazione canonica di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$.

Se ξ è un sottofibrato di $F(M)$, con gruppo strutturale $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$, la restrizione di θ a P è ancora una 1-forma tensoriale per la rappresentazione naturale di \mathbf{G} su \mathbb{R}^m .

La definizione del prodotto esterno di forme si estende al caso di forme pseudotensoriali nel caso in cui una di esse sia di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$.

def:14.6.3

Definizione 1.11.14. Se (ρ, V) è una rappresentazione lineare di \mathbf{G} , il prodotto esterno di $\phi \in \Omega_{\text{Ad}}^r(P, \mathfrak{g})$ e $\psi \in \Omega_{\rho}^s(P, V)$ è la forma $\phi \wedge_{\rho} \psi \in \Omega_{\rho}^{r+s}(P, V)$ definita da

eq:14.6.12

$$(1.11.8) \quad \phi \wedge_{\rho} \psi(X_1, \dots, X_{r+s}) = \sum' \varepsilon(k) \rho_*(\phi(X_{k_1}, \dots, X_{k_r}))(\psi(X_{k_{r+1}}, \dots, X_{k_{r+s}})),$$

$$\forall X_1, \dots, X_{r+s} \in \mathfrak{X}(P),$$

dove il simbolo \sum' indica che la somma a secondo membro è fatta su tutte le permutazioni di k di $\{1, \dots, r+s\}$ con

$$1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq r+s \quad \text{ed} \quad 1 \leq k_{r+1} < \dots < k_{r+s} \leq r+s.$$

Se ρ è la rappresentazione aggiunta, scriveremo $[\phi \wedge \psi]$ invece di $\phi \wedge_{\text{Ad}} \psi$ e, se $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ ed ι la rappresentazione canonica su \mathbb{R}^n , scriveremo $\phi \wedge \psi$ invece di $\phi \wedge_{\iota} \psi$.

Abbiamo facilmente

prop:13218

Proposizione 1.11.15. Se $\phi \in \Omega_{\text{Ad},0}^r(P, \mathfrak{g})$, $\psi \in \Omega_{\rho,0}^s(P, V)$, allora $\phi \wedge_{\rho} \psi \in \Omega_{\rho,0}^{r+s}(P, V)$. \square

⁵La θ si dice anche forma *tautologica* o di *saldatura* (in inglese: solder form).

1.11.3. Forme differenziali a valori in un fibrato vettoriale.

Sia $\eta = (E \xrightarrow{\pi_E} M)$ un fibrato vettoriale.

Definizione 1.11.16. Lo spazio $\Omega^q(M, E_V)$ delle q -forme differenziali a valori in E consiste delle q -forme $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineari alternate di grado q

$$f : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{q \text{ volte}} \longrightarrow \Gamma(M, E).$$

In particolare, $\Omega^0(M, E) = \Gamma(M, E)$. Se η è il fibrato banale $M \times V \xrightarrow{\text{pr}_M} M$, gli $\Omega^q(M, E)$ coincidono con gli spazi $\Omega^q(M, V)$ delle forme differenziali a valori in V .

Osservazione 1.11.17. Se $f : N \rightarrow M$ è un'applicazione differenziabile, il pull-back $f^*\phi$ di $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$, è una q -forma a valori in f^*E .

1.11.4. Forme tensoriali e forme a valori in un fibrato vettoriale.

Siano $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale, (ρ, V) una rappresentazione lineare del suo gruppo strutturale \mathbf{G} e $\xi_V = (E_V \xrightarrow{\pi_V} M)$ il corrispondente fibrato vettoriale.

Data una forma $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$ definiamo

eq: 121113

(1.11.9)

$$\tilde{\phi}_\sigma(X_1, \dots, X_q) = \sigma^{-1} \phi(\pi_* X_{1,\sigma}, \dots, \pi_* X_{q,\sigma}), \quad \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(P), \sigma \in P.$$

prop: 12138

Proposizione 1.11.18. Se $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$, la $\tilde{\phi}$ definita dalla (1.11.9) è una q -forma tensoriale di tipo (ρ, V) . L'applicazione

eq: 121114

(1.11.10)

$$\Lambda_V : \Omega^q(M, E_V) \ni \phi \longrightarrow \tilde{\phi} \in \Omega_{\rho,0}^q(P, V)$$

è un isomorfismo lineare. □

prop: 12139

Proposizione 1.11.19. Se U è un aperto di M e $\sigma_U \in \Gamma(U, P)$, allora

eq: 121114

(1.11.11)

$$\sigma_U \cdot (\sigma_U^* \tilde{\phi}) = \phi|_U, \quad \forall \phi \in \Omega^q(U, E_V).$$

Definizione 1.11.20. La forma $\phi_U = \sigma_U^* \tilde{\phi} \in \Omega^q(U, V)$ è il coefficiente di ϕ nella carta di trivializzazione (U, σ_U) .

Se $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$ è un atlante di trivializzazione di ξ , possiamo associare a $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$ la famiglia

(1.11.12)

$$\{\phi_\alpha = \sigma_\alpha^{-1} \phi|_{U_\alpha} \in \Omega^q(U_\alpha, V)\}.$$

Definizione 1.11.21. Le $\{\phi_\alpha\}$ sono i coefficienti di ϕ nell'atlante \mathcal{A} .

Proposizione 1.11.22. Condizione necessaria e sufficiente affinché le $\{\phi_\alpha \in \Omega^q(U_\alpha, V)\}$ siano i coefficienti di una $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$ è che

$$\phi_\alpha = \rho(\psi_{\alpha,\beta}) \phi_\beta \quad \text{su } U_{\alpha,\beta}, \quad \forall \alpha, \beta$$

ove le $\psi_{\alpha,\beta} = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha,\beta}, \mathbf{G})$ sono le funzioni di transizione dell'atlante \mathcal{A} .

Connessioni principali

ch:cp

In questo capitolo indicheremo con ξ un fibrato principale, con spazio totale P , base M e gruppo strutturale \mathbf{G} .

sec:13.1

2.1. La distribuzione verticale

All'azione di \mathbf{G} su P associamo le applicazioni

eq:22.0.1 (2.1.1) $\ell_\sigma : \mathbf{G} \ni a \longrightarrow \sigma \cdot a \in P$, per ogni $\sigma \in P$,

eq:22.0.2 (2.1.2) $R_a : P \ni \sigma \longrightarrow \sigma \cdot a \in P$, per ogni $a \in \mathbf{G}$.

Indicando con L_a ed R_a le traslazioni a sinistra e a destra in \mathbf{G} , abbiamo

$$\begin{aligned}\ell_\sigma \circ L_a &= \ell_{\sigma a}, \\ R_a \circ \ell_\sigma &= \ell_{\sigma a} \circ \text{ad}(a^{-1}).\end{aligned}$$

Infatti

$$\begin{aligned}\ell_\sigma(L_a(x)) &= \ell_\sigma(ax) = \sigma \cdot (ax) = (\sigma a) \cdot x = \ell_{\sigma a}(x), \\ R_a(\ell_\sigma(x)) &= \ell_\sigma(x) \cdot a = \sigma x a = (\sigma a) \text{ad}(a^{-1})(x) = \ell_{\sigma a} \circ \text{ad}(a^{-1})(x).\end{aligned}$$

Definizione 2.1.1. Indichiamo con

(2.1.3) $\mathfrak{V}(P) = \{X \in \mathfrak{X}(P) \mid d\pi(\sigma)(X_\sigma) = 0, \forall \sigma \in P\}$

la *distribuzione verticale* su P e con

(2.1.4) $VP = \bigcup_{\sigma \in P} \{X_\sigma \mid X \in \mathfrak{V}(P)\} \subset TP$

il corrispondente *fibrato verticale*.

La $\mathfrak{V}(P)$ è totalmente integrabile, in quanto la $\pi : P \rightarrow M$ definisce una foliazione globale di $\mathfrak{V}(P)$. In particolare, è

eq:22.0.3 (2.1.5) $[\mathfrak{V}(P), \mathfrak{V}(P)] \subset \mathfrak{V}(P)$.

Ogni $X \in \mathfrak{g}$ definisce un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di P :

eq:22.1.3 (2.1.6) $\mathbb{R} \ni t \longrightarrow \mathbf{R}_{\exp(tX)} \in \mathcal{C}^\infty(P, P)$.

Definizione 2.1.2. Il suo generatore infinitesimale X^* si dice il *campo fondamentale* associato a X .

Osservazione 2.1.3. Se ξ è il fibrato banale $\mathbf{G} \rightarrow \{p_0\}$, allora il campo fondamentale X^* coincide con il campo invariante a sinistra X^* su \mathbf{G} .

Notazione 2.1.4. Indichiamo con $\lambda_\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow T_\sigma P$ il differenziale nell'identità dell'applicazione $\ell_\sigma : \mathbf{G} \ni a \rightarrow \sigma \cdot a \in P$.

Lemma 2.1.5. Per ogni $X \in \mathfrak{g}$, è $X^\star \in \mathfrak{V}(P)$ ed

$$\text{eq: 1329} \quad (2.1.7) \quad X_\sigma^\star = \lambda_\sigma(X), \quad \forall \sigma \in P.$$

DIMOSTRAZIONE. Le curve integrali $t \rightarrow \sigma \cdot \exp(tX)$ di X^\star sono verticali e quindi X^\star è verticale. Risulta poi

$$X_\sigma^\star = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma \cdot \exp(tX) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \ell_\sigma(\exp(tX)) = d\ell_\sigma(e)(X).$$

□

prop: 12.2.2

Proposizione 2.1.6. Con le notazioni introdotte sopra, abbiamo:

- 02 (1) $\forall \sigma \in P, \lambda_\sigma = d\ell_\sigma(e) : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow X_\sigma^\star \in V_\sigma P$ è un isomorfismo lineare.
 03 (2) La $P \times \mathfrak{g} \ni (\sigma, X) \rightarrow X_\sigma^\star \in VP$ è un'equivalenza di fibrati vettoriali. In particolare VP è trivializzabile.
 04 (3) La $\Lambda : \mathfrak{g} \ni X \rightarrow X^\star \in \mathfrak{V}(P)$ è un monomorfismo di algebre di Lie.
 05 (4) Vale la formula

$$\text{eq: 14.1.y} \quad (2.1.8) \quad dR_a(X^\star) = [\text{Ad}(a^{-1})X]^\star, \quad \forall a \in \mathbf{G}, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

- 06 (5) La distribuzione $\mathfrak{V}(P)$ è il sotto- $\mathcal{C}^\infty(P)$ -modulo generato dai campi di vettori X^\star , al variare di X in \mathfrak{g} .

DIMOSTRAZIONE. (I). Poiché l'azione di \mathbf{G} su P è libera, l'applicazione λ_σ è iniettiva. È anche un isomorfismo, perché $V_\sigma P$ e \mathfrak{g} hanno la stessa dimensione.

La (2) è conseguenza della (1). Per (1), Λ è iniettiva. I campi X^\star su \mathbf{G} ed X^\star su P sono ℓ_σ -correlati per ogni $\sigma \in P$. Questo implica che Λ è anche un omomorfismo di algebre di Lie, completando la dimostrazione del punto (5). La formula (2.1.8) si ottiene dalla

$R_a(\sigma \cdot \exp(tX)) = \sigma \cdot (\exp(tX)a) = \sigma \cdot a \cdot (a^{-1} \exp(tX)a) = (\sigma \cdot a) \cdot \exp(\text{Ad}(a^{-1})X)$, che dimostra come la traslazione R_a trasformi il flusso generato da X^\star nel flusso generato da $[\text{Ad}(a^{-1})X]^\star$. Infine, la (5) segue dalla (5). □

Sia $\sigma \in P$. Per la Proposizione 2.1.6, per ogni vettore verticale $w \in V_\sigma P$ vi è un unico elemento X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} tale che $X_\sigma^\star = w$. Questa corrispondenza definisce un'applicazione

$$\text{eq: 14.1.13} \quad (2.1.9) \quad \omega_\nu : VP \rightarrow \mathfrak{g}$$

di classe \mathcal{C}^∞ ed \mathbb{R} -lineare sulle fibre di VP .

Diremo quindi che la ω_ν è una forma differenziale sulla distribuzione verticale VP , a valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g} .

Per la (2.1.8), la ω_ν soddisfa

$$(2.1.10) \quad (R_a)^* \omega_\nu = \text{ad}(a^{-1}) \circ \omega_\nu \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

Per semplificare le notazioni, sarà a volte conveniente scrivere

$$\begin{array}{ll} Xa & \text{invece che } dR_a(X), & \text{per } X \in TP, a \in \mathbf{G}, \\ \sigma A & \text{invece che } \lambda_\sigma(A), & \text{per } \sigma \in P, A \in \mathfrak{g}, \end{array}$$

aA invece che $dL_a(A)$, per $a \in \mathbf{G}$, $A \in T\mathbf{G}$.

2.2. Il concetto di connessione principale

Definizione 2.2.1. Una *connessione principale* Γ su ξ è il dato di una forma differenziale $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ (la sua *forma di Cartan*) che soddisfi le:

- (1) $\omega(A^*) = A$ per ogni $A \in \mathfrak{g}$,
 (2) $R_a^* \omega = \text{Ad}(a^{-1})\omega \quad \forall a \in \mathbf{G}$, cioè
 (2') $\omega((R_a)_*(X)) = \text{Ad}(a^{-1})(\omega(X)) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(P)$.

Per ogni punto $\sigma \in P$, la la composizione

$$(2.2.1) \quad T_\sigma P \ni X_\sigma \xrightarrow{\omega} \omega(X_\sigma) \in \mathfrak{g} \xrightarrow{\lambda_\sigma} [\omega(X_\sigma)]_\sigma^* \in V_\sigma P$$

definisce una proiezione di $T_\sigma P$ su $V_\sigma P$.

Il nucleo di questa proiezione è la *distribuzione orizzontale*

$$(2.2.2) \quad HP = \{v \in TM \mid \omega(v) = 0\}.$$

Indichiamo con

$$(2.2.3) \quad \mathcal{H}(P) = \{X \in \mathfrak{X}(P) \mid X_\sigma \in VP, \forall \sigma \in P\}$$

lo spazio dei *campi orizzontali*, cioè delle sezioni \mathcal{C}^∞ di HP .

La *distribuzione orizzontale* di una \mathbf{G} -connessione affine Γ è caratterizzata dalle proprietà:

eq:22.0.1p

$$(1') \quad T_\sigma P = V_\sigma P \oplus H_\sigma P, \quad \forall \sigma \in P$$

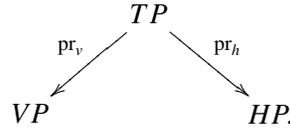
eq:22.0.1s

$$(2') \quad (R_a)_*(H_\sigma P) = H_{\sigma \cdot a} P, \quad \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Sia HP un sottofibrato vettoriale di TP che verifichi le (1') e (2'). Indichiamo con pr_h e pr_v le proiezioni sulla *componente orizzontale* e sulla *componente verticale*, corrispondenti alla decomposizione (1').

eq:1324

$$(2.2.4)$$



Si verifica immediatamente che la forma $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, definita da

eq:yyyyy

$$(2.2.5) \quad \omega(X) = \omega_v(\text{pr}_v(X)), \quad \forall X \in TP.$$

è la forma di Cartan di una connessione principale Γ su ξ ed abbiamo quindi la¹:

Proposizione 2.2.2. La $\omega \longleftrightarrow HP = \bigcup_{\sigma \in P} \ker \omega(\sigma)$ definisce una corrispondenza biunivoca tra le connessioni principali Γ su ξ ed i sottofibrati HP di TP che soddisfano le condizioni (1') e (2'). \square

¹La definizione della connessione a partire dalla distribuzione orizzontale è dovuta a CHARLES EHRESMANN: *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles, (1950), pp. 29-55.

La caratterizzazione di una connessione principale mediante la sua distribuzione orizzontale ci dà facilmente:

prop: 13.2.3

Proposizione 2.2.3 (estensione). *Sia $\xi' = (P' \xrightarrow{\pi'} M)$ un sottofibrato principale di ξ , con la stessa base M e gruppo strutturale $\mathbf{G}' \subset \mathbf{G}$. Indichiamo con $\iota : P' \hookrightarrow P$ l'inclusione. Per ogni connessione principale Γ' su ξ' , con forma di Cartan ω' , vi è un'unica connessione principale Γ su ξ , la cui forma di Cartan ω soddisfi*

$$(2.2.6) \quad \omega' = \iota^* \omega.$$

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $H'P'$ il fibrato orizzontale della connessione Γ' . Poiché $H'P'$ è invariante per le traslazioni a destra mediante elementi di \mathbf{G}' , abbiamo $R_{a_1} H'_{\sigma_1} P' = R_{a_2} H'_{\sigma_2} P'$ se $\sigma_1, \sigma_2 \in P'$, $a_1, a_2 \in \mathbf{G}'$ e $\sigma_1 a_1 = \sigma_2 a_2$. L'applicazione

$$P' \times \mathbf{G}' \ni (\sigma, a) \rightarrow \sigma \cdot a \in P_{\xi}$$

è surgettiva. Per l'osservazione precedente, possiamo allora definire il fibrato orizzontale HP della connessione Γ ponendo

$$H_{\sigma \cdot a} P = (R_a)_*(H'_{\sigma} P'), \quad \forall \sigma \in P', \forall a \in \mathbf{G}'.$$

Chiaramente HP è univocamente determinato da $H'P'$, verifica le condizioni (1') e (2'), e definisce quindi un'unica connessione principale Γ su ξ , la cui forma di Cartan ω estende quella di Γ' . \square

Osservazione 2.2.4. Viceversa, è possibile restringere la connessione principale Γ su ξ ad una connessione principale Γ' sul sottofibrato ξ' se, e soltanto se, la restrizione a $V'P'$ della sua forma di Cartan ω è a valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g}' di \mathbf{G}' .

Teorema 2.2.5 (esistenza). *Ogni fibrato principale ammette una connessione principale.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} ed $\omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(\mathbf{G}, \mathfrak{g})$ la forma di Maurer-Cartan di \mathbf{G} . Fissiamo un atlante di trivializzazione $\{(U_{\alpha}, \sigma_{\alpha})\}$ di ξ ed indichiamo con

eq: 22.3.5

$$(2.2.7) \quad \Psi_{\alpha} : U_{\alpha} \times \mathbf{G} \ni (p, a) \rightarrow \sigma_{\alpha}(p) \cdot a \in \pi^{-1}(U_{\alpha})$$

le corrispondenti trivializzazioni locali. Per ogni indice α , sia $\text{pr}_{\alpha, \mathbf{G}} : U_{\alpha} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ la proiezione sul secondo fattore. Allora la $\omega'_{\alpha} = \Psi_{\alpha*} \text{pr}_{\alpha, \mathbf{G}}^* \omega_{\mathbf{G}} \in \Omega^1(\pi^{-1}(U_{\alpha}), \mathfrak{g})$ è la forma di Cartan di una connessione principale su $\xi|_{U_{\alpha}}$.

Fissiamo una partizione dell'unità $\{\chi_{\alpha}\}$ su M subordinata al ricoprimento $\{U_{\alpha}\}$ e definiamo

$$\omega = \sum_{\alpha} (\pi^* \chi_{\alpha}) \omega'_{\alpha} \in \Omega^1(P, \mathfrak{g}),$$

ove le forme $(\pi^* \chi_{\alpha}) \omega'_{\alpha}$ si intendono estese con la forma nulla fuori dell'aperto $\pi^{-1}(U_{\alpha})$. Si verifica facilmente che ω è la forma di Cartan di una connessione principale su ξ . \square

2.3. Pullback di una connessione principale

Sia $\xi' = (P' \xrightarrow{\pi'} M')$ un altro fibrato principale, con gruppo strutturale \mathbf{G}' , ed $f : P' \rightarrow P$ un'applicazione differenziabile che induca un morfismo di fibrati principali². Allora, se ω è la forma di Cartan di una connessione principale Γ su ξ , la sua immagine inversa $\omega' = f^*\omega$ è la forma di Cartan di una connessione principale Γ' su ξ' , che si dice *il pullback della connessione Γ* .

In particolare, se N è un'altra varietà differenziabile ed $f \in \mathcal{C}^\infty(N, M)$, definiamo il pullback $f^*\xi = (P_f \xrightarrow{\pi_f} N)$ ponendo

$$P_f = \{(y, \sigma) \in N \times P \mid \pi(\sigma) = f(y)\},$$

$$\pi_f : P_f \ni (y, \sigma) \longrightarrow y \in N.$$

Otteniamo così un fibrato principale su N , con gruppo strutturale \mathbf{G} , per l'azione

$$(y, \sigma) \cdot a = (y, \sigma \cdot a), \quad \forall (y, \sigma) \in P_f, \forall a \in \mathbf{G}.$$

La f si rialza ad un morfismo \tilde{f} di fibrati \mathbf{G} -principali

$$\tilde{f} : P_f \ni (y, \sigma) \longrightarrow \tilde{f}(y, \sigma) = \sigma \in P.$$

Se ω è la forma di Cartan di una connessione principale Γ su ξ , allora la $\tilde{f}^*\omega \in \mathcal{Q}^1(P_f, \mathfrak{g})$ è la forma di Cartan di una connessione principale $f^*\Gamma$ su $f^*\xi$.

2.4. Il fibrato delle connessioni principali

Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale, con gruppo strutturale \mathbf{G} . Il differenziale della proiezione π definisce un fibrato differenziabile $T\xi = (TP \xrightarrow{d\pi} TM)$, la cui fibra tipica è $\mathbf{G} \times \mathfrak{g}$, ove \mathfrak{g} è l'algebra di Lie di \mathbf{G} . Possiamo associare ad ogni sezione σ di ξ , definita su un aperto U di M , la trivializzazione locale

$$\Psi_\sigma : TU \times \mathbf{G} \times \mathfrak{g} \ni (v, a, X) \longrightarrow (d\sigma(v)) \cdot a + (\sigma a) \text{Ad}(a^{-1})(X) \in TP|_{d\pi^{-1}(TU)}.$$

Il differenziale dell'azione a destra di \mathbf{G} su P definisce un'azione di \mathbf{G} su TP , che preserva le fibre di $T\xi$. Infatti, da $\pi = \pi \circ R_a$, otteniamo che $d\pi = d\pi \circ dR_a$, per ogni $a \in \mathbf{G}$.

Indichiamo con \mathfrak{C}_ξ il quoziente di TP rispetto a questa azione: due vettori $X, Y \in TP$ definiscono lo stesso elemento di \mathfrak{C}_ξ se $Y = Xa = dR_a(X)$, per qualche $a \in \mathbf{G}$. Il quoziente \mathfrak{C}_ξ è una varietà differenziabile e il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} TP & \xrightarrow{\quad \varpi \quad} & \mathfrak{C}_\xi \\ & \searrow d\pi & \swarrow d\pi_\xi \\ & TM & \end{array}$$

definisce un fibrato vettoriale $\mathfrak{C}_\xi \xrightarrow{d\pi_\xi} TM$ con fibra tipica \mathfrak{g} .

²Esistono cioè una $f_0 \in \mathcal{C}^\infty(M', M)$ ed una $\phi \in \text{Hom}(\mathbf{G}', \mathbf{G})$ tali che $\pi \circ f = f_0 \circ \pi'$ ed $f \circ R'_a = R_{\phi(a)} \circ f$, per ogni $a \in \mathbf{G}'$.

Una trivializzazione locale $(U_\alpha, \sigma_\alpha)$ di ξ ci permette di definire una sezione

$$\Psi_\alpha : TU_\alpha \times \mathfrak{g} \ni (X, A) \longrightarrow d\sigma_\alpha(X) + A_{\sigma_\alpha}^* \in TP$$

del fibrato $TP \xrightarrow{d\pi} TM$. Compondendola con la proiezione nel quoziente otteniamo una trivializzazione locale

$$TU_\alpha \times \mathfrak{g} \ni (X, A) \longrightarrow \varpi \circ \Psi_\alpha(X, A) \in d\pi^{-1}(TU_\alpha) = \mathfrak{C}_\xi|_{TU_\alpha}.$$

Componendo con la proiezione sulla base, \mathfrak{C}_ξ è lo spazio totale di una fibrato vettoriale su M

$$\rho : \mathfrak{C}_\xi \longrightarrow M,$$

con fibra tipica $\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g}$. Abbiamo³:

Teorema 2.4.1. *Le connessioni principali su ξ sono in corrispondenza biunivoca con le sezioni $\Gamma : TM \rightarrow \mathfrak{C}_\xi$ del fibrato $\mathfrak{C}_\xi \xrightarrow{d\pi} TM$ tali che*

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\Gamma} & \mathfrak{C}_\xi \\ & \searrow \text{pr} & \swarrow \rho \\ & & M \end{array}$$

sia un morfismo di fibrati vettoriali su M .

In questa corrispondenza, la distribuzione orizzontale è caratterizzata da

eq: 174a

$$(2.4.1) \quad HP = \varpi^{-1}(\Gamma(TM)).$$

2.5. Automorfismi di una connessione principale

Sia ξ un fibrato principale con una connessione Γ , con forma di Cartan ω .

Definizione 2.5.1. Un *automorfismo* di Γ è un automorfismo $(\tilde{f}, f, \text{id})$ di ξ che preserva la connessione.

Abbiamo cioè un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tilde{f}} & P \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

in cui $f \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$ è un diffeomorfismo e la \tilde{f} gode delle proprietà:

- (i) $\tilde{f}(\sigma \cdot a) = \tilde{f}(\sigma) \cdot a, \quad \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G},$
- (ii) $\tilde{f}^* \omega = \omega.$

Denotiamo con $\text{Aut}(\Gamma)$ il gruppo degli automorfismi di Γ .

³ Shoshichi Kobayashi: *Theory of Connections*, Ann. Mat. Pura Appl. **43** (1957), pp.119-194.

2.6. Forme di Christoffel ed equazioni di gauge

sec:14.5

Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} .

Fissiamo su ξ una connessione principale Γ , con forma di Cartan ω .

Sia $\sigma_U \in \Gamma(U, P)$ una sezione \mathcal{C}^∞ di ξ , definita su un aperto U di M . Indichiamo con

eq:1361

$$(2.6.1) \quad \omega_U = \sigma_U^* \omega = \omega \circ d\sigma_U \in \Omega^1(U, \mathfrak{g}).$$

il pullback su U di ω mediante la sezione σ_U .

Definizione 2.6.1. La $\omega_U \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$, definita dalla ^{eq:1361}(2.6.1), si dice *la forma di Christoffel*⁴ della connessione Γ nella trivializzazione locale (U, σ_U) .

La sezione $\sigma_U \in \Gamma(U, P)$ definisce la trivializzazione locale

$$\Psi_U : U \times \mathbf{G} \ni (p, a) \longrightarrow \sigma_U(p)a \in P|_U.$$

Identifichiamo in modo canonico $T(U \times \mathbf{G})$ con il prodotto cartesiano $TU \times T\mathbf{G}$. Un vettore tangente ad $U \times \mathbf{G}$ si può allora descrivere come una coppia (v, A_a^*) con $v \in TU$, $A \in \mathfrak{g}$, $a \in \mathbf{G}$.

lem:1329

Lemma 2.6.2. È

eq:22.5.b2a

$$(2.6.2) \quad \Psi_U^* \omega = \text{Ad}(a^{-1})\omega_U + a^{-1}da,$$

ove abbiamo indicato con $a^{-1}da$ la forma di Maurer-Cartan di \mathbf{G} .

Notiamo che, nella ^{eq:22.5.b2a}(2.6.2) il primo addendo a secondo membro opera sui vettori di TU , il secondo su quelli di $T\mathbf{G}$; è cioè

$$\Psi_U^* \omega(v, A_a^*) = \text{Ad}(a^{-1})\omega_U(v) + A, \quad \forall v \in TU, \forall A \in \mathfrak{g}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

DIMOSTRAZIONE. Con le notazioni introdotte alla fine di ^{sec:13.1}§2.1, abbiamo

$$d\Psi_U = d\sigma_U \cdot a + \sigma_U \cdot da.$$

È poi

$$\omega(d\sigma_U(v)a) = \text{Ad}(a^{-1})\omega(d\sigma_U(v)) = \text{Ad}(a^{-1})\omega_U(v), \quad \forall v \in TU, \forall a \in \mathbf{G},$$

$$\omega(\sigma_U \cdot da(A^*)) = \omega(\sigma_U A^*) = \omega(A^*) = A, \quad \forall A \in \mathfrak{g}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Da queste relazioni ricaviamo la ^{eq:22.5.b2a}(2.6.2). □

Sia ora $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}$ un atlante di trivializzazione di ξ . Poniamo per semplicità

$$\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega, \quad \tilde{\omega}_\alpha = \Psi_\alpha^* \omega$$

per indicare le forme di Christoffel delle trivializzazioni locali dell'atlante e i pull-back $\tilde{\omega}_\alpha$ della forma di Cartan mediante le trivializzazioni locali

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbf{G} \ni (p, a) \longrightarrow \sigma_\alpha(p)a \in P|_{U_\alpha}.$$

⁴Elwin Bruno Christoffel (10/11/1829, Montjoie, ora Monschau (villaggio tedesco vicino ad Aquisgrana e alla frontiera belga) - 15/3/1900 Strasburgo) matematico e fisico tedesco. Ha lavorato su applicazioni conformi, teoria del potenziale, teoria degli invarianti, analisi tensoriale, fisica matematica, geodesia e onde d'urto. Oltre ai simboli di Christoffel, sono note le applicazioni di Schwarz-Christoffel, mappe conformi dei poligoni semplici sul semipiano superiore.

Notazione 2.6.3. Siano⁵ $\psi_{\alpha,\beta} = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha,\beta}, \mathbf{G})$ le funzioni di transizione dell'atlante \mathcal{A} . Per ogni coppia di indici α, β per cui $U_{\alpha,\beta} \neq \emptyset$ indichiamo con

$$\text{eq: 22.4.2} \quad (2.6.3) \quad \theta_{\alpha,\beta} = \psi_{\alpha,\beta}^* \omega_{\mathbf{G}} = \psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta} \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha,\beta}, \mathfrak{g})$$

il pullback della forma di Maurer-Cartan $\omega_{\mathbf{G}} = a^{-1}da$ di \mathbf{G} mediante la funzione di transizione $\psi_{\alpha,\beta}$.

Vale il seguente:

Teorema 2.6.4. Siano $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ un atlante di trivializzazione di ξ , con funzioni di transizione $\{\psi_{\alpha,\beta} = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta \in \mathcal{C}^\infty(U_{\alpha,\beta}, \mathbf{G})\}$, ed $\{\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})\}_{\alpha \in I}$ una famiglia di forme differenziali, definite sugli aperti U_α dell'atlante \mathcal{A} , ed a valori in \mathfrak{g} . Allora:

- (1) Vi è al più una connessione principale Γ su ξ di cui le $\{\omega_\alpha\}$ siano le forme di Christoffel di Γ rispetto alle trivializzazioni locali dell'atlante \mathcal{A} .
- (2) Condizione necessaria e sufficiente affinché le $\{\omega_\alpha\}$ siano le forme di Christoffel di una connessione principale Γ su ξ è che siano verificate le

$$\text{eq: cop.2.c} \quad (2.6.4) \quad \omega_\beta = \text{Ad}(\psi_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\alpha + \psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta} \quad \text{su } U_{\alpha,\beta} \quad (\text{EQUAZIONI DI GAUGE}).$$

DIMOSTRAZIONE. L'unicità segue dal Lemma [1329](#) [2.6.2](#), in quanto, per [2.6.2](#), le ω_α sono determinate dalle ω_α e a loro volta determinano univocamente le restrizioni di ω agli aperti $P|_{U_\alpha}$.

Per dimostrare la seconda affermazione, basterà verificare che le equazioni di gauge esprimono una condizione necessaria e sufficiente affinché risulti

$$\text{eq: cop14} \quad (2.6.5) \quad \Psi_{\alpha*} \tilde{\omega}_\alpha = \Psi_{\beta*} \tilde{\omega}_\beta \quad \text{su } P|_{U_{\alpha,\beta}}$$

e quindi le $\{\Psi_{\alpha*} \tilde{\omega}_\alpha\}$ si rincollino e definiscano una forma di connessione ω su P .

Le [\(2.6.5\)](#) sono equivalenti a

$$\text{eq: cop15} \quad (2.6.6) \quad (\Psi_\alpha^{-1} \circ \Psi_\beta)^* \tilde{\omega}_\alpha = \tilde{\omega}_\beta \quad \text{su } U_{\alpha,\beta} \times \mathbf{G}.$$

Indichiamo con (p, b) il punto generico in $U_\beta \times \mathbf{G}$ e con (p, a) il punto generico di $U_\alpha \times \mathbf{G}$. Allora

$$\Psi_\alpha^{-1} \circ \Psi_\beta(p, b) = (p, \sigma_\alpha(p)^{-1}\sigma_\beta(p)b) = (p, \psi_{\alpha,\beta}(p)b), \quad \forall p \in U_{\alpha,\beta}, \forall a \in \mathbf{G}$$

e $b = \psi_{\alpha,\beta}^{-1}(p)a = \psi_{\beta,\alpha}a$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} (\Psi_\alpha^{-1}\Psi_\beta)^* \tilde{\omega}_\beta &= (\Psi_\alpha^{-1}\Psi_\beta)^*(\text{Ad}(b^{-1})\omega_\beta + b^{-1}db) \\ &= \text{Ad}([\psi_{\beta,\alpha}a]^{-1})(\text{Ad}(\psi_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\alpha + \psi_{\alpha\beta}^{-1}d\psi_{\alpha\beta}) + [\psi_{\beta,\alpha}^{-1}a]^{-1}((d\psi_{\beta,\alpha})a + \psi_{\beta,\alpha}^{-1}da) \\ &= \text{Ad}(a^{-1})\omega_\alpha + \text{Ad}(a^{-1})[(d\psi_{\alpha,\beta})\psi_{\beta,\alpha} + \psi_{\alpha,\beta}d\psi_{\beta,\alpha}] + a^{-1}da. \end{aligned}$$

Poiché $\psi_{\alpha,\beta}\psi_{\beta,\alpha} = e_{\mathbf{G}}$, è $[(d\psi_{\alpha,\beta})\psi_{\beta,\alpha} + \psi_{\alpha,\beta}d\psi_{\beta,\alpha}] = 0$. Otteniamo così l'uguaglianza $(\Psi_\alpha^{-1}\Psi_\beta)^* \tilde{\omega}_\beta = \tilde{\omega}_\alpha$. La dimostrazione è completa. \square

⁵Indichiamo con $U_{\alpha_1, \dots, \alpha_h}$ l'intersezione $U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_h}$.

Osservazione 2.6.5. Identificando $T(U_\alpha \times \mathbf{G})$ al prodotto cartesiano $TU_\alpha \times T\mathbf{G}$, possiamo descrivere il pullback su $U_\alpha \times \mathbf{G}$ della distribuzione orizzontale su P mediante

eq:13613 (2.6.7) $\Psi_\alpha^* H_{\sigma_\alpha(p)a} = \{X_p - [\omega_\alpha(X_p)]_a^* \mid X_p \in T_p M\}, \quad \forall p \in U_\alpha, \forall a \in \mathbf{G}.$

2.7. Sollevamento orizzontale di campi di vettori

Sia assegnata una connessione principale Γ su ξ , con forma di Cartan ω . Per ogni $\sigma \in P$ l'applicazione

(2.7.1) $H_\sigma P \ni X_\sigma \longrightarrow d\pi(\sigma)(X_\sigma) \in T_{\pi(\sigma)} M$

è un isomorfismo lineare. La sua inversa

(2.7.2) $h_\sigma : T_{\pi(\sigma)} M \longrightarrow H_\sigma P$

ci permette di definire l'applicazione

cop.1.4 (2.7.3) $h : \mathfrak{X}(M) \ni X \longrightarrow \tilde{X} \in \mathcal{H}(P), \quad \text{con} \quad \tilde{X}_\sigma = h_\sigma(X_{\pi(\sigma)}), \quad \forall \sigma \in P.$

Definizione 2.7.1. Il campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ è il *sollevamento orizzontale* di $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Si verifica facilmente che vale il seguente:

Proposizione 2.7.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ sia il sollevamento orizzontale di $X \in \mathfrak{X}(M)$ è che siano soddisfatte le due condizioni:*

eq:cop.i (i) $\omega(\tilde{X}) = 0,$

eq:cop.ii (ii) $d\pi(\tilde{X}) = X.$

Queste due proprietà implicano che:

eq:cop.iii (iii) $(R_a)_*(\tilde{X}) = \tilde{X} \quad \forall a \in \mathbf{G}.$

Il sollevamento orizzontale **cop.1.4** (2.7.3) è un'applicazione \mathbb{R} -lineare che soddisfa:

(a) $h(fX) = \pi^*(f)\tilde{X}, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M),$

(b) $d\pi([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad \square$

Osservazione 2.7.3. Il commutatore del sollevamento orizzontale a P di due campi di vettori su M è invariante rispetto alle traslazioni a destra, soddisfa cioè la proprietà **eq:cop.iii** (iii), ma può non essere orizzontale, non soddisfare cioè la **eq:cop.i** (i).

2.8. Sollevamento orizzontale di cammini e trasporto parallelo

sec:14.14

Indichiamo con $\mathcal{C}_{tr}^1([0, 1], M)$ l'insieme delle curve di classe \mathcal{C}^1 a tratti in M .

Proposizione 2.8.1 (Sollevamento orizzontale dei cammini). *Siano $\gamma \in \mathcal{C}_{tr}^1([0, 1], M)$ e $\sigma_0 \in P$, con $\pi(\sigma_0) = \gamma(0)$. Allora esiste un unico cammino $\tilde{\gamma}_{\sigma_0} \in \mathcal{C}_{tr}^1([0, 1], P)$, tale che*

eq:22.4a.1 (2.8.1)
$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(0) = \sigma_0, \\ \pi \circ \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) = \gamma(t), \quad \forall t \in [0, 1], \\ \frac{d^\pm \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)}{dt} \in HP, \quad \forall t \in [0, 1]. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo limitarci al caso in cui $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$. Poiché il fibrato ξ è localmente banale, esiste senz'altro una curva $\gamma^P \in \mathcal{C}^1([0, 1], P)$ tale che

$$\begin{cases} \gamma^P(0) = \sigma_0, \\ \pi \circ \gamma^P(t) = s(t), \quad \forall t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Cerchiamo allora la $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}$ nella forma

$$\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) = \gamma^P(t) \cdot a(t), \quad \text{con } a \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{G}).$$

Poiché

$$\frac{d\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)}{dt} = \dot{\gamma}^P(t)a(t) + \gamma^P(t)\dot{a}(t),$$

la condizione che $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}$ sia orizzontale si può riscrivere mediante

$$\begin{aligned} 0 = \omega\left(\frac{d\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)}{dt}\right) &= \omega(\dot{\gamma}^P(t)a(t)) + \omega(\gamma^P(t)\dot{a}(t)) = \omega(dR_{a(t)}(\dot{\gamma}^P)) + \omega_{\mathbf{G}}(\dot{a}(t)) \\ &= \text{Ad}(a(t)^{-1}) \circ \omega(\dot{\gamma}^P) + a(t)^{-1}\dot{a}(t). \end{aligned}$$

La $a(t)$ deve essere quindi soluzione dell'equazione

$$\dot{a}a^{-1} = \omega(\dot{\gamma}^P).$$

Per la [Proposizione 1.3.10](#), [prop:fp.1.1](#), quest'equazione ammette una ed una sola soluzione, e quindi anche la [\(2.8.1\)](#) [eq:22.4a.1](#) ha una ed una sola soluzione. \square

Definizione 2.8.2. L'unica soluzione $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}$ di [\(2.8.1\)](#) [eq:22.4a.1](#) si dice il *sollevamento orizzontale* di γ a partire dal punto σ_0 .

Sia $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], M)$.

Definizione 2.8.3. Il *trasporto parallelo* lungo γ , è l'applicazione

$$\text{eq:22.4a.2} \quad (2.8.2) \quad \tau_{\gamma} : P_{\gamma(0)} \ni \sigma \longrightarrow \tilde{\gamma}_{\sigma}(1) \in P_{\gamma(1)}.$$

Vale la seguente:

[prop:22.4a.2](#) **Proposizione 2.8.4.** Il trasporto parallelo gode delle seguenti proprietà:

(1) Per ogni $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], M)$ la $\tau_{\gamma} : P_{\gamma(0)} \rightarrow P_{\gamma(1)}$ è invertibile e⁶

$$\text{eq:22.4a.4} \quad (2.8.3) \quad \tau_{\gamma}^{-1} = \tau_{\gamma^{-1}}.$$

Inoltre

$$\text{eq:22.4a.3} \quad (2.8.4) \quad \tau_{\gamma}(\sigma \cdot a) = (\tau_{\gamma}(\sigma)) \cdot a, \quad \forall \sigma \in P_{\gamma(0)}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

(2) Se $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], M)$ e⁷ $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$, allora

$$\text{eq:22.4a.3} \quad (2.8.5) \quad \tau_{\gamma} = \tau_{\gamma_2} \circ \tau_{\gamma_1}.$$

⁶Indichiamo con γ^{-1} la curva $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$.

⁷Ricordiamo che $\gamma_1 \cdot \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$

2.9. Il gruppo di olonomia

sec:13.9

Notazione 2.9.1. Per ogni punto $p \in M$ indichiamo con $\mathcal{L}(p)$ lo spazio dei laccetti in p , di classe⁸ \mathcal{C}^1 a tratti. Ogni elemento γ di $\mathcal{L}(p)$ definisce un elemento $[\gamma]$ del gruppo fondamentale $\pi_1(M, p)$ di M con punto base p . Denotiamo con $\mathcal{L}_0(p)$ l'insieme dei laccetti γ con $[\gamma] = 0$.

Fissata una connessione principale Γ su $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$, il trasporto parallelo associa ad ogni laccetto $\gamma \in \mathcal{L}(p)$ un'applicazione τ_γ della fibra P_p in sé

eq:cop.9.3

$$(2.9.1) \quad \tau_\gamma : P_p \ni \sigma \longrightarrow \tilde{\gamma}_\sigma(1) \in P_p.$$

Lemma 2.9.2. Per ogni $p \in M$, l'insieme

eq:22.5.1

$$(2.9.2) \quad \Phi(p) = \{\tau_\gamma \mid \gamma \in \mathcal{L}(p)\}$$

dei trasporti paralleli corrispondenti a laccetti di classe \mathcal{C}^1 a tratti in p è un gruppo di permutazioni di P_p .

L'insieme

eq:22.5.2

$$(2.9.3) \quad \Phi_0(p) = \{\tau_\gamma \mid \gamma \in \mathcal{L}_0(p)\}$$

dei trasporti paralleli corrispondenti a laccetti di $\mathcal{L}(p)$ omotopi al laccetto costante è un sottogruppo normale di $\Phi(p)$. \square

Definizione 2.9.3. Chiamiamo $\Phi(p)$ gruppo di olonomia ed il suo sottogruppo normale $\Phi_0(p)$ gruppo di olonomia ristretto della connessione Γ in p .

Ad ogni $\sigma \in P_p$ associamo un monomorfismo del gruppo di olonomia nel gruppo strutturale mediante:

eq:cop.9.6

$$(2.9.4) \quad \rho_\sigma : \Phi(p) \ni \tau_\gamma \longrightarrow a = \sigma^{-1} \circ \tau_\gamma(\sigma) \in \mathbf{G}.$$

Definizione 2.9.4. I sottogruppi $\Phi(\sigma) = \rho_\sigma(\Phi(p))$ di \mathbf{G} e $\Phi_0(\sigma) = \rho_\sigma(\Phi_0(p))$ si dicono rispettivamente gruppo di olonomia e di olonomia ristretta di Γ in $\sigma \in P$.

Proposizione 2.9.5. Il gruppo di olonomia ristretta $\Phi_0(\sigma)$ è un sottogruppo normale del gruppo di olonomia $\Phi(\sigma)$. \square

Osservazione 2.9.6. Consideriamo in P la relazione di equivalenza “ \sim ” che identifica due elementi $\sigma_1, \sigma_2 \in P$ se è possibile trovare una curva orizzontale, di classe \mathcal{C}^1 a tratti, con punto iniziale σ_1 e punto finale σ_2 . Allora

$$(2.9.5) \quad \Phi(\sigma) = \{a \in \mathbf{G} \mid \sigma \cdot a \sim \sigma\}.$$

Proposizione 2.9.7. (1) Se $p \in M$, $\sigma \in P_p$, $a \in \mathbf{G}$, allora

eq:13166

$$(2.9.6) \quad \Phi(\sigma a) = \text{ad}(a^{-1})(\Phi(\sigma)), \quad \Phi_0(\sigma a) = \text{ad}(a^{-1})(\Phi_0(\sigma)).$$

⁸Possiamo definire i gruppi di olonomia utilizzando laccetti di classe \mathcal{C}^k a tratti, per $k \geq 1$. Un teorema di Nomizu e Ozeki [On the degree of differentiability of curves used in the definition of the holonomy group, Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 74-75] ci dice che diversi gradi di regolarità ($1 \leq k \leq \infty$) danno gli stessi gruppi di olonomia.

(2) Se $\sigma_0, \sigma_1 \in P$ possono essere congiunti con una curva orizzontale di classe \mathcal{C}^1 a tratti, allora

$$(2.9.7) \quad \Phi(\sigma_1) = \Phi(\sigma_0), \quad \Phi_0(\sigma_1) = \Phi_0(\sigma_0).$$

(3) In particolare, se M è connesso, allora tutti i gruppi di ologonomia $\Phi(\sigma)$, al variare di σ in P , sono coniugati tra loro come sottogruppi di \mathbf{G} .

DIMOSTRAZIONE. (1) È $\tilde{\gamma}_{\sigma a} = \tilde{\gamma}_{\sigma} a$ e quindi

$$(\sigma a)^{-1} \tilde{\gamma}_{\sigma a}(1) = a^{-1} \sigma^{-1} \tilde{\gamma}(1) a = \text{ad}(a^{-1})(\sigma^{-1} \tilde{\gamma}(1)),$$

da cui segue la [eq: 13166](#) (2.9.6).

(2) Sia \tilde{s} una curva orizzontale di classe \mathcal{C}^1 a tratti che congiunga σ_0 a σ_1 ed $s = \pi \circ \tilde{s}$ la sua proiezione su M . Per ogni $a \in \Phi(\sigma_0)$, possiamo trovare un laccetto $\gamma \in \mathcal{L}(\pi(\sigma_0))$ tale che $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(1) = \sigma_0 a$. La curva $\tilde{s} a$ è una curva orizzontale di estremi $\sigma_0 a$ e $\sigma_1 a$. Quindi la curva $(\tilde{s} a) \cdot \tilde{\gamma}_{\sigma_0} \cdot \tilde{s}^{-1}$ è una curva orizzontale che rialza il laccetto $s \cdot \gamma \cdot s^{-1} \in \mathcal{L}(\pi(\sigma_1))$ e che congiunge σ_1 a $\sigma_1 a$. Questo dimostra che $a \in \Phi(\sigma_1)$. Quindi $\Phi(\sigma_0) \subset \Phi(\sigma_1)$. Ripetendo lo stesso ragionamento possiamo dimostrare anche l'inclusione opposta. Per completare la dimostrazione del punto (2), basta osservare che $s \cdot \gamma \cdot s^{-1} \in \mathcal{L}_0(\pi(\sigma_1))$ se $\gamma \in \mathcal{L}_0(\pi(\sigma_0))$.

La (3) è conseguenza immediata della (2) e della (1). \square

Vale⁹ il:

thm: 13244

Teorema 2.9.8. Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} , con base connessa, su cui abbiamo fissato una connessione principale Γ . Sia σ_0 un punto di P . Allora:

- (a) $\Phi_0(\sigma_0)$ è un sottogruppo di Lie connesso di \mathbf{G} .
- (b) $\Phi_0(\sigma_0)$ è un sottogruppo normale di $\Phi(\sigma_0)$ ed il quoziente $\Phi(\sigma_0)/\Phi_0(\sigma_0)$ è al più numerabile.
- (c) In particolare, $\Phi(\sigma_0)$ è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} , e $\Phi_0(\sigma_0)$ è la sua componente connessa dell'identità.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma \in \mathcal{L}_0(p)$ un laccetto omotopo all'identità. Se $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ è un'omotopia di laccetti di classe \mathcal{C}^1 a tratti di γ con il laccetto costante, allora $[0, 1] \ni t \rightarrow \sigma_0^{-1} \tau_{F_t}(\sigma_0)$ è un cammino continuo in $\Phi_0(\sigma_0)$ che congiunge $\sigma_0^{-1} \tau_\gamma(\sigma_0)$ con l'identità. Per il teorema di Freudenthal citato nella nota, ne segue che $\Phi_0(\sigma_0)$ è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} .

La seconda affermazione segue dal fatto che $\Phi_0(\sigma_0)$ è un sottogruppo normale ed abbiamo un omomorfismo surgettivo

$$\pi_1(M) \longrightarrow \Phi(\sigma_0)/\Phi_0(\sigma_0).$$

Poiché M è connesso e paracompatto, il suo gruppo fondamentale è al più numerabile e da questa osservazione ricaviamo la tesi. \square

⁹ Per la dimostrazione di questo risultato, è utile utilizzare il seguente teorema di Freudenthal [Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomen I Ann. of Math. 42 (1941) 1051-1074]: Un sottogruppo \mathbf{H} connesso per archi di un gruppo di Lie \mathbf{G} , in cui ogni coppia di punti si possa congiungere con un arco di classe \mathcal{C}^1 a tratti, è un sottogruppo di Lie di \mathbf{G} .

Dal Teorema ^{thm:13244}2.9.8 segue subito il

thm:13245

Teorema 2.9.9 (di riduzione). *Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} , e supponiamo M connesso e paracompatto. Sia Γ una connessione principale su ξ . Fissiamo $\sigma_0 \in P$ e sia $P(\sigma_0)$ l'insieme dei punti di P che possono essere congiunti a σ_0 da un cammino orizzontale. Allora:*

- (i) $\xi_{\sigma_0} = (P(\sigma_0) \xrightarrow{\pi} M)$ è un sottofibrato principale di ξ , con gruppo strutturale $\Phi(\sigma_0)$.
- (ii) La connessione Γ su ξ si riduce ad una connessione Γ' su ξ_{σ_0} .

Definizione 2.9.10. Chiamiamo ξ_{σ_0} il fibrato d'olonomia per σ_0 .

Differenziazione covariante e curvatura

ch:13a

sec:138

3.1. Differenziale di forme tensoriali e pseudotensoriali

Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale, con gruppo strutturale \mathbf{G} . Nel seguito di questo paragrafo penseremo fissata una connessione principale Γ su ξ ed una rappresentazione lineare (ρ, V) del suo gruppo strutturale. Nel §1.11.2 del Capitolo I abbiamo definito le forme tensoriali e pseudotensoriali associate a (ρ, V) .

Osservazione 3.1.1. La forma di Cartan ω di Γ è un esempio di forma pseudotensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$, che non è tensoriale se $\mathfrak{g} \neq 0$.

Definizione 3.1.2. Il differenziale esterno covariante $D\phi \in \Omega_{\rho,0}^{q+1}(P, V)$ di una q -forma pseudotensoriale $\phi \in \Omega_{\rho}^q(P, V)$, è definito da:

$$(3.1.1) \quad D\phi(X_0, X_1, \dots, X_q) = d\phi(\text{pr}_h(X_0), \text{pr}_h(X_1), \dots, \text{pr}_h(X_q)) \\ \forall X_0, X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(P).$$

Teorema 3.1.3. Sia $\phi \in \Omega_{\rho}^q(P, V)$ una q -forma pseudotensoriale di tipo (ρ, V) . Allora:

- (a) $\phi \circ \text{pr}_h$ è una q -forma tensoriale di tipo (ρ, V) ;
- (b) $d\phi$ è una $(q+1)$ -forma pseudotensoriale di tipo (ρ, V) ;
- (c) $D\phi = (d\phi) \circ \text{pr}_h$ è una $(q+1)$ -forma tensoriale di tipo (ρ, V) . \square

Alla rappresentazione lineare (ρ, V) del gruppo di Lie \mathbf{G} corrisponde una rappresentazione (ρ_*, V) della sua algebra di Lie \mathfrak{g} , definita da

$$(3.1.2) \quad \rho_*(A)v = d\rho_e(A)(v) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \rho(e^{tA}) \cdot v, \quad \forall A \in \mathfrak{g}, \forall v \in V.$$

La $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V)$ è una rappresentazione lineare dell'algebra di Lie \mathfrak{g} : è cioè lineare e soddisfa

$$(3.1.3) \quad \rho_*([A, B]) = [\rho_*(A), \rho_*(B)], \quad \forall A, B \in \mathfrak{g}.$$

Notazione 3.1.4. Ricordiamo la notazione introdotta nella Definizione 1.11.14.

Data una forma pseudotensoriale $\phi \in \Omega_{\rho}^q(P, V)$, di tipo (ρ, V) , indichiamo con $\omega \wedge_{\rho} \phi \in \Omega^{q+1}(P, V)$ la forma

$$(3.1.4) \quad (\omega \wedge_{\rho} \phi)(X_0, \dots, X_q) = \sum_{h=0}^q (-1)^h [\rho_*(\omega(X_h))] (\phi(X_0, \dots, \widehat{X}_h, \dots, X_q)).$$

Vale il seguente :

LMMACB

Lemma 3.1.5. Se $\phi \in \Omega_{\rho,0}^q(P, V)$ è una r -forma tensoriale di tipo (ρ, V) , allora

eq:cop.3.5

$$(3.1.5) \quad D\phi = d\phi + \omega \wedge_{\rho} \phi.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare che

eq:1389

$$(*) \quad D\phi(X_0, \dots, X_q) = d\phi(X_0, \dots, X_q) + (\omega \wedge_{\rho} \phi)(X_0, \dots, X_q)$$

quando X_0, \dots, X_q siano o campi verticali fondamentali associati ad elementi dell'algebra di Lie \mathfrak{g} , oppure sollevamenti orizzontali di campi di vettori su M . La formula è banalmente vera quando gli X_i siano tutti orizzontali ed anche quando almeno due di essi siano campi fondamentali, corrispondenti cioè ad elementi di \mathfrak{g} .

Basterà dunque dimostrare la (*) nel caso in cui $X_0 = A^*$ con $A \in \mathfrak{g}$ ed $X_i = \tilde{Z}_i$ con $Z_i \in \mathfrak{X}(M)$, per $1 \leq i \leq q$, siano sollevamenti orizzontali. Ricordiamo la relazione fondamentale tra il differenziale e la derivata di Lie:

$$L_{X_0}\phi = X_0 \lrcorner d\phi + d(X_0 \lrcorner \phi).$$

Da essa ricaviamo che

$$\begin{aligned} (L_{A^*}\phi)(X_1, \dots, X_q) &= d\phi(A^*, X_1, \dots, X_q) + d(A^* \lrcorner \phi)(X_1, \dots, X_q) \\ &= d\phi(A^*, X_1, \dots, X_q) \end{aligned}$$

perché $A^* \lrcorner \phi = 0$ in quanto ϕ è tensoriale. Il campo A^* è il generatore infinitesimale di $t \rightarrow R_{\exp(tA)}$. Abbiamo perciò

$$\begin{aligned} (L_{A^*}\phi)(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_q) &= \left. \frac{dR_{\exp(tA)}^*(\phi)}{dt} \right|_{t=0} (\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_q) \\ &= \left. \frac{d\rho(\exp(-tA)) \cdot \phi}{dt} \right|_{t=0} (\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_q) \\ &= -d\rho(e)(A)(\phi(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_q)) = -(\omega \wedge_{\rho} \phi)(A^*, \tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_q) \end{aligned}$$

e quindi

$$d\phi(A^*, \tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_q) + (\omega \wedge_{\rho} \phi)(A^*, \tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_q) = 0.$$

La (*) è verificata, perché

$$D\phi(A^*, \tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_q) = (A^* \lrcorner D\phi)(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_q) = 0,$$

in quanto $D\phi$ è tensoriale. □

sec:14.8

3.2. Differenziazione covariante di sezioni di fibrati vettoriali

Indichiamo con ξ_V il fibrato vettoriale associato ad una rappresentazione lineare (ρ, V) del gruppo strutturale \mathbf{G} di ξ . Utilizzando l'isomorfismo Λ_V descritto nella Proposizione 1.11.18, e il differenziale esterno covariante, possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 3.2.1. La differenziazione covariante d^{∇} (o connessione lineare) su ξ_V , associata alla connessione principale Γ su ξ , è l'applicazione lineare

eq:14.8.5

$$(3.2.1) \quad d^{\nabla} : \Omega^q(M, E_V) \xrightarrow{\Lambda_V^{-1} \circ D \circ \Lambda_V} \Omega^{q+1}(M, E_V), \quad q \geq 0.$$

Abbiamo quindi un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^r(M, E_V) & \xrightarrow{d^\nabla} & \Omega^{r+1}(M, E_V) \\ \Lambda_V \downarrow & & \downarrow \Lambda_V \\ \Omega_{\rho,0}^r(P, V) & \xrightarrow{D} & \Omega_{\rho,0}^{r+1}(P, V). \end{array}$$

prop: 14.8.3

Proposizione 3.2.2. Valgono le formule:

$$\begin{cases} d^\nabla(fs) = s \otimes df + f d^\nabla s & \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall s \in \Gamma(M, E_V), \\ d^\nabla(s \otimes \beta) = s \otimes d\beta + d^\nabla s \otimes \beta & \forall s \in \Gamma(M, E_V), \forall \beta \in \Omega^r(M). \quad \square \end{cases}$$

def: 13a33

Definizione 3.2.3. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed $s \in \Gamma(M, E_V)$, la sezione $d^\nabla s(X) \in \Gamma(M, E_V)$ si indica con $\nabla_X s$ e si dice *derivata covariante di s rispetto ad X* .

Siano $s \in \Gamma(M, E_V)$, ed $\tilde{s} \in \mathcal{C}^\infty(P, V)$ il suo sollevamento ($\tilde{s}(\sigma) = \sigma^{-1} s(\pi(\sigma))$). Abbiamo allora

eq: 14.8.6

$$(3.2.2) \quad \widetilde{\nabla_X s} = \tilde{X} \tilde{s}, \quad \forall s \in \Gamma(M, E_V), \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Osservazione 3.2.4. Gli elementi di $\Omega^q(M, E_V)$ sono sezioni di un fibrato vettoriale su M , ma questo non è, in generale, associato ad una rappresentazione lineare di \mathbf{G} . Di una forma di grado positivo possiamo quindi definire il differenziale, ma non la derivata covariante rispetto ad un campo di vettori.

Lemma 3.2.5. Sia p un punto di M . Abbiamo:

$$(3.2.3) \quad \text{supp } d^\nabla \phi \subset \text{supp } \phi, \quad \forall \phi \in \Omega^*(M, E_V),$$

$$(3.2.4) \quad d^\nabla \phi_1(p) = d^\nabla \phi_2(p) \quad \text{se } \phi_1 = \phi_2 \text{ in un intorno di } p,$$

$$(3.2.5) \quad \text{supp } \nabla_X s \subset \text{supp } X \cap \text{supp } s, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall s \in \Gamma(M, E_V),$$

$$(3.2.6) \quad \begin{cases} \nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} s = f_1 \nabla_{X_1} s + f_2 \nabla_{X_2} s, \\ \forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M), \forall s \in \Gamma(M, E_V), \end{cases}$$

$$(3.2.7) \quad \nabla_X(f s) = (Xf)s + f \nabla_X s, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall s \in \Gamma(M, E_V),$$

$$(3.2.8) \quad \nabla_X(s_1 + s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall s_1, s_2 \in \Gamma(M, E_V),$$

$$(3.2.9) \quad \nabla_X s(p) = \nabla_Y s(p) \quad \text{se } X_p = Y_p, \quad \forall s \in \Gamma(M, E_V).$$

In particolare, se U è un aperto di M e $\phi \in \Omega^q(U, E_V)$, $X \in \mathfrak{X}(U)$, $s \in \Gamma(U, E_V)$, $v \in T_p M$, $p \in U$, possiamo definire senza ambiguità $d^\nabla \phi \in \Omega^{q+1}(U, E_V)$, $\nabla_X s \in \Gamma(U, E_V)$, $\nabla_v s \in E_{V_p}$.

3.3. Espressione locale del differenziale covariante

Possiamo utilizzare le forme di Christoffel relative ad un atlante di trivializzazione di ξ per ricavare espressioni esplicite del differenziale covariante.

Sia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ un atlante di trivializzazione di ξ . Data la forma di Cartan ω di una connessione principale su ξ , abbiamo posto

$$\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g}), \quad (\text{FORME DI CHRISTOFFEL}),$$

$$\theta_{\alpha,\beta} = \psi_{\alpha,\beta}^* \omega_{\mathbf{G}} = \psi_{\alpha,\beta}^{-1} d\psi_{\alpha,\beta} \in \Omega^1(U_\alpha \cap U_\beta, \mathfrak{g}).$$

Il pullback su $U_\alpha \times \mathbf{G}$ della connessione su ξ per mezzo della trivializzazione ha forma di Cartan $\tilde{\omega}_\alpha = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega_\alpha + a^{-1} da$. Quindi il sollevamento orizzontale \tilde{X}^α ad $U_\alpha \times \mathbf{G}$ di un campo $X \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$ è definito da¹

$$\text{eq: 14.9.0} \quad (3.3.1) \quad \tilde{X}^\alpha = X - (\text{Ad}(a^{-1})\omega_\alpha(X))^*.$$

Fissiamo una rappresentazione lineare (ρ, V) di \mathbf{G} e scriviamo per semplicità E invece di E_V per indicare lo spazio totale di ξ_V . Ad una $s \in \Gamma(M, E)$ associamo le funzioni $s_\alpha = \sigma_\alpha^{-1} s \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, V)$. Esse si rialzano a funzioni $\tilde{s}_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha \times \mathbf{G}, V)$, definite da

$$\tilde{s}_\alpha(p, a) = \rho(a^{-1})s_\alpha(p), \quad \forall p \in U_\alpha, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Se $A \in \mathfrak{g}$, abbiamo

$$A^* \tilde{s}_\alpha(p, a) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \rho(e^{-tA} a^{-1})s_\alpha(p) = -\rho(a^{-1})\rho_*(\text{Ad}(a)(A))s_\alpha(p).$$

Otteniamo perciò

$$\text{eq: 13132} \quad (3.3.2) \quad \tilde{X} \tilde{s}_\alpha = \rho(a)^{-1}(X - [\text{Ad}(a^{-1})\omega_\alpha(X)]^*)\tilde{s}_\alpha = \rho(a)^{-1}(Xs + \rho_*(\omega_\alpha(X))s).$$

Definizione 3.3.1. Le forme

$$\text{eq2130} \quad (3.3.3) \quad \gamma_\alpha = \rho_* \circ \omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(V))$$

si dicono le *forme di Christoffel* della differenziazione covariante ∇ di ξ_V , nell'atlante di trivializzazione $\{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$.

Abbiamo dimostrato la seguente :

Proposizione 3.3.2. *La differenziazione covariante si esprime, per mezzo delle forme di Christoffel (3.3.3), mediante*

$$\text{eq: cop. 6.1} \quad (3.3.4) \quad d^\nabla(\sigma_\alpha f) = \sigma_\alpha \cdot (df + \gamma_\alpha(f)), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, V).$$

Più in generale, ogni $\phi \in \Omega^q(M, E)$ può essere descritta da una famiglia di forme differenziali $\{\phi_\alpha \in \Omega^q(U_\alpha, V)\}$, caratterizzate da

$$\phi = \sigma_\alpha \phi_\alpha \quad \text{su } U_\alpha.$$

Definiamo $\gamma_\alpha \wedge \phi_\alpha \in \Omega^{q+1}(U_\alpha, V)$ ponendo, per ogni $X_0, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(U_\alpha)$,

$$\text{eq: 14.9.6} \quad (3.3.5) \quad \gamma_\alpha \wedge \phi_\alpha(X_0, \dots, X_q) = \sum_{j=0}^q (-1)^j \gamma_\alpha(X_j)(\phi_\alpha(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q)).$$

Possiamo associare ad una $\psi \in \Omega^q(U_\alpha, V)$ la $\sigma_\alpha \psi \in \Omega^q(U_\alpha, E_V)$ definita da

$$\text{eq: 14.9.3} \quad (3.3.6) \quad (\sigma_\alpha \psi)(X_1, \dots, X_q) = \sigma_\alpha(p) \cdot \psi(X_1, \dots, X_q) \in E_{V,p}, \quad \forall X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(U_\alpha).$$

Per la Proposizione 3.2.2, otteniamo la formula:

$$\text{eq: 14.9.4} \quad (3.3.7) \quad d^\nabla \phi = \sigma_\alpha \cdot (d\phi_\alpha + \gamma_\alpha \wedge \phi_\alpha) \quad \text{su } U_\alpha.$$

¹Come in precedenza, abbiamo identificato $T(U_\alpha \times \mathbf{G})$ con il prodotto Cartesiano $(TU_\alpha) \times (T\mathbf{G})$, ed indicato con B^* il campo di vettori invariante a sinistra corrispondente a $B \in \mathfrak{g}$.

3.4. Forma di curvatura ed equazioni di struttura

Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} , su cui sia stata fissata una connessione principale con forma di Cartan ω . Indichiamo con \mathfrak{g} l'algebra di Lie di \mathbf{G} . Ricordiamo che ω è pseudotensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$.

Definizione 3.4.1. La *forma di curvatura* di Γ è la 2-forma tensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$:

$$(3.4.1) \quad \Omega = D\omega \in \Omega_{\text{Ad},0}^2(P, \mathfrak{g}).$$

Ricordiamo che il fatto che Ω sia una 2-forma tensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$ significa che valgono le:

- (a) $R_a^* \Omega = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \Omega \quad \forall a \in \mathbf{G}$
- (b) $\Omega(X, Y) = 0$ se X oppure Y è verticale.

TMACURV

Teorema 3.4.2. La *forma di curvatura soddisfa l'equazione di struttura*²

14.7.1

$$(3.4.2) \quad \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega].$$

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che

$$(*) \quad \Omega(X, Y) = \left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] \right)(X, Y)$$

quando $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$ siano o fondamentali, o sollevamenti orizzontali di campi su M .

Distinguiamo i diversi casi.

Se $X = A^*$, $Y = B^*$, con $A, B \in \mathfrak{g}$, sono entrambi fondamentali, allora $\Omega(X, Y) = 0$ e la (*) si riduce a

$$d\omega(A^*, B^*) = A^*(B) - B^*(A) - \omega([A^*, B^*]) = -[A, B] = -\frac{1}{2}[\omega \wedge \omega](A^*, B^*).$$

Siano ora $X = A^*$, con $A \in \mathfrak{g}$, ed $Y = \tilde{Z}$, con $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Ancora, $\Omega(X, Y) = \Omega(A^*, \tilde{Z}) = 0$. Poiché ora anche

$$[\omega \wedge \omega](A^*, \tilde{Z}) = 0,$$

in quanto $\omega(\tilde{Z}) = 0$, la (*) si riduce a

$$d\omega(A^*, \tilde{Z}) = A^*(0) - \tilde{Z}(A) - \omega([A^*, \tilde{Z}]) = -\omega([A^*, \tilde{Z}]) = 0.$$

Infatti, $[A^*, \tilde{Z}] = L_{A^*}(\tilde{Z}) = 0$ perché \tilde{Z} è invariante rispetto all'azione di \mathbf{G} su P .

Infine, nel caso in cui $X = \tilde{Z}_1$, $Y = \tilde{Z}_2$, con $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M)$, la (*) si riduce ad $[\omega \wedge \omega](\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) = 0$, e $D\omega(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) = d\omega(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2)$. \square

Osservazione 3.4.3. In particolare, abbiamo

eq:14.7.3a

$$(3.4.3) \quad \Omega(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) = -\omega([\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2]), \quad \forall Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M).$$

Il tensore di curvatura misura quindi la non integrabilità formale della distribuzione orizzontale.

²Non possiamo utilizzare la (5.1.5) per il calcolo del differenziale esterno covariante di ω , perché ω è pseudotensoriale, ma non tensoriale.

TMABIAN

Teorema 3.4.4 (identità di Bianchi). *La forma di curvatura Ω soddisfa l'identità differenziale di Bianchi*

eq294

$$(3.4.4) \quad D\Omega = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\Omega \in \Omega_{\text{Ad},0}^2(P, \mathfrak{g})$ è una 2-forma tensoriale di tipo $(\mathfrak{g}, \text{Ad})$, abbiamo per il Lemma 3.1.5 e per l'equazione di struttura :

$$\begin{aligned} D\Omega &= d\Omega + [\omega \wedge \Omega] \\ &= d(d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]) + [\omega \wedge \Omega] \\ &= \frac{1}{2}([d\omega \wedge \omega] - [\omega \wedge d\omega]) + [\omega \wedge d\omega] + \frac{1}{2}[\omega \wedge [\omega \wedge \omega]] \\ &= \frac{1}{2}[\omega \wedge [\omega \wedge \omega]] = 0, \end{aligned}$$

perché una 3-forma tensoriale che si annulli sui vettori orizzontali è nulla. \square

3.5. Connessioni piatte

In questo paragrafo consideriamo il caso di connessioni principali con forma di curvatura nulla.

Definizione 3.5.1. Sia $\xi = (M \times \mathbf{G} \xrightarrow{\pi} M)$ il fibrato banale e $\pi_{\mathbf{G}} : M \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ Denotiamo con la proiezione sulla seconda coordinata. Il pullback $\omega = \pi_{\mathbf{G}}^* \omega_{\mathbf{G}}$ della forma di Maurer-Cartan su \mathbf{G} è la forma di Cartan di una connessione principale su ξ , che si dice la *connessione canonica*.

Definizione 3.5.2. Chiamiamo *piatta* una connessione principale localmente isomorfa alla connessione canonica.

Teorema 3.5.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una connessione principale sia piatta è che la sua forma di curvatura sia identicamente nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, la forma di curvatura è nulla se e soltanto se la distribuzione orizzontale è formalmente e quindi completamente integrabile. \square

Teorema 3.5.4. *Se la sua base M è semplicemente connessa, il fibrato principale ξ ammette una connessione principale piatta se e soltanto se è isomorfo al fibrato banale, ed una connessione piatta su ξ è isomorfa alla connessione canonica.*

Osservazione 3.5.5. In generale, se ξ ammette una connessione principale, le foglie complete della sua distribuzione orizzontale sono tra loro diffeomorfe e sono dei rivestimenti della base M .

3.6. La famiglia delle connessioni principali

Se ω ed ω' sono le forme di Cartan di due connessioni principali su ξ , la differenza $\eta = \omega' - \omega$ è una uno-forma tensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$ e quindi definisce una forma $\varphi \in \Omega^1(M, V_{\mathfrak{g}})$. Abbiamo quindi

Proposizione 3.6.1. *Lo spazio delle connessioni principali su ξ è uno spazio affine con spazio vettoriale associato $\Omega_{\text{Ad},0}(P) \simeq \Omega^1(M, V_{\mathfrak{g}})$.*

Osservazione 3.6.2. Utilizziamo le notazioni introdotte nei paragrafi precedenti. La forma di Christoffel $\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega$ si può interpretare come l'elemento di $\Omega^1(M, V_\mathfrak{g})$ che corrisponde alla differenza tra $\Psi_\alpha^* \omega$ e la connessione canonica su $U_\alpha \times \mathbf{G}$.

3.7. Rappresentazione aggiunta e tensore di curvatura

Indichiamo con $\xi_\mathfrak{g} = (E_\mathfrak{g} \xrightarrow{\pi_\mathfrak{g}} M)$ il fibrato vettoriale corrispondente alla rappresentazione aggiunta di \mathbf{G} . L'isomorfismo $\Lambda_\mathfrak{g} : \Omega^*(M, E_\mathfrak{g}) \rightarrow \Omega_{\text{Ad},0}^*(P, \mathfrak{g})$ della Proposizione I.11.18 e la Proposizione I.11.15 ci permettono di introdurre la seguente³

Definizione 3.7.1. Se $\phi \in \Omega^r(M, E_\mathfrak{g})$ e $\psi \in \Omega^s(M, E_V)$, per una rappresentazione lineare (ρ, V) di \mathbf{G} , definiamo $\phi \wedge_\rho \psi$ come la forma in $\Omega^{r+s}(M, E_V)$ tale che

$$\text{eq: 14. t. 0} \quad (3.7.1) \quad \Lambda_V(\phi \wedge_\rho \psi) = \Lambda_\mathfrak{g}(\phi) \wedge_\rho \Lambda_V(\psi).$$

Nel caso in cui $\phi, \psi \in \Omega^*(M, E_\mathfrak{g})$, useremo la notazione

$$[\phi \wedge \psi] \quad \text{per indicare} \quad \phi \wedge_{\text{Ad}} \psi.$$

Definizione 3.7.2. Se $\psi \in \Omega^p(M, E_V)$ ed $\alpha \in \Omega^q(M)$, indichiamo con $\psi \wedge \alpha$ l'elemento di $\Omega^{p+q}(M, E_V)$ definito da

$$\text{eq: 13142} \quad (3.7.2) \quad (\psi \wedge \alpha)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum' (-1)^p \varepsilon(k) \alpha(X_{k_{p+1}}, \dots, X_{k_{p+q}}) \psi(X_{k_1}, \dots, X_{k_p}),$$

per ogni $X_1, \dots, X_{p+q} \in \mathfrak{X}(M)$, ove la somma è estesa a tutte le permutazioni k di $\{1, \dots, p+q\}$ con $k_1 < \dots < k_p$ e $k_{p+1} < \dots < k_{p+q}$.

Osservazione 3.7.3. Se $\phi \in \Omega^p(M, E_\mathfrak{g})$, $\psi \in \Omega^q(M, E_V)$ ed $\alpha \in \Omega^r(M)$, allora

$$\text{eq: 13141} \quad (3.7.3) \quad \phi \wedge_\rho (\psi \wedge \alpha) = (\phi \wedge_\rho \psi) \wedge \alpha.$$

Lemma 3.7.4. Ogni elemento di $\Omega^p(M, E_V)$ si può scrivere come una somma localmente finita di forme $s \cdot \alpha$ con $s \in \Gamma(M, E_V)$, $\alpha \in \Omega^p(M)$. \square

Le formule (3.7.2) e (3.7.3) ed il Lemma 3.7.4 ci saranno utili per semplificare, più avanti, il calcolo di alcune espressioni.

La forma di curvatura Ω di una connessione principale Γ su ξ è di tipo tensoriale per la rappresentazione aggiunta di \mathbf{G} . Essa determina quindi un elemento $R \in \Omega^2(M, E_\mathfrak{g})$ tale che

$$\text{eq: 13148} \quad (3.7.4) \quad R(X_p, Y_p) = \sigma \Omega(\tilde{X}_\sigma, \tilde{Y}_\sigma), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall p \in M, \quad \forall \sigma \in P_p.$$

Definizione 3.7.5. Il tensore alternato $R \in \Omega^2(M, E_\mathfrak{g})$ definito dalla (3.7.4) si dice *tensore di curvatura* della connessione principale Γ su ξ .

Teorema 3.7.6. Siano $\{\omega_\alpha\}$ le forme di Christoffel di Γ in un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ di ξ . Allora

$$\text{eq: 14. t. 4} \quad (3.7.5) \quad R|_{U_\alpha} = \sigma_\alpha \cdot (d\omega_\alpha + \frac{1}{2}[\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha]), \quad \forall \alpha \in I.$$

³cf. la Definizione I.11.14 def: 14. 6. 3

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione ^{prop:12139} 1.11.19, abbiamo

$$R|_{U_\alpha} = \sigma_\alpha \cdot \sigma_\alpha^* \Omega = \sigma_\alpha \cdot \sigma_\alpha^* (d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]) = \sigma_\alpha \cdot (d\omega_\alpha + \frac{1}{2}[\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha]).$$

□

thm:14.10.2

Teorema 3.7.7. *Sia (ρ, V) una rappresentazione lineare di \mathbf{G} . Allora, per ogni $\phi \in \Omega^q(M, E_V)$ abbiamo*

eq:14.t.3

$$(3.7.6) \quad (d^\nabla)^2 \phi = d^\nabla d^\nabla \phi = R \wedge_\rho \phi.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $s \in \Gamma(M, E_V)$ ed $\alpha \in \Omega^q(M)$, abbiamo:

$$d^\nabla d^\nabla (s\alpha) = d^\nabla ((d^\nabla s) \wedge \alpha + s d\alpha) = (d^\nabla d^\nabla s) \wedge \alpha - d^\nabla s \wedge d\alpha + d^\nabla s \wedge d\alpha = (d^\nabla d^\nabla s) \wedge \alpha.$$

Utilizzando il Lemma ^{lem:13231} 3.7.4 possiamo limitarci quindi a dimostrare la formula nel caso in cui $\phi = s \in \Omega^0(M, E_V) = \Gamma(M, E_V)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} D^2 \tilde{s} &= D(d\tilde{s} + \omega \wedge_\rho \tilde{s}) = d\omega \wedge_\rho \tilde{s} - \omega \wedge_\rho d\tilde{s} + \omega \wedge_\rho (d\tilde{s} + \omega \wedge_\rho \tilde{s}) \\ &= d\omega \wedge_\rho \tilde{s} + \omega \wedge_\rho (\omega \wedge_\rho \tilde{s}). \end{aligned}$$

Per completare la dimostrazione della ^{eq:14.t.3} (3.7.6) è sufficiente osservare che $D^2 \tilde{s}$ è una due-forma tensoriale di tipo (ρ, V) e che l'uguaglianza $D^2 \tilde{s} = \Omega \wedge_\rho \tilde{s}$ è verificata su ogni coppia di campi di vettori orizzontali. □

cor:14.10.3

Corollario 3.7.8. *Se $s \in \Gamma(M, E_V)$, abbiamo*

eq:14.t.7

$$(3.7.7) \quad R(X, Y) \wedge_\rho s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s, \\ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall s \in \Gamma(M, E_V).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma(M, E_V)$. Posto $\phi = d^\nabla s$, abbiamo $\tilde{\phi}(\tilde{Z}) = \tilde{Z}\tilde{s} = \widetilde{\nabla_Z s}$ per ogni $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e quindi:

$$\begin{aligned} d\tilde{\phi}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \tilde{X}\tilde{\phi}(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\tilde{\phi}(\tilde{X}) - \tilde{\phi}([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = (\tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X} - [\tilde{X}, \tilde{Y}])\tilde{s}, \\ &= \sigma^{-1}(\nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s) \circ \pi. \end{aligned}$$

Per il teorema ^{thm:14.10.2} 3.7.7 otteniamo la ^{eq:14.t.7} (3.7.7). □

3.8. Trasporto parallelo di vettori

sec13151

Il sollevamento orizzontale di cammini descritto nel ^{sec:14.14} §2.8 del Capitolo 2 ci per-
mettere di definire il trasporto parallelo lungo i cammini in M di vettori dei fibrati
vettoriali associati alle rappresentazioni lineari del suo gruppo strutturale.

Sia $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], M)$ e $\tilde{\gamma}_{\sigma_0} \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], P)$ il suo sollevamento orizzontale
a partire dal punto $\sigma_0 \in P_{\gamma(0)}$. Se (ρ, V) è una rappresentazione lineare di \mathbf{G} e
 $v_0 \in E_{V, s(0)}$, allora $v_0 = \sigma_0^{-1} v_0 \in V$ e $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)v_0$ è un sollevamento differenziabile di
 γ ad un cammino in $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], E_V)$, con punto iniziale v_0 .

Se σ'_0 è un altro punto di $P_{\gamma(0)}$, è $\sigma'_0 = \sigma_0 a$ per un elemento $a \in \mathbf{G}$ ed il
sollevamento orizzontale di γ con punto iniziale σ'_0 è $\tilde{\gamma}_{\sigma'_0}(t) = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \cdot a$. Poiché

$$\begin{aligned} v'_0 &= \sigma'^{-1}_0 v_0 = (\sigma_0 a)^{-1} v_0 = \rho(a^{-1}) \sigma_0^{-1} v_0 = \rho(a^{-1}) v_0, \\ \text{otteniamo } \tilde{\gamma}_{\sigma'_0}(t) v'_0 &= \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \cdot a v'_0 = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) v_0. \end{aligned}$$

La curva $\tilde{\gamma}_{v_0}(t) = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)v_0$ in E_V è quindi indipendente dalla scelta del punto iniziale σ_0 in $P_{\gamma(0)}$.

Definizione 3.8.1. La curva $\tilde{\gamma}_{v_0} = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)\sigma_0^{-1}v_0 \in \mathcal{C}_t^1([0, 1], E_V)$ si dice il *trasporto parallelo di v_0 lungo la curva γ* .

Possiamo considerare una curva $v \in \mathcal{C}^1([0, 1], E_V)$ come un *campo di vettori lungo il cammino* $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$ definito dalla sua proiezione $\gamma(t) = \pi_V(v(t))$. Se $\tilde{\gamma}_{\sigma_0} \in \mathcal{C}^1([0, 1], P)$ è il sollevamento orizzontale di γ di punto iniziale $\sigma_0 \in P_{\gamma(0)}$, la composizione $v_{\sigma_0}(t) = (\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t))^{-1}v(t)$ è un cammino $v_{\sigma_0} \in \mathcal{C}^1([0, 1], V)$ e possiamo quindi calcolarne la derivata $\dot{v}_{\sigma_0} = \frac{d}{dt}v_{\sigma_0}$. Se $a \in \mathbf{G}$ e $\sigma'_0 = \sigma_0 a$, allora $\tilde{\gamma}_{\sigma'_0}(t) = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \cdot a$ è il sollevamento di γ con punto iniziale σ'_0 . Quindi $v_{\sigma'_0}$ è $a^{-1}v_{\sigma_0}$ ed abbiamo perciò

$$\tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t)\dot{v}_{\sigma_0} = \tilde{\gamma}_{\sigma'_0}\dot{v}_{\sigma'_0}.$$

Quindi $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}\dot{v}_{\sigma_0}$ è un campo di vettori lungo γ , indipendente dalla scelta del punto iniziale σ_0 del sollevamento. Possiamo introdurre quindi la

Definizione 3.8.2. Sia $v \in \mathcal{C}^1([0, 1], E_V)$ un campo di vettori lungo una curva $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$ e sia $\tilde{\gamma}_{\sigma_0}$ il sollevamento orizzontale di γ , a partire da un punto $\sigma_0 \in P_{s(0)}$. La

$$\text{eq: 14139} \quad (3.8.1) \quad \frac{Dv}{dt} = \tilde{\gamma}_{\sigma_0}(t) \left(\frac{d[(\tilde{\gamma}_{\sigma_0})^{-1}v(t)]}{dt} \right)$$

si dice *derivata covariante di v lungo la curva s* . Se

$$\text{eq: 141310} \quad (3.8.2) \quad \frac{Dv}{dt} = 0$$

diciamo che il campo di vettori v è *parallelo* lungo la curva γ .

Osservazione 3.8.3. Il campo di vettori v è parallelo lungo la curva γ se e soltanto se v è il trasporto parallelo lungo γ del vettore $v(0)$.

Abbiamo

Proposizione 3.8.4. Siano $f \in \Gamma(M, E_V)$ e $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], M)$. Allora

$$\text{eq: 14.13.9} \quad (3.8.3) \quad \frac{D(f \circ \gamma)}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}f.$$

3.9. Differenziazione covariante secondo Koszul

In questo paragrafo introduciamo la definizione astratta di differenziazione covariante⁴ sulle sezioni di un fibrato vettoriale e mostriamo che essa equivale al dato di una connessione principale sul fibrato dei sistemi di riferimento.

Sia $\eta = (E \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato vettoriale reale di rango n , con fibra tipica V , su una varietà differenziabile M di dimensione m . Indichiamo con $\mathcal{E}(M)$ lo spazio $\Gamma(M, E)$ delle sue sezioni differenziabili.

⁴J.L.Koszul *Lectures on fibre bundles and differential geometry*. Notes by S. Ramanan. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 20 Bombay 1965 ii+130+iii pp.

Definizione 3.9.1 (Koszul). Una *derivazione covariante* su η è un'applicazione

$$\text{eq:g0111} \quad (3.9.1) \quad \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{E}(M) \ni (X, s) \longrightarrow \nabla_X s \in \mathcal{E}(M)$$

che gode delle proprietà

$$\text{eq:g0112} \quad (3.9.2) \quad \begin{cases} \nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} s = f_1 \nabla_{X_1} s + f_2 \nabla_{X_2} s, \\ \nabla_X (s_1 + s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2, \\ \nabla_X (fs) = f \nabla_X s + X(f) \cdot s, \end{cases}$$

ove $f, f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $s, s_1, s_2 \in \mathcal{E}(M)$.

Poiché l'applicazione $X \rightarrow \nabla_X s$ è $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare su $\mathfrak{X}(M)$, possiamo considerare, per ogni $s \in \mathcal{E}(M)$, la

$$\text{eq:13a92} \quad (3.9.3) \quad \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow d^\nabla s(X) = \nabla_X s \in \mathcal{E}(M)$$

come una 1-forma a valori in E . Definiamo così un'applicazione

$$\text{eq:g0113} \quad (3.9.4) \quad d^\nabla : \mathcal{E}(M) = \mathcal{Q}^0(M, E) \longrightarrow \mathcal{Q}^1(M, E).$$

Definizione 3.9.2. L'applicazione (3.9.4) si dice *differenziazione covariante*. eq:g0113

Abbiamo mostrato nel §5.2 come una connessione principale sul fibrato $F(\eta)$ dei sistemi di riferimento di η permetta di definire una differenziazione covariante su η . Viceversa, vale il sec:14.8

Teorema 3.9.3. Ogni differenziazione covariante su η è associata ad una ed una sola connessione principale sul fibrato $F(\eta)$ dei suoi sistemi di riferimento. thm:13a326

DIMOSTRAZIONE. Se $s \in \mathcal{E}(M)$, denotiamo con $\tilde{s} \in \mathcal{C}^\infty(F(\eta), V)$ il suo sollevamento, definito da $\tilde{s}(\sigma) = \sigma^{-1} s(\pi(\sigma))$. Abbiamo

$$\text{eq:g012a} \quad (3.9.5) \quad X_\sigma \tilde{s} = -\omega_\nu(X_\sigma) \tilde{s}, \quad \forall X \in \mathfrak{V}(F(\eta)), \quad \forall s \in \mathcal{E}(M).$$

Infatti, se $A = \omega_\nu(X_\sigma) \in \mathfrak{gl}_\mathbb{R}(V)$, da $\tilde{s}(\sigma \exp(tA)) = \exp(-tA) \tilde{s}(\sigma)$ ricaviamo

$$X_\sigma \tilde{s} = \left. \frac{d \exp(-tA) \sigma^{-1} s(\pi(\sigma))}{dt} \right|_{t=0} = -A \tilde{s}(\sigma).$$

Perciò, assegnata una connessione principale su $F(\eta)$, la sua forma di Cartan ω è legata alla derivazione covariante dall'identità

$$\text{eq:go12b} \quad (3.9.6) \quad X_\sigma \tilde{s} = \sigma^{-1} (\nabla_{\pi_* X_\sigma} s) - \omega(X_\sigma) \tilde{s}(\sigma), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(F(\eta)), \quad \forall \sigma \in P, \quad \forall s \in \mathcal{E}(M).$$

Per concludere la dimostrazione, è quindi sufficiente verificare che, assegnata una derivazione covariante ∇ su η , la $\omega \in \mathcal{Q}^1(P, \mathfrak{gl}_\mathbb{R}(V))$ definita dalla (3.9.6) è la forma di Cartan di una connessione principale su $F(\eta)$. Per la (3.9.5) è $\omega(A^*) = A$ per ogni $A \in \mathfrak{gl}_\mathbb{R}(V)$. Se $a \in \mathbf{GL}_\mathbb{R}(V)$, $\sigma \in F(\eta)$ ed $X \in \mathfrak{X}(F(\eta))$, abbiamo eq:go12a

$$\begin{aligned} [R_a^* \omega(X_\sigma)] \tilde{s}(\sigma a) &= [R_a^* \omega(X_\sigma)] a^{-1} \tilde{s}(\sigma) \\ &= \omega(R_{a^*} X_\sigma) \tilde{s} = (\sigma a)^{-1} (\nabla_{\pi_* (R_{a^*} X_\sigma)} s) - R_{a^*} X_\sigma \tilde{s} \\ &= a^{-1} \sigma^{-1} (\nabla_{\pi_* X} s) - X_\sigma R_a^* \tilde{s} = a^{-1} (\sigma^{-1} (\nabla_{\pi_* X} s) - X_\sigma \tilde{s}) \\ &= a^{-1} \omega(X_\sigma) \tilde{s}(\sigma) = a^{-1} \omega(X_\sigma) a \tilde{s}(\sigma a) = \text{Ad}(a^{-1}) \omega(X_\sigma) \tilde{s}(\sigma a), \end{aligned}$$

da cui ricaviamo che $R_a^* \omega = \text{Ad}(a^{-1}) \omega$. Ciò completa la dimostrazione. □

3.10. Il Teorema di Ambrose-Singer

Dopo aver introdotto il concetto di curvatura, ritorniamo sull'olonomia, definita in §2.9. Il seguente fondamentale Teorema di Ambrose e Singer⁵ stabilisce la connessione tra curvatura ed olonomia.

thm: 13246

Teorema 3.10.1 (dell'olonomia). *Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale, con gruppo strutturale \mathbf{G} , ed M connesso e paracompatto. Sia Γ una \mathbf{G} -connessione principale su ξ , con forma di connessione ω e forma di curvatura Ω . Fissiamo un punto $\sigma_0 \in P$. L'algebra di Lie di $\Phi_0(\sigma_0)$ è il sottospazio vettoriale di \mathfrak{g} generato dagli elementi della forma $\Omega(\sigma)(X, Y)$, al variare di σ in $P(\sigma_0)$ e di X, Y tra i vettori orizzontali in $H_\sigma(P)$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto $p_0 \in M$ e $\sigma_0 \in P_{p_0}$. Per il Teorema ^{thm: 13245} 2.9.9 possiamo supporre che il gruppo strutturale \mathbf{G} di ξ coincida col gruppo di olonomia $\Phi(\sigma_0)$. Sia \mathfrak{a} il sottospazio di \mathfrak{g} generato da tutti gli elementi $\Omega_\sigma(\tilde{X}, \tilde{Y})$, al variare di X, Y in $\mathfrak{X}(M)$ e di σ in P . Poiché Ω è una forma tensoriale di tipo $(\text{Ad}, \mathfrak{g})$, abbiamo, per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ed $A \in \mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{a} \ni \Omega(R_{\exp(tA)_*} \tilde{X}, R_{\exp(tA)_*} \tilde{Y}) = R_{\exp(tA)}^* \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \text{Ad}(\exp(-tA)) \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}).$$

Derivando rispetto a t per $t = 0$ otteniamo che $[A, \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y})] \in \mathfrak{a}$, e quindi \mathfrak{a} è un ideale di \mathfrak{g} .

Consideriamo la distribuzione vettoriale $\mathcal{A}(P)$ generata dai campi di vettori A^* , al variare di A in \mathfrak{a} , e la $\mathcal{B}(P) = \mathcal{A}(P) + \mathcal{H}(P)$, generata dalla distribuzione orizzontale $\mathcal{H}(P)$ e da $\mathcal{A}(P)$. Per costruzione la $\mathcal{B}(P)$ è una distribuzione di rango $m + \dim \mathfrak{a}$. Dimostriamo che è involutiva. Infatti $\mathcal{A}(P)$ è completamente integrabile, $[A^*, \mathcal{H}(P)] \subset \mathcal{H}(P)$ per ogni $A \in \mathfrak{a}$, perché la distribuzione orizzontale è invariante per le traslazioni a destra rispetto agli elementi di \mathbf{G} ed, infine, se $X, Y \in \mathcal{H}(P)$, la

$$\text{pr}_v([X, Y]_\sigma) = [\omega([X, Y])]_\sigma^* = -[\Omega(X, Y)]_\sigma^*$$

prova che $[X, Y] \in \mathcal{B}(P)$. Poiché abbiamo supposto che \mathbf{G} coincida con il gruppo di olonomia $\Phi(\sigma_0)$, ogni coppia di elementi di P possono essere collegati da un cammino orizzontale. Ne segue che P è la varietà integrale di $\mathcal{B}(P)$ passante per σ_0 e che quindi ha rango uguale alla dimensione di P . Questo implica che \mathfrak{a} , avendo la stessa dimensione di \mathfrak{g} , coincida con \mathfrak{g} . \square

Osservazione 3.10.2. Se ξ è un fibrato principale, con spazio totale P connesso, su una base M di dimensione maggiore o uguale a due⁶, esiste una connessione principale su ξ per cui sia $P(\sigma_0) = P$. In particolare, se $\dim M \geq 2$, ogni gruppo di Lie connesso \mathbf{G} è il gruppo di olonomia di una connessione principale sul fibrato banale $M \times \mathbf{G}$.

⁵W.Ambrose, I.M. Singer: *A theorem on holonomy*, Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953), 428-443

⁶Vedi J.Hano e H.Ozeki: *On the holonomy group of linear connections*, Nagoya Math. J. 10 (1956), pp 71-81, per il caso dei gruppi lineari, e K.Nomizu: *Un théorème sur les groupes d'holonomie*, Nagoya Math. J. 10, 1956, pp. 101-103 per il caso generale.

sec:1317

3.11. L'olonomia infinitesima

Lo spazio $\mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g})$ delle funzioni differenziabili su P a valori in \mathfrak{g} è un'algebra di Lie con l'operazione

$$[f_1, f_2](\sigma) = [f_1(\sigma), f_2(\sigma)], \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g}), \quad \forall \sigma \in P.$$

Consideriamo la sua sottoalgebra

eq:13174

$$(3.11.1) \quad \mathcal{G} = \mathcal{O}_{\text{Ad},0}^0(P, \mathfrak{g}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g}) \mid R_a^* f = \text{Ad}(a^{-1})f, \quad \forall a \in \mathbf{G}\}.$$

Definiamo per ricorrenza

eq:13170

$$(3.11.2) \quad \begin{cases} \mathcal{H}_0 = \langle \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) \mid X, Y \in \mathfrak{X}(M) \rangle, \\ \mathcal{H}_{p+1} = \mathcal{H}_p + \{\tilde{X}\mathcal{H}_p \mid X \in \mathfrak{X}(M)\} \quad \text{per } p \geq 0, \\ \mathcal{H} = \bigcup_{p \geq 0} \mathcal{H}_p. \end{cases}$$

prop:13249

Proposizione 3.11.1. \mathcal{H} è una sottoalgebra di Lie di \mathcal{G} .

DIMOSTRAZIONE. Il differenziale covariante di una $f \in \mathcal{G}$ è una forma tensoriale e quindi

$$Df(Z) = Zf + [\omega(Z), f] = 0, \quad \forall Z \in \mathfrak{V}(P).$$

Siano $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$. Poiché $\Omega(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = -\omega([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2])$, e $\text{pr}_h([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]) = \tilde{Y}$, con $Y = [X_1, X_2]$, otteniamo

$$\begin{aligned} [\Omega(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2), f] &= -\text{pr}_v([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2])f = (\text{pr}_h([\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]) - [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2])f \\ &= \tilde{Y}f - \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 f + \tilde{X}_2, \tilde{X}_1 f \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Dimostriamo per ricorrenza che $[\mathcal{H}_p, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$. Per la discussione precedente, questa proprietà vale se $p = 0$. Supponiamo ora che $p > 0$ e $[\mathcal{H}_{p-1}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$. Siano $X_1, \dots, X_p, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ ed $f_0 = \tilde{X}_1 \cdots \tilde{X}_p \Omega(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2)$. Se $f \in \mathcal{H}$, è

$$[f_0, f] = \tilde{X}_1[\tilde{X}_2 \cdots \tilde{X}_p \Omega(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2), f_1] - [\tilde{X}_2 \cdots \tilde{X}_p \Omega(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2), \tilde{X}_1 f_1] \in \mathcal{H},$$

perché $[\tilde{X}_2 \cdots \tilde{X}_p \Omega(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2), f_1]$, $[\tilde{X}_2 \cdots \tilde{X}_p \Omega(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2), \tilde{X}_1 f_1] \in [\mathcal{H}_{p-1}, \mathcal{H}]$ e dunque appartengono a \mathcal{H} per l'ipotesi induttiva, e $\tilde{X}_1 \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$. La dimostrazione è completa. \square

Fissato $\sigma_0 \in P$, poniamo

13172

$$(3.11.3) \quad \begin{cases} \mathfrak{m}_p(\sigma_0) = \{f(\sigma_0) \mid f \in \mathcal{H}_p\}, \\ \mathfrak{m}(\sigma_0) = \{f(\sigma_0) \mid f \in \mathcal{H}\} = \bigcup_{p \geq 0} \mathfrak{m}_p(\sigma_0). \end{cases}$$

Proposizione 3.11.2. $\mathfrak{m}(\sigma_0)$ è una sottoalgebra dell'algebra di Lie $\phi(\sigma_0)$ del gruppo di olonomia $\Phi(\sigma_0)$.

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione ^{prop:13249} 3.11.1 $\mathfrak{m}(\sigma_0)$ è un'algebra di Lie e l'inclusione $\mathfrak{m}(\sigma_0) \subset \phi(\sigma_0)$ è conseguenza del Teorema ^{thm:13246} 5.10.1. \square

Definizione 3.11.3. L'algebra di Lie ¹³¹⁷² (3.11.3) si dice l'*olonomia infinitesima* della connessione Γ in σ_0 ed il sottogruppo analitico di \mathbf{G} generato da $\mathfrak{m}(\sigma_0)$ il suo *gruppo di olonomia infinitesima* in σ_0 .

Abbiamo

prop: 13251

Proposizione 3.11.4. *Se sia ξ che la connessione principale Γ su ξ sono analitici reali, allora i suoi gruppi di ologonomia speciale ed infinitesima coincidono.*

3.12. Connessioni invarianti canoniche su spazi omogenei

sec: 15.14

In questo paragrafo e nel successivo discuteremo connessioni principali invarianti rispetto ad azioni di gruppi di Lie. Considereremo in primo luogo il caso di spazi omogenei.

Definizione 3.12.1. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie ed \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso. Diciamo che lo spazio omogeneo $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ è *riduttivo* se l'algebra di Lie \mathfrak{h} di \mathbf{H} ammette, nell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} , un complemento lineare $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante.

Supponiamo cioè che esista un sottospazio vettoriale \mathfrak{m} di \mathfrak{g} tale che:

eq: 14.13.1

$$(3.12.1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m},$$

eq: 14.13.2

$$(3.12.2) \quad \mathfrak{m} = \text{Ad}(a)(\mathfrak{m}), \quad \forall a \in \mathbf{H}.$$

Notazione 3.12.2. Indicheremo con $A_{\mathfrak{h}}, A_{\mathfrak{m}}$ le componenti di $A \in \mathfrak{g}$ nella decomposizione (3.12.1): $A = A_{\mathfrak{h}} + A_{\mathfrak{m}}$, con $A_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}, A_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{m}$.

Osservazione 3.12.3. \mathbf{G}/\mathbf{H} è sempre riduttivo quando \mathbf{H} sia compatto, perché le rappresentazioni lineari dei gruppi compatti sono completamente riducibili.

thm: 15.16.1

Teorema 3.12.4 (Connessioni invarianti su spazi riduttivi). *Sia $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ uno spazio omogeneo ed indichiamo con ξ il corrispondente fibrato principale, con gruppo strutturale \mathbf{H} , spazio totale \mathbf{G} e base M .*

14.13.a

(1) *Supponiamo che M sia riduttivo e valgano le (3.12.1), (3.12.2). Allora la componente ω in \mathfrak{h} della forma di Maurer-Cartan $\omega_{\mathbf{G}}$ di \mathbf{G} rispetto alla decomposizione (3.12.1) è la forma di Cartan di una connessione \mathbf{H} -principale su ξ .*

14.13.b

(2) *Se esiste su ξ una connessione \mathbf{H} -principale Γ , invariante per le traslazioni a sinistra su \mathbf{G} , allora M è riduttivo, e Γ è ottenuta, come in (1), a partire da una decomposizione (3.12.1), per cui valga la (3.12.2).*

14.13.c

(3) *La forma di curvatura della connessione Γ definita in (1) è*

eq: 14.13.3

$$(3.12.3) \quad \Omega(A^*, B^*) = -[A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}}, \quad \forall A, B \in \mathfrak{g}.$$

DIMOSTRAZIONE. (1) ^{14.13.a} Basta verificare che la

eq: 13174

$$(3.12.4) \quad \omega(A^*) = A_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}, \quad \forall A \in \mathfrak{g}$$

è una forma di Cartan su \mathbf{G} . La distribuzione verticale $\mathcal{V}(\mathbf{G})$ è generata dai campi A^* , al variare di A in \mathfrak{h} . Abbiamo perciò

$$\omega(A^*) = A_{\mathfrak{h}} = A, \quad \forall A \in \mathfrak{h}.$$

Abbiamo poi $(R_a)_*(A^*) = (\text{Ad}(a^{-1})(A))^*$ per ogni $A \in \mathfrak{g}$ ed $a \in \mathbf{G}$, e dunque

$$\begin{aligned} R_a^* \omega(A^*) &= \omega((\text{Ad}(a^{-1})(A))^*) = (\text{Ad}(a^{-1})(A))_{\mathfrak{h}} \\ &= \text{Ad}(a^{-1})(A_{\mathfrak{h}}) = \text{Ad}(a^{-1})\omega(A^*), \quad \forall A \in \mathfrak{g}, \quad \forall a \in \mathbf{H}. \end{aligned}$$

⁷Ricordiamo che A^* è il campo di vettori invariante a sinistra corrispondente ad $A \in \mathfrak{g}$.

Infatti, la proiezione $A \rightarrow A_{\mathfrak{h}}$ su \mathfrak{h} commuta con $\text{Ad}(a^{-1})$, perché abbiamo supposto che \mathfrak{m} fosse $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante.

(2) Se ω è la forma di Cartan di una connessione \mathbf{H} -principale \mathbf{G} -invariante a sinistra su ξ , si verifica facilmente che $\mathfrak{m} = \ker \omega_e \subset \mathfrak{g}$ soddisfa (3.12.1) e (3.12.2), e che $\omega(A^*) = A_{\mathfrak{h}}$ per ogni $A \in \mathfrak{g}$.

(3) Per dimostrare (3.12.3) basta utilizzare l'equazione di struttura, decomponendo A e B con la (3.12.1). Abbiamo:

$$\begin{aligned}\Omega(A^*, B^*) &= A^* A_{\mathfrak{h}} - B^* B_{\mathfrak{h}} - [A, B]_{\mathfrak{h}} + [A_{\mathfrak{h}}, B_{\mathfrak{h}}] \\ &= -[A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}} - [A_{\mathfrak{h}}, B_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}} - [A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}}\end{aligned}$$

ed otteniamo la formula desiderata perché $[A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}}, [A_{\mathfrak{h}}, B_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{m}$. \square

Come conseguenza diretta del Teorema 3.10.1 e della (3) del Teorema 3.12.4 abbiamo:

thm:14.12.7

Teorema 3.12.5. *Sia $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ uno spazio omogeneo che ammette una connessione \mathbf{G} -invariante e sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ la corrispondente decomposizione della sua algebra di Lie. Allora l'algebra di Lie ϕ del suo gruppo di ologonia è generata dagli elementi di \mathfrak{h} della forma $[X, Y]_{\mathfrak{h}}$ al variare di X, Y in \mathfrak{m} .*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 3.10.1 l'algebra di Lie ϕ dell'ologonia $\Phi(e)$ è il sottospazio vettoriale generato dagli $\Omega_a(X^*, Y^*)$, al variare di X, Y in \mathfrak{m} e di a in \mathbf{G} . Infatti i campi X^* , con $X \in \mathfrak{m}$, generano la distribuzione orizzontale su \mathbf{G} . Per l'invarianza della connessione rispetto alle traslazioni a sinistra su \mathbf{G} , abbiamo, per (3.12.3),

$$\Omega_a(X^*, Y^*) = \Omega_e(X, Y) = -[X, Y]_{\mathfrak{h}}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

da cui la tesi. \square

3.13. Connessioni invarianti

Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} .

Ricordiamo che un automorfismo di ξ è il dato di una coppia di diffeomorfismi (f, F) , con $f \in \mathcal{C}^\infty(M, M)$, $F \in \mathcal{C}^\infty(P, P)$, tali che

$$\text{eq:13181} \quad (3.13.1) \quad \pi(F(\sigma)) = f(\pi(\sigma)), \quad F(\sigma a) = F(\sigma)a, \quad \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Fissiamo una connessione principale Γ su ξ , con forma di Cartan ω . Ricordiamo che un automorfismo (f, F) di ξ lascia invariante Γ se $F^*\omega = \omega$.

prop:14.13.2

Proposizione 3.13.1. *Sia $\{(f_t, F_t)\}$ un gruppo a un parametro di automorfismi di ξ che lasci invariante Γ . Sia X^P il generatore infinitesimale di $\{F_t\}$. Allora*

$$\text{eq:13182} \quad (3.13.2) \quad F_t(\sigma) = \tilde{f}_t(\sigma) \exp(t\omega(X^P_\sigma)), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \sigma \in P,$$

ove, per ogni $\sigma \in P$, abbiamo indicato con $\tilde{f}_t(\sigma)$ il sollevamento orizzontale di $t \rightarrow f_t(\pi(\sigma))$, di punto iniziale σ .

DIMOSTRAZIONE. È $F_t(\sigma) = \tilde{f}_t(\sigma)a(t)$ per una $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{G})$, con $a(0) = e$. Derivando questa uguaglianza, troviamo che

$$X_{F_t(\sigma)}^P = R_{a(t)*} \tilde{f}_t(\sigma) + \tilde{f}_t(\sigma) \dot{a}(t).$$

Poiché $\tilde{f}_t(\sigma)$ è un vettore orizzontale, applicando la forma di Cartan ad ambo i membri di quest'uguaglianza, otteniamo

$$\omega(X_{F_t(\sigma)}^P) = [a(t)]^{-1} \dot{a}(t),$$

perché $\omega(\sigma \dot{a}(t)) = [a(t)]^{-1} \dot{a}(t)$ per ogni $\sigma \in P$. Poiché abbiamo supposto che $F_t^* \omega = \omega$ per ogni t , è $\omega(X_{F_t(\sigma)}^P) = \omega(X_\sigma^P)$. Otteniamo perciò $[a(t)]^{-1} \dot{a}(t) = \omega(X_{\sigma_0})$ e quindi $a(t) = \exp(t\omega(X_{\sigma_0}))$. \square

Osservazione 3.13.2. Il generatore infinitesimale $X^P \in \mathfrak{X}(P)$ di un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di ξ è invariante per traslazioni a destra. Soddisfa cioè $R_{a*} X^P = X^P$, per ogni $a \in \mathbf{G}$.

Consideriamo ora l'azione su ξ di un gruppo di Lie \mathbf{K} . Indichiamo per semplicità con la moltiplicazione a sinistra sia la sua azione sugli elementi di M che su quelli di P . Avremo quindi

$$\pi(k\sigma) = k\pi(\sigma), \quad k(\sigma a) = (k\sigma)a, \quad \forall k \in \mathbf{K}, \forall \sigma \in P, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Supporremo nel seguito per semplicità che P , \mathbf{G} e \mathbf{K} siano tutti connessi.

Fissiamo un punto $p_0 \in M$ e denotiamo con

$$\text{eq: 14.15.4} \quad (3.13.3) \quad \mathbf{K}_0 = \{k \in \mathbf{K} \mid k \cdot p_0 = p_0\}$$

lo stabilizzatore di p_0 in \mathbf{K} . Esso è un sottogruppo chiuso, e quindi di Lie, di \mathbf{K} . Siano κ l'algebra di Lie di \mathbf{K} e κ_0 quella di \mathbf{K}_0 .

Ad un punto $\sigma_0 \in P_{p_0}$ della fibra di ξ in p_0 associamo l'applicazione

$$\text{eq: 14.14.9} \quad (3.13.4) \quad \lambda_{\sigma_0} : \mathbf{K}_0 \ni k \longrightarrow \sigma_0^{-1} k \sigma_0 \in \mathbf{G}.$$

Lemma 3.13.3. L'applicazione λ_{σ_0} definita dalla eq: 14.14.9 è un omomorfismo di gruppi di Lie.

DIMOSTRAZIONE. La eq: 14.14.9 si può riscrivere nella forma $k\sigma_0 = \sigma_0 \lambda_{\sigma_0}(k)$, per ogni $k \in \mathbf{K}$. Se $k_1, k_2 \in \mathbf{K}_0$, abbiamo allora

$$\sigma_0 \lambda_{\sigma_0}(k_1 k_2) = (k_1 k_2) \sigma_0 = k_1 (k_2 \cdot \sigma_0) = k_1 \sigma_0 \lambda_{\sigma_0}(k_2) = \sigma_0 \lambda_{\sigma_0}(k_1) \lambda_{\sigma_0}(k_2).$$

Quindi $\lambda_{\sigma_0}(k_1 k_2) = \lambda_{\sigma_0}(k_1) \cdot \lambda_{\sigma_0}(k_2)$ per ogni $k_1, k_2 \in \mathbf{K}_{\sigma_0}$. Chiaramente $\lambda_{\sigma_0} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{K}_0, \mathbf{G})$ ed è perciò un omomorfismo di gruppi di Lie. \square

Definizione 3.13.4. Ogni elemento X dell'algebra di Lie κ di \mathbf{K} definisce gruppi a un parametro di diffeomorfismi

$$\text{eq: 14.14.7} \quad (3.13.5) \quad P \times \mathbb{R} \ni (\sigma, t) \longrightarrow \exp(tX)\sigma \in P, \quad M \times \mathbb{R} \ni (p, t) \longrightarrow \exp(tX)p \in M.$$

I loro generatori infinitesimali $X^P \in \mathfrak{X}(P)$, ed $X^M \in \mathfrak{X}(M)$, si dicono i *campi associati* ad X in P ed in M , rispettivamente.

Notazione 3.13.5. Analogamente, indichiamo con $X^{\mathbf{K}}$ il campo di vettori invariante a destra su \mathbf{K} , generatore infinitesimale del gruppo a un parametro di diffeomorfismi $\mathbf{K} \times \mathbb{R} \ni (k, t) \rightarrow \exp(tX)k \in \mathbf{K}$.

lem:13254

Lemma 3.13.6. Consideriamo il diffeomorfismo $J : \mathbf{K} \ni k \rightarrow k^{-1} \in \mathbf{K}$ del gruppo di Lie \mathbf{K} . Allora, per ogni $X \in \kappa$, i campi X^* e $-X^{\mathbf{K}}$ sono J -correlati. In particolare,

eq:13184

$$(3.13.6) \quad [X^{\mathbf{K}}, Y^{\mathbf{K}}] = -[X, Y]^{\mathbf{K}}, \quad \forall X, Y \in \kappa.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti $(k \exp(tX))^{-1} = \exp(-tX)k^{-1}$, da cui otteniamo che $J_*X^* = -X^{\mathbf{K}}$. \square

Lemma 3.13.7. Le applicazioni

eq:14.15.7

$$(3.13.7) \quad \kappa \ni X \longrightarrow X^P \in \mathfrak{X}(P), \quad e \quad \kappa \ni X \longrightarrow X^M \in \mathfrak{X}(M)$$

sono anti-omomorfismi di gruppi di Lie. Abbiamo cioè

eq:14.15.8

$$(3.13.8) \quad [X, Y]^P = -[X^P, Y^P] \quad e \quad [X, Y]^M = -[X^M, Y^M], \quad \forall X, Y \in \kappa.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\sigma_0 \in P$ e $p_0 \in M$ possiamo considerare le applicazioni differenziabili $r_{\sigma_0} : \mathbf{K} \ni k \rightarrow k\sigma_0 \in P$ ed $r_{p_0} : \mathbf{K} \ni k \rightarrow kp_0 \in M$. Se $X \in \kappa$, il campo $X^{\mathbf{K}}$ è r_{σ_0} -correlato ad X^P ed r_{p_0} -correlato ad X^M . La tesi segue allora dal Lemma 3.13.6. \square

Indichiamo con λ_{σ_0} il differenziale nell'identità dell'applicazione λ_{σ_0} definita dalla (3.13.4). \square

Lemma 3.13.8. $\lambda_{\sigma_0} : \kappa_0 \rightarrow \mathfrak{g}$ è un omomorfismo di algebre di Lie. \square

Fissiamo su ξ una connessione principale \mathbf{K} -invariante, con forma di Cartan ω e definiamo

eq:14.14.10

$$(3.13.9) \quad \Lambda_{\sigma_0} : \kappa \ni X \longrightarrow \omega(X_{\sigma_0}^P) \in \mathfrak{g}.$$

prop:14.15.5

Proposizione 3.13.9. L'applicazione (3.13.9) soddisfa

14.a

$$(1) \quad \Lambda_{\sigma_0}(X) = \lambda_{\sigma_0}(X), \quad \forall X \in \kappa_0,$$

14.b

$$(2) \quad \Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}(k_0)(X)) = \text{Ad}(\lambda_{\sigma_0}(k_0))(\Lambda_{\sigma_0}(X)), \quad \forall k_0 \in \mathbf{K}_0, \quad \forall X \in \kappa.$$

DIMOSTRAZIONE. La (1) è conseguenza del fatto che \mathbf{K}_0 trasforma in sé la fibra P_{p_0} e quindi, in particolare, $X_{\sigma_0}^P$ è verticale se $X \in \kappa_0$.

Fissiamo $X \in \kappa$ e $k_0 \in \mathbf{K}_0$ e sia $Y = \text{Ad}(k_0)X$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \exp(tY)\sigma_0 &= k_0 \exp(tX)k_0^{-1}\sigma_0 = k_0 \exp(tX)\lambda_{\sigma_0}(k_0^{-1}) \\ &= k_0 R_{\lambda_{\sigma_0}(k_0^{-1})}(\exp(tX)\sigma_0). \end{aligned}$$

Questa ci dà $Y_{\sigma_0}^P = k_{0*}dR_{\lambda_{\sigma_0}(k_0^{-1})}X_{\sigma_0}^P$. Applicando ω ad ambo i membri di questa uguaglianza, poiché ω è \mathbf{K} -invariante, otteniamo che

$$Y = \omega(dR_{\lambda_{\sigma_0}(k_0^{-1})}X_{\sigma_0}^P) = \text{Ad}(\lambda_{\sigma_0}(k_0))\omega(X_{\sigma_0}^P),$$

cioè la (2). \square

Osservazione 3.13.10. Per la Proposizione ^{prop:14.13.2} 5.13.1, abbiamo la decomposizione

$$X_\sigma^P = \tilde{X}_\sigma^M + [\omega(X_\sigma^P)]_\sigma^*.$$

In particolare, poiché i campi X^P ed \tilde{X}^M sono \mathbf{G} -invarianti, anche $[\omega(X_\sigma^P)]_\sigma^*$ lo è.

Osservazione 3.13.11. L'estensione Λ_{σ_0} di λ_{σ_0} non è, in generale, un omomorfismo di algebre di Lie, come ci mostrano la Proposizione ^{prop:14.16.6} 5.13.12 ed il successivo Corollario ^{cor:13266} 5.13.13.

prop:14.16.6

Proposizione 3.13.12. La forma di curvatura Ω di una connessione \mathbf{K} -invariante su ξ soddisfa

eq:14.15.11

$$(3.13.10) \quad \Omega_{\sigma_0}(X^P, Y^P) = [\Lambda_{\sigma_0}(X), \Lambda_{\sigma_0}(Y)] - \Lambda_{\sigma_0}([X, Y]), \quad \forall X, Y \in \kappa,$$

e quindi abbiamo

eq:14.15.11a

$$(3.13.11) \quad R_{p_0}(X^M, Y^M) = \sigma_0([\Lambda_{\sigma_0}(X), \Lambda_{\sigma_0}(Y)] - \Lambda_{\sigma_0}([X, Y]))\sigma_0^{-1} \quad \forall X, Y \in \kappa.$$

DIMOSTRAZIONE. Per l'equazione di struttura abbiamo

$$\Omega_{\sigma_0}(X^P, Y^P) = X_{\sigma_0}^P \omega(Y^P) - Y_{\sigma_0}^P \omega(X^P) - \omega_{\sigma_0}([X^P, Y^P]) + [\omega(X^P), \omega(Y^P)]_{\sigma_0}.$$

La derivata di Lie di ω rispetto ad X^P, Y^P è nulla, perché ω è \mathbf{K} -invariante. Quindi

$$X_{\sigma_0}^P \omega(Y^P) = \omega_{\sigma_0}([X^P, Y^P]), \quad Y_{\sigma_0}^P \omega(X^P) = \omega_{\sigma_0}([Y^P, X^P]).$$

Inoltre, poiché $[X^P, Y^P] = -[X, Y]^P$,

$$\omega_{\sigma_0}([X^P, Y^P]) = -\omega_{\sigma_0}([X, Y]^P) = -\Lambda_{\sigma_0}([X, Y]).$$

Da queste osservazioni otteniamo la tesi. \square

cor:13266

Corollario 3.13.13. La connessione \mathbf{K} -invariante definita da Λ_{σ_0} è piatta se e soltanto se $\Lambda_{\sigma_0} : \kappa \rightarrow \mathfrak{g}$ è un omomorfismo di algebre di Lie.

Il teorema seguente ⁸ caratterizza le connessioni \mathbf{K} -invarianti:

thm:14.16.7

Teorema 3.13.14 (Wang). Sia \mathbf{K} un gruppo di Lie connesso di trasformazioni del fibrato principale ξ che operi transitivamente sulla base M . Fissato un elemento $\sigma_0 \in P$, la ^{eq:14.14.10} (5.13.9) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle connessioni \mathbf{K} -invarianti su ξ e quello delle applicazioni lineari $\Lambda_{\sigma_0} : \kappa \rightarrow \mathfrak{g}$ che ^{prop:14.15.5} soddisfino le condizioni ^{14.a} (I) e ^{14.b} (2) della Proposizione ^{prop:14.15.5} 5.13.9. Definiamo

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che ad un'applicazione lineare $\Lambda_{\sigma_0} : \kappa \rightarrow \mathfrak{g}$ che soddisfi ^{14.a} (I) e ^{14.b} (2) della Proposizione ^{prop:14.15.5} 5.13.9 si può far corrispondere una connessione principale Γ su ξ per cui valga la ^{eq:14.14.10} (5.13.9). Definiamo

$$H_{\sigma_0} = \{X_{\sigma_0}^P - \Lambda_{\sigma_0}(X)_{\sigma_0}^* \mid X \in \kappa\}.$$

L'azione $(\mathbf{K} \times \mathbf{G}) \times P \ni (k, a, \sigma) \longrightarrow k\sigma a \in P$ di $\mathbf{K} \times \mathbf{G}$ su P è transitiva e lascia invariante la distribuzione orizzontale di una connessione \mathbf{K} -invariante su ξ .

⁸H.C. Wang: *On invariant connections over a principal fiber bundle*. Nagoya Math.J. 13 (1958), 1-19.

Basterà quindi verificare che si possa definire la distribuzione orizzontale ponendo $H_{k\sigma_0 a} = k_* R_{a_*} H_{\sigma_0}$, che cioè, se $k_1, k_2 \in \mathbf{K}$ ed $a_1, a_2 \in \mathbf{G}$ sono tali che $k_1 \sigma_0 a_1 = k_2 \sigma_0 a_2$, allora $k_1_* R_{a_1_*} H_{\sigma_0} P = k_2_* R_{a_2_*} H_{\sigma_0} P$.

Posto $a = a_1 a_2^{-1}$ e $k = k_2^{-1} k_1$, ciò è equivalente a dimostrare che

$$k_* R_{a_*} H_{\sigma_0} = H_{\sigma_0} \quad \text{se} \quad k\sigma_0 a = \sigma_0.$$

Da $k\sigma_0 a = \sigma_0$ segue che $k \in \mathbf{K}_0$ ed $a = \lambda_{\sigma_0}(k^{-1})$. Mostriamo che

$$k_* R_{a_*} (X_{\sigma_0}^P - \Lambda_{\sigma_0}(X)_{\sigma_0}^*) \in H_{\sigma_0}, \quad \text{se} \quad X \in \kappa, \quad k \in \mathbf{K}_0, \quad a = \lambda_{\sigma_0}(k^{-1}).$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} k_* R_{a_*} (X_{\sigma_0}^P) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} k \exp(tX) \sigma_0 a = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t \text{Ad}(k)X) (k\sigma_0 a) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t \text{Ad}(k)X) \sigma_0 = [\text{Ad}(k)X]_{\sigma_0}^P. \end{aligned}$$

Se $A = \Lambda_{\sigma_0}(X)$, abbiamo

$$\begin{aligned} k_* R_{a_*} A_{\sigma_0}^* &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} k \sigma_0 \exp(tA) a = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (k\sigma_0 a) a^{-1} \exp(tA) a \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma_0 \exp(t \text{Ad}(a^{-1})A) = [\text{Ad}(a^{-1})A]_{\sigma_0}^*. \end{aligned}$$

Poiché per la [14.b](#)

$$\text{Ad}(a^{-1})A = \text{Ad}(\lambda_{\sigma_0}(k)) \Lambda_{\sigma_0}(X) = \Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}(k)X),$$

otteniamo

$$k_* R_{a_*} (X_{\sigma_0}^P - \Lambda_{\sigma_0}(X)_{\sigma_0}^*) = [\text{Ad}(k)X]_{\sigma_0}^P - [\Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}(k)X)]_{\sigma_0}^* \in H_{\sigma_0}.$$

Quindi $k_* R_{a_*} (H_{\sigma_0}) \subset H_{\sigma_0}$ e, poiché questi due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione, si ha l'uguaglianza. La dimostrazione è completa. \square

Ricaviamo ancora

thm: 14.16.8

Teorema 3.13.15. *Supponiamo inoltre che l'azione di \mathbf{K} su M sia riduttiva, e sia \mathfrak{m} un sottospazio vettoriale di κ con*

$$(3.13.12) \quad \kappa = \kappa_0 \oplus \mathfrak{m},$$

$$(3.13.13) \quad \text{Ad}(k)(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}, \quad \forall k \in \mathbf{K}_0.$$

Vi è allora una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle connessioni \mathbf{K} -invarianti su ξ e quello delle applicazioni lineari

eq: 14.15.x

$$(3.13.14) \quad \lambda_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

tali che

eq: 14.15.y

$$(3.13.15) \quad \lambda_{\mathfrak{m}}(\text{Ad}(k)(X)) = \text{Ad}(\lambda(k))(\lambda_{\mathfrak{m}}(X)), \quad \forall X \in \mathfrak{m}, \quad \forall k \in \mathbf{K}_0.$$

DIMOSTRAZIONE. Ci riduciamo infatti al teorema precedente associando a $\lambda_{\mathfrak{m}}$ l'applicazione lineare $\Lambda_{\sigma_0} : \kappa \rightarrow \mathfrak{g}$ definita da:

$$\Lambda_{\sigma_0}(X) = \begin{cases} X, & \text{se } X \in \kappa_0, \\ \lambda_{\mathfrak{m}}(X), & \text{se } X \in \mathfrak{m}. \end{cases} \quad \square$$

Osservazione 3.13.16. La curvatura della connessione Γ associata a λ_m è

$$\text{eq: 14.15.z} \quad (3.13.16) \quad \Omega_{\sigma_0}(X^P, Y^P) = [\lambda_m(X), \lambda_m(Y)] - \lambda_m([X, Y]_m) - \lambda_{\sigma_0^*}([X, Y]_{\kappa_0}),$$

$$\forall X, Y \in m.$$

Definizione 3.13.17. La connessione Γ corrispondente alla scelta $\lambda_m = 0$ si dice la *connessione canonica* su ξ associata allo spazio omogeneo riduttivo $M = \mathbf{K}/\mathbf{K}_0$.

Fissiamo una connessione \mathbf{K} -invariante su ξ , con forma di Cartan ω . Sia Λ_{σ_0} l'omomorfismo (3.13.9). Definiamo per ricorrenza

$$\text{eq: 13190} \quad (3.13.17) \quad \begin{cases} n_0 = \langle \{[\Lambda_{\sigma_0}(X), \Lambda_{\sigma_0}(Y)] - \Lambda_{\sigma_0}([X, Y]) \mid X, Y \in \kappa\} \rangle, \\ n_{p+1} = n_p + [\Lambda_{\sigma_0}(\kappa), n_p], \\ n = \bigcup_{p \geq 0} n_p. \end{cases} \quad \text{per } p \geq 0,$$

thm: 13268 **Teorema 3.13.18.** Se l'azione di \mathbf{K} su M è transitiva, allora n è l'algebra di Lie dell'olonomia $\Phi(\sigma_0)$. \square

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \mathcal{G} = \Omega_{\text{Ad},0}^0(P, \mathfrak{g})$ ed $X \in \kappa$, abbiamo

$$\text{eq: 131919} \quad (3.13.18) \quad X^P f = \tilde{X}^M f - [\omega(X^P), f].$$

Vale poi

$$\text{eq: 131920} \quad (3.13.19) \quad [X^P, \tilde{Y}] = \tilde{Z}, \quad \text{con } Z = [X^M, Y], \quad \forall X \in \kappa, \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Infatti $[X^P, \tilde{Y}]$ è un campo di vettori orizzontale, perché $\mathcal{H}(P)$ è \mathbf{K} -invariante, ed i campi X^P ed \tilde{Y} sono π -correlati ad X^M, Y , rispettivamente. Quindi $[X^P, \tilde{Y}]$ è il campo di vettori orizzontale π -correlato a $Z = [X^M, Y]$.

Consideriamo gli spazi \mathcal{H}_p definiti dalla (5.11.2). Dico che

$$\text{eq: 131921} \quad (3.13.20) \quad X^P \mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}_p, \quad \forall X \in \kappa, \forall p \geq 0.$$

Ragioniamo per ricorrenza su p . Poiché Ω è \mathbf{K} -invariante, la sua derivata di Lie rispetto ad X^P , per $X \in \kappa$, è nulla e quindi, se $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$, la (3.13.19) ci dà

$$X^P \Omega(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) = \Omega(\tilde{Z}_1, \tilde{Y}_2) + \Omega(\tilde{Y}_1, \tilde{Z}_2), \quad \text{con } Z_1 = [X^M, Y_1], Z_2 = [X^M, Y_2].$$

Quindi $X^P \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$. Supponiamo ora che, per un $p \geq 0$, sia $X^P \mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}_p$. Allora, per ogni $f \in \mathcal{H}_p$ ed $Y \in \mathfrak{X}(M)$, posto $Z = [X^M, Y]$, abbiamo

$$X^P \tilde{Y} f = \tilde{Z} f + \tilde{Y} X^P f \in \mathcal{H}_{p+1}.$$

Ciò dimostra che $X^P \mathcal{H}_{p+1} \subset \mathcal{H}_{p+1}$ e perciò la (3.13.20) vale per ogni intero $p \geq 0$. Poiché per ipotesi \mathbf{K} opera transitivamente su M , i campi \tilde{X}^M al variare di X in κ , generano $\mathfrak{X}(M)$ come $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo. Utilizzando la (3.13.18), otteniamo allora

$$\text{eq: 131922} \quad (3.13.21) \quad \tilde{X}^M \mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}_p + [\omega(X^P), \mathcal{H}_p], \quad \mathcal{H}_{p+1} \subset \mathcal{H}_p + \langle [\omega(X^P), \mathcal{H}_p] \mid X \in \kappa \rangle.$$

Con le $m_p(\sigma_0)$ definite da (5.11.3), poiché $n_0 = m_0(\sigma_0)$, da queste inclusioni ricaviamo

$$\text{eq: 131930} \quad (3.13.22) \quad m_p(\sigma_0) = n_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

La tesi è allora conseguenza della Proposizione 5.11.4. \square

Varietà affini e Riemanniane

ch:15

4.1. Connessioni e varietà affini

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m .

Definizione 4.1.1. Una *connessione affine* su M è una connessione principale Γ sul fibrato $F_M = (F(M) \xrightarrow{\pi} M)$ dei suoi sistemi di riferimento.

Chiamiamo *varietà affine* una varietà differenziabile su cui sia stata fissata una connessione affine.

Sia \mathbf{G} un sottogruppo chiuso del gruppo lineare $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$.

Definizione 4.1.2. Diciamo che Γ è una \mathbf{G} -connessione affine se ammette una riduzione ad un sottofibrato principale ξ , con gruppo strutturale \mathbf{G} , di $F(M)$.

Osserviamo che in questo caso ξ è un sottofibrato del fibrato di ologonia determinato da un punto di $F(M)$ (vedi §13.9).
sec:13.9

Viceversa, per la Proposizione 2.2.3, ogni connessione principale definita su un sottofibrato ξ di F_M , si estende a una connessione affine su M .
prop:13.2:3

Fissiamo un sottofibrato principale $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ di F_M , il cui gruppo strutturale \mathbf{G} sia un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. Indicheremo con \mathfrak{g} l'algebra di Lie di \mathbf{G} .

Sia $\theta \in \Omega^1(P, \mathbb{R}^m)$ la *forma canonica*, definita da

$$(4.1.1) \quad \theta(X_\sigma) = \sigma^{-1}(d\pi(X_\sigma)), \quad \forall \sigma \in P, \forall X_\sigma \in T_\sigma P.$$

Sia Γ una connessione principale su ξ , con forma di Cartan ω . La restrizione di θ ai vettori orizzontali definisce, per ogni $\sigma \in P$, un isomorfismo

$$(4.1.2) \quad \bar{\theta}_\sigma : H_\sigma P \ni X_\sigma \longrightarrow \theta(X_\sigma) = \sigma^{-1}d\pi(X_\sigma) \in \mathbb{R}^m.$$

Definizione 4.1.3. Associamo a $v \in \mathbb{R}^m$ il *campo orizzontale standard* $B(v) \in \mathcal{H}(P)$, definito da

$$(4.1.3) \quad B(v)_\sigma = \bar{\theta}_\sigma^{-1}(v) = h(\sigma v), \quad \forall \sigma \in P.$$

La (4.1.3) è equivalente a

$$(4.1.4) \quad v \in \mathbb{R}^m, \quad B(v) \in \mathcal{H}(P), \quad \pi_*(B(v)_\sigma) = \sigma v, \quad \forall \sigma \in P.$$

Osservazione 4.1.4. I campi orizzontali standard non sono, in generale, sollevamenti orizzontali di campi di vettori su M .

Proposizione 4.1.5. *I campi orizzontali standard godono delle proprietà:*

- (a) $B(v) \in \mathcal{H}(P), \quad \theta(B(v)) \equiv v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m,$
- (b) $H_\sigma P = \{B(v)_\sigma \mid v \in \mathbb{R}^m\},$
- (c) $dR_a(B(v)) = B(a^{-1}v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \quad \forall a \in \mathbf{G}.$
- (d) $B(v)_\sigma \neq 0, \quad \forall \sigma \in P \text{ se } v \neq 0. \quad \square$

Osservazione 4.1.6. Una \mathbf{G} -connessione affine definisce su TP un parallelismo assoluto. Abbiamo infatti l'equivalenza di fibrati vettoriali:

$$(4.1.5) \quad P \times (\mathbb{R}^m \times \mathfrak{g}) \ni (\sigma; v, A) \longrightarrow B(v)_\sigma + A_\sigma^* \in TP.$$

Lemma 4.1.7. *Se $A \in \mathfrak{g}$ e $v \in \mathbb{R}^m$, allora*

$$(4.1.6) \quad [A^*, B(v)] = B(Av).$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo:

$$[A^*, B(v)] = - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dR_{\exp(tA)}(B(v)) = -B \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(-tA)v \right) = B(Av),$$

perché la $\mathbb{R}^m \ni v \rightarrow B(v) \in \mathfrak{X}(P)$, essendo lineare, commuta con la derivazione. \square

4.2. Forme di torsione e di curvatura

Sia Γ una \mathbf{G} -connessione affine su M , definita sul sottofibrato principale ξ di F_M .

Definizione 4.2.1. *La forma di torsione Θ di Γ è il differenziale esterno covariante della forma canonica θ :*

$$\boxed{\text{eq: 15.1.6}} \quad (4.2.1) \quad \Theta = D\theta = d\theta \circ \mathfrak{h} \in \Omega_{i,0}^2(P, \mathbb{R}^m).$$

La sua *forma di curvatura* Ω è il differenziale esterno covariante della sua forma di Cartan ω :

$$(4.2.2) \quad \Omega = D\omega = d\omega \circ \mathfrak{h} \in \Omega_{\text{Ad},0}^2(P, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})).$$

Teorema 4.2.2 (equazioni di struttura). *Le forme di curvatura e di torsione di una \mathbf{G} -connessione affine Γ su M soddisfano le equazioni di struttura:*

$$\boxed{\text{eq: 15179}} \quad (4.2.3) \quad \Theta = D\theta = d\theta + \omega \wedge \theta$$

$$\boxed{\text{eq: 1518}} \quad (4.2.4) \quad \Omega = D\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega].$$

DIMOSTRAZIONE. La (4.2.3) è conseguenza del Lemma 3.1.5, perché θ è una forma tensoriale di tipo (ι, \mathbb{R}^m) , dove ι è la rappresentazione canonica di $\mathbf{G} \subset \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. La (4.2.4) è un caso particolare dell'equazione di struttura del Teorema 3.4.2. \square

Dal Lemma 3.1.5, dal Teorema 3.4.4 e dalle equazioni di struttura (4.2.3), (4.2.4), otteniamo:

Teorema 4.2.3 (Identità differenziali di Bianchi). *Le forme di torsione e di curvatura soddisfano le identità:*

$$(I) \quad D\Theta = \Omega \wedge \theta$$

$$(II) \quad D\Omega = 0$$

DIMOSTRAZIONE. La (II) è un caso particolare della formula (3.4.4) del Teorema 3.4.4. Dimostriamo la (I). Poiché Θ è tensoriale di tipo (ι, \mathbb{R}^m) , otteniamo:

$$\begin{aligned} D\Theta &= d\Theta + \omega \wedge \Theta = d(d\theta + \omega \wedge \theta) + \omega \wedge (d\theta + \omega \wedge \theta) \\ &= d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\theta + \omega \wedge d\theta + \omega \wedge \omega \wedge \theta = (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \theta \\ &= \left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]\right) \wedge \theta = \Omega \wedge \theta. \end{aligned}$$

□

4.3. Derivazione covariante, torsione e curvatura

I fibrati tensoriali su M sono associati alle rappresentazioni tensoriali di $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R})$. In particolare, una connessione affine ci permette di calcolare le derivate covarianti dei campi tensoriali su M . Per le proprietà generali della differenziazione covariante ed il Teorema 3.9.3 abbiamo:

Teorema 4.3.1. *Ad una connessione affine su M è associata una derivazione covariante*

$$\text{eq: 1420} \quad (4.3.1) \quad \nabla : \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow \nabla_X \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M)).$$

La ∇ è un'applicazione \mathbb{R} -lineare che gode delle proprietà:

$$\text{141} \quad (i) \quad \nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

$$\text{142} \quad (ii) \quad \nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Viceversa, ogni applicazione (4.3.1) che goda delle proprietà (i), (ii) è la derivazione covariante associata ad una connessione affine.

Per la (3.2.2) del Capitolo 3 possiamo calcolare la derivata covariante di un campo di vettori utilizzando i sollevamenti orizzontali. È infatti

$$\text{eq: 15.1.e} \quad (4.3.2) \quad \theta(\widetilde{\nabla_X Y}) = \widetilde{X}\theta(\widetilde{Y}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Le $\Theta \in \mathcal{Q}_{\iota,0}^2(P, \mathbb{R}^m)$ ed $\Omega \in \mathcal{Q}_{\text{Ad},0}^2(P, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ sono forme tensoriali. Ad essi corrispondono i tensori $T \in \mathcal{Q}^2(M, TM)$ ed $R \in \mathcal{Q}^2(M, T^{1,1}M)$ su M , mediante gli isomorfismi $\Lambda_\iota : \mathcal{Q}^2(M, TM) \rightarrow \mathcal{Q}_{\iota,0}^2(P, \mathbb{R}^m)$ e $\Lambda_{\text{Ad}} : \mathcal{Q}^2(M, TM \otimes_M T^*M) \rightarrow \mathcal{Q}_{\text{Ad},0}^2(P, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$.

Definizione 4.3.2. La torsione di Γ è la forma $T \in \mathcal{Q}^2(M, TM)$ per cui

$$\text{eq: 15.1.9} \quad (4.3.3) \quad \Lambda_\iota(T) = \Theta.$$

La curvatura di Γ è la forma $R \in \mathcal{Q}^2(M, TM \otimes_M T^*M)$ per cui

$$\text{eq: 15.1.9} \quad (4.3.4) \quad \Lambda_{\text{Ad}}(R) = \Omega.$$

¹Ricordiamo che $T^{1,1}M = TM \otimes_M T^*M$ è il fibrato degli endomorfismi lineari di TM .

Abbiamo cioè

$$T(X_{\pi(\sigma)}, Y_{\pi(\sigma)}) = \sigma \circ \Theta(\tilde{X}_\sigma, \tilde{Y}_\sigma), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}, \forall \sigma \in P,$$

$$R(X_{\pi(\sigma)}, Y_{\pi(\sigma)}) = \sigma \circ \Omega(\tilde{X}_\sigma, \tilde{Y}_\sigma) \circ \sigma^{-1}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}, \forall \sigma \in P$$

Teorema 4.3.3. *La torsione e la curvatura di una connessione affine Γ su M si esprimono, per mezzo della derivazione covariante, nella forma:*

$$\boxed{\text{eq: 15.1.11}} \quad (4.3.5) \quad T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

$$\boxed{\text{eq: 15.1.12}} \quad (4.3.6) \quad R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. La (4.3.6) segue dal Corollario 3.7.8. $\boxed{\text{cor: 14.10.3}}$

Dimostriamo la (4.3.5). Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, otteniamo, per le equazioni di struttura,

$$\Theta(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (d\theta + \omega \wedge \theta)(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d\theta(\tilde{X}, \tilde{Y}),$$

perché $\omega \wedge \theta$ si annulla su una coppia di campi di vettori orizzontali,

$$\begin{aligned} &= \tilde{X}\theta(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\theta(\tilde{X}) - \theta([\tilde{X}, \tilde{Y}]) \\ &= \tilde{X}\theta(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\theta(\tilde{X}) - \theta([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]) \end{aligned}$$

perché $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ ed $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ differiscono per un campo di vettori verticale,

$$= \theta(\widetilde{\nabla_X Y} - \widetilde{\nabla_Y X} - [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]),$$

e la tesi segue dalla (4.3.2). $\boxed{\text{eq: 15.1.e}}$

I fibrati tensoriali $T^{r,s}M$ dei tensori r -covarianti ed s -controvarianti su M sono associati alle rappresentazioni tensoriali di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. La derivazione covariante è quindi definita sull'algebra dei *campi tensoriali*

$$\boxed{\text{eq: 15.2.11}} \quad (4.3.7) \quad \mathfrak{T}^*(M) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{T}^{r,s}(M), \quad \text{ove } \mathfrak{T}^{r,s}(M) = \Gamma(M, T^{r,s}M).$$

Definizione 4.3.4. Siano i, j due interi positivi. La *contrazione* C_i^j è un'applicazione $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare $C_i^j : \mathfrak{T}^{r,s} \rightarrow \mathfrak{T}^{r-1, s-1}$ che è nulla se $i > r$ oppure $j > s$, e, altrimenti, è data da

$$C_i^j(X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^s) = \eta^j(X_i) X_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{X}_i \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \eta^1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\eta}^j \otimes \cdots \otimes \eta^s$$

sui tensori di rango 1.

Teorema 4.3.5. *La derivazione covariante è una derivazione dell'algebra dei campi tensoriali che preserva i gradi di covarianza e controvarianza e commuta con le contrazioni.* \square

Recapitoliamo le proprietà della derivazione covariante dei campi tensoriali. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\tau \in \mathfrak{T}^*(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M) = \mathfrak{T}^{0,0}(M)$, $i, j, r, s \in \mathbb{N}$:

$$(4.3.8) \quad \nabla_X : \mathfrak{T}^{r,s}(M) \longrightarrow \mathfrak{T}^{r,s}(M) \text{ è } \mathbb{R}\text{-lineare,}$$

$$(4.3.9) \quad C_j^i(\nabla_X \tau) = \nabla_X C_j^i \tau,$$

$$(4.3.10) \quad \nabla_X f = Xf,$$

$$(4.3.11) \quad \nabla_{X+Y}\tau = \nabla_X\tau + \nabla_Y\tau,$$

$$(4.3.12) \quad \nabla_{fX}\tau = f\nabla_X\tau.$$

Ad esempio, se $\eta \in \mathfrak{X}^*(M) = \mathfrak{T}^{0,1}(M)$, la derivata covariante $\nabla_X\eta$ è caratterizzata da

$$(\nabla_X\eta)(Y) = X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X Y), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Ad un tensore s -covariante ed r -controvariante $\tau \in T^{r,s}(M, V)$, a valori in uno spazio vettoriale V , possiamo associare un tensore alternato $\mathfrak{S}(\tau) \in \Omega^s(M, T^{r,0}(V))$, ponendo²

$$\text{eq: 15.2.8} \quad (4.3.13) \quad \mathfrak{S}(\tau)(X_1, \dots, X_s) = \frac{1}{s!} \sum_{a \in \mathfrak{S}_s} \varepsilon(a) \tau(X_{a_1}, \dots, X_{a_s}), \quad \forall X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M).$$

Con questa notazione, possiamo enunciare il:

thm: 14410

Teorema 4.3.6 (Identità algebriche di Bianchi). *Siano T ed R i tensori di torsione e di curvatura di una connessione affine Γ su M . Valgono allora, per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, le:*

$$\mathfrak{S}(R(X, Y)Z) = \mathfrak{S}[(T(T(X, Y), Z)) + (\nabla_X T)(Y, Z)] \quad \text{(I identità di Bianchi),}$$

$$\mathfrak{S}[(\nabla_X R)(Y, Z) + R(T(X, Y), Z)] = 0 \quad \text{(II identità di Bianchi).}$$

Definizione 4.3.7. Una connessione affine Γ si dice *simmetrica* se ha torsione nulla.

In particolare:

Corollario 4.3.8. *Se Γ è simmetrica, il suo tensore di curvatura soddisfa, per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, le due identità:*

$$\mathfrak{S}(R(X, Y)Z) = 0 \quad \text{(I identità di Bianchi con } T = 0)$$

$$\mathfrak{S}((\nabla_X R)(Y, Z)) = 0 \quad \text{(II identità di Bianchi con } T = 0)$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.3.6. ^{thm: 14410} Si possono dimostrare le formule per calcolo diretto, a partire dalla caratterizzazione della curvatura e della torsione per mezzo della derivazione covariante.

Dal momento che la torsione e la curvatura sono forme alternate, possiamo riscrivere le identità di Bianchi nella forma

$$\text{eq: 15.2.9} \quad (4.3.14) \quad \begin{cases} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\ = T(T(X, Y), Z) + T(T(Y, Z), X) + T(T(Z, X), Y) \\ + (\nabla_X T)(Y, Z) + (\nabla_Y T)(Z, X) + (\nabla_Z T)(X, Y), \end{cases}$$

$$\text{eq: 15.2.10} \quad (4.3.15) \quad \begin{cases} (\nabla_X R)(X, Y) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) \\ = R(T(X, Y), Z) + R(T(Y, Z), X) + R(T(Z, X), Y). \end{cases}$$

Verifichiamo ad esempio la prima. Se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, abbiamo

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y$$

²Lo spazio $\Omega^s(M, T^{r,0}(V))$ dei tensori alternati è un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{T}^{r,s}(M)$. La \mathfrak{S} è una proiezione di $\mathfrak{T}^{r,s}(M)$ su $\Omega^s(M, T^{r,0}(V))$.

$$\begin{aligned}
&= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\
&\quad + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X \\
&\quad + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&= \nabla_X (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y (\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&\quad - \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[Y,Z]} X - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&= \nabla_X (T(Y, Z)) + \nabla_Y (T(Z, X)) + \nabla_Z (T(X, Y)) \\
&\quad + \nabla_X ([Z, Y]) + \nabla_Y ([Z, X]) + \nabla_Z ([X, Y]) \\
&\quad - \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[Y,Z]} X - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&= (\nabla_X T)(Y, Z) + T(\nabla_X Y, Z) - T(\nabla_X Z, Y) \\
&\quad + (\nabla_Y T)(Z, X) + T(\nabla_Y Z, X) - T(\nabla_Y X, Z) \\
&\quad + (\nabla_Z T)(X, Y) + T(\nabla_Z X, Y) - T(\nabla_Z Y, X) \\
&\quad + \nabla_X ([Z, Y]) + \nabla_Y ([Z, X]) + \nabla_Z ([X, Y]) \\
&\quad - \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[Y,Z]} X - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&= (\nabla_X T)(Y, Z) + (\nabla_Y T)(Z, X) + (\nabla_Z T)(X, Y) \\
&\quad + T(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) + T(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X) + T(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y) \\
&\quad + \nabla_X ([Z, Y]) + \nabla_Y ([Z, X]) + \nabla_Z ([X, Y]) \\
&\quad - \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[Y,Z]} X - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&= (\nabla_X T)(Y, Z) + (\nabla_Y T)(Z, X) + (\nabla_Z T)(X, Y) \\
&\quad + T(T(X, Y), Z) + T(T(Y, Z), X) + T(T(Z, X), Y) \\
&\quad + T([X, Y], Z) + T([Y, Z], X) + T([Z, X], Y) \\
&\quad + \nabla_X ([Z, Y]) + \nabla_Y ([Z, X]) + \nabla_Z ([X, Y]) \\
&\quad - \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[Y,Z]} X - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&= (\nabla_X T)(Y, Z) + (\nabla_Y T)(Z, X) + (\nabla_Z T)(X, Y) \\
&\quad + T(T(X, Y), Z) + T(T(Y, Z), X) + T(T(Z, X), Y) \\
&\quad + \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_Z [X, Y] - [[X, Y], Z] \\
&\quad + \nabla_{[Y,Z]} X - \nabla_X [Y, Z] - [[Y, Z], X] \\
&\quad + \nabla_{[Z,X]} Y - \nabla_X [Z, X] - [[Z, X], Y] \\
&\quad + \nabla_X ([Z, Y]) + \nabla_Y ([Z, X]) + \nabla_Z ([X, Y]) \\
&\quad - \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[Y,Z]} X - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&= (\nabla_X T)(Y, Z) + (\nabla_Y T)(Z, X) + (\nabla_Z T)(X, Y) \\
&\quad + T(T(X, Y), Z) + T(T(Y, Z), X) + T(T(Z, X), Y).
\end{aligned}$$

Per dimostrare la seconda identità differenziale di Bianchi, dobbiamo ricordare che

$$(\nabla_X R)(Y, Z) = \nabla_X (R(Y, Z)) - R(\nabla_X Y, Z) + R(\nabla_X Z, Y)$$

$$\begin{aligned}
 &= \nabla_X \nabla_Y \nabla_Z - \nabla_X \nabla_Z \nabla_Y - \nabla_X \nabla_{[Y,Z]} \\
 &\quad + \nabla_Z \nabla_{\nabla_X Y} - \nabla_{\nabla_X Y} \nabla_Z - \nabla_{[Z, \nabla_X Y]} \\
 &\quad - \nabla_Y \nabla_{\nabla_X Z} + \nabla_{\nabla_X Z} \nabla_Y + \nabla_{[Y, \nabla_X Z]}.
 \end{aligned}$$

I calcoli si sviluppano poi in modo simile a quanto abbiamo fatto per dimostrare la prima. \square

4.4. Interpretazione geometrica della torsione e della curvatura

Per dare un'interpretazione geometrica della torsione e della curvatura di una connessione affine, utilizziamo i campi di vettori standard ed i campi di vettori fondamentali nel fibrato dei sistemi di riferimento F_M .

Ricordiamo che il *campo orizzontale standard* associato a $v \in \mathbb{R}^m$ è il campo $B(v) \in \mathcal{H}(P)$ per cui $\theta(B(v)) = v$.

prop14311

Proposizione 4.4.1. *Sia Γ una connessione affine su M . Allora:*

$$\begin{aligned}
 T = 0 &\iff [B(v_1), B(v_2)] \text{ è verticale} \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m, \\
 R = 0 &\iff [Bv_1, B(v_2)] \text{ è orizzontale} \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m.
 \end{aligned}$$

Torsione e curvatura misurano infatti le componenti orizzontale e verticale del commutatore di due campi orizzontali standard:

Lemma 4.4.2. *Per ogni $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ abbiamo*

$$(4.4.1) \quad \Theta(B(v_1), B(v_2)) = -\theta([B(v_1), B(v_2)]),$$

$$(4.4.2) \quad \Omega(B(v_1), B(v_2)) = -\omega([B(v_1), B(v_2)]).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
 \Theta(B(v_1), B(v_2)) &= d\theta(B(v_1), B(v_2)) = B(v_1)v_2 - B(v_2)v_1 - \theta([B(v_1), B(v_2)]) \\
 &= -\theta([B(v_1), B(v_2)])
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega(B(v_1), B(v_2)) &= d\omega(B(v_1), B(v_2)) \\
 &= B(v_1)\omega(B(v_2)) - B(v_2)\omega(B(v_1)) - \omega([B(v_1), B(v_2)]) \\
 &= -\omega([B(v_1), B(v_2)]).
 \end{aligned}$$

La Proposizione ^{prop14311}4.4.1 segue dal fatto che $T = 0$ se e soltanto se $\Theta = 0$ ed, analogamente $R = 0$ se e soltanto se $\Omega = 0$. \square

Analogamente, l'annullarsi del differenziale covariante della torsione (risp. della curvatura) equivale al fatto che la componente orizzontale (risp. verticale) del commutatore di due campi orizzontali standard sia ancora un campo di vettori standard (risp. un campo verticale fondamentale).

prop14314

Proposizione 4.4.3. *Sia Γ una connessione affine su M . Fissiamo un riferimento $\sigma_0 \in P$ ed indichiamo con $P \subset P$ il fibrato d'olonomia per il punto σ_0 , con gruppo strutturale \mathbf{G} e sia \mathfrak{g} l'algebra di Lie di \mathbf{G} . Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$. Allora:*

- (1) *Se $\nabla T = 0$, allora $\theta([B(v_1), B(v_2)]) = v$ su P per qualche $v \in \mathbb{R}^m$.*
- (2) *Se $\nabla R = 0$, allora $\omega([B(v_1), B(v_2)]) = A$ su P per qualche $A \in \mathfrak{g}$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $X \in \mathfrak{X}(M)$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$. Fissiamo un punto $\sigma \in P$ e siano $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(U)$ campi di vettori, definiti in un intorno U di $p = \pi(\sigma) \in M$, che si sollevino in $B(v_1), B(v_2)$ lungo il rialzamento orizzontale per σ di una curva integrale di X per p . È

$$(\nabla_X T)(Y_1, Y_2) = \nabla_X(T(Y_1, Y_2)) - T(\nabla_X Y_1, Y_2) - T(Y_1, \nabla_X Y_2).$$

Osserviamo che, in p , è $\nabla_{X_p} Y_i = \sigma(\tilde{X}v_i) = 0$. Otteniamo perciò

$$\sigma^{-1}(\nabla_X T(Y_1, Y_2)) = \tilde{X}_\sigma \Theta(B(v_1), B(v_2)) = -\tilde{X}_\sigma \theta([B(v_1), B(v_2)]).$$

Quindi la condizione $\nabla T = 0$ implica che

$$\Theta(B(v_1), B(v_2)) = -\theta([B(v_1), B(v_2)])$$

sia costante lungo i cammini orizzontali per i punti di P e dunque su P , perché P è lo spazio totale del fibrato d'olonomia, e quindi che la componente orizzontale di $[B(v_1), B(v_2)]$ sia un vettore orizzontale standard.

Viceversa, abbiamo per $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$, indicando con \sum' la somma su tutte le permutazioni con segnatura 1 di 0, 1, 2,

$$\begin{aligned} D\Theta(B(v_0), B(v_1), B(v_2)) &= \sum' B(v_i)\Theta(B(v_j), B(v_k)) - \sum' \Theta([B(v_i), B(v_j)], B(v_k)) \\ &= -\sum' B(v_i)\theta([B(v_j), B(v_k)]) \\ &\quad - \sum' d\theta(\hbar([B(v_i), B(v_j)]), B(v_k)) \\ &= -\sum' \hbar([B(v_i), B(v_j)])v_k \\ &\quad + \sum' B(v_k)\theta(\hbar([B(v_i), B(v_j)])) \\ &\quad + \sum' \theta([\hbar([B(v_i), B(v_j)]), B(v_k)]) \\ &= \sum' \theta([B(v_{i,j}), B(v_k)]). \end{aligned}$$

Per l'ipotesi che $\theta([B(v_i), B(v_j)])$ sia costante, possiamo scrivere infatti $\hbar([B(v_i), B(v_j)]) = B(v_{i,j})$ per un vettore costante $v_{i,j} \in \mathbb{R}^m$.

In modo analogo, si dimostra che, se $\nabla R = 0$, allora $\Omega(B(v_1), B(v_2))$ è costante su P e quindi $\omega([B(v_1), B(v_2)])$ è costante su P e, per il Teorema 5.10.1 è un elemento di \mathfrak{g} . \square

Corollario 4.4.4. *Sia Γ una connessione affine su M con $\nabla T = 0$ e $\nabla R = 0$. Fissiamo $\sigma_0 \in F(M)$ e siano $P \subset F(M)$ il fibrato di olonomia che contiene σ_0 , \mathbf{G} il suo gruppo strutturale e \mathfrak{g} l'algebra di Lie di \mathbf{G} . Allora i campi di vettori fondamentali A^* con $A \in \mathfrak{g}$ ed i campi orizzontali standard generano un'algebra di Lie di dimensione finita $m + \dim \mathfrak{g}$ di campi di vettori.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che, senza alcuna ipotesi su torsione e curvatura, valgono le formule:

$$\begin{cases} [A_1^*, A_2^*] = [A_1, A_2]^*, & \forall A_1, A_2 \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}), \\ [A^*, B(v)] = B(Av), & \forall A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}), \forall v \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Se curvatura e torsione sono parallele, per la Proposizione ^{prop14314} 4.4.3 abbiamo anche che, se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$,

$$[B(v_1), B(v_2)] = A^* + B(v)$$

per qualche $A \in \mathfrak{g}$, $v \in \mathbb{R}^m$. \square

4.5. Esistenza di connessioni simmetriche

Ricordiamo che una connessione affine si dice *simmetrica* se ha torsione nulla.

Le connessioni affini su M formano uno spazio affine $\Gamma(M)$, con spazio vettoriale associato $\mathcal{Q}_{\text{Ad},0}(\mathbb{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$. Ciò significa che, fissata la forma di Cartan ω di una qualsiasi connessione affine su M , è

$$\Gamma(M) \simeq \{\omega + \alpha \mid \alpha \in \mathcal{Q}_{\text{Ad},0}^1(\mathbb{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))\}.$$

Un elemento τ di $\mathcal{Q}_{i,0}^2(\mathbb{F}(M), \mathbb{R}^m)$ definisce in modo naturale un elemento α_τ di $\mathcal{Q}_{\text{Ad},0}^1(\mathbb{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$, con

$$\alpha_\tau(X_\sigma)v = \tau(X_\sigma, \sigma(v)), \quad \forall \sigma \in \mathbb{F}(M), \quad \forall X_\sigma \in T_\sigma \mathbb{F}(M), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m,$$

e viceversa dalla forma α_τ possiamo ricavare la τ mediante

$$\tau = \frac{1}{2}\alpha_\tau \wedge \theta, \quad \forall \tau \in \mathcal{Q}_{i,0}^2(\mathbb{F}(M), \mathbb{R}^m).$$

È infatti

$$\begin{aligned} (\alpha_\tau \wedge \theta)(X_\sigma, Y_\sigma) &= \alpha_\tau(X_\sigma)(\sigma^{-1}Y_\sigma) - \alpha_\tau(Y_\sigma)(\sigma^{-1}X_\sigma) \\ &= \tau(X_\sigma, Y_\sigma) - \tau(Y_\sigma, X_\sigma) = 2\tau(X_\sigma, Y_\sigma). \end{aligned}$$

In particolare, se $\Theta = (d\theta + \omega \wedge \theta) \in \mathcal{Q}_{i,0}^2(\mathbb{F}(M), \mathbb{R}^m)$ è la forma di torsione di Γ_ω , la

$$\boxed{\text{eq1431}} \quad (4.5.1) \quad \omega' = \omega - \frac{1}{2}\alpha_\Theta$$

è la forma di Cartan di una connessione $\Gamma_{\omega'}$ con torsione nulla. Infatti

$$\Theta' = D'\theta = d\theta + (\omega - \frac{1}{2}\alpha_\tau) \wedge \theta = \Theta - \frac{1}{2}\alpha_\Theta \wedge \theta = 0.$$

Osservazione 4.5.1. Non c'è una relazione semplice tra la forma di curvatura di Γ_ω e di quella della $\Gamma_{\omega'}$ ad essa associata dalla (4.5.1). Osserviamo che le due connessioni Γ_ω e $\Gamma_{\omega'}$ hanno le stesse linee geodetiche.

4.6. Derivazione covariante lungo una curva

Sia M una varietà differenziabile su cui abbiamo fissato una connessione affine Γ . Possiamo quindi definire il trasporto parallelo di vettori tangenti (vedi il §2.8 del Capitolo 2). Abbiamo: ^{sec: 14.14}

Teorema 4.6.1. *Sia M una varietà differenziabile, con una connessione affine Γ , $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ e sia $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ una curva integrale di X con $\gamma(0) = p$. Indichiamo con $\tau_t : T_p M \rightarrow T_{\gamma(t)} M$ il trasporto parallelo lungo la curva γ . Allora:*

$$(4.6.1) \quad (\nabla_X Y)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^{-1} Y(\gamma(t)) - Y(p)}{t}.$$

Possiamo estendere la definizione del trasporto parallelo ai tensori. Sia J un intervallo di \mathbb{R} contenente 0 e $\gamma : J \rightarrow M$ una curva integrale di $X \in \mathfrak{X}(M)$, con $\gamma(0) = p \in M$. Sia $\tau_t : T_p M \rightarrow T_{\gamma(t)} M$ il trasporto parallelo lungo la curva γ . Poiché τ_t è un isomorfismo lineare, la sua aggiunta τ_t^* è un isomorfismo tra gli spazi duali. Otteniamo quindi un isomorfismo lineare $(\tau^*)^{-1} : T_p^* M \rightarrow T_{\gamma(t)}^* M$. Per ogni p, q interi non negativi risulta allora definita un unico isomorfismo lineare:

$$\begin{aligned} \tau_t^{(p,q)} : T^{p,q} M &\rightarrow T^{p,q} M && \text{tale che} \\ \tau_t^{(p,q)}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v^1 \otimes \cdots \otimes v^q) \\ &= \tau_t(v_1) \otimes \cdots \otimes \tau_t(v_p) \otimes (\tau^*)^{-1}(v^1) \otimes \cdots \otimes (\tau^*)^{-1}(v^q) \\ &\quad \forall v_1, \dots, v_p \in T_p M, \quad \forall v^1, \dots, v^q \in T_p^* M. \end{aligned}$$

Possiamo interpretare la derivazione covariante di un qualsiasi *tensore* in termini di trasporto parallelo. Sia $\mathfrak{T}^{[p,q]} M = \mathcal{C}^\infty(M, T^{p,q} M)$ lo spazio dei tensori p -controvarianti e q -covarianti su M . Abbiamo allora

$$(4.6.2) \quad (\nabla_X t)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\{\tau_t^{(p,q)}\}^{-1}(t(\gamma(t))) - t(p)}{t} \quad \forall t \in \mathfrak{T}^{p,q} M,$$

ove γ è una curva integrale di X con $\gamma(0) = p$.

4.7. Forme e simboli di Christoffel

Supponiamo fissata su M una connessione affine Γ , con forma di Cartan ω .

4.7.1. Forme di Christoffel. Ad un atlante di trivializzazione $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \sigma_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ di $F(M)$ sono associate le *forme di Christoffel*³

$$\text{eq: 15.1.b} \quad (4.7.1) \quad \omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega \in \Omega^2(U_\alpha, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$$

Proposizione 4.7.1. *Abbiamo:*

$$\text{eq: 15.1.a} \quad (4.7.2) \quad \nabla_X Y = \sigma_\alpha(X(\sigma_\alpha^{-1} Y) + \omega_\alpha(X)(\sigma_\alpha^{-1} Y)) \quad \text{su } U_\alpha, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

4.7.2. Espressioni dei simboli di Christoffel in coordinate locali. Ad una carta locale (U, x) di M , con $x = (x^1, \dots, x^m)$, associamo il sistema di riferimento $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m)$.

La corrispondente trivializzazione locale di $F(M)$ su U fa corrispondere ad un riferimento $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ la matrice $(x_j^i) \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ per cui

$$X_j = \sum_{i=1}^m x_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Indichiamo con (X^i) l'inversa della matrice (x_j^i) . Abbiamo cioè

$$\sum_{h=1}^m x_h^i X_h^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Siano e_1, \dots, e_m i vettori della base canonica di \mathbb{R}^m .

³Vedi il §2.6 del Capitolo 2 sec: 14, 5 | ch: cp

Lemma 4.7.2. *La forma canonica $\theta \in \Omega^1(F(M), \mathbb{R}^m)$ si esprime nelle coordinate locali mediante*

$$\text{eq: 15.4.1} \quad (4.7.3) \quad \theta = \sum \theta^i e_i, \quad \text{con} \quad \theta^i = \sum_{j=1}^m X_j^i dx^j. \quad \square$$

Indichiamo con E_j^i la base canonica di $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$. La E_j^i è la matrice il cui unico coefficiente diverso da 0, ed uguale ad 1, è quello della i -esima riga e j -esima colonna.

La forma di Cartan della connessione affine Γ si scrive nella forma

$$\text{eq: 15.4.2} \quad (4.7.4) \quad \omega = \sum_{i,j=1}^m \omega_j^i E_i^j, \quad \text{con} \quad \omega_j^i \in \Omega^1(F_U).$$

Consideriamo $\sigma_U = (\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m)$ come una sezione di $\Gamma(U, F(M))$, e consideriamo la relativa forma di Christoffel $\omega_U = \sigma_U^* \omega \in \Omega(U, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$. Essa definisce m^3 funzioni $\Gamma_{j,k}^i$ su U , tali che

$$\text{eq: 15.4.3} \quad (4.7.5) \quad \omega_U = \sum_{i,k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \Gamma_{j,k}^i dx^j \right) E_i^k.$$

Definizione 4.7.3. Le funzioni $\Gamma_{j,k}^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ si dicono le *componenti dei simboli di Christoffel* di Γ nella carta locale x^1, \dots, x^m .

Le equazioni di gauge danno per i simboli di Christoffel

Proposizione 4.7.4. *Se $\bar{\Gamma}_{\beta,\gamma}^\alpha$ sono i simboli di Christoffel di Γ in un'altra carta locale y^1, \dots, y^m su U , abbiamo*

$$\text{eq: 15.4.4} \quad (4.7.6) \quad \bar{\Gamma}_{\beta,\gamma}^\alpha = \sum_{i,j,k=1}^m \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^\beta \partial y^\gamma} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}. \quad \square$$

La forma di Cartan della connessione Γ si esprime anch'essa per mezzo dei simboli di Christoffel. Abbiamo infatti

Proposizione 4.7.5. *La forma di Cartan della connessione Γ si esprime, nelle coordinate locali (x^i, x^j) , mediante*

$$\text{eq: 15.4.5} \quad (4.7.7) \quad \omega = \sum_{i,j=1}^m \omega_j^i E_i^j, \quad \text{con} \quad \omega_j^i = \sum_{k=1}^m X_k^i (dx_j^k + \sum_{h,\ell} \Gamma_{h,\ell}^k x_j^\ell dx^h).$$

La derivazione covariante si esprime per mezzo dei simboli di Christoffel:

Proposizione 4.7.6. *Indicando con ∇_i la derivata covariante rispetto al campo di vettori $\partial/\partial x^i$, abbiamo*

$$\text{eq: 15.4.6} \quad (4.7.8) \quad \nabla_i \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \forall i, j = 1, \dots, m. \quad \square$$

Definizione 4.7.7. Definiamo le componenti $T_{j,h}^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ della torsione ed $R_{j,h,k}^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ della curvatura di Γ rispetto alle coordinate locali x^1, \dots, x^m mediante

$$\text{eq: 15.4.7} \quad (4.7.9) \quad T\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^h}\right) = \sum_{i=1}^m T_{j,h}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\text{eq: 15.4.8} \quad (4.7.10) \quad R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^h}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{i=1}^m R_{j,h,k}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Proposizione 4.7.8. *Le componenti della torsione e della curvatura di Γ si esprimono, per mezzo dei simboli di Christoffel in una carta locale x^1, \dots, x^m in $U \subset M$, mediante le formule*

$$\text{eq: 15.4.9} \quad (4.7.11) \quad T_{j,h}^i = \Gamma_{j,h}^i - \Gamma_{h,j}^i,$$

$$(4.7.12) \quad R_{j,h,k}^i = \frac{\partial \Gamma_{h,k}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial x^h} + \sum_{\ell=1}^m (\Gamma_{j,\ell}^i \Gamma_{h,k}^\ell - \Gamma_{h,\ell}^i \Gamma_{j,k}^\ell).$$

4.7.3. Espressioni rispetto a sistemi di riferimento arbitrari. Un sistema di riferimento (X_1, \dots, X_m) su un aperto U di M determina funzioni $\Gamma_{j,h}^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tali che

$$\text{eq: k.1.1} \quad (4.7.13) \quad \nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k X_k \quad \text{per } i, j = 1, \dots, m.$$

Definizione 4.7.9. I coefficienti $\Gamma_{i,j}^k$ definiti dalla ^{eq:k.1.1} (4.7.13) si dicono i *simboli di Christoffel* di ∇ nel sistema di riferimento (X_1, \dots, X_m) .

Ogni campo di vettori $Y \in \mathfrak{X}(U)$ è combinazione lineare a coefficienti in $\mathcal{C}^\infty(U)$ dei campi del sistema di riferimento:

$$Y = \sum_{i=1}^m \phi^i X_i.$$

Le sue derivate covarianti rispetto ai campi di riferimento X_1, \dots, X_m sono allora:

$$(4.7.14) \quad \nabla_{X_i} Y = \sum_{k=1}^m \left(X_i(\phi^k) + \sum_{j=1}^m \Gamma_{i,j}^k \phi^j \right) X_k.$$

Siano $\bar{\Gamma}_{i,j}^k \in \mathcal{C}^\infty(U)$ i simboli di Christoffel di Γ in un altro riferimento (Y_1, \dots, Y_m) su U . È $Y_i = \sum_{j=1}^m a_j^i X_j$, con $(a_j^i) \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}))$. Indichiamo con (A_j^i) l'inversa della matrice (a_j^i) .

Vale allora la formula di trasformazione per i simboli di Christoffel:

$$\text{eq: f71.3} \quad (4.7.15) \quad \bar{\Gamma}_{i,j}^k = \sum_{r,s,t=1}^m \Gamma_{r,s}^t a_i^r a_j^s A_t^k + \sum_{t=1}^m A_t^k Y_i(a_t^j) \quad \text{per } i, j, k = 1, \dots, m.$$

Se $X_i = \partial/\partial x^i$ e $Y_i = \partial/\partial y^i$ questa formula si riduce alla ^{eq:15.4.4} (4.7.6); infatti le matrici (a_j^i) ed (A_j^i) sono in questo caso gli Jacobiani dei cambiamenti di coordinate.

Un diffeomorfismo $\Phi : M \rightarrow M$ definisce un isomorfismo $\Phi_* : \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow X^\Phi \in \mathfrak{X}(M)$ che fa corrispondere ad un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ il campo di vettori

$$X^\Phi(p) = d\Phi_{\Phi^{-1}(p)}(X_{\Phi^{-1}(p)}) \quad \text{per ogni } p \in M.$$

Il pullback di Γ mediante Φ è una nuova connessione lineare Γ^Φ su M . La corrispondente derivazione covariante ∇^Φ è definita da

$$(4.7.16) \quad \nabla_X^\Phi Y = (\nabla_{X^\Phi} Y^\Phi)^{\Phi^{-1}} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposizione 4.7.10. *Un diffeomorfismo $\Phi : M \rightarrow M$ è una trasformazione affine per la connessione ∇ se $\nabla^\Phi = \nabla$.*

4.8. Parallelismo

Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ una curva differenziabile in M ed $Y \in \mathcal{C}^\infty(I, TM)$ un campo di vettori differenziabile lungo la curva γ , tale cioè che Possiamo definire il differenziale covariante $\nabla_{\dot{\gamma}} Y = DY/dt$ di Y lungo la curva γ .

Vale infatti il seguente Lemma (vedi §2.8 del Capitolo 2).

Lemma 4.8.1. *Se $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y_1(\gamma(t)) = Y_2(\gamma(t))$ per ogni $t \in J$, allora $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y_1 = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y_2$ per ogni $t \in J$.*

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare il lemma è sufficiente stabilire l'espressione della derivata covariante lungo una curva in coordinate locali.

Siano x^1, \dots, x^m sono coordinate locali nell'intorno di un punto $\gamma(t)$ della curva. Se $(\gamma^1(t), \dots, \gamma^m(t))$ è l'espressione parametrica di γ ed

$$Y = Y^1(t) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + Y^m(t) \frac{\partial}{\partial x^m},$$

allora la derivata covariante di Y lungo γ è:

$$\text{eq: 15.6.1} \quad (4.8.1) \quad \frac{DY}{dt} = \sum_{i=1}^m \left(\dot{Y}^i + \Gamma_{j,k}^i \dot{\gamma}^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

□

Definizione 4.8.2. Il campo di vettori $Y(t)$ è *parallelo* lungo la curva $\gamma : J \rightarrow M$ se $DY/dt = 0$ in tutti i punti di γ .

Ricordiamo, dal §4.9, la definizione di geodetica:

Definizione 4.8.3. La curva $\gamma : J \rightarrow M$ è una *geodetica* se il campo della velocità $\dot{\gamma}$ è parallelo lungo γ .

Un campo di vettori parallelo lungo una curva γ soddisfa il sistema di equazioni differenziali ordinarie *lineare* (4.8.1) lungo la curva γ . Abbiamo quindi:

Proposizione 4.8.4. *Se $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ è una curva differenziabile che unisce due punti p_0, p_1 di M , per ogni $v \in T_{p_0}M$ vi è uno e un solo campo di vettori $Y = Y(v, t)$ parallelo lungo γ con $Y(0) = v$. L'applicazione $T_{p_0} \ni v \rightarrow Y(v, 1) \in T_{p_1}M$ è un isomorfismo lineare.*

□

4.9. Geodetiche

sec: 15.3

Sia I un intervallo in \mathbb{R} ed $s \in \mathcal{C}^2(I, M)$ una curva di classe \mathcal{C}^2 . La sua velocità \dot{s} è un campo di vettori di classe \mathcal{C}^1 su s , di cui possiamo calcolare la derivata covariante $(D\dot{s}/dt)$ lungo s . Se \tilde{s}_{σ_0} è il sollevamento orizzontale di s a partire da un punto σ_0 di $F(M)$, è

$$\text{eq: 15.3.0} \quad (4.9.1) \quad \frac{D\dot{s}}{dt} = \tilde{s}_{\sigma_0} \left(\frac{d(\tilde{s}_{\sigma_0}^{-1} \dot{s})}{dt} \right).$$

Definizione 4.9.1. Una curva $\gamma \in \mathcal{C}^2([0, 1], M)$ si dice *una geodetica* se la sua velocità $\dot{\gamma}$ è parallela lungo γ , se cioè

$$\text{eq: 15.3.1} \quad (4.9.2) \quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Scriveremo a volte $\frac{D^2\gamma}{dt^2}$ per $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}$.

Osservazione 4.9.2. Se $\gamma \in \mathcal{C}^2(I, M)$ è una geodetica, la sua velocità $\dot{\gamma}$ è o identicamente nulla, o diversa da zero per ogni $t \in I$. [Vedi §5.8 del Capitolo 2.]

Osservazione 4.9.3. Supponiamo che $\gamma \in \mathcal{C}^2(I, M)$ sia una geodetica, con $\dot{\gamma} \neq 0$. Una sua riparametrizzazione $\gamma \circ \tau$, con $\tau \in \mathcal{C}^2(I', I)$ è ancora una geodetica se, e soltanto se, la τ è affine, cioè della forma $\tau(t) = at + b$. Abbiamo infatti

$$\frac{d}{dt}\gamma \circ \tau = \dot{\tau} \cdot \dot{\gamma} \circ \tau \implies \frac{D}{dt} \frac{d}{dt}(\gamma \circ \tau) = \ddot{\tau} \dot{\gamma} + \dot{\tau}^2 \frac{D\dot{\gamma}}{dt}.$$

Quindi, se γ è una geodetica, $\frac{D^2(\gamma \circ \tau)}{dt^2} = \ddot{\tau} \cdot \dot{\gamma}$. Se $\dot{\gamma} \neq 0$, questa ci dà $\ddot{\tau} = 0$, e perciò τ è affine.

Proposizione 4.9.4. La proiezione su M di una curva integrale di un campo di vettori orizzontale standard è una geodetica e viceversa ogni rialzamento orizzontale di una geodetica in M è la curva integrale di un campo di vettori standard.

DIMOSTRAZIONE. Siano $v \in \mathbb{R}^m$, $\alpha_v \in \mathcal{C}^\infty(I, F(M))$ una curva integrale di $B(v)$, e $\gamma_v = \pi \circ \alpha_v$. Poiché $(\alpha_v(t))^{-1} \dot{\alpha}_v(t) = v$ per ogni $t \in I$, per la (4.9.1) abbiamo $D^2(\gamma_v)/dt^2 = 0$.

Viceversa, la (4.9.1) implica che, se $\tilde{\gamma}$ è il sollevamento orizzontale di una geodetica γ , la $(\tilde{\gamma})^{-1} \dot{\tilde{\gamma}}$ è costante. \square

Come conseguenza otteniamo:

thm320 **Teorema 4.9.5.** Assegnati $p_0 \in M$ e $v_0 \in T_{p_0}M$ esiste un'unica geodetica γ , definita su un intervallo I contenente 0 come punto interno, tale che

$$\text{eq: 15.3.2} \quad (4.9.3) \quad \begin{cases} \gamma(0) = p_0, \\ \dot{\gamma}(0) = v_0. \end{cases}$$

Abbiamo inoltre $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$.

L'unicità va intesa nel modo seguente: se I, I' sono due intervalli di \mathbb{R} che contengono 0 e $\gamma \in \mathcal{C}^2(I, M)$, $\gamma' \in \mathcal{C}^2(I', M)$ sono due geodetiche con $\gamma(0) = p_0 = \gamma'(0)$, $\dot{\gamma}(0) = v_0 = \dot{\gamma}'(0)$, allora $\gamma(t) = \gamma'(t)$ per ogni $t \in I \cap I'$. In particolare, esiste una geodetica massimale che soddisfi le condizioni iniziali (4.9.3).

Se $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ è una geodetica non costante, allora $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.

Definizione 4.9.6. Una connessione affine Γ su M si dice *completa* se ogni geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ in M può essere estesa ad una geodetica definita su \mathbb{R} .

Per il Teorema 4.9.5, abbiamo

Proposizione 4.9.7. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la connessione Γ su M sia completa è che tutti i campi orizzontali standard siano completi su $F(M)$.*

L'equazione delle geodetiche

$$(4.9.4) \quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$$

si scrive in coordinate locali mediante:

$$(4.9.5) \quad \ddot{\gamma}^i + \sum_{j,k=1}^m \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k \Gamma_{j,k}^i, \quad \text{per } i = 1, \dots, m,$$

ed è quindi un'equazione differenziale *non lineare* del second'ordine. Abbiamo perciò:

Proposizione 4.9.8. *Se $p \in M$, $v \in T_p M$, esiste un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$, con $0 \in I$, ed una geodetica $\gamma_v : I \rightarrow M$ con $\gamma_v(0) = p$, $\dot{\gamma}_v(0) = v$.*

La geodetica γ_v è essenzialmente unica. Cioè, se I' è un altro intervallo di \mathbb{R} contenente 0 e $\gamma'_v : I' \rightarrow M$ un'altra geodetica con $\gamma'_v(0) = p$, $\dot{\gamma}'_v(0) = v$, allora $\gamma'_v(t) = \gamma_v(t)$ per ogni $t \in I \cap I'$. \square

Definizione 4.9.9. Se $v \in T_p M$, $p \in M$, indicheremo con γ_v la geodetica *massimale* tale che $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$ e con $J_v \subset \mathbb{R}$ il suo massimo dominio di definizione.

Osserviamo che, se $v \in T_p M$ e $t, s \in \mathbb{R}$ sono tali che $st \in J_v$, $t \in J_{sv}$, allora $\gamma_{sv}(t) = \gamma_v(st)$.

4.10. Espressione in coordinate delle equazioni di struttura

Ricordiamo che i tensori di *torsione* $T \in \mathfrak{T}^{1,2}(M)$ e di *curvatura* $R \in \mathfrak{T}^{1,3}(M)$ sono definiti da:

$$(4.10.1) \quad T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

$$(4.10.2) \quad R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \\ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Fissiamo un riferimento (X_1, \dots, X_m) su un aperto U di M e consideriamo i simboli di Christoffel e le componenti dei tensori di torsione e di curvatura definiti da:

$$(4.10.3) \quad \nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k X_k,$$

$$(4.10.4) \quad T(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^m T^k_{i,j} X_k,$$

$$(4.10.5) \quad R(X_i, X_j) X_h = \sum_{k=1}^m R^k_{h,i,j} X_k.$$

Definiamo delle 1-forme $\omega^i, \omega_j^i \in \mathcal{O}^1(U)$ (per $1 \leq i, j \leq m$) mediante:

$$(4.10.6) \quad \omega^i(X_j) = \delta_j^i, \quad \omega_j^i = \sum_{k=1}^m \Gamma_{k,j}^i \omega^k.$$

Le forme ω_j^i determinano a loro volta i simboli di Christoffel e quindi la connessione affine.

Diamo una descrizione più intrinseca delle forme ω^i e ω_j^i . Il dato del sistema di riferimento (X_1, \dots, X_n) definisce una forma differenziale

$$(4.10.7) \quad B\omega = (\omega^1, \dots, \omega^n) \in \Omega^1(U, \mathbb{R}^m).$$

La differenziazione affine definisce allora una forma $B\Omega = (\omega_j^i) \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ tale che

$$(4.10.8) \quad B\omega(\nabla_X Y) = d[B\omega(Y)](X) + B\Omega(Y)X.$$

Se X'_1, \dots, X'_n è un altro sistema di riferimento in U , le forme $B\omega' \in \Omega^1(U, \mathbb{R}^m)$ e $B\Omega' \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ ad esso associate sono legate alle $(B\omega, B\Omega)$ del precedente riferimento dalle *equazioni di gauge*:

$$(4.10.9) \quad \begin{cases} B\omega = aB\omega' & \text{con } a \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})), \\ \Omega' = a^{-1} \circ da + a^{-1} \circ B\Omega \circ a = a^{-1} \circ da + \text{Ad}(a^{-1})(\Omega). \end{cases}$$

Teorema 4.10.1 (Equazioni di struttura di Cartan). *Le forme ω_j^i soddisfano:*

$$\boxed{\text{eq: tors}} \quad (4.10.10) \quad d\omega^i = -\sum_{k=1}^m \omega_k^i \wedge \omega^k + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m T^i_{j,k} \omega^j \wedge \omega^k$$

$$\boxed{\text{eq: curv}} \quad (4.10.11) \quad d\omega_j^i = -\sum_{k=1}^m \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^m R^i_{j,h,k} \omega^h \wedge \omega^k.$$

DIMOSTRAZIONE. Definiamo i coefficienti $c_{i,j}^k$ mediante:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^m c_{i,j}^k X_k.$$

Useremo nel seguito la convenzione secondo cui indici uguali in alto e in basso si intendono sommati su tutto il loro insieme di definizione. Abbiamo dunque:

$$d\omega^i(X_j, X_k) = X_j(\omega^i(X_k)) - X_k(\omega^i(X_j)) - \omega^i([X_j, X_k]) = -c_{j,k}^i.$$

Abbiamo poi:

$$\begin{aligned} T(X_j, X_k) &= \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_k} X_j - [X_j, X_k] \\ &= \Gamma_{j,k}^i X_i - \Gamma_{k,j}^i X_i - c_{j,k}^i X_i, \end{aligned}$$

cioè

$$T^i_{j,k} = \Gamma_{j,k}^i - \Gamma_{k,j}^i - c_{j,k}^i$$

e quindi:

$$\begin{aligned} &(-\omega_h^i \wedge \omega^h + T^i_{h,\ell} \omega^h \wedge \omega^\ell)(X_j, X_k) \\ &= -\omega_k^i(X_j) + \omega_j^i(X_k) + \frac{1}{2} (T^i_{j,k} - T^i_{k,j}) \\ &= -\Gamma_{j,k}^i + \Gamma_{k,j}^i + \frac{1}{2} ((\Gamma_{j,k}^i - \Gamma_{k,j}^i - c_{j,k}^i) - (\Gamma_{k,j}^i - \Gamma_{j,k}^i - c_{k,j}^i)) \\ &= -c_{j,k}^i \end{aligned}$$

e quindi abbiamo verificato la $\boxed{\text{eq: tors}}$ (4.10.10).

Per i coefficienti del tensore di curvatura abbiamo l'espressione:

$$(4.10.12) \quad R^i_{j,h,k} = (X_h \Gamma_{k,j}^i) - (X_k \Gamma_{h,j}^i) + \Gamma_{k,j}^\ell \Gamma_{h,\ell}^i - \Gamma_{h,j}^\ell \Gamma_{k,\ell}^i - c_{h,k}^\ell \Gamma_{\ell,j}^i.$$

A partire dalla formula per le componenti della curvatura, la verifica della ^{eq: curv}(4.10.11) è analoga a quella della ^{eq: tors}(4.10.10). \square

In un riferimento X_1, \dots, X_n su un aperto U di M possiamo associare ai tensori di torsione e di curvatura le *forme di torsione e di curvatura* mediante:

$$(4.10.13) \quad T = \left(\sum_{j,k=1}^m T^i_{j,k} \omega^j \wedge \omega^k \right)_{i=1, \dots, n} \in \mathcal{Q}^2(U, \mathbb{R}^m),$$

$$(4.10.14) \quad R = \left(\sum_{h,k=1}^m R^i_{j,h,k} \omega^h \wedge \omega^k \right)_{h,k=1, \dots, n} \in \mathcal{Q}^2(U, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})),$$

dove, se V è uno spazio vettoriale reale, $\Lambda^p(U, V)$ è lo spazio delle p -forme differenziali alternate a valori in V .

Le equazioni di struttura si scrivono allora utilizzando le forme di torsione e di curvatura mediante⁴:

$$(4.10.15) \quad \begin{cases} d\omega = -\Omega \wedge \omega + \frac{1}{2}T \\ d\Omega = -\Omega \wedge \Omega + \frac{1}{2}R. \end{cases}$$

Supponiamo che il sistema di riferimento X_1, \dots, X_n sia definito su un intorno normale U_p del punto $p \in M$ e consideriamo l'applicazione differenziabile, definita in un intorno aperto V di 0 in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$:

$$(4.10.16) \quad \Phi : V \ni (t, a^1, \dots, a^m) \rightarrow \exp_p(ta^1 X \dots, ta^m X_n) \in U_p.$$

Abbiamo allora, per forme $\bar{\omega}^i, \bar{\omega}_j^i$ definite su V che sono combinazioni lineari a coefficienti \mathcal{C}^∞ di da^1, \dots, da^m :

$$(4.10.17) \quad \begin{cases} \Phi^* \omega^i = a^i dt + \bar{\omega}^i \\ \Phi^* \omega_j^i = \bar{\omega}_j^i \\ 1 \leq i, j \leq n \end{cases}$$

Vale la:

Proposizione 4.10.2. *Indicando ancora con $T^i_{j,k}$ ed $R^i_{j,h,k}$ i loro rialzamenti a V , le forme $\bar{\omega}^i$ e $\bar{\omega}_j^i$ soddisfano il sistema differenziale:*

$$(4.10.18) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial t} = da^i + a^k \bar{\omega}_k^i + T^i_{h,k} a^h \bar{\omega}^k, & \bar{\omega}^i(0, a^1, \dots, a^m) = 0 \\ \frac{\partial \bar{\omega}_j^i}{\partial t} = R^i_{j,h,k} a^j \bar{\omega}^k, & \bar{\omega}_j^i(0, a^1, \dots, a^m) = 0. \end{cases}$$

In particolare, se il tensore di curvatura è nullo, le forme ω_j^i sono costanti. Se anche la torsione è nulla, l'esponenziale definisce una trasformazione affine di un intorno di 0 in $T_p M$ su un intorno normale di p in M .

⁴Si può dare una formulazione intrinseca delle equazioni di struttura definendo forme $\tilde{\omega}, \tilde{\Omega}, \tilde{T}$ ed \tilde{R} sul fibrato principale $\mathfrak{F}(M)$ dei sistemi di riferimento di M .

4.11. Metriche pseudo-Riemanniane e connessione di Levi-Civita

sec: 149

Sia M una varietà differenziabile.

Definizione 4.11.1. Una *metrica Riemanniana* su M è il dato di un tensore simmetrico $g \in \mathfrak{T}^{0,2}(M)$ definito positivo:

(4.11.1)

$$g(X, Y) = g(Y, X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \quad (\text{simmetria}),$$

eq: 1491

(4.11.2)

$$g_p(X, X) > 0, \quad \text{se } X \in \mathfrak{X}(M) \text{ ed } X(p) \neq 0 \quad (\text{positività}).$$

Diciamo che la g è una *metrica pseudo-Riemanniana* di segnatura (p, q) , con $p+q = m$, se, invece della condizione (4.11.2) richiediamo che

(4.11.3)

$$T_p M \times T_p M \ni (v, w) \rightarrow g_p(v, w) \in \mathbb{R} \quad \text{è non degenera di segnatura } (p, q).$$

Una *varietà Riemanniana* (risp. *pseudo-Riemanniana*) è una varietà differenziabile su cui sia stata fissata una metrica Riemanniana (risp. pseudo-Riemanniana). Indicheremo a volte una varietà Riemanniana, o pseudo-Riemanniana, come una coppia (M, g) .

Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana, b una forma bilineare simmetrica su \mathbb{R}^m , e supponiamo che, per ogni $p \in M$, g_p abbia la stessa segnatura di b . Indichiamo con $\mathbf{O}_b(m)$ il gruppo degli automorfismi lineari di \mathbb{R}^m che preservano la forma b .

Otteniamo una riduzione $\mathfrak{O}_b(M) = (\mathbf{O}_b(m) \xrightarrow{\pi} M)$ ad $\mathbf{O}_b(m)$ di $F(M)$ ponendo

eq: 1492

(4.11.4)

$$\mathfrak{O}_b(M, p) = \{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, T_p M) \mid b(v, w) = g_p(\sigma(v), \sigma(w)), \forall v, w \in \mathbb{R}^m\}.$$

prop: 14335

Proposizione 4.11.2. Sia Γ una connessione affine su una varietà pseudo-Riemanniana (M, g) . Sono condizioni equivalenti:

a1

(1) Il trasporto parallelo preserva la forma g .

a2

(2) $\nabla g = 0$.

a3

(3) Γ ammette una $\mathbf{O}_b(n)$ riduzione ad $\mathfrak{O}_b(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ ed X, Y sono campi di vettori paralleli lungo γ , abbiamo

$$\frac{d}{dt} g(X(t), Y(t)) = (\nabla_{\dot{\gamma}} g)(X(t), Y(t)).$$

Da questa uguaglianza ricaviamo l'equivalenza $\stackrel{\text{a1}}{\Gamma} \Leftrightarrow \stackrel{\text{a2}}{\Gamma}$.

La g si rialza ad un'applicazione $\tilde{g} \in \mathcal{C}^\infty(F(M), \mathfrak{S}^2(\mathbb{R}^m))$, ove abbiamo indicato con $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ lo spazio vettoriale delle forme bilineari simmetriche su \mathbb{R}^m , con

$$\tilde{g}(\sigma)(v_1, v_2) = g(\sigma(v_1), \sigma(v_2)), \quad \forall \sigma \in F(M), \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m.$$

La restrizione di $\tilde{g}(\sigma)(v_1, v_2)$ a $\mathbf{O}_b(M)$ è costante ed uguale a $b(v_1, v_2)$. Quindi $X\tilde{g}(\sigma)(v_1, v_2) = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{O}_b(M))$ implica che $\nabla g = 0$. Questo dimostra l'implicazione $\stackrel{\text{a3}}{\Gamma} \Rightarrow \stackrel{\text{a2}}{\Gamma}$.

Fissiamo $\sigma_0 \in \mathbf{O}_b(M)$ e sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ una curva con $\gamma(0) = \pi(\sigma_0)$. Consideriamo il suo rialzamento orizzontale $\tilde{\gamma}$ con $\tilde{\gamma}(0) = \sigma_0$. I vettori $\tilde{\gamma}(t)e_i$ sono ottenuti da $\sigma_0 e_i$ per trasporto parallelo lungo γ . Quindi, se vale (I'), è $\tilde{\gamma}(t) \in \mathbf{O}_b(M)$ per ogni $t \in [0, 1]$. Da questo deduciamo che $H_{\sigma_0}F(M) \subset T_{\sigma_0}\mathbf{O}_b(M)$ per ogni punto $\sigma_0 \in \mathbf{O}_b(M)$, e che quindi la connessione affine Γ ammette una \mathbf{O}_b -riduzione ad $\mathbf{O}_b(M)$. Ciò dimostra l'implicazione (B) \Rightarrow (I') e completa la dimostrazione della proposizione. \square

Definizione 4.11.3. Diciamo che una connessione affine Γ ed una metrica pseudo-Riemanniana g su M sono *compatibili* se sono soddisfatte le condizioni equivalenti della Proposizione 4.11.2. Diremo anche che la Γ è una *connessione metrica*.

thm:lc

Teorema 4.11.4 (Levi-Civita). *Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana. Vi è allora un'unica connessione affine Γ su M compatibile con g e con torsione nulla.*

DIMOSTRAZIONE. La derivazione covariante ∇ della connessione cercata deve soddisfare le due condizioni

$$(4.11.5) \quad \begin{cases} T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}, \\ \nabla g = 0. \end{cases}$$

Per la seconda delle (4.11.5) abbiamo per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$(4.11.6) \quad Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Se supponiamo inoltre che valga la prima delle (4.11.5) abbiamo

$$\begin{aligned} Yg(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) - g(Z, [X, Y]) \\ Zg(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \\ &= g(\nabla_X Z, Y) + g(X, \nabla_Y Z) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) - g(Z, [X, Y]) \\ - g(\nabla_X Z, Y) - g(X, \nabla_Y Z) - g(Y, [Z, X]) + g(X, [Y, Z]). \end{aligned}$$

Da questa ricaviamo la formula della derivazione covariante :

$$(4.11.7) \quad \begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]). \end{aligned}$$

Questo dimostra l'unicità. Viceversa, possiamo utilizzare la (4.11.7) per definire $\nabla_X Y$. Si dimostra senza difficoltà che la ∇ così definita è una derivazione covariante con torsione nulla. \square

Definizione 4.11.5. L'unica connessione metrica priva di torsione su (M, g) si dice la *connessione di Levi-Civita*⁵.

sec: 1410

4.12. Espressioni locali

In questo paragrafo ricaveremo diverse espressioni locali per il simboli di Christoffel ed i tensori di curvatura per la connessione di Levi-Civita di una metrica Riemanniana g su M .

Espressione in coordinate locali. Siano x^1, \dots, x^m coordinate locali in un aperto U di M e poniamo

$$g_{i,j} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Per la (4.11.7) i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita si esprimono in funzione dei coefficienti $g_{i,j}$. Abbiamo infatti

$$2\Gamma_{i,j}^\ell g_{\ell,k} = \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i,k}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k}.$$

Indicando con $g^{i,j}$ i coefficienti della matrice inversa della $(g_{i,j})_{i,j=1,\dots,m}$, otteniamo

$$(4.12.1) \quad \Gamma_{i,j}^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^m g^{k,\ell} \left(\frac{\partial g_{j,\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i,\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^\ell} \right).$$

L'assenza di torsione equivale al fatto che i simboli di Christoffel, calcolati in un sistema di coordinate locali, siano simmetrici rispetto ai due indici in basso.

Espressione in un riferimento ortonormale. Sia $(X_1, \dots, X_m) \in \Gamma(U, \mathbf{O}(M))$ un sistema di riferimento ortonormale in un aperto U di M . Poiché le $g(X_i, X_j) = \delta_{i,j}$ sono costanti, i simboli di Christoffel nel riferimento (X_1, \dots, X_m) soddisfano:

$$(4.12.2) \quad \Gamma_{i,j}^k = \frac{1}{2}(c_{i,j}^k + c_{k,i}^j + c_{k,j}^i) = -\Gamma_{i,k}^j, \quad \text{ove} \quad [X_i, X_j] = c_{i,j}^k X_k,$$

e l'uguaglianza $\Gamma_{i,j}^k = -\Gamma_{i,k}^j$ è conseguenza del fatto che i coefficienti $c_{i,j}^k$ sono antisimmetrici rispetto agli indici in basso.

Per scrivere le *forme di Christoffel* utilizziamo il co-riferimento $(\theta^1, \dots, \theta^m)$ associato ad (X_1, \dots, X_m) . Le forme $\theta^1, \dots, \theta^m \in \Omega^1(U)$ sono caratterizzate da $\theta^i(X_j) = \delta_j^i$ per $1 \leq i, j \leq m$, di modo che

$$g = \sum_{i=1}^m (\theta^i)^2 = \sum_{i=1}^m \theta^i \otimes \theta^i.$$

La forma di Christoffel $\omega_U = (\omega_k^j)$ è quindi a valori in $\mathfrak{o}(m)$ e le equazioni di struttura danno

$$(4.12.3) \quad \begin{cases} d\theta^i + \sum_{j=1}^m \omega_j^i \wedge \theta^j = 0, \\ d\omega_j^i + \sum_{k=1}^m \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \sum_{h,k=1}^m R_{j,h,k}^i \theta^h \wedge \theta^k, \end{cases}$$

⁵ Tullio Levi-Civita (Padova, 29 Marzo 1873 - Roma, 29 Dicembre 1941) matematico italiano, allievo di Gregorio Ricci-Curbastro, è l'inventore del *calcolo differenziale assoluto* (calcolo tensoriale). Ha dato notevoli contributi alla geometria differenziale, alla teoria della relatività, alla meccanica celeste, all'idrodinamica. Nel 1938 fu cacciato dall'Università in seguito alle leggi razziali.

ove $\sum_{j,k=1}^m R^i_{j,h,k} \theta^h \wedge \theta^k$ è il tensore di curvatura.

Forma polare. Fissiamo un punto $p_0 \in M$ e sia U un intorno suo intorno normale. Possiamo supporre che, per un $r > 0$,

$$\exp_{p_0} : N_{p_0}(r) = \{x \in T_{p_0}M \mid \|x\|_g < r\} \longrightarrow U$$

sia un diffeomorfismo.

Fissiamo una base ortonormale (e_1, \dots, e_m) in $T_{p_0}M$ e costruiamo una sezione $\sigma_U \in \Gamma(U, \mathbf{O}(M))$ mediante il trasporto parallelo di (e_1, \dots, e_m) lungo le geodetiche:

$$\sigma_U(\exp_{p_0}(x)) = (d \exp_{p_0}(x)(e_1), \dots, d \exp_{p_0}(x)(e_m)).$$

Poniamo poi

$$\text{eq:16.2.20} \quad (4.12.4) \quad \bar{\theta} = (\bar{\theta}^i)_{1 \leq i \leq m} = \sigma_U^* \theta, \quad \bar{\omega} = (\bar{\omega}^i)_{1 \leq i, j \leq m} = \sigma_U^* \omega,$$

ove θ ed ω sono, rispettivamente, la forma canonica e la forma di Cartan della connessione di Levi-Civita Γ .

Per calcolare queste forme in modo esplicito, introduciamo coordinate polari in N_0 , ponendo, per le componenti v^i di $v \in T_{p_0}M$,

$$v^i = x^i t, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \sum_{i=1}^m (x^i)^2 = 1.$$

Lemma 4.12.1. *Abbiamo:*

$$\text{16.2.a} \quad (4.12.5) \quad \bar{\theta}^i = x^i dt + \phi^i, \quad \text{con } \phi^i \text{ indipendente da } dt,$$

$$\text{16.2.b} \quad (4.12.6) \quad \text{gli } \bar{\omega}^i_j \text{ sono indipendenti da } dt,$$

$$\text{16.2.c} \quad (4.12.7) \quad d\phi^i = -(dx^i + \sum_{j=1}^m \bar{\omega}^i_j x^j) \wedge dt + \dots,$$

$$\text{16.2.d} \quad (4.12.8) \quad d\bar{\omega}^i_j = -\sum_{h,k=1}^m \bar{R}^i_{j,h,k} x^h \phi^k \wedge dt + \dots$$

dove i puntini stanno per forme indipendenti da dt ed $\bar{R}^i_{j,h,k}$ sono le componenti del tensore di curvatura nel riferimento σ_U .

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la (4.12.5). Per provare che ϕ^i è indipendente da dt è sufficiente verificare che, se $\gamma_x = \exp_{p_0}(tx)$ è la geodetica uscente da p_0 con velocità x , allora $\bar{\theta}^i(\dot{\gamma}_x) = x^i$. Osserviamo che, per la definizione della forma canonica,

$$\theta\left(\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_x\right) = \bar{\theta}(\dot{\gamma}_x) = \tilde{\gamma}_x(t)^{-1}(\dot{\gamma}_x(t)),$$

ove $\tilde{\gamma}_x$ è il rialzamento orizzontale di γ_x a partire dal punto (e_1, \dots, e_m) . Poiché $\tilde{\gamma}_x$ è orizzontale e $\dot{\gamma}_x$ parallelo lungo γ_x , ne segue che $\bar{\theta}(\dot{\gamma}_x)$ è costante. Il suo valore in 0 è x e dunque $\bar{\theta}^i(\dot{\gamma}_x) = x^i$ per ogni t .

Poiché $\tilde{\gamma}_x$ e $\dot{\gamma}_x$ sono paralleli lungo la geodetica γ_x , abbiamo

$$\bar{\omega}^i_j(\dot{\gamma}_x) = \omega^i_j\left(\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_x\right) = 0,$$

perché $\tilde{\gamma}_x$ è orizzontale, e questo ci dà la (4.12.6).

Poiché la connessione di Levi-Civita ha torsione nulla, abbiamo

$$d\theta = -\omega \wedge \theta.$$

Quindi

$$d\phi^i = -dx^i \wedge dt - d\bar{\theta}^i = -(dx^i + \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i x^j) \wedge dt + \dots$$

ove i puntini stanno per una forma indipendente da dt , in quanto

$$d\bar{\theta} = d\sigma_U^* \theta = \sigma_U^* d\theta = -\sigma_U^*(\omega \wedge \theta) = \bar{\omega} \wedge \bar{\theta}$$

e, per le $\frac{16.2.a}{(4.12.5)}$, $\frac{16.2.b}{(4.12.6)}$,

$$\sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i \wedge \bar{\theta}^j = \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i x^j dt + \dots,$$

ove i puntini stanno per una forma indipendente da dt .

Dalle equazioni di struttura, abbiamo

$$d\bar{\theta}^i = d(x^i dt + \phi^i) = \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i \wedge (x^i dt + \phi^i),$$

$$d\bar{\omega}_j^i = -\sum_{k=1}^m \bar{\omega}_k^i \wedge \bar{\omega}_j^k + \bar{\Omega}_j^i,$$

ove

$$\bar{\Omega}_j^i = \sum_{h,k=1}^m \bar{R}_{j,h,k}^i \bar{\theta}^h \wedge \bar{\theta}^k,$$

da cui sostituendo l'espressione di θ^i in $\frac{16.2.a}{(4.12.5)}$ si ottiene la $\frac{16.2.d}{(4.12.8)}$. \square

prop: 16.2.6

Proposizione 4.12.2. *Abbiamo, per il tensore della metrica, l'espressione*

eq: 16.2.21

$$(4.12.9) \quad g = dt \otimes dt + \sum_{i=1}^m \phi^i \otimes \phi^i.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché σ_U è un riferimento ortonormale, abbiamo

$$g = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}^i \otimes \bar{\theta}^i.$$

Da questa risulta

$$g = dt \otimes dt + \sum_{i=1}^m \phi^i \otimes \phi^i + \sum_{i,j=1}^m x^i (\phi^i \otimes dt + dt \otimes \phi^i).$$

Dobbiamo verificare che l'ultima sommatoria a secondo membro è nulla. Poiché $\phi^i = 0$ in p_0 , basterà dimostrare che la forma $\sum_{i=1}^m x^i \phi^i$ è indipendente da t . Abbiamo

$$\begin{aligned} d(\sum_{i=1}^m x^i \phi^i) &= -\sum_{i=1}^m x^i d\phi^i \\ &= \sum_{i=1}^m x^i (dx^i + \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_j^i x^j) \wedge dt + \dots, \end{aligned}$$

dove al solito i puntini indicano una forma indipendente da dt . Abbiamo $\sum_{i,j} \bar{\omega}_j^i x^i x^j = 0$ perché la matrice $\bar{\omega}_j^i$ è antisimmetrica. Poi, da $\sum_{j=1}^m |x^j|^2 = 1$ abbiamo $\sum_{j=1}^m x^j dx^j = 0$. Quindi il differenziale della forma $\eta = \sum_{i=1}^m x^i \phi^i$ è indipendente da dt e, dal momento che η non contiene dt , ciò significa che la forma è costante rispetto a t . Questo completa la dimostrazione. \square

sec: 1411

4.13. Connessioni lineari su varietà dotate di una connessione affine

Premettiamo alcune osservazioni sul prodotto di fibrati principali.

ssec:14101

4.13.1. Prodotto di connessioni principali. Siano $\xi_i = (P_i \xrightarrow{\pi_i} M)$, per $i = 1, 2$, due connessioni principali con gruppi strutturali \mathbf{G}_i . Il prodotto $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2$ è il fibrato principale su M con spazio totale

$$P = \{(\sigma_1, \sigma_2) \mid \pi_1(\sigma_1) = \pi_2(\sigma_2)\}$$

e gruppo strutturale $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \oplus \mathbf{G}_2$, che agisce su P mediante

$$(\sigma_1, \sigma_2)(a_1, a_2) = (\sigma_1 a_1, \sigma_2 a_2), \quad \forall (\sigma_1, \sigma_2) \in P, \quad \forall a_1 \in \mathbf{G}_1, \quad \forall a_2 \in \mathbf{G}_2.$$

L'algebra di Lie di \mathbf{G} è la somma diretta $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ delle algebre di Lie \mathfrak{g}_i dei gruppi \mathbf{G}_i , per $i = 1, 2$. Indichiamo con $\text{pr}_i : P \rightarrow P_i$ le proiezioni $\text{pr}_i(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_i$.

prop:14101

Proposizione 4.13.1. *Se $\omega_i \in \Omega^1(P_i, \mathfrak{g}_i)$ sono le forme di Cartan di connessioni principali su ξ_i , per $i = 1, 2$, allora $\omega = \text{pr}_1^* \omega_1 \oplus \text{pr}_2^* \omega_2 \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ è la forma di Cartan di una connessione principale su ξ . \square*

Siano (ρ_i, V_i) due rappresentazioni lineari dei gruppi \mathbf{G}_i . Allora (ρ, V) , con $V = V_1 \otimes V_2$ e $\rho(a_1, a_2)(v_1 \otimes v_2) = (\rho_1(a_1)v_1) \otimes (\rho_2(a_2)v_2)$ è una rappresentazione lineare di $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \oplus \mathbf{G}_2$. La derivazione covariante ∇ su ξ_V si esprime per mezzo delle derivazioni covarianti ∇^i sui ξ_{iV_i} mediante

$$\nabla_X(s_1 \otimes s_2) = (\nabla_X^1 s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes (\nabla_X^2 s_2), \quad \forall X \in \mathfrak{X}, \quad \forall s_i \in \Gamma(M, E_{V_i}), \quad i = 1, 2.$$

4.13.2. Connessioni principali ed affini. Sia $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} e supponiamo di aver fissato sulla base M una connessione affine. Indichiamo con $\omega^P \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ ed $\omega^M \in \Omega^1(F(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ le loro forme di Cartan.

Sia (ρ, V) una rappresentazione lineare di \mathbf{G} ed $\eta = (E \xrightarrow{\pi_V} M)$ il corrispondente fibrato vettoriale. Indichiamo con ∇ la differenziazione covariante su η e con D quella definita su $\mathfrak{T}^*(M)$ dalla connessione affine.

Utilizzando la costruzione generale di §4.13.1, possiamo definire una derivazione covariante sugli spazi $\mathfrak{T}^{r,s}(M, E)$ dei tensori con coefficienti in E , che denoteremo ancora con ∇ . Per essa vale la

eq:g0141

$$(4.13.1) \quad \nabla_X(s \otimes \alpha) = (\nabla_X s) \otimes \alpha + s \otimes D_X \alpha, \quad \forall s \in \Gamma(M, E), \quad \forall \alpha \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(M).$$

Proposizione 4.13.2. *La derivazione covariante definisce un'applicazione lineare*

eq:g0144

$$(4.13.2) \quad \nabla : \mathfrak{T}^{r,s}(M, E) \longrightarrow \mathfrak{T}^{r,s+1}(M, E).$$

Usando la derivazione covariante per i tensori a coefficienti in E , possiamo definire prima le derivate covarianti seconde, e poi, per ricorrenza, quelle di ordine superiore, di una sezione $s \in \Gamma(M, E)$. Ad esempio, abbiamo la

Definizione 4.13.3. *La derivata covariante seconda di una sezione $s \in \Gamma(M, E)$ rispetto ai campi $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ è definita da*

eq:g0142

$$(4.13.3) \quad \nabla_{X,Y}^2 s = \nabla_X(\nabla_Y s) - \nabla_{D_X Y} s.$$

Osservazione 4.13.4. La derivata covariante $\nabla^k s$ di una sezione $s \in \Gamma(M, E)$ è un tensore in $\mathfrak{T}^{0,k}(M, E)$, cioè un'applicazione $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ volte}} \ni (X_1, \dots, X_k) \longrightarrow \nabla_{X_1, \dots, X_k}^k s \in \Gamma(M, E).$$

Verifichiamo ad esempio la $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilinearità della derivata seconda. La $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linearità di $\nabla_{X,Y}^2 s$ rispetto ad X è ovvia. Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla_{X,fY}^2 s &= \nabla_X(\nabla_{fY} s) - \nabla_{D_X(fY)} s = \nabla_X(f\nabla_Y s) - \nabla_{fD_X Y + (Xf)Y} s \\ &= (f\nabla_X(\nabla_Y s) + (Xf)\nabla_Y s) - (f\nabla_{D_X Y} s + (Xf)\nabla_Y s) \\ &= f(\nabla_X(\nabla_Y s) + \nabla_{D_X Y} s) = f\nabla_{X,Y}^2 s. \end{aligned}$$

esg0141

Esempio 4.13.5. Se η è il fibrato banale con spazio totale $E = M \times V$ e ∇ la connessione banale, allora la derivata seconda di una sezione $s \in \mathcal{C}^\infty(M, V)$ è

$$\nabla_{X,Y}^2 s = XYs - (D_X Y)s.$$

Se M fosse un aperto di \mathbb{R}^m , con la connessione affine banale, ed $X = \sum_{i=1}^m a^i \partial/\partial x^i$, $Y = \sum_{i=1}^m b^i \partial/\partial x^i$ allora

$$\nabla_{X,Y}^2 s = \sum_{i,j=1}^m a^i b^j \frac{\partial^2 s}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Osservazione 4.13.6. Osserviamo che, nell'Esempio ^{esg0141}4.13.5, con connessioni banali sia sul fibrato banale che sulla base aperto di \mathbb{R}^m , il tensore della derivata seconda coincide con la matrice Hessiana dell'applicazione s ed è quindi, in particolare, simmetrico.

In generale, otteniamo

$$\begin{aligned} \nabla_{X,Y}^2 s - \nabla_{Y,X}^2 s &= (\nabla_X \nabla_Y s - \nabla_{D_X Y} s) - (\nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{D_Y X} s) \\ &= (\nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s) - \nabla_{D_X Y - D_Y X - [X,Y]} s \\ &= R^\nabla(X, Y)s - \nabla_{T^D(X,Y)} s, \end{aligned}$$

ove abbiamo indicato con R^∇ la curvatura della connessione lineare ∇ e con T^D la torsione della connessione affine D .

Quindi la curvatura di ∇ in modo algebrico e la torsione di D in modo differenziale ci permettono di calcolare l'ostruzione al fatto che il tensore della derivata seconda sia simmetrico.

Abbiamo quindi ottenuto la *formula di Ricci*:

eq:g0147

$$(4.13.4) \quad \nabla_{X,Y}^2 s - \nabla_{Y,X}^2 s = R^\nabla(X, Y)s - \nabla_{T^D(X,Y)} s, \quad \forall s \in \mathcal{E}(M), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Si possono ottenere altre formule di Ricci, che esprimono in termini di curvatura e torsione come cambino i tensori delle derivate covarianti di ordine superiore rispetto a permutazioni degli argomenti.

Connessioni affini invarianti sugli spazi omogenei

5.1. Rappresentazione lineare d'isotropia

sec151

Siano \mathbf{K} un gruppo di Lie, \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso, κ ed \mathfrak{h} le loro algebre di Lie, ed $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$. Indichiamo con \mathfrak{o} il punto base, di isotropia \mathbf{H} .

Definizione 5.1.1. Il *nucleo d'ineffettività* dell'azione di \mathbf{K} su M è l'insieme

eq: 15.9.1 (5.1.1)
$$\mathbf{N} = \{a \in \mathbf{K} \mid ap = p, \forall p \in M\} = \{a \in \mathbf{K} \mid ab\mathbf{H} = b\mathbf{H}, \forall b \in \mathbf{K}\}.$$

Esso è un sottogruppo normale chiuso di \mathbf{K} , contenuto nel gruppo d'isotropia \mathbf{H} .

L'azione di \mathbf{K} su M si dice *effettiva* se $\mathbf{N} = \{e\}$, *quasi effettiva* se \mathbf{N} è discreto.

Lemma 5.1.2. Il *nucleo di ineffettività* è il sottogruppo

eq: 1591b (5.1.2)
$$\mathbf{N} = \{a \in \mathbf{H} \mid \text{ad}(b)(a) \in \mathbf{H}, \forall b \in \mathbf{K}\} = \bigcap_{b \in \mathbf{K}} \text{ad}(b)(\mathbf{H}),$$

con algebra di Lie

eq: 15.9.1a (5.1.3)
$$\mathfrak{n} = \{X \in \mathfrak{h} \mid \text{Ad}(a)(X) \in \mathfrak{h}, \forall a \in \mathbf{K}\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ^{eq: 15.9.1}(5.1.1), gli elementi a di \mathbf{N} sono caratterizzati dalla condizione che $\text{ad}(b)(a) = \text{bab}^{-1}$ appartenga ad \mathbf{H} per ogni $b \in \mathbf{K}$. Questa condizione, con $b = e$, ci dice che in particolare $\mathbf{N} \subset \mathbf{H}$.

Un elemento $X \in \kappa$ appartiene all'algebra di Lie di \mathfrak{n} se, e soltanto se,

$$\text{ad}(a)(\exp(tX)) = \exp(t\text{Ad}(a)(X)) \in \mathbf{H} \quad \text{per ogni } a \in \mathbf{K} \text{ ed ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Otteniamo perciò la ^{eq: 15.9.1a}(5.1.3). □

Osservazione 5.1.3. Poiché un gruppo di Lie è discreto se e soltanto se la sua algebra di Lie è $\{0\}$, l'azione di \mathbf{K} è quasi effettiva se e soltanto se $\mathfrak{n} = \{0\}$.

Lasciando fisso \mathfrak{o} , gli elementi a dell'isotropia definiscono automorfismi di $T_{\mathfrak{o}}M$ e quindi una rappresentazione lineare

eq: 15.9.2 (5.1.4)
$$\mathbf{H} \ni a \longrightarrow a_* = dL_a(\mathfrak{o}) \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(T_{\mathfrak{o}}M).$$

Definizione 5.1.4. Chiamiamo la ^{eq: 15.9.2}(5.1.4) *rappresentazione lineare d'isotropia*.

Per ogni $X \in \kappa$ ed $a \in \mathbf{H}$, abbiamo

$$\begin{aligned} a_*(\pi_*(X)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(a \exp(tX)) = \pi_* \left(\left. \left(\frac{d}{dt} \right) \right|_{t=0} \text{ad}(a)(\exp(tX)) \right) \\ &= \pi_*(\text{Ad}(a)(X)). \end{aligned}$$

L'immagine di $a \in \mathbf{H}$ nella rappresentazione lineare d'isotropia è quindi descritta dal diagramma commutativo a righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{h} & \longrightarrow & \kappa & \xrightarrow{\pi_*} & T_0M \longrightarrow 0 \\ & & \text{Ad}(a)\downarrow & & \text{Ad}(a)\downarrow & & a_*\downarrow \\ \text{eq: 15.9.2b} & (5.1.5) & 0 & \longrightarrow & \mathfrak{h} & \longrightarrow & \kappa \xrightarrow{\pi_*} T_0M \longrightarrow 0. \end{array}$$

La (5.1.5) esplicita l'identificazione di T_0M al quoziente κ/\mathfrak{h} e ci mostra che la rappresentazione lineare d'isotropia è isomorfa al quoziente su κ/\mathfrak{h} della restrizione ad \mathbf{H} della rappresentazione aggiunta. Otteniamo perciò

Proposizione 5.1.5. *Il nucleo d'infedeltà della rappresentazione lineare d'isotropia è*

$$\text{eq: 15.9.3} \quad (5.1.6) \quad \mathbf{N}_0 = \{a \in \mathbf{H} \mid \text{Ad}(a)(X) - X \in \mathfrak{h}, \forall X \in \kappa\}.$$

Esso è un sottogruppo chiuso di \mathbf{H} , con algebra di Lie

$$\text{eq: 15.9.3a} \quad (5.1.7) \quad \mathfrak{n}_0 = \{X \in \mathfrak{h} \mid [X, Y] \in \mathfrak{h}, \forall Y \in \kappa\}.$$

Abbiamo ovviamente le inclusioni

$$\text{eq: 15.9.5} \quad (5.1.8) \quad \mathbf{N} \subset \mathbf{N}_0, \quad \mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}_0.$$

Vale quindi la

Proposizione 5.1.6. *Se la rappresentazione d'isotropia è fedele, allora l'azione di \mathbf{K} su M è effettiva. Se il nucleo d'infedeltà dell'applicazione aggiunta è discreto, allora l'azione di \mathbf{K} su M è quasi effettiva. \square*

Ricordiamo la

Definizione 5.1.7. $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ è un \mathbf{K} -spazio omogeneo *riduttivo* se \mathfrak{h} ammette un complemento lineare \mathbf{H} -invariante \mathfrak{m} in κ , se risulta cioè

$$\text{cop. 8. i} \quad (5.1.9) \quad \kappa = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m},$$

$$\text{cop. 8. ii} \quad (5.1.10) \quad \text{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}.$$

Osservazione 5.1.8. Poiché tutte le rappresentazioni lineari di un gruppo di Lie compatto, o di un gruppo di Lie semisemplice, sono completamente riducibili, tutti gli spazi omogenei $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ con \mathbf{H} compatto, o semisemplice, sono riduttivi.

La (5.1.9) è equivalente al fatto che la restrizione ad \mathfrak{m} del differenziale π_* della proiezione nel quoziente sia un isomorfismo lineare

$$\text{eq: 15.9.10} \quad (5.1.11) \quad \mathfrak{m} \ni X \xrightarrow{\sim} \pi_*(X) \in T_0M.$$

Le (5.1.9) ed (5.1.10) ci dicono che la restrizione ad \mathfrak{m} della rappresentazione aggiunta di \mathbf{H} su κ è equivalente alla rappresentazione lineare d'isotropia. Per ogni $a \in \mathbf{H}$ abbiamo infatti un diagramma commutativo

$$\text{eq: 15.9.11} \quad (5.1.12) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{m} & \xrightarrow{d\pi_e} & T_0M \\ \text{Ad}(a)\downarrow & & \downarrow a_* \\ \mathfrak{m} & \xrightarrow{d\pi_e} & T_0M. \end{array}$$

Sia \mathbf{H}_m il gruppo formato dalle restrizioni ad m degli automorfismi $\text{Ad}(a)$, al variare di a in \mathbf{H} .

La (5.1.12) ci permette di considerare TM come un fibrato vettoriale con fibra tipica m e con una \mathbf{H}_m -struttura, invariante per l'azione di \mathbf{K} .

Lemma 5.1.9. *Supponiamo che $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ sia riduttivo e valgano le (5.1.9), (5.1.10). Allora, per ogni $a \in \mathbf{K}$, l'applicazione*

$$\text{cop. 8.2} \quad (5.1.13) \quad m \ni X \rightarrow d\pi_a(X^*) \in T_{\pi(a)}M,$$

dove $X^* \in \mathfrak{L}(\mathbf{K})$ è il campo di vettori invariante a sinistra corrispondente all'elemento $X \in m \subset \mathfrak{k}$, è un isomorfismo lineare.

DIMOSTRAZIONE. Condizione necessaria e sufficiente affinché $d\pi_a(X^*) = 0$ è che $X^* = L_{a^*}(X)$ sia tangente ad $a\mathbf{H}$, cioè che $X \in \mathfrak{h}$. \square

Da questo si ricava

Lemma 5.1.10. *Se $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ è riduttivo, allora TM è un fibrato vettoriale con fibra tipica m e con una \mathbf{H}_m -struttura invariante per l'azione di \mathbf{K} .* \square

Proposizione 5.1.11. *Supponiamo che $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ sia riduttivo. Se la rappresentazione lineare d'isotropia è fedele, allora $\xi = (\mathbf{K} \xrightarrow{\pi} M)$ è il fibrato principale associato ad un' \mathbf{H} -struttura di M , invariante per l'azione di \mathbf{K} .* \square

5.2. Connessioni affini canoniche su spazi omogenei riduttivi

Mostriamo ora che la connessione principale definita nel Teorema 5.12.4 è una connessione affine su M . Ricordiamone la definizione.

Sia $\omega_\kappa \in \Omega^1(\mathbf{K}, \mathfrak{k})$ la forma di Maurer-Cartan di \mathbf{K} .

Notazione 5.2.1. Indichiamo con

$$\text{cop. 8.222} \quad (5.2.1) \quad \omega_{\mathfrak{h}} \in \Omega^1(\mathbf{K}, \mathfrak{h}) \text{ la componente di } \omega_\kappa \text{ in } \mathfrak{h},$$

$$(5.2.2) \quad \theta_m \in \Omega^1(\mathbf{K}, m) \text{ la componente di } \omega_\kappa \text{ in } m,$$

rispetto alla decomposizione (5.1.9).^{cop. 8.1} Indicheremo con $X_{\mathfrak{h}}$ ed X_m le componenti di $X \in \mathfrak{k}$ in \mathfrak{h} ed m , rispettivamente.

Osservazione 5.2.2. Abbiamo, per $X, Y \in \mathfrak{k}$,

$$[X, Y] = [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{h}}] + [X_{\mathfrak{h}}, Y_m] + [X_m, Y_{\mathfrak{h}}] + [X_m, Y_m].$$

Poiché m è $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -invariante, otteniamo

$$\text{eq: 14h23} \quad (5.2.3) \quad [X, Y]_{\mathfrak{h}} = [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{h}}] + [X_m, Y_m]_{\mathfrak{h}},$$

$$\text{eq: 14h24} \quad (5.2.4) \quad [X, Y]_m = [X_{\mathfrak{h}}, Y_m] + [X_m, Y_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}} + [X_m, Y_m]_m.$$

Definizione 5.2.3. La θ_m è la *forma canonica*, sullo spazio totale del fibrato $\xi = (\mathbf{K} \xrightarrow{\pi} M)$, relativa alla decomposizione (5.1.9)^{cop. 8.1} dello spazio riduttivo M .

La $\omega_{\mathfrak{h}}$ è la *forma di connessione*¹ su ξ .

¹È la forma di connessione che avevamo definito nel Teorema 5.12.4.^{thm: 15.16.1}

Teorema 5.2.4. *Supponiamo che \mathbf{K} sia un gruppo di Lie connesso, \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso. Sia $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ e consideriamo $\xi = (\mathbf{K} \xrightarrow{\pi} M)$ come un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{H} .*

- (1) *Se M è riduttivo e valgono le [\(5.1.9\)](#) e [\(5.1.10\)](#), allora la $\omega_{\mathfrak{h}}$ è la forma di Cartan di una connessione principale su ξ , invariante rispetto alle traslazioni a sinistra su \mathbf{K} , e definisce quindi su M una connessione affine per cui gli elementi di \mathbf{K} agiscono su M come trasformazioni affini.*
- (2) *Ogni connessione principale su ξ , che sia invariante rispetto alle traslazioni a sinistra su \mathbf{K} , determina un'unica decomposizione [\(5.1.9\)](#) rispetto alla quale la forma di Cartan sia la \mathfrak{h} -componente della forma di Maurer-Cartan di \mathbf{K} .*
- (3) *Le forme di torsione e di curvatura di una connessione affine con forma di Cartan $\omega_{\mathfrak{h}}$ definita dalla [\(5.2.1\)](#) sono:*

eq:15.10.15

$$(5.2.5) \quad \Theta_{\sigma_0}(X^*, Y^*) = -[X_m, Y_m]_m, \quad \forall X, Y \in \kappa,$$

eq:15.10.16

$$(5.2.6) \quad \Omega_{\sigma_0}(X^*, Y^*) = -[X_m, Y_m]_{\mathfrak{h}}, \quad \forall X, Y \in \kappa.$$

DIMOSTRAZIONE. La (1) e la (2) sono parte dell'enunciato del Teorema [5.12.4](#). [thm:15.16.1](#)

Verifichiamo le formule per la torsione e la curvatura. Se $X, Y \in \kappa$ ed X^*, Y^* sono i corrispondenti campi di vettori invarianti a sinistra, otteniamo, per le equazioni di struttura,

$$\begin{aligned} \Theta(X^*, Y^*) &= d\theta_m(X^*, Y^*) + (\omega_{\mathfrak{h}} \wedge \theta_m)(X^*, Y^*) \\ &= X^*Y_m - Y^*X_m - \theta_m([X^*, Y^*]) + \omega_{\mathfrak{h}}(X^*)\theta_m(Y^*) - \omega_{\mathfrak{h}}(Y^*)\theta_m(X^*) \\ &= -[X, Y]_m + \text{ad}(X_{\mathfrak{h}})(Y_m) - \text{ad}(Y_{\mathfrak{h}})(X_m). \end{aligned}$$

Poiché Θ è una forma tensoriale, possiamo supporre che $X = X_m$ ed $Y = Y_m$, ottenendo così la [\(5.2.5\)](#). [eq:15.10.15](#)

Per la forma di curvatura abbiamo

$$\begin{aligned} \Omega(X^*, Y^*) &= d\omega_{\mathfrak{h}}(X^*, Y^*) + \frac{1}{2}[\omega_{\mathfrak{h}} \wedge \omega_{\mathfrak{h}}](X^*, Y^*) \\ &= X^*\omega_{\mathfrak{h}}(Y^*) - Y^*\omega_{\mathfrak{h}}(X^*) - \omega_{\mathfrak{h}}([X^*, Y^*]) + \frac{1}{2}[\omega_{\mathfrak{h}} \wedge \omega_{\mathfrak{h}}](X^*, Y^*) \\ &= X^*Y_{\mathfrak{h}} - Y^*X_{\mathfrak{h}} - \omega_{\mathfrak{h}}([X, Y]^*) + [\omega_{\mathfrak{h}}(X^*), \omega_{\mathfrak{h}}(Y^*)] \\ &= -[X, Y]_{\mathfrak{h}} + [X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{h}}]. \end{aligned}$$

Poiché Ω è una forma tensoriale, è ancora sufficiente calcolarla nel caso in cui $X = X_m$ ed $Y = Y_m$. Otteniamo perciò la [\(5.2.6\)](#). [eq:15.10.16](#) \square

Osservazione 5.2.5. Utilizzando le [\(5.2.5\)](#), [\(5.2.6\)](#), ed identificando \mathfrak{m} con $T_{\mathbf{o}}M$ mediante la π_* , possiamo descrivere i tensori di torsione e curvatura nel punto base \mathbf{o} nella forma:

$$(5.2.7) \quad T_{\mathbf{o}}(X, Y) = -[X, Y]_m, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

$$(5.2.8) \quad R_{\mathbf{o}}(X, Y)Z = -[[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z]_m, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

Osservazione 5.2.6. Se \mathbf{K} è un gruppo di Lie connesso e l'algebra di Lie \mathfrak{h} di \mathbf{H} è la sottoalgebra compatta massimale dell'algebra di Lie κ di \mathbf{K} , possiamo scegliere

$\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$, ove \mathfrak{p} è il sottospazio della decomposizione di Cartan $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. Poiché in questo caso $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$, otteniamo su $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ una connessione simmetrica (cioè con torsione nulla).

sec: 15.10

5.3. Connessioni affini invarianti

Siano \mathbf{K} un gruppo di Lie, \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso, \mathfrak{k} ed \mathfrak{h} le loro algebre di Lie, ed $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$. Indichiamo con \mathfrak{o} il punto base, di isotropia \mathbf{H} .

Siano m la dimensione di M e \mathbf{G} un sottogruppo chiuso di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$.

Definizione 5.3.1. Una \mathbf{G} -struttura² $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ su M si dice \mathbf{K} -invariante se $k_*(P) = P$, per ogni $k \in \mathbf{K}$.

Ogni $X \in \mathfrak{k}$ definisce un sottogruppo a un parametro $\{\exp(tX)\}_{t \in \mathbb{R}}$ di \mathbf{K} , che agisce a sinistra, come gruppo a un parametro di diffeomorfismi, su \mathbf{K} , M e P . Indicheremo con $X^{\mathbf{K}}$, X^M ed X^P i rispettivi generatori infinitesimali. In particolare, $X^{\mathbf{K}}$ è il campo di vettori invariante a destra su \mathbf{K} corrispondente ad X , ed³

$$X_k^{\mathbf{K}} = [\text{Ad}(k^{-1})X]_k^*, \quad \forall k \in \mathbf{K}.$$

oss15414

Osservazione 5.3.2. I campi $X^{\mathbf{K}}$ ed X^P sono rispettivamente ϖ - e π -correlati ad X^M e, per ogni $\sigma \in P$, i campi $X^{\mathbf{K}}$ ed X^P sono ℓ_σ -correlati dall'applicazione $\ell_\sigma : \mathbf{K} \ni k \rightarrow k_*\sigma \in P$.

Lemma 5.3.3. Abbiamo, per ogni $X, Y \in \mathfrak{k}$,

eq: 151031

$$(5.3.1) \quad [X^{\mathbf{K}}, Y^{\mathbf{K}}] = -[X, Y]^{\mathbf{K}}, \quad [X^P, Y^P] = -[X, Y]^P, \quad [X^M, Y^M] = -[X, Y]^M.$$

DIMOSTRAZIONE. Per l'Osservazione 5.3.2, è sufficiente dimostrare la prima delle (5.3.1). A questo scopo consideriamo l'inversione $\iota : \mathbf{K} \ni k \rightarrow k^{-1} \in \mathbf{K}$. Da

$$\iota(\exp(tX) \cdot k) = k^{-1} \exp(-tX),$$

ricaviamo che

$$\iota_*(X^{\mathbf{K}}) = -X^*,$$

ove abbiamo indicato con X^* il campo di vettori invariante a sinistra corrispondente ad $X \in \mathfrak{k}$. Quindi

$$\iota_*([X^{\mathbf{K}}, Y^{\mathbf{K}}]) = [-X^*, -Y^*] = [X, Y]^*$$

ci dà la relazione cercata. □

Lemma 5.3.4. Abbiamo

eq: 15.10.c

$$(5.3.2) \quad k_*(X^P) = [\text{Ad}(k)(X)]^P, \quad k_*(X^M) = [\text{Ad}(k)(X)]^M, \quad \forall k \in \mathbf{K}, \forall X \in \mathfrak{k},$$

eq: 15.10.d

$$(5.3.3) \quad R_{a_*}X^P = X^P, \quad \forall a \in \mathbf{G}, \forall X \in \mathfrak{k}.$$

²Lo spazio totale P è cioè un sottofibrato di F_M e l'azione di \mathbf{G} su P è la restrizione dell'azione di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ su F_M .

³Ricordiamo che $X_k^* = (L_k)_*(X)$ è il campo di vettori invariante a sinistra associato ad $X \in \mathfrak{k}$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti, per ogni $k \in \mathbf{K}$ ed $X \in \kappa$,

$$k \cdot (\exp(tX) \cdot p) = \exp(t\text{Ad}(k)(X)) \cdot (k \cdot p), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in M,$$

$$k \cdot (\exp(tX) \cdot \sigma) = \exp(t\text{Ad}(k)(X)) \cdot (k \cdot \sigma), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \sigma \in P.$$

Derivando rispetto a t in $t = 0$ otteniamo le [eq:15.10.c](#) (5.3.2). Se $a \in \mathbf{G}$ ed $X \in \kappa$, allora

$$e^{tX} \cdot (\sigma \cdot a) = (e^{tX} \cdot \sigma) \cdot a, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \sigma \in P.$$

Derivando rispetto a t in $t = 0$ otteniamo le [eq:15.10.d](#) (5.3.3). □

Il Teorema di Wang (Teorema [thm:15.10.1](#) 5.3.7) caratterizza le \mathbf{G} -connessioni affini \mathbf{K} -invarianti su M .

Fissato un elemento $\sigma_0 \in P_0$, l'applicazione

$$(5.3.4) \quad \lambda_{\sigma_0} : \mathbf{H} \ni h \longrightarrow \sigma_0^{-1} \circ h_* \circ \sigma_0 \in \mathbf{G}$$

è un omomorfismo di gruppi di Lie. Il suo differenziale nell'identità $\lambda_{\sigma_0*} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ è una rappresentazione lineare di \mathfrak{h} .

[lem15416](#)

Lemma 5.3.5. *Sia ω la forma di Cartan di una \mathbf{G} -connessione affine \mathbf{K} -invariante su ξ . La*

[eq:15.10b](#)

$$(5.3.5) \quad \Lambda_{\sigma_0} : \kappa \ni X \longrightarrow \omega(X_{\sigma_0}^P) \in \mathfrak{g}, \quad \forall X \in \kappa.$$

è un'applicazione lineare che soddisfa le

[eq:15113](#)

$$(5.3.6) \quad \Lambda_{\sigma_0}(X) = \lambda_{\sigma_0*}(X), \quad \forall X \in \mathfrak{h},$$

[eq:15114](#)

$$(5.3.7) \quad \Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}_\kappa(h)(X)) = \text{Ad}_\mathfrak{g}(\lambda_{\sigma_0}(h))(\Lambda_{\sigma_0}(X)), \quad \forall h \in \mathbf{H}, \forall X \in \kappa.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $X \in \mathfrak{h}$, allora X^P coincide con il campo di vettori fondamentale $(\lambda_{\sigma_0*}(X))^*$, perché $\exp(tX) \cdot \sigma_0 = \sigma_0 \lambda_{\sigma_0}(\exp(tX))$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Poiché $\omega((\lambda_{\sigma_0*}(X))^*) = \lambda_{\sigma_0*}(X)$, otteniamo la [eq:15113](#) (10.1.17).

Siano $X \in \kappa$, $h \in \mathbf{H}$, ed $Y = \text{Ad}(h)X$. Allora

$$\begin{aligned} \exp(tY)\sigma_0 &= h \exp(tX)h^{-1}\sigma_0 = h \exp(tX)\sigma_0\lambda_{\sigma_0}(h^{-1}) \\ \implies Y_{\sigma_0}^P &= (\lambda_h)_*(dR_{\lambda_{\sigma_0}(h^{-1})}*X_{\sigma_0}^P) \end{aligned}$$

Poiché la connessione è \mathbf{K} -invariante, abbiamo in particolare $\omega((\lambda_h)_*Z) = \omega(Z)$ per ogni $Z \in \mathfrak{X}(P)$. Otteniamo perciò

$$\omega(Y_{\sigma_0}^P) = \omega((\lambda_h)_*(dR_{\lambda_{\sigma_0}(h^{-1})}*X_{\sigma_0}^P)) = \omega((dR_{\lambda_{\sigma_0}(h^{-1})}*X_{\sigma_0}^P)) = \text{Ad}(\lambda_{\sigma_0}(h))\omega(X_{\sigma_0}^P),$$

che ci dà la [eq:15114](#) (5.3.7). □

Osservazione 5.3.6. La [eq:15113](#) (10.1.17) ci dice che la Λ_{σ_0} estende l'omomorfismo di algebre di Lie λ_{σ_0*} ad un'omomorfismo dell' \mathbf{H} -modulo κ sul \mathbf{G} -modulo \mathfrak{g} . In generale, Λ_{σ_0} non è un omomorfismo di algebre di Lie e la torsione e la curvatura esprimono l'ostruzione al fatto che lo sia.

[thm:15.10.1](#)

Teorema 5.3.7 (Wang). *Sia ξ una \mathbf{G} -struttura \mathbf{K} -invariante su M . La [eq:15.10b](#) (5.3.5) definisce una corrispondenza biunivoca tra le \mathbf{G} -connessioni affini \mathbf{K} -invarianti su M e le applicazioni lineari $\Lambda_{\sigma_0} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\kappa, \mathfrak{g})$ che soddisfano le [eq:15113](#) (10.1.17) e [eq:15114](#) (5.3.7).*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Lambda_{\sigma_0} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\kappa, \mathfrak{g})$. Per il Lemma [5.3.5](#), [le \(10.1.17\)](#) e [\(5.3.7\)](#) sono condizioni necessarie perché Λ_{σ_0} sia associata ad una \mathbf{G} -connessione affine \mathbf{K} -invariante su ξ . Resta da verificare che tali condizioni siano anche sufficienti.

Lo spazio H_{σ_0} dei vettori orizzontali in σ_0 determina univocamente la connessione, perché l'azione $(k, g) \cdot \sigma = k \cdot \sigma \cdot g$ di $\mathbf{K} \times \mathbf{G}$ su P è transitiva. Definiamo

$$H_{\sigma_0} = \{X_{\sigma_0}^P - [\Lambda_{\sigma_0}(X)]_{\sigma_0}^* \mid X \in \kappa\}.$$

Per la [\(10.1.17\)](#), la sottoalgebra \mathfrak{h} è il nucleo dell'applicazione lineare

$$\alpha_{\sigma_0} : \kappa \ni X \rightarrow X_{\sigma_0}^P - [\Lambda_{\sigma_0}(X)]_{\sigma_0}^* \in H_{\sigma_0}.$$

Affinché questa scelta di H_{σ_0} definisca una distribuzione orizzontale \mathbf{K} -invariante su P , è sufficiente verificare che, se $k_1, k_2 \in \mathbf{K}$ ed $a_1, a_2 \in \mathbf{G}$ sono tali che $k_1 \sigma_0 a_1 = k_2 \sigma_0 a_2$, allora $k_1 R_{a_1} H_{\sigma_0} = k_2 R_{a_2} H_{\sigma_0}$. Da $(k_2^{-1} k_1) \cdot \sigma_0 \cdot a_1 a_2^{-1} = \sigma_0$, segue che $h = k_2^{-1} k_1 \in \mathbf{H}$ e $\sigma_0^{-1} h \sigma_0 = \lambda_{\sigma_0}(h) = a_2 a_1^{-1} = a^{-1} \in \mathbf{G}$. Poiché le azioni a destra di \mathbf{G} ed a sinistra di \mathbf{K} su P commutano, sarà quindi sufficiente dimostrare che

$$h_* R_{a_*} H_{\sigma_0} = H_{\sigma_0}.$$

Abbiamo, tenuto conto che i campi di vettori X^P sono invarianti per l'azione a destra di \mathbf{G} ,

$$\begin{aligned} h_* R_{a_*} X_{\sigma_0}^P &= [R_{a_*} h_* X^P]_{\sigma_0} = [R_{a_*} [\text{Ad}(h)(X)]^P]_{\sigma_0} = [\text{Ad}(h)(X)]^P_{\sigma_0} \\ h_* R_{a_*} [\Lambda_{\sigma_0}(X)]_{\sigma_0}^* &= [h_* [\text{Ad}(a^{-1}) \Lambda_{\sigma_0}(X)]^*]_{\sigma_0} = [h_* [\text{Ad}(\lambda_{\sigma_0}(h)) (\Lambda_{\sigma_0}(X))]^*]_{\sigma_0} \\ &= [h_* [\Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}(h)(X))]^*]_{\sigma_0} = [\Lambda_{\sigma_0}(\text{Ad}(h)(X))]_{\sigma_0}^*, \end{aligned}$$

per la [\(5.3.7\)](#), perché h_* lascia invarianti i campi di vettori fondamentali. Otteniamo perciò che

$$h_* R_{a_*} \circ \alpha_{\sigma_0} = \alpha_{\sigma_0} \circ \text{Ad}(h).$$

Ciò completa la dimostrazione. \square

Osservazione 5.3.8. La condizione [\(5.3.7\)](#) [implica che](#)

$$\text{eq: 15.11.4a} \quad (5.3.8) \quad \Lambda_{\sigma_0}([X, Y]) = [\lambda_{\sigma_0}(X), \Lambda_{\sigma_0}(Y)], \quad \forall X \in \mathfrak{h}, \quad \forall Y \in \kappa,$$

e le due condizioni sono equivalenti se \mathbf{H} è connesso.

Calcoliamo ora le forme di torsione e di curvatura di una \mathbf{G} -connessione affine \mathbf{K} -invariante.

Lemma 5.3.9. *Se $X, Y \in \kappa$, allora*

$$\text{eq: 15115} \quad (5.3.9) \quad X^P \theta_{\sigma}(Y^P) = -\sigma^{-1}([X, Y]^M), \quad \forall \sigma \in P.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la sommersione differenziabile

$$\Phi_{\sigma} : \mathbf{K} \times \mathbf{G} \ni (k, a) \longrightarrow k_* \sigma \circ a \in P.$$

Abbiamo $\Phi_{\sigma}^*(X^P \theta(Y^P)) = X^{\mathbf{K}} \Phi_{\sigma}^*(\theta(Y^P))$. Poiché

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma}^*(\theta(Y^P))(k, a) &= (k_* \sigma \circ a)^{-1}(Y^M) = a^{-1} \circ \sigma^{-1}(k_*^{-1} Y^M) \\ &= a^{-1} \circ \sigma^{-1}([\text{Ad}(k^{-1}) Y]^M), \end{aligned}$$

risulta

$$\begin{aligned} X^{\mathbf{K}}\Phi_{\sigma}^*(\theta(Y^P))(k, a) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} a^{-1} \circ \sigma^{-1}([\text{Ad}(\exp(-tX))Y]^M) \\ &= -a^{-1} \circ \sigma^{-1}([X, Y]^M), \end{aligned}$$

che ci dà la [eq:15.11.5](#) (5.3.9). \square

Definizione 5.3.10. Ad ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ associamo un tensore $A_X \in \mathfrak{T}^{[1,1]}(M)$ mediante

$$\text{eq:15.10.7} \quad (5.3.10) \quad A_X = L_X - \nabla_X,$$

ove L_X è la derivata di Lie rispetto ad X .

Il fatto che A_X sia un tensore si evidenzia dall'uguaglianza

$$\text{eq:15.10.8} \quad (5.3.11) \quad A_X Y = [X, Y] - \nabla_X Y = -\nabla_Y X - T(X, Y).$$

Abbiamo

[lem:15.10.2](#) **Lemma 5.3.11.** *L'applicazione Λ_{σ_0} è caratterizzata da*

$$\text{eq:15.10.9} \quad (5.3.12) \quad \sigma_0 \circ \Lambda_{\sigma_0}(X)_{\sigma_0} \circ \sigma_0^{-1} = -(A_{X^M})_{\mathbf{o}}, \quad \forall X \in \kappa.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $X \in \kappa$, $v \in \mathbb{R}^m$ ed $Y = \mathbf{B}(v)$ il corrispondente campo orizzontale standard $Y_{\sigma} = h(\sigma v)$ e $Z_{\mathbf{o}} = \sigma_0 v = \pi_*(Y_{\sigma_0})$.

Sia Θ la forma di torsione della connessione. Abbiamo

$$\begin{aligned} \Theta(X^P, Y) &= d\theta(X^P, Y) + (\omega \wedge \theta)(X^P, Y) \\ &= X^P \theta(Y) - Y \theta(X^P) - \theta([X^P, Y]) + \omega(X^P)(\theta(Y)) \\ &= -Y \theta(\tilde{X}^M) + \omega(X^P)(v), \end{aligned}$$

perché $X^P \theta(Y) = X^P v = 0$ ed $[X^P, Y] = L_{X^P} Y = 0$, perché la connessione è \mathbf{K} -invariante, e quindi lascia invarianti i vettori orizzontali standard. Inoltre, $\theta(X^P) = \theta(\tilde{X}^M)$ perché $X^P - \tilde{X}^M$ è verticale. Poiché $\nabla_{Z_{\mathbf{o}}} X^M = \sigma_0(Y \theta(\tilde{X}^M))$, calcolando nel punto σ_0 otteniamo

$$T(X_{\mathbf{o}}^M, Z_{\mathbf{o}}) = -\nabla_{Z_{\mathbf{o}}} X^M + \sigma_0 \circ \Lambda_{\sigma_0}(X) \circ \sigma_0^{-1}(Z_{\mathbf{o}}),$$

che ci dà la [eq:15.10.9](#) (5.3.12). \square

Scriviamo

$$\text{eq:15.11.10} \quad (5.3.13) \quad \lambda_{\sigma_0}(X) = \sigma_0 \circ \Lambda_{\sigma_0}(X) \circ \sigma_0^{-1} \circ \varpi_* \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\kappa, T_{\mathbf{o}}M), \quad \forall X \in \kappa.$$

[prop:15.10.3](#) **Proposizione 5.3.12.** *La torsione e la curvatura della connessione Γ associata all'applicazione Λ_{σ_0} si esprimono, mediante le formule:*

$$\text{eq:15.10.8a} \quad (5.3.14) \quad T_{\mathbf{o}}(X_{\mathbf{o}}^M, Y_{\mathbf{o}}^M) = \lambda_{\sigma_0}(X)(Y) - \lambda_{\sigma_0}(Y)(X) + [X, Y]_{\mathbf{o}}^M$$

$$\text{eq:15.10.9a} \quad (5.3.15) \quad R_{\mathbf{o}}(X_{\mathbf{o}}^M, Y_{\mathbf{o}}^M) = \sigma_0 \circ \{[\Lambda_{\sigma_0}(X), \Lambda_{\sigma_0}(Y)] - \Lambda_{\sigma_0}([X, Y])\} \circ \sigma_0^{-1},$$

$\forall X, Y \in \kappa.$

DIMOSTRAZIONE. La [\(5.3.14\)](#) è conseguenza della [\(5.3.12\)](#). Se $X, Y \in \kappa$, abbiamo:

$$\begin{aligned} T(X_0^M, Y_0^M) &= (\nabla_{X_0^M} Y^M - [X^M, Y^M]_0) - (\nabla_{Y_0^M} X^M - [Y^M, X^M]_0) + [Y^M, X^M]_0 \\ &= -A_{X_0^M} Y_0^M + A_{Y_0^M} X_0^M + [Y^M, X^M]_0 \\ &= \lambda_{\sigma_0}(X)(Y) - \lambda_{\sigma_0}(Y)(X) + [X, Y]_0^M. \end{aligned}$$

La formula per la curvatura è la [\(3.13.10\)](#) della [Proposizione 3.13.12](#). [prop:14.16.6](#) \square

5.4. Connessioni invarianti su spazi riduttivi

Utilizziamo le notazioni del [§5.3](#).

Supponiamo inoltre, in questo paragrafo, che lo spazio omogeneo $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ sia *riduttivo*, che ci sia cioè un complemento lineare \mathfrak{m} di \mathfrak{h} in κ , invariante rispetto all'azione aggiunta di \mathbf{H} :

$$\text{eq:15.11.1} \quad (5.4.1) \quad \kappa = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}.$$

Dalla [\(5.4.1\)](#) segue, in particolare, che $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, e questa condizione è equivalente ad $\text{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$ quando \mathbf{H} è connesso.

Sia m la dimensione di M , \mathbf{G} un sottogruppo di Lie di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ e $\xi = (P \xrightarrow{\pi} M)$ una \mathbf{G} -struttura su M invariante per l'azione di \mathbf{K} .

Il Teorema [3.13.15](#) del Capitolo 2 dà in questo caso:

Teorema 5.4.1 (Wang). *C'è una corrispondenza biunivoca tra le \mathbf{G} -connessioni affini \mathbf{K} -invarianti su M e le applicazioni lineari*

$$\text{eq:15.11.2} \quad (5.4.2) \quad \Lambda_{\sigma_0 \mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

tali che

$$\text{eq:15.11.3} \quad (5.4.3) \quad \Lambda_{\sigma_0 \mathfrak{m}}(\text{Ad}_k(h)(X)) = \text{Ad}_g(\lambda(h))(\Lambda_{\sigma_0 \mathfrak{m}}(X)), \quad \forall h \in \mathbf{H}, \forall X \in \mathfrak{m}.$$

Infatti la $\Lambda_{\sigma_0 \mathfrak{m}}$ determina univocamente un'applicazione lineare

$$\Lambda_{\sigma_0}(X) = \begin{cases} X & \text{se } X \in \mathfrak{h}, \\ \Lambda_{\sigma_0 \mathfrak{m}}(X) & \text{se } X \in \mathfrak{m}, \end{cases}$$

che soddisfa le condizioni del Teorema [5.3.7](#).

Osserviamo che, per il Lemma [5.3.11](#) la corrispondenza è data da

Proposizione 5.4.2. *Se $\Lambda_{\sigma_0 \mathfrak{m}}$ è l'applicazione lineare associata a Γ , abbiamo*

$$\text{eq:15.11.4} \quad (5.4.4) \quad \sigma_0 \circ \Lambda_{\sigma_0 \mathfrak{m}} \circ \sigma_0^{-1} = -(A_{X^*})_0, \quad \forall X \in \mathfrak{m}.$$

Identifichiamo $T_0 M$ con \mathfrak{m} e di conseguenza gli elementi di \mathfrak{g} come endomorfismi di \mathfrak{m} , utilizzando il sistema di riferimento σ_0 . Indichiamo al solito con $X_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{m}$ ed $X_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}$ le componenti di $X \in \kappa$ rispetto alla decomposizione [\(5.4.1\)](#). Con queste notazioni, possiamo enunciare il seguente:

thm:15.12.3

Teorema 5.4.3. *La torsione e la curvatura della \mathbf{G} -connessione \mathbf{K} -invariante Γ sono espresse in termini della $\Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}$ dalle formule*

eq:15.12.5

$$(5.4.5) \quad T_0(X, Y) = \Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}(X)Y - \Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}(Y)X - [X, Y]_{\mathfrak{m}}$$

$$(5.4.6) \quad R_0(X, Y) = [\Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}(X), \Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}(Y)] - \Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}([X, Y]_{\mathfrak{m}}) - \lambda_*([X, Y]_{\mathfrak{b}}),$$

$$\forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato è un caso particolare della Proposizione [prop:15.10.3](#) [5.3.12](#).

□

La *connessione canonica* corrisponde alla scelta $\Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}} = 0$.
Essa è caratterizzata da

Proposizione 5.4.4. *La connessione canonica è l'unica \mathbf{G} -connessione affine \mathbf{K} -invariante tale che, per ogni $X \in \mathfrak{m}$, l'orbita $\exp(tX) \cdot \sigma_0$, e quindi anche tutte le orbite $\exp(tX) \cdot \sigma$ con $\sigma \in P_{p_0}$, siano orizzontali.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}(X) = \omega_{\sigma_0}(X^*)$, la condizione che $\Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}$ sia l'applicazione nulla è necessaria e sufficiente affinché $X^*_{\sigma_0}$ sia orizzontale per ogni $X \in \mathfrak{m}$. Poiché \mathbf{K} opera come un gruppo di affinità, X^* è orizzontale lungo la curva $\exp(tX) \cdot \sigma_0$ se e soltanto se è orizzontale in σ_0 . □

Proposizione 5.4.5. *Supponiamo che M sia riduttivo, ξ una \mathbf{G} -struttura su M e Γ la connessione canonica su ξ . Allora:*

- (1) Γ è completa;
- (2) le geodetiche uscenti da \mathfrak{o} sono le curve integrali $\exp(tX) \cdot \mathfrak{o}$ dei campi X^* , al variare di X in \mathfrak{m} .
- (3) La torsione e la curvatura di Γ soddisfano le

$$(5.4.7) \quad T_0(X, Y) = -[X, Y]_{\mathfrak{m}}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

$$(5.4.8) \quad R_0(X, Y)Z = -[[X, Y]_{\mathfrak{b}}, Z], \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m},$$

$$(5.4.9) \quad \nabla T = 0,$$

$$(5.4.10) \quad \nabla R = 0.$$

Proposizione 5.4.6. *Sia Γ una \mathbf{G} -connessione affine \mathbf{K} -invariante sullo spazio riduttivo $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ e sia $\Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ l'applicazione lineare associata.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché le curve integrali dei campi X^ , al variare di X in \mathfrak{m} , siano geodetiche, è che*

eq:15.11.13

$$(5.4.11) \quad \Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}(X)X = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{m}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la [\(5.4.4\)](#) [eq:15.11.4](#) la condizione $\Lambda_{\sigma_0\mathfrak{m}}(X)X = 0$ è necessaria e sufficiente affinché la derivata covariante del vettore di velocità della curva integrale di X^* lungo la curva sia nulla. □

Teorema 5.4.7. *Esiste una \mathbf{G} -connessione affine su M priva di torsione e per cui le curve integrali dei campi di vettori X^* , al variare di X in \mathfrak{m} , siano geodetiche.*

DIMOSTRAZIONE. Basta infatti considerare la connessione corrispondente alla scelta

$$\text{eq:15.12.18} \quad (5.4.12) \quad \Lambda_{\sigma_0 \mathfrak{m}}(X)Y = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

□

Definizione 5.4.8. La connessione corrispondente alla scelta ^{eq:15.12.18}(5.4.12) si dice la *connessione naturale priva di torsione*.

Osservazione 5.4.9. Se la rappresentazione lineare d'isotropia è fedele, allora la connessione naturale priva di torsione è unica.

Consideriamo il caso particolare in cui $M = \mathbf{G}$ sia un gruppo di Lie. Facciamo agire $\mathbf{K} = \mathbf{G} \times \mathbf{G}$ su \mathbf{G} mediante

$$\text{eq:15.12.19} \quad (5.4.13) \quad \mathbf{K} \times \mathbf{G} \ni ((a, b), x) \longrightarrow axb^{-1} \in \mathbf{G}.$$

Lo stabilizzatore dell'identità è il sottogruppo

$$\text{eq:15.12.20} \quad (5.4.14) \quad \mathbf{H} = \{(a, a) \mid a \in \mathbf{G}\}.$$

Se \mathfrak{g} è l'algebra di Lie di \mathbf{G} , allora $\kappa = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ è quella di \mathbf{K} ed $\mathfrak{h} = \{(X, X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$ quella di \mathbf{H} .

Possiamo rappresentare $\mathbf{G} = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ come uno spazio riduttivo in diversi modi. Tra questi, abbiamo le decomposizioni $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invarianti:

eq:ga	(+)	$\kappa = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_+, \quad \text{con } \mathfrak{m}_+ = \{(0, X) \mid X \in \mathfrak{g}\},$
eq:gb	(-)	$\kappa = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_-, \quad \text{con } \mathfrak{m}_+ = \{(X, 0) \mid X \in \mathfrak{g}\},$
eq:gc	(0)	$\kappa = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_0, \quad \text{con } \mathfrak{m}_+ = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{g}\}.$

Definizione 5.4.10 (Cartan-Shauten). Le connessioni canoniche corrispondenti alle decomposizioni ^{eq:ga}(+), ^{eq:gb}(-), ^{eq:gc}(0), si dicono la connessione-^{eq:ga}(+), la connessione-^{eq:gb}(-) e la connessione-^{eq:gc}(0), rispettivamente.

Teorema 5.4.11. *La torsione e curvatura delle connessioni di Cartan-Shauten sul gruppo di Lie \mathbf{G} si esprimono con le formule:*

(+)	$T(X^*, Y^*) = [X^*, Y^*], \quad R = 0,$
(-)	$T(X^*, Y^*) = -[X^*, Y^*], \quad R = 0,$
(0)	$T = 0, \quad R(X^*, Y^*)Z^* = -\frac{1}{4}[[X^*, Y^*], Z^*],$

per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Applicazione esponenziale e campi di Jacobi

6.1. L'applicazione esponenziale

Sia (M, Γ) una varietà affine. Fissiamo un punto $p_0 \in M$. Le geodetiche di punto iniziale p_0 sono parametrizzate dalla loro velocità iniziale $v \in T_{p_0}M$. La γ_v , di velocità iniziale v , è la soluzione del problema di Cauchy

$$\text{eq361} \quad (6.1.1) \quad \begin{cases} \frac{D^2\gamma_v}{dt^2} = 0, \\ \gamma_v(0) = p_0, \\ \dot{\gamma}_v(0) = v. \end{cases}$$

Indichiamo con I_v il suo intervallo massimale di definizione. È $I_{kv} = k^{-1}I_v$ per ogni numero reale $k \neq 0$ e

$$\text{eq362} \quad (6.1.2) \quad \gamma_{kv}(t) = \gamma_v(kt), \quad \forall t \in k^{-1}I_v.$$

Per la dipendenza \mathcal{C}^∞ delle soluzioni del problema di Cauchy dai dati iniziali, eq361 (6.1.1), l'insieme

$$(6.1.3) \quad W_{p_0} = \{v \in T_{p_0} \mid 1 \in I_v\}$$

è un intorno aperto di 0 in $T_{p_0}M$, stellato rispetto all'origine per la eq362 (6.1.2), ed

$$\text{eq365} \quad (6.1.4) \quad \text{Exp}_{p_0} : W_{p_0} \ni v \longrightarrow \gamma_v(1) \in M$$

è un'applicazione di classe \mathcal{C}^∞ .

Definizione 6.1.1. La eq365 (6.1.4) si dice *l'applicazione esponenziale in p_0* associata alla connessione Γ .

Osservazione 6.1.2. Se la connessione Γ è completa, allora, per ogni punto p_0 , l'applicazione esponenziale è definita su $T_{p_0}M$.

Proposizione 6.1.3. *L'applicazione esponenziale in $p_0 \in M$ definisce un diffeomorfismo di un intorno aperto di 0 in $T_{p_0}M$ su un intorno aperto di p_0 in M .*

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato è conseguenza del teorema dell'applicazione inversa, perché il differenziale di Exp_{p_0} in 0 è l'identità su $T_{p_0}M$. \square

In particolare, l'esponenziale in p_0 definisce una carta locale con centro in p_0 .

6.2. Intorni normali ed intorni convessi

Definizione 6.2.1. Un intorno stellato $N_0(p)$ dell'origine in T_pM , contenuto in W_{p_0} , e su cui Exp_p definisca un diffeomorfismo su un aperto N_p di M , si dice *normale*, ed $N_p = \text{Exp}_p(N_0(p))$ si dice *un intorno normale di p in M* .

Osservazione 6.2.2. Se v_1, \dots, v_n è una base di T_pM , si dicono *coordinate normali del punto $q \in N_p$* i numeri reali x^1, \dots, x^m tali che

$$\text{Exp}_p(x^1 v_1 + \dots + x^m v_n) = q.$$

Per ogni base v_1, \dots, v_n di T_pM le coordinate normali sono anche coordinate locali in N_p .

thm: 17a64

Teorema 6.2.3. Ogni punto $p_0 \in M$ ammette un intorno normale N_{p_0} che è anche intorno normale di ciascuno dei suoi punti.

In particolare, data una coppia di punti $q_0, q_1 \in N_{p_0}$ vi è un'unica geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], N_p)$ con $\gamma(0) = q_0$, $\gamma(1) = q_1$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo coordinate locali x^1, \dots, x^m in un intorno U di p_0 in M , con $x^j(p_0) = 0$ per $j = 1, \dots, n$. Se $q_0 \in U$ ed $r > 0$, e definiamo

$$V(q_0, r) = \left\{ p \in U \mid \sum_{j=1}^m |x^j(p) - x^j(q_0)|^2 < r^2 \right\}.$$

Utilizzando i teoremi di esistenza, unicità, dipendenza \mathcal{C}^∞ dai dati iniziali per le equazioni differenziali ordinarie ed il teorema delle funzioni implicite, possiamo trovare un $r_0 > 0$ tale che, per ogni $p \in V(p_0, 2r_0)$, l'aperto $V(p, 2r_0)$ sia contenuto in un intorno normale di p . In particolare, tutti gli aperti $V(p, r)$, con $p \in V(p_0, r_0)$ ed $r \leq r_0$ sono *semplici*, ovvero contengono al più un segmento di geodetica che congiunga due punti assegnati.

Sia $F(p) = \sum_{j=1}^m |x^j(p)|^2 \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Ad una geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([a, b], V(p_0, r_0))$ associamo la funzione $G(t) = F(\gamma(t)) \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= 2 \sum_{j=1}^m x^j(t) \dot{x}^j(t), \\ \ddot{G}(t) &= 2 \sum_{j=1}^m \left(|\dot{x}^j(t)|^2 + x^j(t) \ddot{x}^j(t) \right) \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^m \left(\delta_{i,j} - \sum_{h=1}^m x^h(t) \cdot \Gamma_{i,j}^h(\gamma(t)) \right) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t). \end{aligned}$$

Possiamo quindi determinare un numero reale r^* , con $0 < r^* \leq r_0$, tale che, per ogni geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow V(p_0, r^*)$, la funzione $F(\gamma(t))$ sia strettamente convessa.

Fissiamo un $r > 0$ tale che ogni $p \in V(p_0, r)$ abbia un intorno normale N_p con $V(p_0, r) \subset N_p \subset V(p_0, r^*)$. Dati due punti $q_0, q_1 \in V(p_0, r)$ vi è un'unica geodetica $\gamma : [0, 1] \rightarrow V(p_0, r^*)$, che congiunge q_0 a q_1 . Poiché $F(\gamma(0)) < r^2$, $F(\gamma(1)) < r^2$, segue dalla convessità di $F(\gamma(t))$ che $\gamma(t) \in V(p_0, r)$ per ogni $t \in [0, 1]$. \square

Definizione 6.2.4. Un sottoinsieme A di M si dice

- *convesso* se, per ogni coppia di suoi punti contiene una geodetica che li congiunge;

- *semplice* se, per ogni coppia di suoi punti vi è al più una geodetica che li congiunge.

Per il Teorema ^{thm:17a64}6.2.5, abbiamo:

thm: f06.3.4

Teorema 6.2.5. *Ogni punto di M ammette un sistema fondamentale di intorni aperti semplici e convessi.* \square

Sia N_p un intorno normale di un punto $p \in M$. Per ogni $q \in N_p$, v è un'unica geodetica $\gamma_{[p,q]} : [0, 1] \rightarrow N_p$ che congiunge p a q . Il trasporto parallelo lungo la geodetica $\gamma_{[p,q]}$ ci permette di definire un'applicazione lineare $\tau_{p,q} : T_p M \rightarrow T_q M$. Indichiamo con $v^* \in \mathfrak{X}(N_p)$ il campo di vettori

eq: 17a20

$$(6.2.1) \quad v^*(q) = \tau_{p,q}(v) \in \mathfrak{X}(N_p).$$

Definizione 6.2.6. Il campo di vettori ^{eq: 17a20}(6.2.1) si dice *adattato* al vettore tangente $v \in T_p M$.

Possiamo utilizzare i campi di vettori adattati per esprimere con una formula il differenziale dell'esponenziale di una connessione analitica.

Definizione 6.2.7. Se M è una varietà analitica reale, la connessione ∇ si dice *analitica* se $\nabla_X Y$ è analitico in $U^{\text{aperto}} \subset M$ per ogni coppia di campi di vettori X, Y che siano analitici in U .

Questa condizione equivale al fatto che i simboli di Christoffel, calcolati in un sistema di riferimento analitico, siano analitici.

Indichiamo con L_X la derivata di Lie rispetto al campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Teorema 6.2.8. *Sia M una varietà analitica su cui sia assegnata una connessione affine analitica Γ . Siano $p \in M$ e $v \in T_p M$. Allora esiste un $\epsilon > 0$ tale che Exp_p sia definita ed analitica in un intorno di $\{tv \mid -\epsilon \leq t \leq \epsilon\}$ e si ha:*

$$(6.2.2) \quad (d\text{Exp}_p)(tv)(w) = \left\{ \frac{1 - e^{L_{tv^*}}}{L_{tv^*}}(w^*) \right\}_{\text{Exp}_p(tv)} \quad \forall |t| \leq \epsilon.$$

Osservazione 6.2.9. Se (M, g) è una varietà Riemanniana, in coordinate normali (N_{p_0}, x) abbiamo:

$$(6.2.3) \quad \begin{cases} g_{i,j}(x) = \delta_{i,j} + O(|x|^2) \\ \Gamma_{j,k}^i(0) = 0. \end{cases}$$

6.3. Definizione dei campi di Jacobi

6.3.1. Superfici parametriche. Sia M una varietà differenziabile. Una superficie parametrica in M è un'applicazione differenziabile $f : U \rightarrow M$ di un aperto U di \mathbb{R}^2 in M . Siano (t, s) le coordinate cartesiane di \mathbb{R}^2 . Poniamo

$$\partial f(t, s)/\partial t = f_*(\partial/\partial t)_{(t,s)}, \quad \text{e} \quad \partial f(t, s)/\partial s = f_*(\partial/\partial s)_{(t,s)}.$$

Chiamiamo *campo di vettori su f* un'applicazione differenziabile $V : U \rightarrow TM$ che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & & TM \\ & \nearrow v & \downarrow \pi \\ U & & \\ & \searrow f & M \end{array}$$

Supponiamo ora che su M sia assegnata una connessione affine Γ . Per ogni s fissato, la $t \rightarrow f(t, s)$, e per ogni t fissato la $s \rightarrow f(t, s)$ sono curve differenziabili in M e possiamo quindi definire le derivate covarianti di V lungo ciascuna di tali curve. Le denoteremo con

$$(6.3.1) \quad \frac{DV}{\partial t}(t, s) \quad \text{e} \quad \frac{DV}{\partial s}(t, s).$$

lem: 17a47

Lemma 6.3.1. *Siano $f : U \rightarrow M$ una superficie parametrica in M e V un campo di vettori su f . Valgono allora le:*

$$(6.3.2) \quad \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} = T \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right),$$

$$(6.3.3) \quad \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V = R \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V.$$

DIMOSTRAZIONE. La verifica delle formule è immediata quando la f si scriva, in un sistema di coordinate locali x^1, \dots, x^n , mediante:

$$(t, s) \rightarrow (t, s, 0, \dots, 0).$$

Ciò è possibile vicino a ciascun punto (t, s) in cui la f sia un'immersione, cioè in cui $\frac{\partial f}{\partial t}$ e $\frac{\partial f}{\partial s}$ siano linearmente indipendenti. Perturbando la f , ed osservando che le formule che vogliamo dimostrare dipendono con continuità dalla f , ci riconduciamo al caso in cui f sia un'immersione. \square

6.3.2. L'equazione di Jacobi. Fissiamo un punto $p \in M$ e consideriamo l'applicazione esponenziale Exp_p , definita sull'intorno W_p di 0 in $T_p M$. Per calcolarne il differenziale in un punto $v \in W_p$, consideriamo una curva $v(s) \in \mathcal{C}^\infty([-\epsilon, \epsilon], T_p M)$ con $v(0) = v$ e $\dot{v}(0) = w$ e la superficie parametrica

eq: 17a30a

$$(6.3.4) \quad f(t, s) = \text{Exp}_p(t v(s)),$$

definita su un intorno aperto U di $[0, 1] \times (-\epsilon, \epsilon)$ in \mathbb{R}^2 . È

eq: 17a30

$$(6.3.5) \quad (\text{Exp}_p)_*(v)(w) = \frac{\partial f(1, 0)}{\partial s}.$$

Il campo di vettori $J(t) = \frac{\partial f(t, 0)}{\partial s}$ soddisfa un'equazione differenziale lineare del second'ordine lungo la geodetica $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$. Infatti, per il Lemma 6.3.1 ^{lem: 17a47} abbiamo

$$0 = \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} + R \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{D}{dt} \left(T \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right) + R \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Abbiamo quindi ottenuto l'equazione di Jacobi per il campo di vettori $J(t)$ lungo la geodetica $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$:

$$\text{eq: 17a31} \quad (6.3.6) \quad \frac{D^2 J}{dt^2} + \frac{D T(J, \dot{\gamma})}{dt} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

L'equazione di Jacobi per una connessione simmetrica si semplifica nella

$$\text{eq: 433} \quad (6.3.7) \quad \ddot{J} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ una geodetica.

Definizione 6.3.2. Chiamiamo *campi di Jacobi* lungo γ le soluzioni della eq: 17a31 (6.3.6).
Indichiamo con $\mathcal{J}(\gamma)$ l'insieme dei campi di Jacobi lungo γ .

Proposizione 6.3.3. Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ una geodetica e sia $t_0 \in I$. Per ogni coppia v_0, w_0 di vettori tangenti in $T_{\gamma(t_0)}M$ esiste uno ed un solo campo di Jacobi J lungo γ che soddisfi le condizioni iniziali $J(t_0) = v_0, \dot{J}(t_0) = w_0$.

$\mathcal{J}(\gamma)$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione $2m$.

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato segue dal fatto che la eq: 17a31 (6.3.6) è un'equazione differenziale ordinaria del second'ordine lineare per il campo $J(t)$. \square

lem: 17a510 **Lemma 6.3.4.** Siano $p \in M, v, w \in T_pM$. Allora

$$(6.3.8) \quad J(t) = \text{Exp}_{p_*}(tv)(tw)$$

è il campo di Jacobi lungo la geodetica $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$ che soddisfa le condizioni iniziali:

$$(6.3.9) \quad J(0) = 0, \quad \dot{J}(0) = w.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, $J(t) = \partial f(t, 0)/\partial s$ per la superficie parametrica

$$(t, s) \rightarrow f(t, s) = \text{Exp}_p(t(v + sw)).$$

Poiché $f(0, s) = p$ per ogni s , è $J(0) = 0$. Abbiamo poi

$$\begin{aligned} \frac{DJ(0)}{dt} &= \left(\frac{D}{dt} \right)_{t=0} \left[\text{Exp}_{p_*}(tv)(tw) \right] = \left(\frac{D}{dt} \right)_{t=0} \left[t \text{Exp}_{p_*}(tv)(w) \right] \\ &= \left[(\text{Exp}_{p_*})'(tv)(w) + t \frac{D}{dt} (\text{Exp}_{p_*}(tv)(w)) \right]_{t=0} = w. \end{aligned}$$

\square

Osservazione 6.3.5. Per ogni geodetica γ , la sua velocità $\dot{\gamma}$ ed il campo $t\dot{\gamma}$ sono di Jacobi lungo γ .

Dal Lemma lem: 17a510 6.3.4 abbiamo:

prop: 17a511

Proposizione 6.3.6. Sia N_0 un intorno normale di 0 in $T_pM, v \in N_0$ e $w_0 \in T_pM$. Allora $d\text{Exp}_p(v)(w)$ è il valore in 1 del campo di Jacobi J_w lungo la geodetica $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$, che soddisfa le condizioni iniziali $J_w(0) = 0, \dot{J}_w(0) = w$. \square

Corollario 6.3.7. *I punti singolari di Exp_p sono i vettori $v \in N_0$ per cui esiste un campo di Jacobi non nullo lungo $\gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$ che si annulli in 0 ed 1.* \square

6.4. Campi di Jacobi su una varietà Riemanniana

Supponiamo che (M, g) sia una varietà Riemanniana, e consideriamo su M la connessione di Levi-Civita.

Definizione 6.4.1. Un riferimento mobile lungo una curva $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ è una curva $\sigma = (e_1, \dots, e_m) \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{O}(M))$ tale che:

- (1) per ogni $t \in I$, $e_1(t), \dots, e_m(t)$ è una base ortonormale di $T_{\gamma(t)}M$;
- (2) per ogni $i = 1, \dots, m$, $e_i \in \mathcal{C}^\infty(I, TM)$ è parallelo lungo γ .

Un riferimento orizzontale è cioè un sollevamento orizzontale $\tilde{\gamma}$ di γ in $\mathfrak{o}(M)$.

Se $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ è una geodetica, allora

$$\frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 2g\left(\frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt}, \dot{\gamma}(t)\right) = 0.$$

Quindi

lem: 17a614

Lemma 6.4.2. *Le geodetiche non costanti di una varietà Riemanniana (M, g) sono parametrizzate mediante un multiplo della lunghezza d'arco.* \square

Potremo dunque scegliere, su una geodetica non costante $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$, un riferimento mobile $(e_1, \dots, e_m) \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{O}(M))$ con $e_1 = \dot{\gamma}/\|\dot{\gamma}\|$. Poniamo

$$(6.4.1) \quad a_{i,j}(t) = R(e_i(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t), e_j(t)) = g(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)).$$

I coefficienti $a_{i,j}$ sono simmetrici per la prima identità di Bianchi. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} a_{i,j}(t) &= g(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)) = -g(R((e_i(t), \dot{\gamma}(t)) e_j(t), \dot{\gamma}(t))) \\ &= g(R(\dot{\gamma}(t), e_j(t)) e_i(t), \dot{\gamma}(t)) + g(R(e_j(t), e_i(t)) \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) \\ &= g(R(e_j(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_i(t)) = a_{j,i}(t), \end{aligned}$$

perché $R(v, w)$ è un endomorfismo g_p -antisimmetrico di T_pM per ogni $v, w \in T_pM$. È poi $a_{1,i} = a_{i,1} = 0$ per ogni $i = 1, \dots, m$.

Le componenti f^i di un campo di Jacobi $J(t) = \sum_{i=1}^m f^i(t) e_i(t)$ rispetto al riferimento mobile scelto sulla geodetica γ , soddisfano il sistema di equazioni differenziali ordinarie

eq: jacforma

$$(6.4.2) \quad \ddot{f}^i + \sum_{j=1}^m a_{i,j} f^j = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

In particolare,

eq: jacformb

$$(6.4.3) \quad \dot{f}^1 = 0.$$

I campi di Jacobi $\dot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}\| e_1(t)$ e $t\dot{\gamma}(t) = t\|\dot{\gamma}\| e_1(t)$ sono le soluzioni della (6.4.2), corrispondenti rispettivamente alle condizioni iniziali

$$\begin{cases} f(t_0) = (\|\dot{\gamma}\|, 0, \dots, 0), \\ \dot{f}(t_0) = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad \begin{cases} f(t_0) = 0, \\ \dot{f}(t_0) = (\|\dot{\gamma}\|, 0, \dots, 0). \end{cases}$$

Dalla (6.4.3) segue il

lem: 17a513

Lemma 6.4.3. Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, a], M)$ una geodetica e fissiamo $t_0 \in I$. Ogni campo di Jacobi J tale che

eq: 17a44

$$(6.4.4) \quad g(J(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) = 0 \quad e \quad g(\dot{J}(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) = 0$$

soddisfa

eq: 17a45

$$(6.4.5) \quad g(J(t), \dot{\gamma}(t)) = 0 \quad e \quad g(\dot{J}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0, \quad \forall t \in I. \quad \square$$

cor: 17a516

Corollario 6.4.4. Sia $p_0 \in M$, $v \in W_{p_0} \subset T_{p_0}M$ e $w \in T_{p_0}M$ con $w \perp v$. Allora $\text{Exp}_{p_0}(v)_* w \perp \text{Exp}_{p_0}(v)_* v$. \square

Il tensore di curvatura R della connessione di Levi-Civita è una due-forma a coefficienti nel fibrato $\mathfrak{v}_g(M) \subset T^{1,1}M$ degli endomorfismi g -antisimmetrici di TM . Se definiamo

eq: 17a44

$$(6.4.6) \quad R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4), \quad \forall X_1, X_2, X_3, X_4$$

otteniamo una forma bilineare simmetrica su $\Lambda^2 TM$.

Definizione 6.4.5. Chiamiamo *curvatura sezionale* di (M, g) nel piano α di TM il numero reale $K(\alpha)$ per cui

eq: 17a45

$$(6.4.7) \quad R(X_1, X_2, X_1, X_2) = -K(\alpha)(g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - |g(X_1, X_2)|^2).$$

Esempio 6.4.6 (Campi di Jacobi su una varietà a curvatura sezionale costante). Supponiamo che M abbia curvatura sezionale costante K e sia γ una geodetica su M . Supponiamo che γ sia parametrizzata per lunghezza d'arco.

Fissiamo un campo di vettori $w(t)$ parallelo su γ , con $\|w(t)\| = 1$ e $g(w(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$. Allora $R(w(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = Kw(t)$. Poiché $Dw/dt = 0$ lungo γ , ne segue che le

eq: 17a48

$$(6.4.8) \quad J(t) = \begin{cases} K^{-1}(A \cos(t\sqrt{K}) + B \sin(t\sqrt{K})) \cdot w(t) & \text{se } K > 0, \\ (A + Bt) \cdot w(t) & \text{se } K = 0, \\ K^{-1}(A \cosh(t\sqrt{-K}) + B \sinh(t\sqrt{-K})) \cdot w(t) & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

sono campi di Jacobi ortogonali lungo γ . Tutti i campi di Jacobi ortogonali si ottengono al variare di $w(t)$ tra i campi di vettori ortogonali paralleli lungo γ .

Esempio 6.4.7. Più in generale, possiamo considerare il caso in cui sia $\nabla R = 0$, che si verifica ad esempio per una metrica invariante su uno spazio omogeneo riduttivo. Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ una geodetica. Supporremo per semplicità che $0 \in I$ e $\|\dot{\gamma}\| = 1$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{a_{i,j}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} g(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)) \\ &= \frac{Dg}{dt}(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)) + g\left(\frac{DR}{dt}(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)\right) \\ &\quad + g(R(\dot{e}_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)) + g(R(e_i(t), \ddot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), e_j(t)) \\ &\quad + g(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \ddot{\gamma}(t), e_j(t)) + g(R(e_i(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t), \dot{e}_j(t)) = 0 \end{aligned}$$

e quindi i coefficienti $a_{i,j}$ sono costanti lungo γ . Possiamo fissare il riferimento mobile $\sigma = (e_1, \dots, e_m)$ lungo γ in modo che i vettori e_i diagonalizzino $(a_{i,j})$, che cioè

$$\sum_{j=1}^m a_{i,j} e_j(t) = k_i e_i(t), \quad \text{per } i = 1, \dots, m$$

ove $k_1 = 0$ e k_2, \dots, k_m sono gli autovalori della matrice $(a_{i,j})$. Allora

$$J'_i = \begin{cases} k_i^{-1} \cos(t\sqrt{k})e_i(t) & \text{se } k_i > 0, \\ e_i(t) & \text{se } k_i = 0, \\ k_i^{-1} \cosh(t\sqrt{-k_i}) & \text{se } k_i < 0, \end{cases} \quad J''_i = \begin{cases} k_i^{-1} \sin(t\sqrt{k})e_i(t) & \text{se } k_i > 0, \\ t e_i(t) & \text{se } k_i = 0, \\ k_i^{-1} \sinh(t\sqrt{-k_i})e_i(t) & \text{se } k_i < 0, \end{cases}$$

per $i = 1, \dots, m$ formano una base dello spazio vettoriale di $\mathcal{J}(\gamma)$.

6.5. Punti coniugati

Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([a, b], M)$ una geodetica.

Definizione 6.5.1. Diciamo che t_0, t_1 , con $a \leq t_0 < t_1 \leq b$, sono *coniugati* lungo γ se esiste un campo di Jacobi $J(t)$ non identicamente nullo su γ che si annulli in t_0 e t_1 . La *molteplicità* di (t_0, t_1) è la dimensione dello spazio vettoriale:

eq: 17a51

$$(6.5.1) \quad \{J : [a, b] \rightarrow TM \mid J \in \mathcal{J}(\gamma), J(t_0) = 0, J(t_1) = 0\}.$$

Diremo anche che due punti $p_0, p_1 \in M$ sono *coniugati* se $p_0 = \gamma(t_0)$ e $p_1 = \gamma(t_1)$ per una geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([a, b], M)$ per cui t_0, t_1 siano coniugati e chiameremo la dimensione di $(6.5.1)$ *molteplicità* di (p_0, p_1) lungo γ .

Se pensiamo t_0 fissato, chiameremo la dimensione dello spazio vettoriale $(6.5.1)$ *molteplicità* di t_1 .

Osservazione 6.5.2. Fissato $t_0 \in [a, b]$, lo spazio vettoriale dei campi di Jacobi che si annullano in t_0 ha dimensione m . Tra di essi c'è il campo di vettori $(t - t_0)\dot{\gamma}(t)$, che si annulla soltanto nel punto t_0 . Quindi la *molteplicità* di un punto coniugato è un intero $\leq (n - 1)$.

Esempio 6.5.3. Nel caso della sfera $\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$, le geodetiche sono i cerchi massimi (intersezioni di \mathbf{S}^n con i piani per l'origine). Su ciascuna di esse il punto antipodale (e il punto stesso) è coniugato con molteplicità $(n - 1)$.

Definizione 6.5.4. Sia $p \in M$. Il *luogo coniugato* di p è l'insieme $C(p)$ dei punti q di M tali che

- (1) $q = \text{Exp}_p(t_q v_q)$ per qualche $0 \neq v_q \in T_p M$ e $t_q > 0$;
- (2) esiste un campo di Jacobi $J \in \mathcal{J}(\text{Exp}_p(t v_q))$ con $J(0) = 0, J(t_q) = 0$.

Esempio 6.5.5. Nel caso della sfera $\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$, è $C(x) = \{-x\}$ per ogni $x \in \mathbf{S}^n$.

Proposizione 6.5.6. Sia $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ una geodetica, con $\gamma(0) = p \in M, \dot{\gamma}(0) = v \in T_p M \setminus \{0\}$. Allora $\gamma(\tau)$, con $0 < \tau \leq a$ è coniugato di 0 lungo γ se e soltanto se τv è un punto singolare dell'applicazione Exp_p , e la molteplicità del punto coniugato $\gamma(\tau)$ è la dimensione del nucleo di $(\text{Exp}_p)_*(\tau v)$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti i campi di Jacobi lungo γ che si annullano in 0 sono tutti e soli quelli della forma $J(t) = \left[(\partial E_p(t(v + sw))) / \partial s \right]_{s=0}$ e il loro valore in τ è $(\text{Exp}_p)_*(\tau v)(\tau w)$. \square

Proposizione 6.5.7. *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodetica. Se a e b non sono coniugati, allora il problema al contorno:*

$$(6.5.2) \quad \begin{cases} \frac{D^2 J}{dt^2} + R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = 0 \\ J(a) = v_a, \quad J(b) = v_b \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione per ogni coppia di vettori $v_a \in T_{\gamma(a)}M$ e $v_b \in T_{\gamma(b)}M$.

DIMOSTRAZIONE. Se a e b non sono coniugati, l'applicazione lineare

$$\mathcal{J}(\gamma) \ni J \rightarrow (J(a), J(b)) \in T_{\gamma(a)}M \oplus T_{\gamma(b)}M$$

è iniettiva e quindi anche surgettiva perché i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione finita $2m$. \square

Varietà Riemanniane

7.1. Metriche Riemanniane e pseudo-Riemanniane

Richiamiamo alcune nozioni già introdotte nel §^{sec:149}4.11 del Capitolo ^{ch:15}4.

Definizione 7.1.1. Sia M una varietà differenziabile. Una *metrica Riemanniana* su M è un tensore $g \in \mathfrak{T}^{0,2}(M)$ simmetrico e definito positivo:

$$(7.1.1) \quad g(X, Y) = g(Y, X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \quad (\text{simmetria}),$$

$$\text{eq:pos} \quad (7.1.2) \quad g_p(X, X) > 0, \quad \text{se } X \in \mathfrak{X}(M) \text{ ed } X(p) \neq 0 \quad (\text{positività}).$$

Diciamo che la g è una *metrica pseudo-Riemanniana* se la condizione ^{eq:pos}(7.1.2) si indebolisce a:

Per ogni $p \in M$ la forma bilineare simmetrica

$$(7.1.3) \quad T_p M \times T_p M \ni (v, w) \rightarrow g_p(v, w) \in \mathbb{R} \quad \text{è non degenera.}$$

Una *varietà Riemanniana* (risp. *pseudo-Riemanniana*) è una varietà differenziabile su cui sia stata fissata una metrica Riemanniana (risp. pseudo-Riemanniana). Indicheremo a volte una varietà Riemanniana, o pseudo-Riemanniana, come una coppia (M, g) .

Se (M, g) è una varietà Riemanniana, poniamo

$$\text{eq:16.0} \quad (7.1.4) \quad (v|w)_p = g(v, w), \quad \|v\| = \sqrt{g(v, v)}, \quad \text{se } p \in M \text{ e } v, w \in T_p M.$$

Definizione 7.1.2. Siano (M, g) ed (N, h) due varietà pseudo-Riemanniane. Un'applicazione differenziabile $f : N \rightarrow M$ si dice un'*immersione isometrica* se

$$\text{eq:16.1.d} \quad (7.1.5) \quad g_{f(q)}(f_* X_q, f_* Y_q) = h_q(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(N), \quad \forall q \in N.$$

Esempio 7.1.3. La metrica Euclidea di \mathbb{R}^m è definita, nelle coordinate canoniche x^1, \dots, x^m , da

$$\text{eq:16.1.1} \quad (7.1.6) \quad g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_{i,j}, \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq m.$$

Esempio 7.1.4. Siano (M, g) una varietà Riemanniana, N una varietà differenziabile ed $f : N \rightarrow M$ un'immersione differenziabile. Allora

$$\text{eq:16.1.2} \quad (7.1.7) \quad h(X_q, Y_q) = g(f_*(X_q), f_*(Y_q)), \quad \forall q \in N, \quad \forall X_q, Y_q \in T_q N$$

definisce una metrica Riemanniana su N .

Più in generale, se (M, g) è pseudo-Riemanniana, la ^{eq:16.1.2}(7.1.7) definisce una metrica pseudo-Riemanniana su N se, per ogni $q \in N$, il sottospazio $f_*(T_q N)$ è anisotropo in $(T_{f(q)} M, g_{f(q)})$.

es: 16.1.4

Esempio 7.1.5. Consideriamo su S^m la metrica Riemanniana g indotta dall'immersione canonica $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$. Sia $U = \{x \in S^m \mid x^0 + 1 > 0\}$ e consideriamo su U le coordinate locali y^1, \dots, y^m definite da

$$x^0 = \frac{1 - |y|^2}{1 + |y|^2}, \quad x^i = \frac{2y^i}{1 + |y|^2}, \quad y^i = \frac{x^i}{1 + x^0}, \quad \text{per } i = 1, \dots, m.$$

Abbiamo

$$dx^0 = -4 \frac{\sum_j y^j dy^j}{(1 + |y|^2)^2}, \quad dx^i = 2 \frac{dy^i}{(1 + |y|^2)} - 4y^i \frac{\sum_j y^j dy^j}{(1 + |y|^2)^2} \quad \text{su } S^m.$$

Quindi¹

$$g = \sum_i dx^i \otimes dx^i|_{S^m} = 4 \frac{\sum_{i=1}^m dy^i \otimes dy^i}{(1 + |y|^2)^2}.$$

Calcoliamo ora il tensore della metrica in coordinate sferiche. Per semplicità ci limitiamo a trattare il caso della sfera di dimensione due dello spazio ordinario. Abbiamo allora su S^2

$$\begin{cases} x^0 = \cos \theta, \\ x^1 = \sin \theta \cos \phi, \\ x^2 = \sin \theta \sin \phi, \end{cases} \quad \begin{cases} dx^0 = -\sin \theta d\theta, \\ dx^1 = \cos \theta \cos \phi d\theta - \sin \theta \sin \phi d\phi, \\ dx^2 = \cos \theta \sin \phi d\theta + \sin \theta \cos \phi d\phi \end{cases}$$

e quindi, ponendo $d\theta^2 = d\theta \otimes d\theta$ e $d\phi^2 = d\phi \otimes d\phi$,

$$g = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Esempio 7.1.6. Poiché la mappa antipodale $a_0 : S^n \ni x \rightarrow -x \in S^n$ è un'isometria, la metrica g definisce, per passaggio al quoziente, una metrica \bar{g} sullo spazio proiettivo, che rende la proiezione $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ un'isometria.

Esempio 7.1.7. La metrica dell'esempio 7.1.5 coincide su $S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$ con la *metrica di Fubini-Study* degli spazi proiettivi complessi. È, a meno di un fattore moltiplicativo, la parte reale della *metrica di Fubini-Study* di $\mathbb{C}P^n$. Questa è una metrica Hermitiana invariante per l'azione di $\mathbf{SU}(n+1)$, che si esprime, nelle coordinate locali $w^j = z^j/z^0$ di $U_0 = \{z^0 \neq 0\}$, mediante

eq: 16.1.aa

$$(7.1.8) \quad h = \frac{(1 + |w|^2) \sum_{j=1}^n dw^j \otimes d\bar{w}^j - \sum_{j,h=1}^n \bar{w}^j w^h dz^j \otimes d\bar{w}^h}{(1 + |w|^2)^2}.$$

Si ottiene una metrica Riemanniana ponendo $g = \text{Re } h$.

Esempio 7.1.8. Possiamo considerare lo spazio proiettivo reale $\mathbb{R}P^n$ come una sottovarietà differenziabile dello spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}P^n$. La restrizione ad $\mathbb{R}P^n$ della metrica di Fubini-Study definisce una metrica $\mathbf{SO}(n+1)$ -invariante su $\mathbb{R}P^n$. La sua espressione, nelle coordinate locali $y^i = x^i/x^0$ di $U_0 = \{x^0 \neq 0\}$, è

$$(7.1.9) \quad g = \frac{(1 + |y|^2) \sum_{i=1}^n dy^i \otimes dy^i - \sum_{i,j=1}^n y^i y^j dy^i \otimes dy^j}{(1 + |y|^2)^2}.$$

¹La forma della metrica è particolarmente semplice perché le coordinate y^i sono conformi.

es: 16.1.3

Esempio 7.1.9. Se \mathbf{G} è un gruppo di Lie ed \mathbf{H} un suo sottogruppo compatto, possiamo definire su $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ una metrica Riemanniana \mathbf{G} -invariante. Sia $\mathbf{o} = [H]$ il punto base di M . Per il teorema di Haar sull'esistenza di misure invarianti sui gruppi compatti, possiamo definire su $T_{\mathbf{o}}M$ un prodotto scalare $g_{\mathbf{o}}$ per cui gli $h_* = dL_h : T_{\mathbf{o}}M \rightarrow T_{\mathbf{o}}M$, per $h \in \mathbf{H}$, siano isometrie. Se $p = a \cdot \mathbf{o}$ per un $a \in \mathbf{G}$, poniamo.

$$g(a_*X_{\mathbf{o}}, a_*Y_{\mathbf{o}}) = g_{\mathbf{o}}(X_{p_0}, Y_{p_0})$$

Questa è una buona definizione, perché, se $b = ah$ con $h \in \mathbf{H}$, allora

$$g((ah)_*X_{\mathbf{o}}, (ah)_*Y_{\mathbf{o}}) = g_{\mathbf{o}}(h_*X_{p_0}, h_*Y_{p_0}) = g_{\mathbf{o}}(X_{p_0}, Y_{p_0}).$$

Definizione 7.1.10. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie, $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ un suo spazio omogeneo e g una metrica Riemanniana su M . Se g è \mathbf{G} -invariante, diciamo che (M, g) è uno spazio Riemanniano \mathbf{G} -omogeneo.

Esempio 7.1.11. Ogni gruppo di Lie compatto \mathbf{G} ammette una metrica Riemanniana invariante sia rispetto alle traslazioni a destra che rispetto alle traslazioni a sinistra. Possiamo infatti considerare \mathbf{G} come uno spazio omogeneo rispetto all'azione transitiva

eq: 16.1.7

$$(7.1.10) \quad (\mathbf{G} \times \mathbf{G}) \times \mathbf{G} \ni ((a, b), x) \longrightarrow axb^{-1} \in \mathbf{G}.$$

Il sottogruppo di isotropia di e è $\Delta_{\mathbf{G}} = \{(a, a) \mid a \in \mathbf{G}\}$. Per l'Esempio ^{es: 16.1.3} 7.1.9, \mathbf{G} ammette una metrica g invariante per l'azione di $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$, cioè invariante sia a destra che a sinistra.

Supponiamo che il gruppo \mathbf{G} sia un gruppo semisemplice compatto. Allora la forma di Killing

eq: 16.1.8

$$(7.1.11) \quad \kappa_{\mathfrak{g}}(A, B) = \text{traccia}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(A) \cdot \text{ad}_{\mathfrak{g}}(B))$$

è definita negativa. Otteniamo una metrica Riemanniana \mathbf{G} -invariante sia a sinistra che a destra ponendo

eq: 16.1.9

$$(7.1.12) \quad g(X_a^*, Y_a^*) = -\kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

dove abbiamo indicato con X^*, Y^* i campi di vettori invarianti a sinistra associati ad $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Analogamente, se \mathbf{G} è un sottogruppo compatto di $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$, la forma quadratica

$$(7.1.13) \quad g_e(X, Y) = -\text{traccia}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$$

è definita positiva ed otteniamo una metrica Riemanniana invariante su \mathbf{G} definendo

$$(7.1.14) \quad g(X_a^*, Y_a^*) = -\text{traccia}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Esempio 7.1.12. Se $1 < p < m$, la forma

eq: 16.1.15

$$(7.1.15) \quad g = \sum_{i=1}^p dx^i \otimes dx^i - \sum_{i=p+1}^m dx^i \otimes dx^i.$$

definisce una metrica pseudo-Riemanniana su \mathbb{R}^m .

Esempio 7.1.13. Consideriamo su \mathbb{R}^{m+1} la metrica pseudo-Riemanniana

$$h = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^m dx^i \otimes dx^i.$$

Il pullback di h su $M = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x^0 = (1 + \sum_{i=1}^m |x^i|^2)^{1/2}\}$ definisce una metrica Riemanniana g , che è la metrica standard dello spazio iperbolico di Lobacevski di dimensione n . Indichiamo con K la matrice

$$K = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $\mathbf{O}(1, n) = \{a \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t a K a = K\}$ il gruppo delle trasformazioni lineari di \mathbb{R}^{m+1} che lasciano invariata la K . Posto $e_0 = {}^t(1, 0, \dots, 0) \in M$,

$$\mathbf{O}_+(1, n) = \{a \in \mathbf{O}(1, n) \mid {}^t e_0 K a e_0 > 0\}$$

è un sottogruppo normale di indice due di $\mathbf{O}(1, n)$, che opera transitivamente su M e lascia invariata la metrica Riemanniana g . Lo stabilizzatore di e_0 in $\mathbf{O}_+(1, n)$ è un sottogruppo compatto, isomorfo ad $\mathbf{O}(n)$. Questa costruzione è dunque un caso particolare di quella dell'Esempio 7.1.9. es. 16.1.3

Esempio 7.1.14. Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie semisemplice. Per un criterio di Cartan, la semisemplicità è equivalente al fatto che la forma di Killing

$$(7.1.16) \quad \kappa_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{traccia}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)), \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

sia non degenera sull'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} . Nota che, se \mathbf{G} non è compatto, la forma di Killing è indefinita. La

$$(7.1.17) \quad g(X_a^*, Y_a^*) = -\kappa(X, Y), \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{g}$$

definisce allora una metrica pseudo-Riemanniana su \mathbf{G} .

7.2. Estensione della metrica ai fibrati tensoriali

Sia g una forma bilineare simmetrica, definita su uno spazio vettoriale reale V , di dimensione finita m . Risulta allora univocamente definita una forma bilineare simmetrica, che denoteremo ancora con g , sulla potenza tensoriale k -esima $V^{\otimes k}$ e che, sulle coppie di tensori di rango uno dà

$$g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, w_1 \otimes \cdots \otimes w_k) = g(v_1, w_1) \cdots g(v_k, w_k).$$

Fissiamo una base e_1, \dots, e_m di V , poniamo $g_{i,j} = g(e_i, e_j)$ e siano $\alpha, \beta \in V^{\otimes k}$ con $\alpha = \sum_{i_1, \dots, i_k} \alpha^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$, $\beta = \sum_{j_1, \dots, j_k} \beta^{j_1, \dots, j_k} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k}$. Allora

$$g(\alpha, \beta) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k}} g_{i_1, j_1} \cdots g_{i_k, j_k} \alpha^{i_1, \dots, i_k} \beta^{j_1, \dots, j_k}.$$

Se g è non degenera, l'applicazione lineare $B_g : V \rightarrow V^*$ ad essa associata è un isomorfismo. Utilizzando la B_g , possiamo definire una forma bilineare simmetrica su V^* ponendo

$$g(\xi, \eta) = g(B_g^{-1}(\xi), B_g^{-1}(\eta)), \quad \forall \xi, \eta \in V^*.$$

Se indichiamo con $(g^{i,j})$ l'inversa della matrice $(g_{i,j})$, otteniamo che

$$g(\xi, \eta) = \sum_{i,j} g^{i,j} \xi_i \eta_j,$$

ove $\xi = \sum_i \xi_i e^i$, $\eta = \sum_i \eta_i e^i$ per la base duale e^1, \dots, e^m in V^* di e_1, \dots, e_m .

Possiamo quindi definire il prodotto di tensori h -covarianti e k -controvarianti

$$\alpha = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_h \\ j_1, \dots, j_k}} \alpha_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_h} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_k},$$

$$\beta = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_h \\ j_1, \dots, j_k}} \beta_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_h} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_k},$$

mediante

$$g(\alpha, \beta) = \sum g_{i_1, i'_1} \dots g_{i_h, i'_h} g^{j_1, j'_1} \dots g^{j_k, j'_k} \alpha_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} \beta_{j'_1, \dots, j'_k}^{i'_1, \dots, i'_h}.$$

Osserviamo ancora che le applicazioni

$$T^{h,k}V \ni \alpha \longrightarrow g_{i_1, j_1+k} \dots g_{i_h, j_h+k} \alpha_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_h+k} \in T^{0, h+k}V,$$

$$T^{h,k}V \ni \alpha \longrightarrow g^{j_1, i_1+1} \dots g^{j_k, i_k+1} \alpha_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_h+k} \in T^{h+k, 0}V$$

sono isomorfismi lineari che preservano le estensioni della g .

Tutte queste considerazioni si estendono in modo ovvio ai tensori definiti su una varietà pseudo-Riemanniana (M, g) .

7.3. Geodetiche e distanza Riemanniana

Sia (M, g) una varietà Riemanniana, su cui abbiamo fissato la connessione di Levi-Civita. Useremo la notazione $\langle v|w \rangle = g(v, w)$ e $\|v\| = \sqrt{g(v, v)} \geq 0$ se $v, w \in T_pM$.

Sia $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], M)$ una curva differenziabile.

Definizione 7.3.1. La *lunghezza* $L(\gamma)$ e l'*energia*, o *azione* $E(\gamma)$ di γ sono definite dagli integrali:

$$(7.3.1) \quad L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

$$(7.3.2) \quad E(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt.$$

Se $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ per ogni $t \in [a, b]$ diciamo che γ è *parametrizzata per lunghezza d'arco*. In questo caso $t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ per ogni $a \leq t_1 < t_2 \leq b$.

Queste definizioni si estendono in modo ovvio al caso in cui γ sia di classe \mathcal{C}^1 a tratti.

Indichiamo con $\mathcal{C}_t^1([a, b], M)$ l'insieme di tutte le curve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ che sono di classe \mathcal{C}^1 a tratti; ricordiamo che ciò significa che γ è un'applicazione continua e che possiamo trovare una partizione

$$t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b$$

dell'intervallo $[a, b]$ tale che ciascuna delle curve

$$[t_{i-1}, t_i] \ni t \rightarrow \gamma(t) \in M$$

sia differenziabile di classe \mathcal{C}^1 . Indichiamo con $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1([a, b], a, b; M, p, q)$ il sottoinsieme di $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1([a, b], M)$ che consiste delle curve γ che hanno punto iniziale $\gamma(a) = p$ e punto finale $\gamma(b) = q$.

Dalle formule di cambiamento di variabile negli integrali ricaviamo:

Lemma 7.3.2. *La lunghezza di una curva non dipende dalla sua parametrizzazione.*

Supponiamo che M sia connessa.

Definizione 7.3.3. La *distanza Riemanniana* tra due punti $p, q \in M$ è

$$(7.3.3) \quad d(p, q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], 0, 1; M, p, q)\}.$$

prop: 17a518

Proposizione 7.3.4. *Fissiamo $r_0 > 0$ in modo tale che $N_0(p_0) = \{v \in T_{p_0}M \mid \|v\| < r_0\}$ sia un intorno normale dell'origine in $T_{p_0}M$ ed $N_{p_0} = \text{Exp}_{p_0}(N_0(p_0))$ il corrispondente intorno normale di p_0 in M . Allora*

eq: 17a64

$$(7.3.4) \quad d(p_0, \text{Exp}_{p_0}(v)) = \|v\|, \quad \forall v \in N_0(p_0).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], N_{p_0})$ un cammino semplice con $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(1) = \text{Exp}_{p_0}(v)$, con $v \neq 0$. Risulta allora determinato un cammino $\alpha \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^1([0, 1], N_0(p_0))$ per cui $\gamma(t) = \text{Exp}_{p_0}(\alpha(t))$, con $\alpha(0) = 0$ ed $\alpha(1) = v$. Per $0 < t \leq 1$ decomponiamo $\dot{\alpha}(t)$ nella sua componente radiale $\dot{\alpha}_r(t) = \frac{(\dot{\alpha}(t)|\alpha(t))\alpha(t)}{\|\alpha(t)\|^2}$ e la sua componente normale alla direzione radiale $\dot{\alpha}_n(t) = \dot{\alpha}(t) - \dot{\alpha}_r(t)$. Abbiamo

$$\dot{\gamma}(t) = \text{Exp}_{p_0}(\dot{\alpha}(t)) = \text{Exp}_{p_0}(\dot{\alpha}_r(t)) + \text{Exp}_{p_0}(\dot{\alpha}_n(t)).$$

Per la Proposizione [prop: 17a511](#) ed il [Lemma 6.4.3](#) i vettori $\text{Exp}_{p_0}(\dot{\alpha}_r(t))$ ed $\text{Exp}_{p_0}(\dot{\alpha}_n(t))$ sono ortogonali. Inoltre $\|\text{Exp}_{p_0}(\dot{\alpha}_r(t))\| = \|\dot{\alpha}_r(t)\|$, e $\|\text{Exp}_{p_0}(\dot{\alpha}_n(t))\| = 0$ se e soltanto se $\dot{\alpha}_n(t) = 0$. È poi

$$\int_0^1 \|\dot{\alpha}_r(t)\| dt = \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} \|\alpha(t)\| \right| dt \geq \int_0^1 \frac{d}{dt} \|\alpha(t)\| dt = \|v\|.$$

Otteniamo perciò

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\| dt \geq \int_0^1 \|\text{Exp}_{p_0}(\dot{\alpha}_r(t))\| dt \geq \|v\|$$

e vale l'uguaglianza solo quando $\dot{\alpha}_n(t)$ sia identicamente nulla, cioè quando γ sia la geodetica $\text{Exp}_{p_0}(tv)$. Per concludere la dimostrazione basta osservare che ogni arco di classe $\mathcal{C}_{\text{tr}}^1$ ne contiene uno semplice con gli stessi estremi, che ha quindi lunghezza inferiore, e che ogni cammino che congiunga p_0 ad un punto non contenuto in N_{p_0} ha, per la prima parte della dimostrazione, lunghezza maggiore o uguale ad r_0 . \square

Per la Proposizione [prop: 17a518](#) le geodetiche minimizzano localmente la lunghezza d'arco. Abbiamo cioè

Corollario 7.3.5. *Se $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ è una geodetica, allora per ogni $t_0 \in I$ possiamo trovare $\epsilon_0 > 0$ tale che $d(\gamma(t), \gamma(t_0)) = \|\dot{\gamma}(t_0)\| \cdot |t - t_0|$ per $|t| < \epsilon_0$.*

Da questa proprietà delle geodetiche ricaviamo:

Teorema 7.3.6. $M \times M \ni (p, q) \rightarrow d(p, q)$ è una distanza su M . La topologia indotta da d coincide con la topologia di varietà di M . \square

7.4. Il funzionale dell'energia

Mostriamo in questo paragrafo che le geodetiche di una varietà Riemanniana sono i punti stazionari del funzionale dell'energia.

Lemma 7.4.1. Per ogni curva $\gamma \in \mathcal{C}_r^1([a, b], M)$ vale la disuguaglianza:

$$\text{eq:gd4a5} \quad (7.4.1) \quad L(\gamma)^2 \leq (b-a)E(\gamma).$$

In (7.4.1) vale l'uguaglianza se e soltanto se $\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{costante}$.

DIMOSTRAZIONE. La disuguaglianza di Hölder dà

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq \left(\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b dt \right)^{1/2} = (b-a)^{1/2} E(\gamma)^{1/2}$$

e vale l'uguaglianza se e soltanto se $\|\dot{\gamma}(t)\|$ è costante. \square

Corollario 7.4.2. Se $\gamma \in \mathcal{C}_r^1([a, b], M)$ è parametrizzata per lunghezza d'arco, allora $E(\gamma)$ è minimo di $\{E(\gamma \circ \phi)\}$, al variare di ϕ tra i diffeomorfismi di $[a, b]$. \square

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, Ω un aperto di \mathbb{R}^n ed

$$F : [a, b] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \ni (t, x, \xi) \rightarrow F(t, x, \xi) \in \mathbb{R}$$

una funzione di classe \mathcal{C}^1 . Le equazioni di Eulero-Lagrange di un funzionale

$$(7.4.2) \quad \Phi(\psi) = \int_a^b F(t, \psi(t), \dot{\psi}(t)) dt, \quad \psi \in \mathcal{C}^1([a, b], \Omega)$$

sono date da:

$$(7.4.3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \xi^i} - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Proposizione 7.4.3. Le equazioni di Eulero-Lagrange per il funzionale dell'energia $E(\gamma)$ sono date da

$$(7.4.4) \quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0.$$

Le geodetiche della connessione di Levi-Civita di una varietà Riemanniana sono quindi gli estremali del funzionale dell'energia.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], M)$ e che il suo supporto $\gamma([a, b])$ sia contenuto in un aperto coordinato (U, \mathbf{x}) . Il funzionale $E(\gamma)$ è definito, nelle coordinate locali, dalla

$$F(t, x, \xi) = \|\xi\|_g^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(x) \xi^i \xi^j.$$

Otteniamo perciò per le relative equazioni di Eulero-Lagrange:

$$2 \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n g_{i,j}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t) \right) - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial g_{j,k}(\gamma(t))}{\partial x^i} \dot{\gamma}^j(t) \dot{\gamma}^k(t) = 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, n;$$

quindi

$$(*) \quad 2 \sum_{j=1}^n g_{i,j}(\gamma) \ddot{\gamma}^j + 2 \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial g_{i,j}(\gamma)}{\partial x^k} \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial g_{j,k}(\gamma(t))}{\partial x^i} \dot{\gamma}^j(t) \dot{\gamma}^k(t) = 0$$

per $i = 1, \dots, n$

I simboli di Christoffel per la connessione di Levi-Civita sono

$$\Gamma_{j,k}^i = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n g^{i,h} \left\{ \frac{\partial g_{h,j}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{h,k}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^h} \right\}.$$

Quindi la (*) è l'equazione

$$\ddot{\gamma}^i + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{j,k}^i(\gamma) \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, n$$

delle geodetiche della connessione di Levi-Civita della metrica g . □

Proposizione 7.4.4 (Lemma di Gauss). *Condizione necessaria e sufficiente affinché una carta coordinata (U, x) con centro in p_0 sia un suo intorno normale, e le x^i coordinate normali, è che $x(U)$ sia stellato rispetto all'origine ed il tensore della metrica soddisfi*

eq: 17a61

$$(7.4.5) \quad \sum_{j=1}^m g_{i,j}(p) x^j(p) = x^i(p), \quad \forall p \in U.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un sistema di coordinate normali in p_0 , per la connessione di Levi-Civita di (M, g) . Fissata una base g_{p_0} -ortonormale e_1, \dots, e_m di $T_{p_0}M$, la carta locale è definita da

$$N_0(p_0) \ni (x^1, \dots, x^m) \longrightarrow \text{Exp}_{p_0}(x^1 e_1 + \dots + x^m e_m) \in N_{p_0}.$$

Le geodetiche uscenti da p_0 sono, in N_{p_0} , le curve integrali del campo radiale $\sum_{i=1}^m x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, ed il trasporto parallelo lungo le geodetiche preserva l'ortonormalità. Valgono perciò le (7.4.5) in un sistema di coordinate normali.

Viceversa, se (U, x) è una carta coordinata con centro in p_0 per cui valga la (7.4.5), per ogni $x \in x(U)$ la $t \rightarrow tx$ rappresenta nelle coordinate il cammino di lunghezza minima che congiunge p_0 al punto di coordinate x . Inoltre la velocità lungo tale cammino è costante ed uguale a $\|x\|$. Infatti, se $x(\gamma(t)) = tx$,

$$g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \sum_{i,j} g_{i,j}(tx) x^i x^j = \sum_{i=1}^m x^i x^i = \|x\|^2.$$

□

7.5. Varietà di Riemann compatte

Teorema 7.5.1. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta. Ogni curva continua $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], M)$ è omotopa, in un'omotopia che lascia fissi i suoi estremi $p_0 = \gamma(0)$ e $p_1 = \gamma(1)$, ad una geodetica. Essa può essere scelta come una curva di lunghezza minima nella classe $[\gamma]$ di γ in $\pi([0, 1], 0, 1; M, p_0, p_1)$.*

DIMOSTRAZIONE. Gli intorni normali sono contrattili e quindi due archi qualsiasi, che abbiano gli stessi estremi e siano contenute in un intorno normale, sono omotopi in un'omotopia con gli estremi fissi. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{1 \leq i \leq k}$ un ricoprimento finito di M mediante aperti semplici e convessi.

Fissiamo un numero reale positivo r tale che, per ogni $p \in M$ la palla $B(p, r) = \{q \in M \mid d(p, q) < r\}$ sia contenuta in un aperto del ricoprimento \mathcal{U} . Mostriamo che ciò è possibile. Ragioniamo per assurdo. Se ciò non fosse vero, per ogni intero positivo ν potremmo trovare un punto p_ν in M tale che $B(p_\nu, 2^{-\nu})$ non sia contenuto in nessun aperto del ricoprimento \mathcal{U} . Poiché M è compatto, possiamo estrarre dalla $\{p_\nu\}$ una sottosuccessione $\{p_{k_\nu}\}$ convergente ad un punto $p_\infty \in M$. È $p_\infty \in U_{i_0}$ per qualche i_0 e $B(p_\infty, r_0) \subset U_{i_0}$ per qualche $r_0 > 0$. Se $q \in B(p_{k_\nu}, 2^{-k_\nu})$,

$$d(q, p_\infty) < d(p_\infty, p_{k_\nu}) + 2^{-k_\nu} < r_0 \quad \text{per } \nu \gg 1$$

ci dà una contraddizione.

Siano $p_0, p_1 \in M$ ed α una classe di omotopia in $\pi([0, 1], 0, 1; M, p_0, p_1)$. Sia² $\mu = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\}$ e $\{\gamma_n\}$ una successione in α con $\{L(\gamma_n)\}$ decrescente a μ .

Se $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ è una partizione di $[0, 1]$ per cui l'arco di γ_n di estremi $\gamma_n(t_{j-1}), \gamma_n(t_j)$ sia contenuto in un aperto $U_{j(i,n)}$ di \mathcal{U} , la curva γ'_n formata dagli archi geodetici in $U_{j(i,n)}$ di estremi $\gamma_n(t_{j-1}), \gamma_n(t_j)$ è omotopa a γ_n in $\pi([0, 1], 0, 1; M, p_0, p_1)$ ed ha lunghezza $L(\gamma'_n) \leq L(\gamma_n)$. Possiamo quindi scegliere la nostra successione minimizzante $\{\gamma_n\} \subset \alpha$ con $\gamma_n \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^\infty([0, 1], M)$ somma di archi geodetici, e, a meno di riparametrizzazione, con $\|\dot{\gamma}_n(t)\| = \mu_n$ costante. Osserviamo che $\mu_n = L(\gamma_n) \leq \mu_0 = L(\gamma_0)$ e $\mu_n \rightarrow \mu$.

Scegliamo un intero positivo N con $N\mu_0 r < 1$ e consideriamo la partizione $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ con $t_i = i/N$. Poiché le coppie di punti $\gamma_n(t_{i-1}), \gamma_n(t_i)$, avendo distanza inferiore ad r , appartengono ad uno stesso aperto di \mathcal{U} , possiamo supporre che le γ_n siano somme di archi geodetici di estremi $\gamma_n(t_{i-1}), \gamma_n(t_i)$ contenuti ciascuno in un aperto di \mathcal{U} .

Passando ad una sottosuccessione, possiamo supporre che per ogni $i = 1, \dots, N-1$ la successione $\{\gamma_n(t_i)\}$ converga ad un punto $q_i \in M$ e che, posto $q_0 = p_0$ e $q_N = p_1$, per ogni $1 \leq i \leq N$, gli archi geodetici di estremi $\{\gamma_n(t_{i-1})\}, \{\gamma_n(t_i)\}$, per ogni n , e quello di estremi q_{i-1}, q_i siano tutti contenuti nello stesso aperto $U_{j(i)}$ di \mathcal{U} . Per ogni $i = 1, \dots, N$, è

$$d(q_{i-1}, q_i) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} d(\gamma_\nu(t_{i-1}), \gamma_\nu(t_i)) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mu_\nu(t_i - t_{i-1}) = \mu(t_i - t_{i-1}) = N^{-1}\mu < r.$$

²La lunghezza di una curva continua $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], M)$ in uno spazio metrico (M, d) è l'estremo inferiore delle somme $\sum_{i=1}^N d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))$ al variare di $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$ tra tutte le partizioni finite dell'intervallo $[0, 1]$.

Possiamo perciò costruire una curva $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{tr}}^\infty([0, 1], M)$ con $\|\dot{\gamma}(t)\|$ costante, in modo che la restrizione di γ a $[t_{i-1}, t_i]$ sia l'arco di geodesica in U_{j_i} che congiunge q_{i-1} a q_i . La γ così ottenuta appartiene alla classe di omotopia α e $L(\gamma) = \mu$. Necessariamente $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ ed è quindi una geodetica. Infatti, se γ fosse singolare in uno dei t_i , con $1 \leq i < N$, potremmo ottenere una curva di lunghezza strettamente inferiore sostituendo al suo arco di estremi $\gamma(t_i - (2N)^{-1})$, $\gamma(t_i + (2N)^{-1})$ il corrispondente arco dell'unica geodetica che congiunge i due punti in un aperto del ricoprimento \mathcal{U} che li contiene. \square

Corollario 7.5.2. *Se M è una varietà Riemanniana connessa e compatta, due punti qualsiasi p, q di M possono essere congiunti con una geodetica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ con $L(\gamma) = d(p, q)$.*

Corollario 7.5.3. *Se M è una varietà Riemanniana compatta, per ogni $p \in M$ l'applicazione Exp_p è definita su tutto $T_p M$ ed è surgettiva.*

7.6. Il teorema di Hopf-Rinow

Definizione 7.6.1. Una varietà affine M si dice *geodeticamente completa* se ogni geodetica $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, M)$ è la restrizione all'intervallo I di una geodetica definita su \mathbb{R} .

Teorema 7.6.2. *Sia M una varietà Riemanniana, e sia d la relativa distanza. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (1) M , con la distanza d , è uno spazio metrico completo;
- (2) i sottoinsiemi chiusi e limitati (rispetto a d) di M sono compatti;
- (3) esiste $p \in M$ tale che Exp_p è definita su tutto $T_p M$;
- (4) M è geodeticamente completa rispetto alla connessione di Levi-Civita.

Inoltre, ognuna delle (1), (2), (3), (4) implica:

- (5) *due punti qualsiasi $p, q \in M$ possono essere congiunti da una geodetica di lunghezza $d(p, q)$.*

DIMOSTRAZIONE. In primo luogo mostriamo che, se Exp_p è definita su tutto $T_p M$, allora ogni $q \in M$ può essere congiunto a p da una geodetica di lunghezza $d(p, q)$. In particolare, questo dimostra che (4) \implies (5).

Sia $r = d(p, q)$ e sia $\rho > 0$ tale che ogni $p' \in M$ con $d(p, p') \leq \rho$ è congiunto a p da un'unica geodetica di lunghezza $d(p, p')$.

Se $r \leq \rho$, per la scelta di ρ vi è un'unica geodetica di lunghezza r che congiunge p a q , e quindi la nostra affermazione è senz'altro verificata.

Consideriamo quindi il caso in cui $r > \rho$.

Poiché $\partial B(p, \rho) = \{x \in M \mid d(p, x) = \rho\}$ è compatto, possiamo fissare un punto $p_0 \in \partial B(p, \rho)$ tale che $d(q, \partial B(p, \rho)) = d(p_0, q)$. Vi è allora un unico vettore $v \in T_p M$ con $g(v, v) = 1$ ed $\text{Exp}_p(\rho v) = p_0$. Consideriamo la geodetica

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow \gamma(t) = \text{Exp}_p(t v) \in M.$$

Vogliamo dimostrare che $\gamma(r) = q$. In questo caso $\gamma|_{[0, r]}$ è la geodetica di lunghezza minima che congiunge p a q .

Sia

$$I = \{t \in [0, r] \mid d(\gamma(s), q) = r - s \quad \forall s \in [0, t]\}.$$

Dobbiamo dimostrare che $r \in I$. Osserviamo che I è chiuso e contiene $[0, \rho]$.

Mostriamo che I è anche aperto. Sia $t_0 \in I$. Se $t_0 = r$, allora $I = [0, r]$ e abbiamo finito. Consideriamo allora un $t_0 \in I$ con $t_0 < r$. Sia $p_1 = \gamma(t_0)$ e sia $\rho_1 > 0$ tale che ogni $x \in M$ con $d(p_1, x) \leq \rho_1$ sia congiunto a p_1 da un'unica geodetica di lunghezza $d(p_1, x)$.

Se $d(p_1, q) \leq \rho_1$, la spezzata ottenuto congiungendo la geodetica $\gamma|_{[0, t_0]}$ con l'unica geodetica (parametrizzata per lunghezza d'arco) che congiunge p_1 a q ha lunghezza r ed è quindi una geodetica di lunghezza r che congiunge p a q .

Se invece $d(p_1, q) > \rho_1$, fissiamo un punto p_2 su $\partial B(p_1, \rho_1)$ a distanza minima da q . Allora

$$d(p, p_2) \geq d(p, q) - d(q, p_1) = r - d(p, p_1).$$

Ogni curva γ' da p_1 a q interseca $\partial B(p_1, \rho_1)$ in un punto $\gamma'(t)$. Quindi:

$$\begin{aligned} L(\gamma') &\geq d(\gamma(t), p_1) + d(\gamma(t), q) \\ &= \rho_1 + d(\gamma(t), q) \\ &\geq \rho_1 + d(p_2, q). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi anche

$$d(q, p_1) \geq \rho_1 + d(q, p_2)$$

e, per la disuguaglianza triangolare, vale l'uguaglianza. Poiché

$$d(\gamma(t_0), q) = d(p_1, q) = r - t_0,$$

otteniamo

$$d(p, p_1) \geq r - (r - t_0 - \rho_1) = t_0 - \rho_1.$$

Da questo segue che la $\gamma(t)$, per $t_0 \leq t \leq t_0 + \rho_1$, coincide con l'unica geodetica che congiunge p_1 a p_2 . Inoltre per quanto osservato in precedenza, risulterà allora $d(\gamma(t), q) = r - t$ anche per $t_0 \leq t \leq t_0 + \rho_1$. Dunque t_0 è punto interno a I .

Da questo segue che $I = [0, r]$ e la nostra affermazione è dimostrata. Completiamo ora la dimostrazione delle altre implicazioni del teorema.

(4) \Rightarrow (3) è banale. (3) \Rightarrow (2) Se A è un sottoinsieme limitato di M , è $A \subset \overline{B(p, R)}$ per qualche $R > 0$ e quindi è un sottoinsieme del compatto $\text{Exp}_p(\{v \in T_p M \mid g_p(v, v) \leq R\})$. La (2) segue quindi dal fatto che un sottoinsieme chiuso di un compatto è compatto. (2) \Rightarrow (1) Ogni successione di Cauchy $\{p_n\} \subset M$ è limitata e quindi la chiusura della sua immagine è compatta. Esiste perciò una sottosuccessione convergente e dunque la successione $\{p_n\}$ stessa è convergente. (1) \Rightarrow (4) Sia $p \in M$ e consideriamo la geodetica $t \rightarrow \gamma(t) = \text{Exp}_p(tv)$. Sia I il suo intervallo massimale di definizione. Se fosse $\sup I = T_0 < +\infty$, potremmo scegliere una successione $\{t_n\}$ tale che $t_n \nearrow T_0$. Poiché $g(t_n, t_m) \leq g_p(v, v) |t_n - t_m|$, la $\{\gamma(t_n)\}$ è una successione di Cauchy. Per ipotesi ammette un limite $p_0 \in M$. Poiché $g_p(\dot{\gamma}(t_n), \dot{\gamma}(t_n)) = g_p(v, v)$ per ogni n , a meno di passare a una sottosuccessione possiamo fare in modo che $\dot{\gamma}(t_n) \rightarrow v_\infty \in T_{p_0}$ in TM . Allora $\text{Exp}_{p_0}(t - T_0)$ è definita in un intorno di T_0 e coincide con γ nei punti in cui entrambi sono definite. Ciò contraddice la scelta di

T_0 e mostra quindi che $T_0 = +\infty$. Analogamente si dimostra che la γ è definita per ogni $t < 0$. Ciò completa la dimostrazione. \square

7.7. Varietà Riemanniane con curvatura negativa

Dimostriamo innanzi tutto un risultato che collega i campi di Jacobi alla curvatura sezionale.

Proposizione 7.7.1. *Siano $p \in M$, $v, w \in T_p M$. Consideriamo, lungo la geodetica $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, il campo di Jacobi $J(t) = (d\text{Exp}_p(tv))(tw)$. Valgono le formule:*

eq:16.13.1

$$(7.7.1) \quad \|J(t)\|^2 = t^2 \|w\|^2 - \frac{1}{3}g(R(v, w)v, w)t^4 + o(t^4),$$

$$(7.7.2) \quad \|J(t)\| = t\|w\| - \frac{1}{6} \frac{g(R(v, w)v, w)}{\|w\|} t^3 + o(t^4), \quad \text{per } t \geq 0.$$

In particolare, se $\|v\| = 1$, $\|w\| = 1$ e $g(v, w) = 0$, detto σ il piano generato da v e w , abbiamo

eq:z17b73

$$(7.7.3) \quad \|J(t)\| = t - \frac{1}{6}K(\sigma)t^3 + o(t^4), \quad \text{per } t \geq 0,$$

ove $K(\sigma)$ è la curvatura sezionale.

DIMOSTRAZIONE. Calcoliamo lo sviluppo di Taylor di $f(t) = g(J(t), J(t))$ nell'origine. Ricordiamo che J verifica le condizioni iniziali $J(0) = 0$, $\dot{J}(0) = w$. Indicando con J, J', J'', \dots le successive derivate covarianti di J lungo γ abbiamo:

$$\begin{aligned} f(t) &= g(J, J), \\ \frac{d}{dt}f(t) &= 2g(J', J), \\ \frac{d^2}{dt^2}f(t) &= 2g(J'', J) + 2g(J', J'), \\ \frac{d^3}{dt^3}f(t) &= 2g(J''', J) + 6g(J'', J'), \\ \frac{d^4}{dt^4}f(t) &= 2g(J'''', J) + 8g(J''', J') + 6g(J'', J''). \end{aligned}$$

Derivando l'equazione di Jacobi

$$J'' = R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma}$$

otteniamo poi

$$J''' = \frac{D}{dt}(R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma}) = \frac{DR}{dt}(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} + R(\dot{\gamma}, J')\dot{\gamma}.$$

Tenuto conto delle condizioni iniziali e dell'equazione di Jacobi abbiamo

$$J(0) = 0, \quad J'(0) = w, \quad J''(0) = 0, \quad J'''(0) = R(v, w)v,$$

e quindi

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2\|w\|^2, \quad f'''(0) = 0, \quad f''''(0) = 8g(R(v, w)v, w).$$

Sostituendo nella formula del polinomio di Taylor, otteniamo la tesi della proposizione. \square

La ^{eq:z17b73}(7.7.3) esprime, in forma infinitesima, il modo in cui si comportino le geodetiche uscenti da p , immagini mediante l'esponenziale delle semirette uscenti dall'origine di T_pM . Rispetto ai raggi Euclidei di T_pM esse si avvicinano se la curvatura sezionale del piano $\langle v, w \rangle$ è positiva, si allontanano se essa è negativa.

Definizione 7.7.2. Diciamo che una varietà Riemanniana (M, g) ha *curvatura negativa* (rispettivamente *strettamente negativa*) se $K(\alpha) \leq 0$ (rispettivamente $K(\alpha) < 0$) per ogni 2-piano $\alpha \subset T_pM$, per ogni $p \in M$.

Perciò, se M ha curvatura (sezionale) negativa, per un campo di Jacobi J avremo:

$$(7.7.4) \quad g(\ddot{J}, J) = -g(R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma}, J) = -R(\dot{\gamma}, J, \dot{\gamma}, J) \leq 0.$$

Vale il seguente:

Teorema 7.7.3. *Supponiamo che M abbia curvatura sezionale negativa. Sia $p \in M$ ed $N_0(p)$ un intorno normale di 0 in T_pM . Allora, per ogni $v \in N_0(p)$ e $w \in T_pM$,*

$$\text{eq:AKI} \quad (7.7.5) \quad g_{\exp_p(v)}(d \exp_p(v)(w), d \exp_p(v)(w)) \geq g_p(w, w).$$

In particolare, se $\gamma_0 \in \mathcal{C}^1([a, b], N_0(p))$, allora

$$\text{eq:AKII} \quad (7.7.6) \quad L(\gamma_0) = \int_a^b \sqrt{g_p(\dot{\gamma}_0, \dot{\gamma}_0)} dt \leq L(\text{Exp}_p \circ \gamma_0).$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che $J(t) = (d \text{Exp}_p(tv))(tw)$ è un campo di Jacobi lungo $\text{Exp}_p(tv)$. Utilizzando la formula ^{eq:16.13.1}(7.7.1) otteniamo allora che, se la curvatura sezionale del piano $\langle v, w \rangle$ è strettamente negativa,

$$d \exp_p(tv)(w) = \|w\| - \frac{t^2}{6} \frac{g(v, w, v, w)}{\|w\|} + o(t^3) < \|w\| \quad \text{per } 0 < t < t_0$$

se $t_0 > 0$ è sufficientemente piccolo. Il campo J è in ogni punto tangente al piano $\alpha(tv) = \langle \text{Exp}_{p_*}(tv)v, \text{Exp}_{p_*}(tv)(w) \rangle$. Quindi, se la curvatura sezionale fosse nulla lungo la geodetica, avremmo $\ddot{J} = 0$ e quindi in ^{eq:AKI}(7.7.5) varrebbe l'equaglianza.

Per completare la dimostrazione, basterà suddividere la geodetica $\text{Exp}_p(tv)$, definita per $0 \leq t \leq a$, in sottoarchi sufficientemente piccoli di geodetica su ciascuno dei quali la curvatura sezionale di $\alpha(tv)$ sia o strettamente negativa o nulla in tutti i punti interni, in modo da poter applicare per ciascuno di tali sottoarchi il ragionamento precedente, tenendo conto del fatto che, per $t_0 \leq t \leq a$, $\text{Exp}_p(tv) = \text{Exp}_{\text{Exp}_p(t_0v)}((t-t_0)\text{Exp}_{p_*}(t_0v)v)$. \square

Corollario 7.7.4. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana a curvatura sezionale negativa e sia B una palla convessa e semplice di M , in cui le geodetiche minimizzano le distanze tra le coppie di punti. Dato un triangolo in B , i cui lati sono geodetiche $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ di lunghezze a, b, c , con angoli corrispondenti α, β, γ , valgono le:*

$$(7.7.7) \quad a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \leq c^2$$

$$(7.7.8) \quad \alpha + \beta + \gamma \leq \pi.$$

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare la prima disuguaglianza, indichiamo con p_C il vertice comune alle geodetiche γ_a e γ_b . Per due vettori $v_a, v_p \in T_{p_C}M$ abbiamo, a meno di riparametrizzazioni, $\gamma_a(t) = \text{Exp}_{p_C}(tv_a)$, $\gamma_b(t) = \text{Exp}_{p_C}(tv_b)$, per $t \in [0, 1]$, con $a^2 = g_{p_C}(v_a, v_a)$, $b^2 = g_{p_C}(v_b, v_b)$: a e b sono le lunghezze Euclidee, in $(T_{p_C}M, g_{p_C})$, dei segmenti $[0, v_a]$ e $[0, v_b]$. Per la proposizione precedente, la lunghezza c della geodetica γ_c è maggiore o uguale della lunghezza Euclidea della curva $\exp_{p_0}^{-1}\gamma_c$. Questa a sua volta è maggiore o uguale della lunghezza $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$ del segmento $[v_a, v_b]$ di $T_{p_0}M$.

Per dimostrare l'ultima disuguaglianza, costruiamo il triangolo Euclideo con lati di lunghezze a, b, c e siano α', β', γ' i suoi angoli interni, opposti rispettivamente ai lati a, b, c . Abbiamo allora $a^2 + b^2 - 2abc \cos \gamma' = c^2$. Sottraendo questa dalla disuguaglianza che abbiamo appena dimostrato, ricaviamo che $\cos \gamma' \leq \cos \gamma$. Poiché $0 < \gamma, \gamma' < \pi$, questa disuguaglianza equivale a $\gamma \leq \gamma'$. Analogamente otteniamo che $\alpha \leq \alpha'$ e $\beta \leq \beta'$, onde $\alpha + \beta + \gamma \leq \alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$. \square

Teorema 7.7.5. *Una varietà Riemanniana (M, g) con curvatura sezionale negativa non contiene coppie di punti coniugati.*

Se (M, g) è connessa e completa e contiene un punto p_0 privo di punti coniugati, allora $\text{Exp}_{p_0} : T_{p_0} \rightarrow M$ è un rivestimento. In particolare, se M è semplicemente connesso, l'inversa di Exp_{p_0} definisce un diffeomorfismo di M con uno spazio Euclideo.

DIMOSTRAZIONE. Per ^{leg:AKI}(7.7.5), se $p \in M$ e J è un campo di Jacobi lungo la geodetica $\exp_p(tv)$, che si annulli in p , allora $t^{-1}\|J(t)\|$ è crescente per $t > 0$.

Supponiamo ora che (M, g) sia connessa e completa e contenga un punto p_0 privo di punti coniugati. L'applicazione Exp_{p_0} è definita su $T_{p_0}M$ perché abbiamo supposto (M, g) completa e non ha punti critici perché p_0 non ha punti coniugati. Possiamo quindi considerare su $T_{p_0}M$ la metrica Riemanniana $g^* = \text{Exp}_{p_0}^*g$. Anche $(T_{p_0}M, g^*)$ è una varietà Riemanniana completa per il teorema di Hopf-Rinow, perché tutte le geodetiche di g^* passanti per l'origine, che hanno come supporto le rette per l'origine in $T_{p_0}M$, sono geodetiche complete. L'applicazione Exp_{p_0} definisce un'isometria di $(T_{p_0}M, g^*)$ in (M, g) . La sua immagine è aperta per il teorema dell'inversa locale perché Exp_{p_0} non ha punti critici, ed è chiusa perché è un'isometria di uno spazio metrico completo. Poiché abbiamo supposto M connessa, Exp_{p_0} è allora anche surgettiva e definisce perciò un rivestimento, perché ogni aperto semplice convesso di (M, g) è di trivializzazione. \square

Corollario 7.7.6. *Una varietà Riemanniana (M, g) , connessa e semplicemente connessa, e con curvatura sezionale negativa, è diffeomorfa ad uno spazio Euclideo.* \square

Teorema 7.7.7. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa e completa, con curvatura sezionale negativa. Sia \mathbf{K} un gruppo topologico compatto e localmente compatto, che agisce su M come un gruppo di isometrie. Allora \mathbf{K} ha almeno un punto fisso in M .*

DIMOSTRAZIONE. Sia λ la misura di Haar su \mathbf{K} , normalizzata in modo che $\int_{\mathbf{K}} d\lambda = 1$, e d la distanza su M a definita dalla metrica g . Fissiamo un punto $p_0 \in M$ e definiamo su M una funzione continua, ponendo

$$\Psi(p) = \int_{\mathbf{K}} |d(p, kp_0)|^2 d\lambda(k).$$

Osserviamo che $\Psi(kp) = \Psi(p)$ per ogni $k \in \mathbf{K}$. Dico che $\Psi(p)$ ha minimo in M . Infatti, l'orbita $\mathbf{K} \cdot p_0$ è compatta e quindi ha diametro $\delta = \max_{p_1, p_2 \in \mathbf{K}p_0} d(p_1, p_2)$ finito. Quindi, se $d(p, p_0) > 2\delta$,

$$\Psi(p) = \int_{\mathbf{K}} |d(p, kp_0)|^2 d\lambda(k) \geq \int_{\mathbf{K}} |d(p, p_0) - d(p_0, kp_0)|^2 d\lambda(k) > \delta^2 \geq \Psi(p_0).$$

Per l'ipotesi che (M, g) sia completa, la palla chiusa $\bar{B}(p_0, 2\delta) = \{p \in M \mid d(p, p_0) \leq 2\delta\}$ è compatta. Il minimo di $\Psi(q_0)$ di Ψ su $\bar{B}(p_0, 2\delta)$ è anche minimo di Ψ su M . Poiché Ψ è \mathbf{K} -invariante, per dimostrare che q_0 è punto fisso di \mathbf{K} è sufficiente verificare che $\Psi(p) > \Psi(q_0)$ per ogni $p \neq q_0$.

Sia $p \in M$ un punto distinto da q_0 , $k \in \mathbf{K}$ ed α_k l'angolo delle geodetiche uscenti da q_0 e passanti per p e kp_0 , rispettivamente. Per il teorema del coseno è

eq:17astar

$$(*) \quad |d(p, kp_0)|^2 \geq |d(q_0, kp_0)|^2 + |d(p, q_0)|^2 - 2d(q_0, kp_0)d(p, q_0) \cos \alpha_k.$$

Poiché q_0 è punto di minimo per Ψ , indicando con $t \rightarrow q_t$ la geodetica di estremi q_0 e $p = q_1$, abbiamo

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{G}} |d(q_t, kp_0)|^2 d\lambda(k) \Big|_{t=0} = 0.$$

Fissato $k \in \mathbf{K}$, è $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} |d(q_t, kp_0)|^2 = -2d(p, q_0) d(kp_0, q_0) \cos \alpha_k$.

Quindi, differenziando sotto il segno d'integrale, otteniamo

$$\int_{\mathbf{G}} d(q_0, p) \cdot d(q_0, kp_0) \cos \alpha_k d\lambda(k) = 0.$$

Integrando (eq:17astar) (*) membro a membro otteniamo

$$\Psi(p) \geq \Psi(q_0) + |d(p, q_0)|^2.$$

La dimostrazione è completa. \square

Algebre di Clifford e Spinori

8.1. Algebre di Clifford

Indichiamo con \mathbb{k} o il campo dei numeri reali, o quello dei numeri complessi.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita m su \mathbb{k} ed indichiamo con $\mathbf{T}(V) = \bigoplus_{h=0}^{\infty} \mathbf{T}^h(V)$ la sua algebra tensoriale, con $\mathbf{T}^0(V) = \mathbb{k}$, $\mathbf{T}^1(V) = V$ e $\mathbf{T}^{h+1}(V) = V \otimes \mathbf{T}^h(V)$ per $h \geq 1$. Ricordiamo che $\mathbf{T}(V)$ è \mathbb{Z}_+ -graduata ed è caratterizzata dalla proprietà universale:

Proposizione 8.1.1. *È $V \subset \mathbf{T}(V)$ ed ogni applicazione lineare $\phi : V \rightarrow \mathbf{A}$ di V in un'algebra associativa unitaria si estende in modo unico ad un omomorfismo di algebre $\tilde{\phi} : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathbf{A}$.*

Fissiamo una forma bilineare simmetrica

$$\boxed{\text{c111}} \quad (8.1.1) \quad \mathbf{b} : V \times V \ni (v, w) \longrightarrow \mathbf{b}(v, w) \in \mathbb{k}.$$

Sia $\mathbf{J}_{\mathbf{b}}$ l'ideale bilatero di $\mathbf{T}(V)$ generato dagli elementi della forma $v \otimes v + \mathbf{b}(v, v) \cdot 1$, al variare di v in V .

Definizione 8.1.2. L'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$ associata alla forma \mathbf{b} è il quoziente $\mathbf{T}(V)/\mathbf{J}_{\mathbf{b}}$ dell'algebra tensoriale $\mathbf{T}(V)$, rispetto all'ideale bilatero $\mathbf{J}_{\mathbf{b}}$.

Poiché $\mathbf{T}(V)$ è associativa e unitaria, anche $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$ è associativa e unitaria. Indichiamo con

$$\pi : \mathbf{T}(V) \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V) = \mathbf{T}(V)/\mathbf{J}_{\mathbf{b}}$$

la proiezione nel quoziente.

La composizione

$$V \hookrightarrow \mathbf{T}(V) \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$$

è iniettiva e ci permette di considerare V un sottospazio di $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$.

L'algebra di Clifford si può caratterizzare con la proprietà universale:

Proposizione 8.1.3. *È $V \subset \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$ ed ogni applicazione lineare $\phi : V \rightarrow \mathbf{A}$ di V in un'algebra associativa unitaria tale che $\phi(v)^2 = \mathbf{b}(v, v) \cdot 1_{\mathbf{A}}$ si estende in modo unico ad un omomorfismo $\tilde{\phi} : \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V) \rightarrow \mathbf{A}$.*

Notazione 8.1.4. Se $v_1, \dots, v_k \in V$, indichiamo con $v_1 \cdots v_k$ l'elemento $\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$ di $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$. In generale, indichiamo con $x \cdot y$, o semplicemente con xy , il prodotto di $x, y \in \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$.

Osservazione 8.1.5. Se $v_1, v_2 \in V$, vale la formula di anticommutazione

$$v_1 v_2 + v_2 v_1 + 2\mathbf{b}(v_1, v_2) = 0.$$

Questa è infatti conseguenza della $(v_1 + v_2)(v_1 + v) + \mathbf{b}(v_1 + v_2, v_1 + v) = 0$.

In particolare, $v_1 v_2 = -v_2 v_1$ se v_1 e v_2 sono \mathbf{b} -ortogonali.

Esempio 8.1.6. L'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_0(V)$, corrispondente alla forma nulla, coincide con l'algebra di Grassmann $\Lambda(V)$ dei tensori alternati di V .

Proposizione 8.1.7. L'algebra di Clifford $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$ è \mathbb{Z}_2 graduata, mediante (8.1.2)

$$\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V) = \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)_0 \oplus \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)_1, \text{ con } \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)_i = \pi \left(\bigoplus_{h=0}^{\infty} \mathbf{T}^{2h+i}(V) \right), i = 1, 2.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo su $\mathbf{T}(V)$ la \mathbb{Z}_2 -graduazione indotta dalla \mathbb{Z}_+ -graduazione. L'ideale $\mathbf{J}_{\mathbf{b}}$ è \mathbb{Z}_2 -graduato, perché ammette un sistema di generatori di grado pari. Il quoziente $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$ risulta allora anch'esso \mathbb{Z}_+ -graduato. \square

Notazione 8.1.8. Se $V = \mathbb{k}^m$ e $\mathbf{b}(v, w) = \sum_{i=1}^m v_i w_i$, indichiamo la corrispondente algebra di Clifford con $\mathcal{C}\ell(\mathbb{k}^m)$.

Osservazione 8.1.9. Se $\dim V = 1$, allora $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V) = \mathbb{k} \oplus V$ ha dimensione due. Fissata un vettore non nullo $e \in V$ e posto $\beta(e, e) = \lambda$, la tabella di moltiplicazione di $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$ è data da

	1	e
1	1	e
e	e	λ

Proposizione 8.1.10. Sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale di V . L'inclusione naturale $\mathbf{T}(W) \hookrightarrow \mathbf{T}(V)$ induce, per passaggio al quoziente, un'inclusione $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}|_W}(W) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$.

Siano V_1, V_2 due sottospazi \mathbf{b} -ortogonali di V ed indichiamo con \mathbf{b}_i la restrizione di \mathbf{b} a V_i . Allora l'applicazione lineare

$$\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}_1}(V_1) \otimes \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}_2}(V_2) \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V),$$

definita da

$$(8.1.3) \quad x \otimes y \longrightarrow x \cdot y, \quad \forall x \in \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}_1}(V_1), y \in \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}_2}(V_2)$$

è un isomorfismo di algebre.

Notazione 8.1.11. Se e_1, \dots, e_m è una base di V ed $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ una k -upla di interi con $1 \leq i_h \leq m$, indicheremo con e_I l'elemento $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$ di $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$. Porremo ancora $e_{\emptyset} = 1$.

Corollario 8.1.12. Se $\dim V = m$, allora $\dim \mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V) = 2^m$.

Se e_1, \dots, e_m è una base di V , allora gli e_I con $I = \emptyset$, ed $I = (i_1, \dots, i_k)$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ formano una base di $\mathcal{C}\ell_{\mathbf{b}}(V)$.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri una base \mathbf{b} -ortogonale e_1, \dots, e_m di V e si proceda per ricorrenza, applicando la proposizione precedente. \square

Esempio 8.1.13. Consideriamo $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R})$. Indichiamo con i un generatore di \mathbb{R} come spazio vettoriale. Allora $i^2 = -1$. Gli elementi di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R})$ sono della forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ ed $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$. Quindi $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}$.

Esempio 8.1.14. Consideriamo ora $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2)$. Indichiamo con i, j una base ortonormale di \mathbb{R}^2 . Abbiamo $i^2 = j^2 = -1$, $ij = -ji$. La dimensione di $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2)$ è quattro ed una sua base consiste degli elementi $1, i, j, ij = k$. La tabella di moltiplicazione è

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

e quindi $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2)$ è l'algebra \mathbb{H} dei quaternioni di Hamilton.

8.2. Involuzioni dell'algebra di Clifford

Definiamo in questo paragrafo alcune involuzioni canoniche delle algebre di Clifford. Per la proprietà universale, ogni involuzione di V che sia anche una trasformazione \mathfrak{b} -ortogonale si estende in modo unico ad un'involuzione dell'algebra $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V)$. In particolare, la $V \ni v \rightarrow -v \in V$ si estende in modo unico ad un'involuzione di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V)$.

Definizione 8.2.1. Indichiamo con α l'involuzione di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V)$ definita da

eq:c121

$$(8.2.1) \quad \alpha(x) = (-1)^i x, \quad \forall x \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V)_i, \quad i = 0, 1.$$

lem:c1811

Lemma 8.2.2. *Supponiamo che \mathfrak{b} sia non degenera. Condizione necessaria e sufficiente affinché $x \in \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V)$ soddisfi*

eq:c122

$$(8.2.2) \quad xv = v\alpha(x), \quad \forall v \in V$$

è che x sia uno scalare, cioè che $x \in \mathbb{k}$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che, se \mathfrak{b} è non degenera, gli elementi non nulli di V sono invertibili, e $v^{-1} = \mathfrak{b}(v, v)^{-1}v$. Possiamo allora riscrivere la (8.2.2) nella forma

$$v^{-1}xv = x, \quad \forall v \in V.$$

Fissiamo una base ortogonale e_1, \dots, e_m di V . Abbiamo allora

$$e_i^{-1}e_j e_i = \begin{cases} -e_j & \text{se } i = j, \\ e_j & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Scriviamo $x = \sum_I x_I e_I$, con $x_I \in \mathbb{k}$ e con la sommatoria estesa alle k -uple crescenti di indici in $\{1, \dots, m\}$. Allora

$$e_i^{-1}x e_i = \sum_{i \notin I} x_I e_I - \sum_{i \in I} x_I e_I \quad \text{per } i = 1, \dots, m,$$

perché $e_i^{-1}e_I e_i = (-1)^r e_I$ se r è il numero di indici uguali ad i in $I = (i_1, \dots, i_k)$. Infatti

$$e_i^{-1}e_I e_i = e_i^{-1}e_{i_1} e_i \cdots e_i^{-1}e_{i_k} e_i = (-1)^r e_I.$$

Se vale la ^{leg: c122}(8.2.2) abbiamo allora

$$\sum_{i \notin I} x_I e_I - \sum_{i \in I} x_I e_I = \sum'_{|I| \in 2\mathbb{N}} x_I e_I - \sum'_{|I| \notin 2\mathbb{N}} x_I e_I \quad \text{per } i = 1, \dots, m$$

e da questa segue la tesi. \square

Osservazione 8.2.3. Se $\mathfrak{b} = 0$, allora $xv = v\alpha(x)$ per ogni $x \in \mathcal{C}\ell_0(V) = \Lambda(V)$.

L'applicazione lineare $\tilde{\beta} : \mathbf{T}(V) \rightarrow \mathbf{T}(V)$, definita da

$$\tilde{\beta}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_k \otimes \cdots \otimes v_1, \quad \forall k = 0, 1, \dots, \infty. \quad \forall v_1, \dots, v_k \in V$$

è un'anti-involuzione di $\mathbf{T}(V)$, che lascia invariante l'ideale $\mathbf{J}_{\mathfrak{b}}$.

Definizione 8.2.4. Indichiamo con $\beta : \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V) \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V)$ l'anti-involuzione di $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V)$ ottenuta da $\tilde{\beta}$ per passaggio al quoziente.

Indichiamo con γ la composizione $\gamma = \alpha \circ \beta$.

Lemma 8.2.5. L'involuzione α e le anti-involuzioni β e γ commutano tutte tra loro.

Esempio 8.2.6. Le α , β e γ sono descritte, per $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^2)$, dalle tabelle

$$\begin{array}{c|c|c} & 1 & i \\ \hline \alpha & 1 & -i \\ \hline \beta & 1 & i \\ \hline \gamma & 1 & -i \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & i & j & k \\ \hline \alpha & 1 & -i & -j & k \\ \hline \beta & 1 & i & j & -k \\ \hline \gamma & 1 & -i & -j & -k \end{array} .$$

8.3. I gruppi spinoriali

In questo paragrafo V è uno spazio vettoriale di dimensione finita m sul campo \mathbb{k} ($= \mathbb{R}$ o \mathbb{C}) e \mathfrak{b} una forma bilineare simmetrica non degenera che, nel caso $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, supponiamo essere un prodotto scalare. Scriveremo per semplicità $\mathcal{C}\ell(V)$ invece che $\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{b}}(V)$.

Consideriamo innanzi tutto il gruppo degli elementi invertibili di $\mathcal{C}\ell(V)$.

lem: c1814

Lemma 8.3.1. Se $x \in \mathcal{C}\ell(V)$ sono equivalenti:

- (1) $\exists y \in \mathcal{C}\ell(V)$ tale che $x \cdot y = 1$;
- (2) $\exists z \in \mathcal{C}\ell(V)$ tale che $z \cdot x = 1$;
- (3) $\exists! u \in \mathcal{C}\ell(V)$ tale che $x \cdot u = u \cdot x = 1$.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con L_x ed R_x le moltiplicazioni per x a sinistra e a destra in $\mathcal{C}\ell(V)$:

$$L_x : \mathcal{C}\ell(V) \ni q \rightarrow x \cdot q \in \mathcal{C}\ell(V), \quad R_x : \mathcal{C}\ell(V) \ni q \rightarrow q \cdot x \in \mathcal{C}\ell(V).$$

Le L_x ed R_x sono applicazioni lineari. Se x ammette un'inversa destra y in $\mathcal{C}\ell(V)$, allora R_x è iniettiva. Infatti, se $R_x(q) = 0$, è

$$q = q \cdot 1 = q \cdot (x \cdot y) = (q \cdot x) \cdot y = R_x(q) \cdot y = 0 \cdot y = 0.$$

Poiché $\mathcal{C}\ell(V)$ ha dimensione finita 2^m , la R_x , essendo lineare e iniettiva è anche bigettiva ed, in particolare, esiste uno ed un solo elemento $z \in \mathcal{C}\ell(V)$ per cui $R_x(z) = 1$, cioè $z \cdot x = 1$. Questo dimostra che (1) \Rightarrow (2). In modo analogo, se supponiamo che x ammetta un'inversa sinistra, possiamo dimostrare che L_x è lineare e iniettiva,

e quindi bigettiva e che perciò esiste un unico elemento $y \in \mathcal{E}\ell(V)$ tale che $L_x(y) = 1$, cioè $x \cdot y = 1$. È quindi valida anche l'implicazione (2) \Rightarrow (1). L'equivalenza (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (2) segue allora dall'identità dell'inversa destra e sinistra: se $x \cdot y = 1 = z \cdot x$ abbiamo

$$z = z \cdot 1 = z \cdot (x \cdot y) = (z \cdot x) \cdot y = 1 \cdot y = y.$$

□

Definizione 8.3.2. Un elemento x di $\mathcal{E}\ell(V)$ che soddisfi le condizioni equivalenti del Lemma 8.3.1 si dice *invertibile*.

Lemma 8.3.3. *L'insieme $\mathcal{E}\ell_*(V)$ degli elementi invertibili di $\mathcal{E}\ell(V)$ è un gruppo di Lie di dimensione 2^m .*

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente, $\mathcal{E}\ell_*(V)$ è un gruppo con identità 1. Dimostriamo che $\mathcal{E}\ell_*(V)$ è un aperto di $\mathcal{E}\ell(V)$. A questo scopo possiamo considerare l'applicazione lineare $L : \mathcal{E}\ell(V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}\ell(V))$ che fa corrispondere ad $x \in \mathcal{E}\ell(V)$ la moltiplicazione a sinistra $L_x : \mathcal{E}\ell(V) \ni q \rightarrow x \cdot q \in \mathcal{E}\ell(V)$. Allora $\mathcal{E}\ell_*(V) = L^{-1}(\mathbf{GL}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}\ell(V)))$ è aperto perché immagine inversa di un aperto mediante un'applicazione continua. La moltiplicazione di due elementi e l'inversa di un elemento sono applicazioni differenziabili perché il prodotto in $\mathcal{E}\ell(V)$ è un'applicazione differenziabile e l'inversa si può esprimere, nell'intorno di un elemento $x \in \mathcal{E}\ell_*(V)$, mediante

$$(x + q)^{-1} = x \cdot (1 + x^{-1}q) = x \cdot \sum_{h=0}^{\infty} (-x^{-1}q)^h.$$

□

Lemma 8.3.4. *L'insieme $\mathbf{G}_{\gamma} = \{x \in \mathcal{E}\ell(V) \mid x \cdot \gamma(x) = 1\}$ è un sottogruppo chiuso di $\mathcal{E}\ell_*(V)$.*

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione è conseguenza del fatto che γ sia una anti-involuzione di $\mathcal{E}\ell(V)$. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} 1 \cdot \gamma(1) &= 1 \cdot 1 = 1 \implies 1 \in \mathbf{G}_{\gamma}, \\ x \in \mathbf{G}_{\gamma} &\implies x \in \mathcal{E}\ell_*(V), \gamma(x) = x^{-1}, \gamma(x) \cdot \gamma(\gamma(x)) = \gamma(x) \cdot x = 1 \implies x^{-1} \in \mathbf{G}_{\gamma}, \\ \left. \begin{aligned} x, y \in \mathbf{G}_{\gamma} &\implies (x \cdot y) \cdot \gamma(x \cdot y) = x \cdot y \cdot \gamma(y) \cdot \gamma(x) \\ &= x \cdot (y \cdot \gamma(y)) \cdot \gamma(x) = x \cdot \gamma(x) = 1 \end{aligned} \right\} &\implies x \cdot y \in \mathbf{G}_{\gamma}, \end{aligned}$$

e quindi gli assiomi della definizione di gruppo sono soddisfatti. Poiché γ è continua, \mathbf{G}_{γ} è chiuso in $\mathcal{E}\ell(V)$ e quindi a maggior ragione in $\mathcal{E}\ell_*(V)$. □

Lemma 8.3.5. *L'insieme*

eq:c132

$$(8.3.1) \quad \mathbf{G}_V = \{x \in \mathcal{E}\ell_*(V) \mid x \cdot v \cdot \beta(x) \in V, \forall v \in V\}$$

è un sottogruppo chiuso di $\mathcal{E}\ell_(V)$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $x \in \mathcal{E}\ell(V)$, indichiamo con B_x l'endomorfismo lineare

$$B_x : \mathcal{E}\ell(V) \ni q \longrightarrow x \cdot q \cdot \beta(x) \in \mathcal{E}\ell(V).$$

Osserviamo che B_x è invertibile se e soltanto se $x \in \mathcal{C}\ell_*(V)$, ed in questo caso $(B_x)^{-1} = B_{x^{-1}}$. Certamente \mathbf{G}_V è chiuso in $\mathcal{C}\ell_*(V)$, contiene 1 e, dalla considerazione precedente, segue che contiene l'inverso di ogni suo elemento. Basta verificare che è un gruppo, basta verificare che contiene anche il prodotto di ogni coppia di suoi elementi. Se $x, y \in \mathbf{G}_V$ e $v \in V$, abbiamo

$$(x \cdot y) \cdot v \cdot \beta(x \cdot y) = x \cdot (y \cdot v \cdot \beta(y)) \cdot \beta(x) \in V \text{ perché } y \cdot v \cdot \beta(y) \in V.$$

Questo completa la dimostrazione. \square

Lemma 8.3.6. *Se $v \in V$ è un vettore \mathbf{b} -anisotropo, allora $v \in \mathbf{G}_V$ ed*

eq:c13a

$$(8.3.2) \quad A_v : V \ni \xi \longrightarrow v \cdot \xi \cdot v \in V$$

è la \mathbf{b} -simmetria di vettore v , composta con la dilatazione lineare di ragione $\mathbf{b}(v, v)$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} v \cdot \xi \cdot \beta(v) &= v \cdot \xi \cdot v = v \cdot (-v \cdot \xi - 2\mathbf{b}(v, \xi)) \\ &= \mathbf{b}(v, v) \xi - 2\mathbf{b}(v, \xi) v \in V, \quad \forall \xi \in V. \end{aligned}$$

\square

Osservazione 8.3.7. Se v è \mathbf{b} -isotropo, allora A_v è un endomorfismo lineare di V che ha per immagine il sottospazio $\langle v \rangle$.

Definizione 8.3.8. Denotiamo con $\mathbf{Pin}(V)$ il gruppo $\mathbf{G}_V \cap \mathbf{G}_V$ e con $\mathbf{Spin}(V)$ il suo sottogruppo $\mathbf{Pin}(V) \cap \mathcal{C}\ell(V)_0$.

Il gruppo $\mathbf{Spin}(V)$ si dice il *gruppo Spin* di V , rispetto alla forma \mathbf{b} .

Per la discussione precedente, $\mathbf{Pin}(V)$ e $\mathbf{Spin}(V)$ sono sottogruppi di Lie di $\mathcal{C}\ell_*(V)$. Vedremo in seguito che $\mathbf{Spin}(V)$ è un sottogruppo di indice due di $\mathbf{Pin}(V)$, e che coincide con la sua componente connessa dell'identità. In particolare, le loro algebre di Lie coincidono.

Notazione 8.3.9. È conveniente distinguere l'esponenziale nell'algebra di Clifford e nello spazio degli endomorfismi dell'algebra di Clifford. Scriveremo quindi

$$\exp(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} x^h, \quad \text{con } x^{h+1} = x \cdot x^h \text{ per } h \geq 0$$

per l'esponenziale in $\mathcal{C}\ell(V)$ ed

$$\text{Exp}_{\mathcal{C}\ell V}(A) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} A^h, \quad \text{con } A^{h+1} = A \circ A^h \text{ per } h \geq 0$$

per l'esponenziale in $\mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}\ell(V))$.

L'algebra associativa $\mathcal{C}\ell(V)$ ha una struttura naturale di algebra di Lie con il commutatore

eq:c130

$$(8.3.3) \quad [x, y] = xy - yx, \quad \forall x, y \in \mathcal{C}\ell(V).$$

Identificando $\mathcal{C}\ell_*(V)$ al gruppo delle trasformazioni lineari di $\mathcal{C}\ell(V)$ definiti dalla moltiplicazione a sinistra per gli elementi di $\mathcal{C}\ell_*(V)$, otteniamo una identificazione naturale di $\mathcal{C}\ell(V)$ con l'algebra di Lie di $\mathcal{C}\ell_*(V)$. L'applicazione esponenziale coincide allora con l'esponenziale nell'algebra di Clifford definito sopra.

Possiamo quindi identificare le algebre di Lie \mathfrak{g}_γ di \mathbf{G}_γ , \mathfrak{g}_V di \mathbf{G}_V , $\mathfrak{spin}(V)$ di $\mathbf{Spin}(V)$ a sottoalgebre di Lie di $\mathcal{C}\ell(V)$.

Lemma 8.3.10. *Le algebre di Lie di \mathbf{G}_γ e di \mathbf{G}_V sono descritte, rispettivamente, da*

$$(8.3.4) \quad \mathfrak{g}_\gamma = \{x \in \mathcal{C}\ell(V) \mid x + \gamma(x) = 0\},$$

$$(8.3.5) \quad \mathfrak{g}_V = \{x \in \mathcal{C}\ell(V) \mid x \cdot \xi + \xi \cdot \beta(x) \in V, \forall \xi \in V\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché β e γ sono anti-involuzioni di $\mathcal{C}\ell(V)$, abbiamo

$$\beta(\exp(x)) = \exp(\beta(x)) \text{ e } \gamma(\exp(x)) = \exp(\gamma(x)) \text{ per ogni } x \in \mathcal{C}\ell(V).$$

Ricordiamo che $x \in \mathcal{C}\ell(V)$ appartiene a \mathfrak{g}_γ se, e soltanto se, $\exp(tx) \in \mathbf{G}_\gamma$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, se cioè $\exp(tx)\gamma(\exp(tx)) = \exp(tx)\exp(t\gamma(x)) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Derivando rispetto a t questa uguaglianza, e calcolandola per $t = 0$, troviamo subito che la condizione $x + \gamma(x) = 0$ è necessaria. Quando essa è verificata, $\gamma(x) = -x$ e quindi x e $\gamma(x)$ commutano. Allora $\exp(tx)\exp(t\gamma(x)) = \exp(t[x + \gamma(x)]) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Analogamente, $x \in \mathcal{C}\ell(V)$ appartiene a \mathfrak{g}_V se, e soltanto se $\exp(tx) \in \mathbf{G}_V$ per tutti i $t \in \mathbb{R}$. Differenziando la condizione

$$\exp(tx) \cdot \xi \cdot \beta(\exp(tx)) = \exp(tx) \cdot \xi \cdot \exp(t\beta(x)) \in V \text{ per ogni } t \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \xi \in V,$$

troviamo che la condizione $x \cdot \xi + \xi \cdot \beta(x) \in V$ per ogni $\xi \in V$ è necessaria affinché $x \in \mathfrak{g}_V$. La sufficienza segue dal fatto che

$$\exp(x) \cdot y \cdot \exp(\beta(x)) = \text{Exp}_{\mathcal{C}\ell(V)}(A_x)(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{C}\ell(V),$$

per l'endomorfismo lineare

$$A_x : \mathcal{C}\ell(V) \ni y \longrightarrow A_x(y) = x \cdot y + y \cdot \beta(x) \in \mathcal{C}\ell(V).$$

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} L_x : \mathcal{C}\ell(V) \ni y \longrightarrow x \cdot y \in \mathcal{C}\ell(V) &\longrightarrow \text{Exp}_{\mathcal{C}\ell(V)}(L_x)(y) = \exp(x) \cdot y, \\ R_z : \mathcal{C}\ell(V) \ni y \longrightarrow y \cdot z \in \mathcal{C}\ell(V) &\longrightarrow \text{Exp}_{\mathcal{C}\ell(V)}(R_z)(y) = y \cdot \exp(z), \\ [L_x, R_z] = 0 \implies \text{Exp}_{\mathcal{C}\ell(V)}(L_x + R_z)(y) &= \text{Exp}_{\mathcal{C}\ell(V)}(L_x)\text{Exp}_{\mathcal{C}\ell(V)}(R_z)(y) \\ &= \exp(x) \cdot y \cdot \exp(z). \end{aligned}$$

□

Proposizione 8.3.11 (Rappresentazione ortogonale). *Per ogni $x \in \mathbf{Pin}(V)$ l'applicazione*

$$\boxed{\text{eq:c135}} \quad (8.3.6) \quad A_x : V \ni v \longrightarrow x \cdot v \cdot \beta(x) \in V$$

è una trasformazione ortogonale di V . La

$$\boxed{\text{eq:c134}} \quad (8.3.7) \quad A : \mathbf{Pin}(V) \ni x \longrightarrow A_x \in \mathbf{O}_b(V)$$

è un omomorfismo di gruppi e $\ker A = \{\pm 1\}$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $x \in \mathbf{Pin}(V)$ e $v \in V$. Poiché

$$-x \cdot v \cdot \beta(x) = \alpha(x \cdot v \cdot \beta(x)) = \alpha(x) \cdot \alpha(v) \cdot \gamma(v), \quad \alpha(x)\beta(x) = \alpha(x \cdot \gamma(x)) = \alpha(1) = 1,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(A_x v, A_x v) &= -(A_x v)^2 = -(x \cdot v \cdot \beta(x)) \cdot (x \cdot v \cdot \beta(x)) = x \cdot v \cdot \beta(x) \cdot \alpha(x) \cdot \alpha(v) \cdot \gamma(v) \\ &= x \cdot v \cdot \alpha(v) \cdot \gamma(v) = -x \cdot v^2 \cdot \gamma(v) = \beta(v, v) x \cdot \gamma(v) = \beta(v, v). \end{aligned}$$

Questo dimostra che $A_x \in \mathbf{O}_{\mathfrak{b}}(V)$. Abbiamo poi

$$A_x \circ A_y(v) = x \cdot (y \cdot v \cdot \beta(y)) \cdot \beta(x) = (x \cdot y) \cdot v \cdot (\beta(y) \cdot \beta(x)) = (x \cdot y) \cdot v \cdot \beta(x \cdot y) = A_{x \cdot y}(v),$$

e quindi A è una rappresentazione di $\mathbf{Pin}(V)$ nel gruppo ortogonale $\mathbf{O}_{\mathfrak{b}}(V)$.

Supponiamo ora che $x \in \mathbf{Pin}(V)$ soddisfi $A_x = \text{id}_V$. Allora anche $A_{x^{-1}} = A_{\gamma(x)} = \text{id}_V$ e quindi, se $v \in V$,

$$x \cdot v = x \cdot \gamma(x) \cdot v \cdot \beta(\gamma(x)) = x \cdot \gamma(x) \cdot v \cdot \alpha(x) = v \cdot \alpha(x).$$

Per il Lemma [8.2.2](#) ^{[lem:c1811](#)} questo implica che $x = k \in \mathbb{k}$. Da $k^2 = 1$ troviamo allora che $k = \pm 1$ □

[lem:c1819](#)

Lemma 8.3.12. *Il sottospazio vettoriale \mathfrak{g} di $\mathcal{L}(V)$ generato dagli elementi della forma $vw - wv$, al variare di v, w in V è una sotto-algebra di Lie di $\mathcal{L}(V)$ di dimensione $\frac{m(m-1)}{2}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia e_1, \dots, e_m una base ortonormale di V . Poiché $e_i e_j = -e_j e_i$ per $1 \leq i \neq j \leq m$, gli elementi $e_i e_j$ con $1 \leq i < j \leq m$ appartengono a \mathfrak{g} e ne formano una base.

Per dimostrare che \mathfrak{g} è una sottoalgebra di Lie di $\mathcal{L}(V)$, è sufficiente verificare che \mathfrak{g} contiene i commutatori degli elementi di una sua base.

Abbiamo $[e_i e_j, e_h e_k] = 0$ se $i \neq j, h \neq k$ e $\#\{i, j\} \cap \{h, k\} = 0, 2$. Se $\#\{i, j\} \cap \{h, k\} = 1$, possiamo supporre, a meno di cambiare i segni, che i, j, h siano distinti e che $k = i$. Allora

$$[e_i e_j, e_h e_i] = e_i e_j e_h e_i - e_h e_i e_j = e_j e_i e_i e_h + e_h e_j = 2e_h e_j.$$

Questo dimostra che \mathfrak{g} è una sottoalgebra di Lie di $\mathcal{L}(V)$ e completa la dimostrazione della proposizione. □

Lemma 8.3.13. *L'algebra di Lie \mathfrak{g} definita nel Lemma [8.3.12](#) ^{[lem:c1819](#)} è una sottoalgebra di Lie di $\text{spin}(V)$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $v, w \in V$.

Se sono linearmente dipendenti, allora $v \cdot w - w \cdot v = 0$. Quindi, se $v \cdot w - w \cdot v \neq 0$, i due vettori sono linearmente indipendenti. Scegliamo una base \mathfrak{b} -ortogonale u, z del piano $\langle v, w \rangle$. Se $v = au + bz, w = cu + dz$, poiché $u \cdot z = -z \cdot u$, otteniamo

$$v \cdot w = ac \mathfrak{b}(u, u) + bd \mathfrak{b}(z, z) + (ac - bd)u \cdot z,$$

$$w \cdot v = ac \mathfrak{b}(u, u) + bd \mathfrak{b}(z, z) - (ac - bd)u \cdot z,$$

$$v \cdot w - w \cdot v = 2(ac - bd)u \cdot z.$$

Possiamo riscaldare u e z in modo che $2(ac - bd) = 1$. Osserviamo a questo punto che

$$(u \cdot z)^2 = u \cdot z \cdot u \cdot z = -u \cdot u \cdot z \cdot z = -\mathfrak{b}(u, u) \cdot \mathfrak{b}(z, z) = -\lambda^2 \in \mathbb{k},$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda^2 = \mathbf{b}(u, u) \cdot \mathbf{b}(z, z)$. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} \exp(t(v \cdot w - w \cdot v)) &= \exp(tu \cdot z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{2h} t^{2h}}{2h!} + (u \cdot z) \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{2h} t^{2h+1}}{(2h+1)!} \\ &= \begin{cases} 1 + tu \cdot z & \text{se } \lambda = 0, \\ \cos(\lambda t) + (u \cdot z)\lambda^{-1} \sin(\lambda t) & \text{se } \lambda \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Consideriamo i due casi. Se $\lambda = 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} (1 + tu \cdot z) \cdot \gamma(1 + tu \cdot z) &= (1 + tu \cdot z) \cdot (1 + tz \cdot u) \\ &= 1 + t(u \cdot z + z \cdot u) + t^2 u \cdot z \cdot z \cdot u = 1, \end{aligned}$$

perché $u \cdot z + z \cdot u + u \cdot z = 0$ in quanto u e z sono \mathbf{b} -ortogonali e $u \cdot z \cdot z \cdot u = \mathbf{b}(u, u) \mathbf{b}(z, z) = \lambda^2 = 0$. Se $\xi \in V$, abbiamo

$$\begin{aligned} (1 + tu \cdot z) \cdot \xi \cdot \beta(1 + tu \cdot z) &= (1 + tu \cdot z) \cdot \xi \cdot (1 + tz \cdot u) \\ &= (\xi + tu \cdot z \cdot \xi) \cdot (1 + tz \cdot u) \\ &= \xi + t(u \cdot z \cdot \xi + \xi \cdot z \cdot u) + t^2 u \cdot z \cdot \xi \cdot z \cdot u \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} u \cdot z \cdot \xi + \xi \cdot z \cdot u &= u \cdot z \cdot \xi - \xi \cdot u \cdot z \\ &= 2\mathbf{b}(z, \xi)u - u \cdot \xi \cdot z - 2\mathbf{b}(u, \xi)z + u \cdot \xi \cdot z \\ &= 2\mathbf{b}(z, \xi)u - 2\mathbf{b}(u, \xi)z \in V, \\ u \cdot z \cdot \xi \cdot z \cdot u &= u \cdot z \cdot \xi \cdot \beta(z) \cdot \beta(u) \in V, \end{aligned}$$

perché $\beta(z) = z$, $\beta(u) = u$.

Se $\lambda \neq 0$ abbiamo invece

$$\begin{aligned} &(\cos(\lambda t) + (u \cdot z)\lambda^{-1} \sin(\lambda t)) \cdot \gamma(\cos(\lambda t) + (u \cdot z)\lambda^{-1} \sin(\lambda t)) \\ &= (\cos(\lambda t) + (u \cdot z)\lambda^{-1} \sin(\lambda t))(\cos(\lambda t) + (z \cdot u)\lambda^{-1} \sin(\lambda t)) \\ &= \cos^2(\lambda t) + (u \cdot z \cdot z \cdot u)\lambda^{-2} \sin^2(\lambda t) + \sin(\lambda t) \cos(\lambda t)\lambda^{-1}(u \cdot z + z \cdot u) \\ &= \cos^2(\lambda t) + \sin^2(\lambda t) = 1. \end{aligned}$$

Se $\xi \in V$, abbiamo

$$\begin{aligned} &(\cos(\lambda t) + (u \cdot z)\lambda^{-1} \sin(\lambda t)) \cdot \xi \cdot \beta(\cos(\lambda t) + (u \cdot z)\lambda^{-1} \sin(\lambda t)) \\ &= (\cos(\lambda t) + (u \cdot z)\lambda^{-1} \sin(\lambda t)) \cdot \xi \cdot (\cos(\lambda t) + (z \cdot u)\lambda^{-1} \sin(\lambda t)) \\ &= \cos^2(\lambda t) \xi + \lambda^{-1} \sin(\lambda t) \cos(\lambda t)(u \cdot z \cdot \xi + \xi \cdot u \cdot z) \\ &\quad + \lambda^{-2} \sin^2(\lambda t) u \cdot z \cdot \xi \cdot z \cdot u \\ &= \cos^2(\lambda t) \xi \in V \\ &+ \lambda^{-1} \sin(\lambda t) \cos(\lambda t)(2\mathbf{b}(z, \xi)u - 2\mathbf{b}(u, \xi)z) \in V \\ &+ \lambda^{-2} \sin^2(\lambda t) \end{aligned}$$

□

Operatori differenziali sulle varietà Riemanniane

9.1. Elemento di volume ed operatore di Hodge

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Ad una forma $\omega \in \mathcal{Q}^m(M)$ possiamo associare una funzione

eq: 17b71

$$(9.1.1) \quad \mathbb{F}(M) \ni \sigma \longrightarrow \omega(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathbb{R},$$

ove $\sigma_i = \sigma(e_i) \in T_{\pi(\sigma)}M$, per la base canonica e_1, \dots, e_m di \mathbb{R}^m . La (9.1.1) definisce una sezione del fibrato in rette che corrisponde alla rappresentazione determinante $\mathbf{GL}_m(\mathbb{R}) \ni a \rightarrow \det a \in \mathbb{R}_*$, e stabilisce un isomorfismo di $\mathcal{Q}^m(M)$ con $\mathcal{Q}_{\det}^0(\mathbb{F}(M))$.

Una *densità positiva* su M è localmente il valore assoluto di una m -forma. Possiamo definirla in modo invariante come una funzione μ , definita sullo spazio $\mathbb{F}(M)$ dei sistemi di riferimento di M .

Definizione 9.1.1. Una *densità* di classe \mathcal{C}^∞ su M è una funzione $\mu \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{F}(M))$ che soddisfa

$$(9.1.2) \quad \mu(\sigma a) = |\det a| \cdot \mu(\sigma), \quad \forall \sigma \in \mathbb{F}(M), \forall a \in \mathbf{GL}_m(\mathbb{R}).$$

Ad una densità μ di classe \mathcal{C}^∞ su M possiamo associare una misura regolare. Se (U, x) è una carta locale in M ed f una funzione continua con supporto compatto in U definiamo

$$\int f d\mu = \int f(x) \mu(\partial/\partial x) d\lambda(x),$$

dove $\partial/\partial x$ è la sezione $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$ di $\mathbb{F}(M)$ su U e $d\lambda$ la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^m . La definizione si estende, mediante partizione dell'unità, a tutte le funzioni continue a supporto compatto su M .

Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana.

Definizione 9.1.2. L'*elemento di volume* di (M, g) è la *densità* μ_g definita da

$$(9.1.3) \quad \mu_g(\sigma) = \sqrt{|\det g(\sigma_i, \sigma_j)|}, \quad \forall \sigma \in \mathbb{F}(M).$$

Definizione 9.1.3. Se M è orientata, definiamo *forma di volume* di (M, g) l'unico elemento $\omega_g \in \mathcal{Q}^m(M)$ che definisce l'orientazione di M e soddisfa

$$(9.1.4) \quad \mu_g(\sigma) = |\omega_g(\sigma_1, \dots, \sigma_m)|, \quad \forall \sigma \in \mathbb{F}(M).$$

Ricordiamo che abbiamo esteso la pseudo-metrica ai fibrati tensoriali di M , in particolare alle forme differenziali esterne. Sulle forme di grado zero si tratta semplicemente del prodotto di numeri reali. Le m -forme alternate formano uno

spazio vettoriale di dimensione uno. Ogni varietà è localmente orientabile e quindi possiamo definire, almeno localmente, la forma di volume ω_g . Abbiamo

$$(9.1.5) \quad g(\omega_g, \omega_g) = (-1)^q$$

se q è il numero di valori propri negativi di g . Poiché la derivata covariante di una forma alternata è ancora una forma alternata, deduciamo da questa identità che

$$(9.1.6) \quad \nabla \omega_g = 0.$$

Supporremo nel seguito che (M, g) sia una varietà pseudo-Riemanniana orientata.

Definizione 9.1.4. Per ogni $0 \leq k \leq m$ definiamo l'operatore di Hodge

$$(9.1.7) \quad * : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{m-k}(M)$$

come l'unico operatore lineare tale che

$$(9.1.8) \quad \alpha \wedge (*\beta) = g(\alpha, \beta) \omega_g, \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M).$$

prop: 718

Proposizione 9.1.5. L'operatore di Hodge è caratterizzato da

$$(9.1.9) \quad \int_M g(\alpha, \beta) \omega_g = \int_M (*\alpha) \wedge \beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M) \text{ con } \text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta \text{ compatto.}$$

Proposizione 9.1.6. L'operatore di Hodge gode delle seguenti proprietà¹

$$(1) \quad *1 = \omega_g, \quad *\omega_g = (-1)^q;$$

$$(2) \quad \text{se } \alpha \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^{m-k}(M), \text{ allora}$$

$$(9.1.10) \quad g(\alpha, *\beta) = (-1)^{k(m-k)} g(*\alpha, \beta);$$

$$(3) \quad \text{se } \alpha \in \Omega^k(M), \text{ allora}$$

$$(9.1.11) \quad **\alpha = (-1)^{k(n-k)+q} \alpha.$$

9.2. Codifferenziale, operatore di Laplace-Beltrami, divergenza

Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana.

9.2.1. Isomorfismi di dualità. Poiché la g è non degenere, vale il

Lemma 9.2.1. Per ogni forma differenziale $\xi \in \Omega^1(M)$ esiste un unico campo di vettori ξ^\sharp tale che

$$(9.2.1) \quad g(\xi^\sharp, X) = \xi(X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \quad \square$$

L'applicazione

eq: 17ba

$$(9.2.2) \quad \sharp : \Omega^1(M) \ni \xi \rightarrow \xi^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$$

Definizione 9.2.2. L'isomorfismo (9.2.2) è l'isomorfismo di dualità di (M, g) . Indichiamo con

$$(9.2.3) \quad \flat : \mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow X^\flat \in \Omega(M)$$

l'isomorfismo inverso.

¹Ricordiamo che q è il numero di valori propri negativi di g .

Poiché la metrica sul fibrato cotangente è definita in modo tale che \sharp e \flat siano isometrie, vale la

$$(9.2.4) \quad g(\xi^\sharp, X) = g(\xi, X^\flat) = \xi(X), \quad \forall \xi \in \mathcal{O}^1(M), \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Lemma 9.2.3. *La derivazione covariante commuta con gl'isomorfismi di dualità.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\xi \in \mathcal{O}^1(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} g(\nabla_X(\xi^\sharp), Y) &= Xg(\xi^\sharp, Y) - g(\xi^\sharp, \nabla_X Y) = X(\xi(Y)) - \xi(\nabla_X Y) = (\nabla_X \xi)(Y) \\ &= g((\nabla_X \xi)^\sharp, Y). \end{aligned}$$

Questo dimostra che $\nabla_X(\xi^\sharp) = (\nabla_X \xi)^\sharp = \nabla_X \xi^\sharp$. Si verifica in modo analogo che $\nabla_X(Y^\flat) = (\nabla_X Y)^\flat = \nabla_X Y^\flat$. \square

Gli elementi di $\mathfrak{T}^{k,q}$ sono localmente somme finite di termini della forma

$$\tau = X_1 \otimes \cdots \otimes X_q \otimes \xi^1 \otimes \cdots \otimes \xi^k \quad \text{con } X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{X}(M), \xi^1, \dots, \xi^k \in \mathcal{O}^1(M).$$

Possiamo estendere la definizione degli isomorfismi di dualità descrivendo applicazioni $\sharp : \mathfrak{T}^{k,q}(M) \rightarrow \mathfrak{T}^{k-1,q+1}(M)$ per $k \geq 1$ e $\flat : \mathfrak{T}^{k,q}(M) \rightarrow \mathfrak{T}^{k+1,q-1}(M)$ per $q \geq 1$ con

$$\begin{aligned} \tau^\sharp &= X_1 \otimes \cdots \otimes X_{q-1} \otimes X_q \otimes \xi^1 \otimes \xi^2 \otimes \cdots \otimes \xi^k & (k \geq 1), \\ \tau^\flat &= X_1 \otimes \cdots \otimes X_{q-1} \otimes X_q^\flat \otimes \xi^1 \otimes \xi^2 \otimes \cdots \otimes \xi^k & (q \geq 1). \end{aligned}$$

Poiché la derivazione covariante è una derivazione dell'algebra tensoriale, anche gli isomorfismi \sharp e \flat definiti sui campi tensoriali commutano con la derivazione covariante.

9.2.2. Gradiente, Hessiano, Operatore di Laplace-Beltrami.

Definizione 9.2.4. Il *gradiente* di una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ è il campo di vettori

eq: 17b91

$$(9.2.5) \quad \nabla f = df^\sharp.$$

La (9.2.5) è equivalente a

$$(9.2.6) \quad g(\nabla f, X) = Xf, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un sistema di riferimento su un aperto U di M , posto $g_{i,j} = g(X_i, X_j)$, ed indicando con $(g^{i,j})$ la matrice inversa della $(g_{i,j})$, abbiamo

$$(9.2.7) \quad \nabla f = \sum_{i,j} g^{i,j} (X_i f) X_j.$$

In particolare, se (M, g) è Riemanniana e $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ un riferimento ortonormale su un aperto U di M , è

$$(9.2.8) \quad \nabla f = \sum_{i=1}^m (X_i f) X_i \quad \text{su } U, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Definizione 9.2.5. L'*Hessiano* di $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ è la derivata covariante di df

$$(9.2.9) \quad \nabla^2 f = \nabla df, \quad \text{cioè} \quad \nabla^2 f(X, Y) = XYf - (\nabla_X Y)f, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Osserviamo che

$$\nabla^2 f(Y, X) = (YX - \nabla_Y X)f = (XY - [X, Y] - \nabla_Y X)f = (XY - \nabla_X Y)f,$$

perché la connessione di Levi-Civita è simmetrica. Quindi l'Hessiano è un tensore simmetrico.

Definizione 9.2.6. L'operatore di Laplace-Beltrami sulle funzioni è l'opposto della traccia rispetto a g dell'Hessiano:

$$(9.2.10) \quad \Delta f = -\text{tr}_g(\nabla^2 f).$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un sistema di riferimento su un aperto U di M , posto $g_{i,j} = g(X_i, X_j)$, ed indicando con $(g^{i,j})$ la matrice inversa della $(g_{i,j})$, abbiamo

$$(9.2.11) \quad \nabla^2 f(X_i, X_j) = (X_i X_j - \Gamma_{i,j}^h X_h)f,$$

$$(9.2.12) \quad \Delta f = -\left(\sum_{i,j} g^{i,j}(X_i X_j - \sum_h \Gamma_{i,j}^h X_h)\right)f.$$

Osserviamo che Δ è ellittico se e soltanto se la g è una metrica Riemanniana, cioè se g è definita positiva. In questo caso, se scegliamo un riferimento ortonormale $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ su un aperto U di M , abbiamo in U

$$(9.2.13) \quad \Delta f = -\text{tr}_g(\nabla df) = -\left(\sum_{i=1}^m X_i^2 - \nabla_{X_i} X_i\right)f \quad \text{in } U.$$

9.2.3. Divergenza. Supporremo in tutto questo sottoparagrafo che (M, g) sia una varietà Riemanniana orientata, con forma di volume $\omega_g \in \Omega^m(M)$.

Definizione 9.2.7. La *divergenza*² in $p \in M$ di un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ è la traccia dell'applicazione lineare $T_p M \ni Y_p \rightarrow \nabla_{Y_p} X \in T_p M$:

$$(9.2.14) \quad \text{div } X = \text{tr}(Y \rightarrow \nabla_Y X).$$

Lemma 9.2.8. Supponiamo che (X, g) sia Riemanniana. Se $\sigma = (Y_1, \dots, Y_m)$ è un sistema di riferimento ortonormale su un aperto U di M , allora

$$\text{eq: 17b99a} \quad (9.2.15) \quad \text{div } X = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{Y_i} X, Y_i) \quad \text{su } U, \forall X \in \mathfrak{X}(U).$$

Cioè, se $X = \sum_{i=1}^m f^i Y_i$, con $f^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$, allora

$$\text{eq: 17b99} \quad (9.2.16) \quad \text{div } X = \sum_{i=1}^m Y_i f^i + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{i,j}^i f^j \quad \text{in } U,$$

dove i simboli di Christoffel $\Gamma_{j,h}^i$ sono definiti da $\nabla_{Y_j} Y_h = \sum_{i=1}^m \Gamma_{j,h}^i Y_i$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$\nabla_{Y_i} X = \sum_{h=1}^m (Y_i f^h + \sum_{j=1}^m \Gamma_{i,j}^h f^j) Y_h$$

e quindi otteniamo la ^{eq: 17b99}(9.2.16), che è equivalente alla ^{eq: 17b99a}(9.2.15). \square

Proposizione 9.2.9. Supponiamo che (M, g) sia Riemanniana orientata, con forma di volume ω_g . Allora (indichiamo con L_X la derivata di Lie)

$$\text{eq: 17b910a} \quad (9.2.17) \quad L_X \omega_g = (\text{div } X) \cdot \omega_g, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

²Per definire la divergenza di un campo di vettori è sufficiente avere assegnato su M una connessione affine.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma = (Y_1, \dots, Y_m)$ un riferimento ortonormale locale, orientato positivamente. Allora

$$0 = X \cdot 1 = X\omega_g(Y_1, \dots, Y_m) = (L_X\omega_g)(Y_1, \dots, Y_m) + \sum_i \omega_g(\dots, [X, Y_i], \dots).$$

Posto $X = \sum_{i=1}^m f^i Y_i$, con f^i funzioni \mathcal{C}^∞ , abbiamo

$$\begin{aligned} [X, Y_i] &= \sum_{j=1}^m f^j [Y_j, Y_i] - \sum_{j=1}^m (Y_i f^j) Y_j \\ &= \sum_{j=1}^m f^j (\nabla_{Y_j} Y_i - \nabla_{Y_i} Y_j) - \sum_{j=1}^m (Y_i f^j) Y_j \\ &= \sum_{j,h=1}^m f^j (\Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ij}^h) Y_h - \sum_{h=1}^m (Y_i f^h) Y_h. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} &\omega_g(Y_1, \dots, [X, Y_i], \dots, Y_m) \\ &= g\left(Y_1, \dots, \left(\sum_{j,h=1}^m f^j (\Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ij}^h) Y_h - \sum_{h=1}^m (Y_i f^h) Y_h\right), \dots, Y_m\right) \\ &= g\left(Y_1, \dots, \left(\sum_{j=1}^m f^j (\Gamma_{ji}^i - \Gamma_{ij}^i) - (Y_i f^i)\right) Y_i, \dots, Y_m\right) \\ &= -g\left(Y_1, \dots, \left(Y_i f^i + \sum_{j=1}^m f^j \Gamma_{ij}^i\right) Y_i, \dots, Y_m\right) \\ &= -\left(Y_i f^i + \sum_{j=1}^m f^j \Gamma_{ij}^i\right) \end{aligned}$$

La [eq: 17b910a](#) segue allora dalla [eq: 17b99](#) □

Osserviamo che, per ogni intero non negativo k , vale la

$$\boxed{\text{eq: 17b911}} \quad (9.2.18) \quad L_X \alpha = X \lrcorner \alpha + d(X \lrcorner \alpha), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall \alpha \in \mathcal{O}^k(M).$$

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, ed $\alpha = f\omega_g$ con $\text{supp } f \cap \text{supp } X$ compatto in M , otteniamo

$$\int_M L_X(f\omega_g) = \int_M d(fX \lrcorner \omega_g) = 0$$

e quindi

$$\int_M g(\nabla f, X) \omega_g = \int_M Xf \omega_g = \int_M L_X(f\omega_g) - \int_M fL_X\omega_g = - \int_M f \text{div } X \omega_g.$$

Abbiamo dimostrato cioè che l'opposto della divergenza sui campi di vettori è l'aggiunto formale del gradiente delle funzioni:

Proposizione 9.2.10. *Se (M, g) è una varietà Riemanniana orientabile, allora*

$$\boxed{\text{eq: 17b913}} \quad (9.2.19) \quad \int_M g(\nabla f, X) \omega_g = - \int_M f \text{div } X \omega_g, \\ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall X \in \mathfrak{X}(M), \text{ con } \text{supp } f \cap \text{supp } X \Subset M. \quad \square$$

Da questa ricaviamo

Proposizione 9.2.11 (Formula d'integrazione per parti). *Se $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\text{supp } f \cap \text{supp } g \cap \text{supp } X \Subset M$, allora*

eq: 17b912a

$$(9.2.20) \quad \int_M f(Xg) \omega_g = - \int_M g(Xf + f \text{div } X) \omega_g.$$

Definizione 9.2.12. L'operatore differenziale lineare del prim'ordine

eq: 17b912b

$$(9.2.21) \quad X^* f = -Xf - f \text{div } X$$

si dice l'*aggiunto formale* del campo di vettori X .

9.2.4. Operatore di Laplace-Beltrami.

Proposizione 9.2.13. *Abbiamo*

eq: 17b914

$$(9.2.22) \quad \Delta f = -\text{div}(\nabla f), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, otteniamo

$$g(\nabla_X(\nabla f), Y) = Xg(\nabla f, Y) - g(\nabla f, \nabla_X Y) = XYf - \nabla_X Yf.$$

Per calcolare l'espressione locale della divergenza di ∇f , possiamo utilizzando un riferimento ortonormale $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$, definito su un aperto U di M . Per la [\(9.2.15\)](#) abbiamo in U

$$\text{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{X_i} \nabla f, X_i) = \sum_{i=1}^m (X_i^2 - \nabla_{X_i} X_i) f = -\Delta f.$$

□

Come conseguenza delle [\(9.2.19\)](#) e [\(9.2.22\)](#) abbiamo

Proposizione 9.2.14. *Vale la*

$$(9.2.23) \quad \int_M g(\nabla f, \nabla \phi) \omega_g = \int_M f \Delta \phi \omega_g,$$

$$\forall f, \phi \in \mathcal{C}^\infty(M), \text{ con } \text{supp } f \cap \text{supp } \phi \Subset M. \quad \square$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un riferimento ortonormale su un aperto U di M , allora

$$g\left(\sum_{i=1}^m \nabla_{X_i} X_i, X_j\right) = -\sum_{i=1}^m g(X_i, \nabla_{X_i} X_j) = -\text{div } X_j.$$

Otteniamo quindi

eq: 17b917

$$(9.2.24) \quad \sum_{i=1}^m \nabla_{X_i} X_i = -\sum_{i=1}^m (\text{div } X_i) X_i$$

e dunque l'espressione del Laplaciano sulle funzioni rispetto ad un riferimento ortonormale:

$$(9.2.25) \quad \Delta = -\sum_{i=1}^m (X_i^2 + (\text{div } X_i) X_i).$$

Siano $\alpha \in \mathcal{T}^{1,q}(M)$ e $\beta \in \mathcal{T}^{0,q}(M)$, con $\text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta \Subset U$. Allora

$$\begin{aligned} \int_M g(\alpha, \nabla \beta) &= \sum_{i=1}^m \int_M g(\alpha(X_i), \nabla_{X_i} \beta) \omega_g \\ &= \sum_{i=1}^m \int_M [X_i g(\alpha(X_i), \beta) - g((\nabla_{X_i} \alpha)(X_i), \beta) - g(\alpha(\nabla_{X_i} X_i), \beta)] \omega_g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m \int_M [-(\operatorname{div} X_i)g(\alpha(X_i), \beta) - g((\nabla_{X_i}\alpha)(X_i), \beta) - g(\alpha(\nabla_{X_i}X_i), \beta)] \omega_g \\
&= \int_M g(\sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i}\alpha)(X_i), \beta) \omega_g,
\end{aligned}$$

perché, per la (9.2.24) la sommatoria dei primi e dei terzi addendi sono l'una l'opposta dell'altra.

9.2.5. Codifferenziale. Poiché la derivazione covariante commuta con gli isomorfismi \flat e \sharp , utilizzando la partizione dell'unità otteniamo la seguente:

Proposizione 9.2.15. *Siano k, q due interi non negativi. Risulta univocamente determinato un operatore differenziale lineare del prim'ordine $\flat : \mathfrak{T}^{k+1, q} \rightarrow \mathfrak{T}^{k, q}$ tale che*

$$(9.2.26) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_M g(\flat\alpha, \beta) d\mu_g &= \int_M g(\alpha, \nabla\beta) d\mu_g, \\ \forall \alpha \in \mathfrak{T}^{k+1, q}(M), \forall \beta \in \mathfrak{T}^{k, q}(M), &\text{ con } \operatorname{supp} \alpha \cap \operatorname{supp} \beta \text{ compatto.} \end{aligned} \right.$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un riferimento ortonormale su un aperto U di M , abbiamo

$$(9.2.27) \quad \flat\alpha = -\sum_{i=1}^m X_i \lrcorner (\nabla_{X_i}\alpha) \text{ su } U. \quad \square$$

Definizione 9.2.16. Il codifferenziale di $\alpha \in \mathfrak{T}^{k+1, q}(M)$ è il tensore $\flat\alpha$ definito da (9.2.27).

Porremo $\flat\alpha = 0$ se $\alpha \in \mathfrak{T}^{0, q}(M)$.

9.2.6. Codifferenziale sulle forme alternate e Laplaciano di Hodge-deRham.

Supponiamo nel seguito che (M, g) sia Riemanniana orientata, con forma di volume ω_g .

Proposizione 9.2.17. *Il codifferenziale definisce un operatore $\flat : \mathcal{Q}^{k+1} \rightarrow \mathcal{Q}^k(M)$, che si può esprimere utilizzando il differenziale e l'operatore di Hodge mediante la formula*

$$(9.2.28) \quad \flat\alpha = (-1)^{k+1} * d(*\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathcal{Q}^k(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}
\int_M g(\flat\alpha, \beta) \omega_g &= \int_M g(\alpha, d\beta) \omega_g = \int_M (*\alpha) \wedge d\beta \\
&= (-1)^{k+1} \int_M (d(*\alpha)) \wedge \beta = (-1)^{k+1} \int_M g(*d*\alpha, \beta) \omega_g.
\end{aligned}$$

□

Definizione 9.2.18. Il Laplaciano di Hodge-deRham sulle k -forme è l'operatore differenziale

$$(9.2.29) \quad \Delta = (\flat \circ d + d \circ \flat) : \mathcal{Q}^k(M) \rightarrow \mathcal{Q}^k(M).$$

9.2.7. Differenziazione di forme simmetriche.

Notazione 9.2.19. Indichiamo con $S^k M$ il fibrato vettoriale dei tensori simmetrici k -controvarianti su M e con $\mathcal{S}^k(M)$ lo spazio delle sue sezioni, cioè delle k -forme simmetriche su M .

La differenziazione covariante ∇ definisce un'applicazione $\nabla : \mathcal{S}^k(M) \rightarrow \mathcal{Q}^1(M, S^k M)$.

Definizione 9.2.20. Il differenziale simmetrico $\mathfrak{d}^* : \mathcal{S}^k(M) \rightarrow \mathcal{S}^{k+1}(M)$ è l'operatore differenziale

$$\text{eq: z17b928} \quad (9.2.30) \quad (\mathfrak{d}^* \alpha)(X_0, \dots, X_k) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (\nabla_{X_i} \alpha)(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k).$$

Se $\alpha \in \mathcal{S}^1(M) = \mathcal{Q}^1(M)$, posto $A = \alpha^\sharp$, abbiamo

$$\begin{aligned} (\mathfrak{d}^* \alpha)(X, Y) &= \frac{1}{2} [(\nabla_X \alpha)(Y) + (\nabla_Y \alpha)(X)] \\ &= \frac{1}{2} (X\alpha(Y) - \alpha(\nabla_X Y) + Y\alpha(X) - \alpha(\nabla_Y X)) \\ &= \frac{1}{2} (Xg(A, Y) - g(A, \nabla_X Y) + Yg(A, X) - g(A, \nabla_Y X)) \\ &= \frac{1}{2} (g(\nabla_X A, Y) + g(\nabla_Y A, X)). \end{aligned}$$

Abbiamo poi

$$\begin{aligned} (L_A g)(X, Y) &= Ag(X, Y) - g([A, X], Y) - g([A, Y], X) \\ &= Ag(X, Y) - g(\nabla_A X - \nabla_X A, Y) - g(\nabla_A Y - \nabla_Y A, X) \\ &= g(\nabla_X A, Y) + g(\nabla_Y A, X) \end{aligned}$$

perché $\nabla_A g = 0$. Abbiamo perciò

Lemma 9.2.21. Se $\alpha \in \mathcal{S}^1(M)$, allora

$$\text{eq: z17b729} \quad (9.2.31) \quad (\mathfrak{d}^* \alpha)(X, Y) = -\frac{1}{2} (L_{\alpha^\sharp} g)(X, Y).$$

Definizione 9.2.22. Chiamiamo *divergenza* di una forma simmetrica l'aggiunto formale del differenziale covariante sulle forme simmetriche, cioè l'applicazione $\mathfrak{d} : \mathcal{S}^{k+1}(M) \rightarrow \mathcal{S}^k(M)$ definita da

$$\text{eq: z17b30} \quad (9.2.32) \quad \int_M g(\mathfrak{d}\alpha, \beta) d\mu_g = \int_M g(\alpha, \mathfrak{d}^*\beta) d\mu_g$$

per ogni $\alpha \in \mathcal{S}^{k+1}(M)$ e $\beta \in \mathcal{S}^k(M)$ con $\text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta \Subset M$.

Osserviamo che la divergenza è la restrizione alle forme simmetriche del co-differenziale covariante della Definizione [9.2.16](#).

9.3. Il Laplaciano naturale

Sia (M, g) una varietà Riemanniana. Ad ogni rappresentazione lineare di dimensione finita (ρ, V) di $\mathbf{O}(m)$ è associato un fibrato vettoriale $\eta = (E \xrightarrow{\pi_E} M)$, su cui la connessione di Levi-Civita definisce una differenziazione covariante. Indichiamo con $\mathcal{E}(M)$ lo spazio $\Gamma(M, E)$ delle sue sezioni, con $\mathcal{E}^{(1)}(M)$ lo spazio

delle forme differenziali a coefficienti in E , cioè delle sezioni delle sezioni \mathcal{C}^∞ del fibrato $\eta \otimes \tau_M^* = (E \otimes_M T^*M \rightarrow M)$, e con

$$\text{eq: 17c01} \quad (9.3.1) \quad \nabla : \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{E}^{(1)}(M),$$

la differenziazione covariante.

Possiamo definire su V un prodotto scalare³ h_V per cui $\rho(\mathbf{O}(m)) \subset \mathbf{O}_{h_V}(V)$. Indichiamo con $(\cdot | \cdot)_0$ il corrispondente prodotto scalare sulle fibre di η . Vale allora

$$\text{eq: 17c01a} \quad (9.3.2) \quad X(s_1, s_2)_0 = (\nabla_X s_1, s_2)_0 + (s_1, \nabla_X s_2)_0.$$

Risulta allora definito un prodotto scalare naturale sulle fibre di $\eta \otimes \tau_M^*$, che indicheremo con $(\cdot | \cdot)_1$. Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un riferimento ortonormale su un aperto U di M ed $\alpha, \beta \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$, allora

$$\text{eq: 17c01b} \quad (9.3.3) \quad (\alpha | \beta)_1(p) = \sum_{i=1}^m (\alpha(\sigma_i) | \beta(\sigma_i))_0 \quad \text{su } U.$$

Siano $s \in \mathcal{E}(M)$, $\alpha \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$ tali che $\text{supp } s \cap \text{supp } \alpha \Subset U$. Integrando per parti, otteniamo, indicando con ω_g la forma di volume su U per cui σ è orientato positivamente,

$$\begin{aligned} \int_M (\nabla s | \alpha)_1 \omega_g &= \sum_{i=1}^m \int_M (\nabla_{X_i} s | \alpha(X_i))_0 \omega_g \\ &= \sum_{i=1}^m \int_M (X_i(s | \alpha(X_i))_0 - (s | \nabla_{X_i} [\alpha(X_i)]_0)) \omega_g \\ &= \int_M L_{X_i} [(s | \alpha(X_i))_0 \omega_g] - \int_M (s | \alpha(X_i))_0 L_X \omega_g - \int_M \left(s \left| \sum_i \nabla_{X_i} [\alpha(X_i)] \right. \right)_0 \omega_g \\ &= - \int_M (s | \nabla^* \alpha)_0 \omega_g \end{aligned}$$

ove

$$\text{eq: 17c02} \quad (9.3.4) \quad \nabla^* \alpha = - \sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i} + \text{div } X_i) [\alpha(X_i)] \quad \text{su } U.$$

Osserviamo che un cambiamento di orientazione ^{eq: 17c02} cambia il segno di ω_g e quindi di tutti i termini delle equazioni precedenti. La ^{eq: 17c02} (9.3.4) è quindi ben definita, a prescindere dal dato di un'orientazione globale su M .

Definizione 9.3.1. L'operatore differenziale $\nabla^* : \mathcal{E}^{(1)}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M)$ definito da ^{eq: 17c02} (9.3.4) si dice l'*aggiunto formale della differenziazione covariante*.

L'operatore differenziale

$$\text{eq: 17c03} \quad (9.3.5) \quad \nabla^* \nabla : \mathcal{E}(M) \longrightarrow \mathcal{E}(M)$$

è il *Laplaciano naturale* sulle sezioni di η rispetto alla metrica Riemanniana g .

³Questo prodotto scalare non è univocamente determinato. Lo è, a meno di una costante moltiplicativa, sui fattori irriducibili della rappresentazione (ρ, V) .

Proposizione 9.3.2. *Vale la formula d'integrazione per parti*

$$\text{eq: 17c04} \quad (9.3.6) \quad \int_M g(\nabla s_1, \nabla s_2) d\mu_g = \int_M g(\nabla^* \nabla s_1, s_2) d\mu_g,$$

$\forall s_1, s_2 \in \mathcal{E}(M) \text{ con } \text{supp } s_1 \cap \text{supp } s_2 \Subset M.$

In particolare, se M è compatta, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea

$$\text{eq: 17c05} \quad (9.3.7) \quad \nabla^* \nabla s = 0$$

sono parallele su M .

9.4. Il Laplaciano di Lichnerowicz

Descriviamo in questo paragrafo una nozione generale di Laplaciano sulle varietà Riemanniane, dovuta a Lichnerowicz⁴.

Introduciamo gli operatori di curvatura di Weitzenböck⁵.

Sia $\mathfrak{o}_M = (\mathfrak{o}(M) \xrightarrow{\pi} M)$ il fibrato vettoriale corrispondente alla rappresentazione aggiunta di $\mathbf{O}(m)$. Gli elementi di $\mathfrak{o}_p(M)$ sono gli endomorfismi \mathbb{R} -lineari di $T_p M$ che sono antisimmetrici per g_p :

$$A \in \mathfrak{o}_p(M) \iff (A \in \text{End}_{\mathbb{R}}(T_p M), \quad g_p(AX_p, Y_p) + g_p(X_p, AY_p) = 0, \quad \forall X_p, Y_p \in T_p M).$$

Se $\alpha \in \Omega^2(M)$ ed $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora

$$g([X]\alpha]^\sharp, Y) = [X]\alpha(Y) = \alpha(X, Y) = -\alpha(Y, X) = -g(X, [Y]\alpha]^\sharp).$$

Quindi α definisce la sezione A_α del fibrato $\mathfrak{o}(M)$

$$\text{eq: 17c13b} \quad (9.4.1) \quad A_\alpha(X) = [X]\alpha]^\sharp.$$

Lemma 9.4.1. *La corrispondenza $A : \Omega^2(M) \ni \alpha \rightarrow A_\alpha \in \Gamma(M, \mathfrak{o}(M))$ è un isomorfismo lineare. \square*

Possiamo associare ad $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ la sezione di $A_{X,Y}$ di $\mathfrak{o}(M)$ definita da

$$\text{eq: 17c13c} \quad (9.4.2) \quad A_{X,Y}(Z) = g(X, Z)Y - g(Y, Z)X, \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} g(A_{X,Y}Z_1, Z_2) &= g(g(X, Z_1)Y - g(Y, Z_1)X, Z_2) \\ &= g(X, Z_1)g(Y, Z_2) - g(Y, Z_1)g(X, Z_2) \\ &= g(Z_1, g(Y, Z_2)X - g(X, Z_2)Y) = -g(Z_1, A_{X,Y}Z_2). \end{aligned}$$

Osservazione 9.4.2. È $A_{X,Y} = A_{(X \wedge Y)^\flat}$.

⁴André Lichnerowicz (1915-1998) è stato un matematico francese, allievo di Élie Cartan. Ha insegnato a Strasburgo e Parigi, dal 1952 al Collège de France. Si è occupato di geometria differenziale, relatività generale ed ha avuto un ruolo importante nella formulazione dei programmi di insegnamento della matematica in Francia.

⁵Roland Weitzenböck (1885-1955). Matematico austriaco, ha studiato a Vienna, Bonn e Göttingen. Ha insegnato a Praga, e dal 1923 al 1945 ad Amsterdam. Per la sua attività filo-nazista, fu internato al termine della guerra, fino al 1948. Si occupò di teoria degli invarianti, di invarianti spaziali e di teoria dei campi. Ottenne le formule per il Laplaciano di Hodge-deRham nel 1923. [Invariantentheorie, Groningen, Noordhoff]

Sia ora (ρ, V) una rappresentazione lineare di $\mathbf{O}(m)$ ed $\eta = (E \xrightarrow{\pi_E} M)$ il corrispondente fibrato vettoriale. Lo spazio totale E è il quoziente di $\mathbf{O}(M) \times V$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$(\sigma_1, v_1) \sim (\sigma_2, v_2) \iff (\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2), v_2 = \rho(\sigma_2^{-1}\sigma_1)(v_1)).$$

Indichiamo con $\varpi : \mathbf{O}(M) \times V \rightarrow E$ la proiezione nel quoziente. Ricordiamo ancora che possiamo definire un prodotto scalare h_V su V per cui $\rho(\mathbf{O}(m)) \subset \mathbf{O}_{h_V}(V)$ e che questo definisce un prodotto scalare invariante sulle fibre di η . Il differenziale di ρ nell'origine definisce una rappresentazione lineare $\rho_* : \mathfrak{o}(m) \rightarrow \mathfrak{o}_{h_V}(V)$ dell'algebra di Lie, che definisce un morfismo lineare di fibrati

$$\text{eq: 17c13d} \quad (9.4.3) \quad [\rho]_* : \mathfrak{o}(M) \longrightarrow \mathfrak{o}(E)$$

ove abbiamo indicato con $\mathfrak{o}(E)$ lo spazio degli endomorfismi lineari antisimmetrici sulle fibre di η . Esso si definisce nel modo seguente. Siano $p \in M$ e T un endomorfismo g_p -antisimmetrico di $T_p M$. Se $\sigma \in \mathbf{O}_p(M)$, allora $\sigma^{-1} \circ T \circ \sigma \in \mathfrak{o}(m)$. Definiamo $[\rho]_*(T)$ in modo che

$$[\rho]_*(T)\varpi(\sigma, v) = \varpi(\sigma, \rho_*(\sigma^{-1} \circ T \circ \sigma)(v)), \quad \forall v \in V.$$

Definiamo quindi una forma $c_\rho \in \Omega^2(M, \mathfrak{o}(E))$ ponendo

$$\text{eq: 17c13e} \quad (9.4.4) \quad c_\rho(X, Y) = [\rho]_*(A_{X, Y}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Definizione 9.4.3. Chiamiamo la $c_\rho \in \Omega^2(M, \mathfrak{o}(E))$, definita dalla (9.4.4), la *forma caratteristica* del fibrato η . eq: 17c13e

Ricordiamo che su ogni spazio tensoriale $\mathfrak{T}^{r,s}(M)$ è definita la curvatura

$$\text{eq: 17c13} \quad (9.4.5) \quad R(X, Y)\tau = \nabla_X \nabla_Y \tau - \nabla_Y \nabla_X \tau - \nabla_{[X, Y]}\tau, \quad \forall \tau \in \mathfrak{T}^{r,s}(M), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Ad esempio, se $\alpha \in \Omega^1(M)$ ed $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, otteniamo

$$\text{eq: 17c14c} \quad (9.4.6) \quad (R(X, Y)\alpha)(Z) = -\alpha(R(X, Y)Z).$$

Infatti

$$\begin{aligned} (R(X, Y)\alpha)(Z) &= (\nabla_X \nabla_Y \alpha)(Z) - (\nabla_Y \nabla_X \alpha)(Z) - (\nabla_{[X, Y]}\alpha)(Z) \\ &= X((\nabla_Y \alpha)(Z)) - (\nabla_Y \alpha)(\nabla_X Z) - Y((\nabla_X \alpha)(Z)) + (\nabla_X \alpha)(\nabla_Y Z) \\ &\quad - [X, Y]\alpha(Z) + \alpha(\nabla_{[X, Y]}Z) \\ &= X(Y\alpha(Z) - \alpha(\nabla_Y Z)) - (\nabla_Y \alpha)(\nabla_X Z) \\ &\quad - Y(X\alpha(Z) - \alpha(\nabla_X Z)) + (\nabla_X \alpha)(\nabla_Y Z) \\ &\quad - [X, Y]\alpha(Z) + \alpha(\nabla_{[X, Y]}Z) \\ &= XY\alpha(Z) - (\nabla_X \alpha)(\nabla_Y Z) - (\nabla_Y \alpha)(\nabla_X Z) - \alpha(\nabla_X \nabla_Y Z) \\ &\quad - YX\alpha(Z) + (\nabla_Y \alpha)(\nabla_X Z) + (\nabla_X \alpha)(\nabla_Y Z) + \alpha(\nabla_Y \nabla_X Z) \\ &\quad - [X, Y]\alpha(Z) + \alpha(\nabla_{[X, Y]}Z) \end{aligned}$$

da cui, poiché la connessione di Levi-Civita è simmetrica, otteniamo la (9.4.6). eq: 17c14c

Definizione 9.4.4. Il *tensore di Ricci generalizzato*, od *operatore di curvatura di Weitzenböck*, sui tensori k -controvarianti, con $k \geq 1$, è definito da

eq: 17c14

(9.4.7)

$$\mathcal{R}ic(\tau)(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (R(Y_i, X_j)\tau)(X_1, \dots, X_{j-1}, Y_i, X_{j+1}, \dots, X_k),$$

ove (Y_1, \dots, Y_m) è un qualsiasi riferimento ortonormale.

In particolare, se α è una 1-forma differenziale, abbiamo

eq: 17c14a

(9.4.8)

$$\mathcal{R}ic(\alpha)(X) = \sum_{i=1}^m R(Y_i, X)\alpha(Y_i) = -\alpha(R(Y_i, X)Y_i)$$

Definizione 9.4.5. Un *Laplaciano di Lichnerowicz* è della forma

eq: 17c15

(9.4.9)

$$\Delta_L \tau = \nabla^* \nabla \tau + c \mathcal{R}ic(\tau),$$

per una costante $c > 0$.

9.5. Laplaciano sulle forme differenziali alternate

9.5.1. Espressione del differenziale mediante la derivazione covariante.

La derivazione covariante rispetto ad una connessione simmetrica ci permette di calcolare il differenziale di una forma alternata con una formula che è diretta generalizzazione di quella, in coordinate, valida per gli spazi Euclidei.

prop: 17c22

Proposizione 9.5.1. Se ∇ è la derivazione covariante di una connessione affine simmetrica su M , allora, per ogni $\alpha \in \mathcal{O}^k(M)$ ed $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ vale la

eq: 17c21

(9.5.1)

$$d\alpha(X_0, \dots, X_k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j (\nabla_{X_j} \alpha)(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k).$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un sistema di riferimento su un aperto U di M e (ξ^1, \dots, ξ^m) il coriferimento duale, definito da $\xi^i(X_j) = \delta_j^i$ per $1 \leq i, j \leq m$, abbiamo

eq: 17c21a

(9.5.2)

$$d\alpha = \sum_{i=1}^m \xi^i \wedge \nabla_{X_i} \alpha \quad \text{in } U.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} d\alpha(X_0, \dots, X_k) &= \sum_j (-1)^j X_j \alpha(\dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &= \sum_j (-1)^j (\nabla_{X_j} \alpha)(\dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha(\nabla_{X_i} X_j, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha(\nabla_{X_j} X_i, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &= \sum_j (-1)^j (\nabla_{X_j} \alpha)(\dots, \widehat{X}_j, \dots) \\ &\quad - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha(T(X_i, X_j), \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots), \end{aligned}$$

dove T è la torsione. Otteniamo quindi la (9.5.1) se supponiamo $T = 0$.

Verifichiamo ora la (9.5.2). Basta verificare che i due membri dell'equazione assumono gli stessi valori sulle k -uple di elementi del sistema di riferimento σ . Se $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, otteniamo

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^m \xi^i \wedge \nabla_{X_i} \alpha \right) (X_{i_0}, \dots, X_{i_k}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^k (-1)^j \xi^i(X_{i_j}) (\nabla_{X_i} \alpha) (\dots, \widehat{X_{i_j}}, \dots) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j (\nabla_{X_{i_j}} \alpha) (\dots, \widehat{X_{i_j}}, \dots) \end{aligned}$$

e l'ultimo termine dell'uguaglianza è uguale a $d\alpha(X_{i_0}, \dots, X_{i_k})$ per la (9.5.1). \square

9.5.2. Aggiunto formale del differenziale. Utilizziamo la Proposizione 9.5.1 per calcolare l'aggiunto formale del differenziale esterno. Osserviamo che, se $\beta \in \mathcal{Q}^{k+1}(M)$ ed $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, allora

$$(X_i \lrcorner \beta)(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_k) = (-1)^i \beta(X_0, \dots, X_k), \quad \forall i = 0, 1, \dots, k.$$

Supponiamo ora che (M, g) sia una varietà Riemanniana e $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ un sistema di riferimento ortonormale su un aperto U di M . Siano $\alpha \in \mathcal{Q}^k(M)$ e $\beta \in \mathcal{Q}^{k+1}(M)$, con $\text{supp } \alpha \subseteq U$. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} &\int_M g(d\alpha, \beta) d\mu_g \\ &= \sum_{i_0 < \dots < i_k} \sum_j (-1)^j \int_M (\nabla_{X_{i_j}} \alpha)(X_{i_0}, \dots, \widehat{X_{i_j}}, \dots, X_{i_k}) \cdot \beta(X_{i_0}, \dots, X_{i_j}, \dots, X_{i_k}) d\mu_g \\ &= \sum_{i_0 < \dots < i_k} \sum_j \int_M (\nabla_{X_{i_j}} \alpha)(X_{i_0}, \dots, \widehat{X_{i_j}}, \dots, X_{i_k}) \cdot X_{i_j} \lrcorner \beta(X_{i_0}, \dots, \widehat{X_{i_j}}, \dots, X_{i_k}) d\mu_g \\ &= \sum_{j=0}^m \int_M g(\nabla_{X_j} \alpha, X_j \lrcorner \beta) d\mu_g \end{aligned}$$

Osserviamo che, se $X, Y, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, è

$$\begin{aligned} (\nabla_X(Y \lrcorner \beta))(X_1, \dots, X_k) &= X\beta(Y, X_1, \dots, X_k) - \sum \beta(Y, \dots, \nabla_X X_j, \dots) \\ &= (\nabla_X \beta)(Y, X_1, \dots, X_k) + \beta(\nabla_X Y, X_1, \dots, X_k), \end{aligned}$$

abbiamo cioè

eq: 17b22

$$(9.5.3) \quad \nabla_X(Y \lrcorner \beta) = Y \lrcorner \nabla_X \beta + (\nabla_X Y) \lrcorner \beta.$$

Supponiamo ora di aver fissato un'orientazione su U , ed indichiamo con ω_g la corrispondente forma di volume. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_M g(\nabla_X \alpha, Y \lrcorner \beta) \omega_g &= \int_M (Xg(\alpha, Y \lrcorner \beta)) \omega_g - \int_M g(\alpha, \nabla_X(Y \lrcorner \beta)) \omega_g \\ &= \int_M L_X(g(\alpha, Y \lrcorner \beta) \omega_g) - \int_M g(\alpha, Y \lrcorner \beta) L_X \omega_g \\ &\quad - \int_M g(\alpha, Y \lrcorner \nabla_X \beta) \omega_g - \int_M g(\alpha, \nabla_X Y \lrcorner \beta) \omega_g \\ &= - \int_M g(\alpha, Y \lrcorner \nabla_X \beta) \omega_g - \int_M g(\alpha, (\nabla_X Y + (\text{div } X)Y) \lrcorner \beta) \omega_g. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi, per l'aggiunto formale del differenziale, l'espressione

$$d^*\beta = -\sum_i X_i \lrcorner \nabla_{X_i} \beta - \left(\sum_i (\nabla_{X_i} X_i + (\operatorname{div} X_i) X_i) \right) \lrcorner \beta.$$

Poiché

$$\sum_i (\operatorname{div} X_i) X_i = \sum_{i,j} g(\nabla_{X_j} X_i, X_j) X_i = -\sum_{i,j} g(X_i, \nabla_{X_j} X_j) X_i = -\sum_j \nabla_{X_j} X_j,$$

l'ultima sommatoria al secondo membro dell'espressione che abbiamo ottenuto per $d^*\beta$ si annulla ed otteniamo perciò

Proposizione 9.5.2. *Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è un riferimento ortogonale su un aperto U di M e $\beta \in \Omega^{k+1}(M)$, allora*

$$\text{eq: 17c23} \quad (9.5.4) \quad d^*\beta = \sum_{i=0}^m X_i \lrcorner \nabla_{X_i} \beta \quad \text{in } U. \quad \square$$

9.5.3. Aggiunti formali della derivazione covariante e del prodotto esterno. Raccogliamo in questo breve paragrafo alcune formule che ci saranno utili nel seguito.

Lemma 9.5.3. *Se (M, g) è una varietà Riemanniana orientata, allora*

$$\text{eq: 17c24} \quad (9.5.5) \quad \nabla_X^* \alpha = -\nabla_X \alpha - (\operatorname{div} X) \cdot \alpha, \quad \forall \alpha \in \Omega^k(M), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\beta \in \Omega^k(M)$ e $\operatorname{supp} \alpha \cap \operatorname{supp} \beta \Subset M$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_M g(\alpha, \nabla_X \beta) \omega_g &= \int_M (Xg(\alpha, \beta)) \omega_g - \int_M g(\nabla_X \alpha, \beta) \omega_g \\ &= -\int_M g(\alpha, \beta) (\operatorname{div} X) \omega_g - \int_M g(\nabla_X \alpha, \beta) \omega_g, \end{aligned}$$

da cui segue la [eq: 17c24](#) [\(9.5.5\)](#). □

Lemma 9.5.4. *Sia $X \in \mathfrak{X}(M)$. L'applicazione*

$$\text{eq: 17c25} \quad (9.5.6) \quad \Omega^k(M) \ni \alpha \longrightarrow X^{\flat} \alpha \in \Omega^{k+1}(M)$$

è l'aggiunta formale del prodotto interno

$$\text{eq: 17c26} \quad (9.5.7) \quad \Omega^{k+1}(M) \ni \beta \longrightarrow X \lrcorner \beta \in \Omega^k(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ un riferimento ortonormale su un aperto U di M . Abbiamo in U , per $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^{k+1}(M)$,

$$\begin{aligned} g(\alpha, X \lrcorner \beta) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \beta(X, X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \\ &= \sum_{i_0} \sum_{i_1 < \dots < i_k} g(X, X_{i_0}) \alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \beta(X_{i_0}, X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \\ &= \sum_{i_0 < i_1 < \dots < i_k} \sum_{h=0}^k (-1)^h g(X, X_{i_h}) \alpha(\dots, \widehat{X_{i_h}}, \dots) \beta(X_{i_0}, X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \\ &= g(X^{\flat} \alpha, \beta). \end{aligned}$$

Questa uguaglianza dimostra il Lemma. □

9.5.4. La formula di Weitzenböck. Dalla [eq:17c21a](#) (9.5.2) della [prop:17c22](#) Proposizione 9.5.1 abbiamo:

[prop:17c86](#) **Proposizione 9.5.5.** *Sia $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ un riferimento ortonormale su un aperto U di M . Se $\alpha \in \Omega^k(M)$, abbiamo*

$$\a href="#">eq:17c27 (9.5.8) \quad d\alpha = \sum_{i=1}^m X_i^b \wedge \nabla_{X_i} \alpha \quad \text{in } U.$$

Ricordiamo che la derivazione covariante è una derivazione dell'algebra esterna. È cioè

$$\a href="#">eq:17c28 (9.5.9) \quad \nabla_X(\alpha \wedge \beta) = (\nabla_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \nabla_X \beta, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall \alpha, \beta \in \Omega^*(M).$$

Immersioni, isometrie, campi di Killing

ch: f06

sub: 1511

10.1. Immersioni pseudo-Riemanniane

10.1.1. Sottofibrati con sottogruppo strutturale riduttivo e connessione indotta. Siano $\xi_G = (P_G \xrightarrow{\pi_G} M)$ un fibrato principale con gruppo strutturale \mathbf{G} e $\xi_H = (P_H \xrightarrow{\pi_H} M)$ un suo sottofibrato principale, con gruppo strutturale $\mathbf{H} < \mathbf{G}$. Indichiamo con \mathfrak{h} e \mathfrak{g} le rispettive algebre di Lie.

Definizione 10.1.1. Diciamo che \mathbf{H} è *riduttivo* in \mathfrak{g} se \mathfrak{h} ammette in \mathfrak{g} un complemento $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante, se cioè possiamo trovare un sottospazio vettoriale \mathfrak{m} di \mathfrak{g} tale che

eq: 1501

$$(10.1.1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{Ad}(h)(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} \quad \forall h \in \mathbf{H}.$$

Indichiamo con $\text{pr}_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ la proiezione su \mathfrak{h} associata alla decomposizione (10.1.1). Poiché $\text{pr}_{\mathfrak{h}}$ commuta con $\text{Ad}(h)$ per ogni $h \in \mathbf{H}$, vale la

prop: 1501

Proposizione 10.1.2. Se $\omega_{\mathfrak{g}} \in \Omega^1(P_G, \mathfrak{g})$ è la forma di Cartan di una connessione principale su ξ_G , allora $\omega_{\mathfrak{h}} = \text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ \iota^* \omega_{\mathfrak{g}} \in \Omega^1(P_H, \mathfrak{h})$ è la forma di Cartan di una connessione su ξ_H . \square

Osservazione 10.1.3. I sottogruppi compatti e i sottogruppi semisemplici sono riduttivi. Se \mathbf{H} è compatto o semisemplice, possiamo definire su \mathfrak{g} una forma bilineare simmetrica β invariante, tale cioè che

$$\beta([X_1, X_2], X_3) + \beta(X_2, [X_1, X_3]) = 0, \quad \forall X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{g},$$

e la cui restrizione ad \mathfrak{h} sia non degenera. Possiamo allora scegliere \mathfrak{m} come l'ortogonale di \mathfrak{h} rispetto alla forma β .

sub: 1512

10.1.2. Una decomposizione canonica per i gruppi ortogonali. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e g una forma bilineare simmetrica non degenera su V . Fissiamo una decomposizione ortogonale

$$(10.1.2) \quad V = U \oplus W, \quad U \perp W,$$

con $\dim U = m > 0$, $\dim W = k > 0$, $m + k = n$. I due sottospazi U e W sono anisotropi. Consideriamo i gruppi

$$\mathbf{O}_g(V) = \{a \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V) \mid g(a(v), a(v)) = g(v, v), \quad \forall v \in V\},$$

$$\mathbf{O}_g(U) = \{a \in \mathbf{O}_g(V) \mid a(w) = w, \quad \forall w \in W\},$$

$$\mathbf{O}_g(W) = \{a \in \mathbf{O}_g(V) \mid a(u) = u, \quad \forall u \in U\},$$

$$\mathbf{O}_g(U, W) = \{a \in \mathbf{O}_g(V) \mid a(U) = U, a(W) = W\} \simeq \mathbf{O}_g(U) \times \mathbf{O}_g(W).$$

Ciascuno dei sottogruppi $\mathbf{O}_g(U)$, $\mathbf{O}_g(W)$ ed $\mathbf{O}_g(U, W)$ è semisemplice e quindi riducibile nell'algebra di Lie $\mathfrak{o}_g(V)$ di $\mathbf{O}_g(V)$. Indichiamo con $\mathfrak{o}_g(U)$, $\mathfrak{o}_g(W)$, $\mathfrak{o}_g(U, W)$ le loro algebre di Lie. La forma

$$(10.1.3) \quad \beta(X, Y) = \text{tr}(XY) \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{o}_g(V)$$

è non degenera ed invariante su $\mathfrak{o}_g(V)$ e le sottoalgebre $\mathfrak{o}_g(U)$, $\mathfrak{o}_g(W)$, $\mathfrak{o}_g(U, W)$ sono β -anisotrope. Abbiamo perciò decomposizioni β -ortogonali

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}_g(V) &= \mathfrak{o}_g(U) \oplus \mathfrak{m}_U, & \text{con } \text{Ad}(\mathbf{O}_g(U))(\mathfrak{m}_U) &= \mathfrak{m}_U, \\ \mathfrak{o}_g(V) &= \mathfrak{o}_g(W) \oplus \mathfrak{m}_W, & \text{con } \text{Ad}(\mathbf{O}_g(W))(\mathfrak{m}_W) &= \mathfrak{m}_W, \\ \mathfrak{o}_g(V) &= \mathfrak{o}_g(U, W) \oplus \mathfrak{m}_{U,W}, & \text{con } \text{Ad}(\mathbf{O}_g(U, W))(\mathfrak{m}_{U,W}) &= \mathfrak{m}_{U,W}, \end{aligned}$$

con $\mathfrak{m}_{U,W} = \mathfrak{m}_U \cap \mathfrak{m}_W$, poiché $\mathfrak{o}_g(U, W) = \mathfrak{o}_g(U) \oplus \mathfrak{o}_g(W)$.

Possiamo dare una rappresentazione matriciale di questi oggetti scegliendo una base e_1, \dots, e_n di V per cui e_1, \dots, e_m sia una base di U ed e_{m+1}, \dots, e_n una base di W . In questa base

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} g_U & 0 \\ 0 & g_W \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{o}_g(V) &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{U,U} & X_{U,W} \\ X_{W,U} & X_{W,W} \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} {}^t X_{U,U} g_U + g_U X_{U,U} = 0, \\ {}^t X_{W,W} g_W + g_W X_{W,W} = 0, \\ {}^t X_{W,U} g_W + g_U X_{U,W} = 0 \end{array} \right. \right\}, \\ \mathfrak{o}_g(U) &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{U,U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left| {}^t X_{U,U} g_U + g_U X_{U,U} = 0 \right. \right\}, \\ \mathfrak{m}_U &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_{U,W} \\ X_{W,U} & X_{W,W} \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}_g(V) \right\}, \\ \mathfrak{o}_g(W) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_{W,W} \end{pmatrix} \left| {}^t X_{W,W} g_W + g_W X_{W,W} = 0 \right. \right\}, \\ \mathfrak{m}_W &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{U,U} & X_{U,W} \\ X_{W,U} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}_g(V) \right\}, \\ \mathfrak{o}_g(U, W) &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{U,U} & 0 \\ 0 & X_{W,W} \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}_g(V) \right\}, \\ \mathfrak{m}_{U,W} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_{U,W} \\ X_{W,U} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}_g(V) \right\}. \end{aligned}$$

10.1.3. La nozione di immersione pseudo-Riemanniana. Siano (M, g) ed (N, h) due varietà pseudo-Riemanniane.

Definizione 10.1.4. Un'immersione pseudo-Riemanniana è un'applicazione differenziabile $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ per cui sia $g = f^*h$, cioè

$$\text{eq: 1511} \quad (10.1.4) \quad g_p(X, Y) = h(f_*(X_p), f_*(Y_p)), \quad \forall p \in M, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Poiché g è non degenera, abbiamo

Proposizione 10.1.5. Ogni immersione pseudo-Riemanniana è un'immersione differenziabile. \square

Osservazione 10.1.6. Viceversa, se (N, h) è una varietà pseudo-Riemanniana, ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ un'immersione differenziabile, condizione necessaria e sufficiente affinché $g = f^*h$ definisca una struttura pseudo-Riemanniana su M è che f_*T_pM sia anisotropo in $(T_{f(p)}N, h_{f(p)})$ per ogni $p \in M$.

10.1.4. Fibrati e connessioni associati ad un'immersione sub-Riemanniana.

Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ un'immersione sub-Riemanniana. Indichiamo con f^*TN il pullback su M del fibrato tangente di N :

$$f^*TN = \{(p, w) \in M \times TN \mid f(p) = \pi_N(w)\}.$$

Definizione 10.1.7. Il fibrato normale dell'immersione pseudo-Riemanniana f è il sottofibrato vettoriale di f^*TN

$$\text{eq: 1512} \quad (10.1.5) \quad NM = \{(p, w) \in f^*TN \mid w \perp T_pM\}.$$

Supponiamo che g, h abbiano in ogni punto segnatura $(p_g, q_g), (p_h, q_h)$ con $p_g \leq p_h, q_g \leq q_h, p_g + q_g = m, p_h + q_h = n = m + k$ e fissiamo una matrice simmetrica

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & \\ & b_2 \end{pmatrix}$$

con segnatura (p_h, q_h) , con b_1 simmetrica con segnatura (p_g, q_g) , b_2 simmetrica con segnatura $(p_h - p_g, q_h - q_g)$. Introduciamo i fibrati principali con spazi totali

$$\mathbf{O}^b(N) = \bigcup_{q \in N} \{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, T_qN) \mid {}^t v b v = h(\sigma(v), \sigma(v)), \forall v \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\mathbf{O}^b(M) = \bigcup_{p \in M} \{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, T_{f(p)}N) \mid {}^t v b v = h(\sigma(v), \sigma(v)), \forall v \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\mathbf{O}^{b_1}(M) = \bigcup_{p \in M} \{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, T_pM) \mid {}^t v b_1 v = g(\sigma(v), \sigma(v)), \forall v \in \mathbb{R}^m\},$$

$$\mathbf{O}^{b_2}(M) = \bigcup_{p \in M} \{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^k, N_pM) \mid {}^t v b_2 v = h(\sigma(v), \sigma(v)), \forall v \in \mathbb{R}^k\},$$

$$\mathbf{O}^b(M, N) = \bigcup_{p \in M} \{\sigma \in \mathbf{O}^b_p(M) \mid \sigma(e_i) \in f_*T_pM, 1 \leq i \leq m\},$$

ove abbiamo indicato con e_1, \dots, e_n i vettori della base canonica di \mathbb{R}^n .

Utilizzeremo la decomposizione canonica descritta nella §10.1.2. Per utilizzare le notazioni introdotte in §10.1.2, indicheremo con V la fibra tipica di TN , con U quella di TM e con W quella di NM . La connessione di Levi-Civita di (N, h) induce connessioni principali sui fibrati principali sopra descritti. Indicheremo con ω la forma di Cartan su $\mathbf{O}^b(N)$ e con $\omega^t, \omega^v, \omega^{t,v}$ le connessioni affini sui fibrati $\mathbf{O}^{b_1}(M), \mathbf{O}^{b_2}(M), \mathbf{O}^b(M, N)$, rispettivamente. Su $\mathbf{O}^b(M)$ abbiamo il pullback della connessione di Levi-Civita su N .

10.1.5. La seconda forma fondamentale.

Notazione 10.1.8. Useremo le seguenti notazioni:

- pr_ν e pr_τ sono le proiezioni ortogonali di f^*TN su NM e TM , rispettivamente,
- ∇^τ indica la differenziazione covariante corrispondente alla connessione di Levi Civita su (M, g) ;
- D indica la differenziazione covariante corrispondente alla connessione di Levi-Civita su (N, h) ;
- ∇^f è la derivazione covariante su f^*TS associata al pullback della connessione di Levi-Civita su (N, h) ;
- ∇^ν è la derivazione covariante sul fibrato NM definita da $\nabla_X^\nu Y = \text{pr}_\nu \nabla^f Y$ per $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \Gamma(M, NM)$;
- R, R^f, R^ν sono i tensori di curvatura corrispondenti alla connessione di Levi-Civita di (M, g) , al pullback di quella di (S, h) , alla connessione lineare sul fibrato normale, rispettivamente.

Lemma 10.1.9. Se $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \Gamma(M, NM)$, allora

$$\text{eq: 1507} \quad (10.1.6) \quad \nabla_{X_1}^\tau X_2 = \text{pr}_\tau(\nabla_{X_1}^f X_2) \quad e \quad \nabla_X^\nu Y = \text{pr}_\nu(\nabla_X^f Y).$$

DIMOSTRAZIONE. Si verifica facilmente che la $\nabla_{X_1}^\nu X_2 = \text{pr}_\nu(\nabla_{X_1}^f X_2)$, per $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, definisce la derivazione covariante di una connessione affine simmetrica su M . Per dimostrare che $\nabla^\nu = \nabla^\tau$, che cioè ∇^ν coincide con la connessione di Levi-Civita di (M, g) , è sufficiente verificare che è pseudo-metrica. Per semplicità, possiamo supporre che $M \subset N$, identificando così TM ad un sottospazio di TN . Abbiamo allora $\nabla_X^f Y = D_X Y$ se $X \in \mathfrak{X}(M)$ ed Y un campo di vettori lungo M . È quindi

$$\begin{aligned} (\nabla_X^\nu g)(X_1, X_2) &= Xg(X_1, X_2) - g(\nabla_X^\nu X_1, X_2) - g(X_1, \nabla_X^\nu X_2) \\ &= Xh(X_1, X_2) - h(\nabla_X^\nu X_1, X_2) - h(X_1, \nabla_X^\nu X_2) \\ &= Xh(X_1, X_2) - h(D_X X_1, X_2) - h(X_1, D_X X_2) = 0 \end{aligned}$$

perché D è una connessione pseudo-metrica su (N, h) . \square

lem: 1583 **Lemma 10.1.10.** Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora

$$\text{eq: 1510} \quad (10.1.7) \quad \nabla_X^f Y = \nabla_Y^f X + [X, Y].$$

DIMOSTRAZIONE. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ sono f -correlati a campi $U, V \in \mathfrak{X}(S)$, Allora $\nabla_X^f Y, \nabla_Y^f X, [X, Y]$ sono f -correlati a $D_U V, D_V U, [U, V]$. La (10.1.7) è conseguenza del fatto che la connessione di Levi-Civita su S sia simmetrica. Utilizzando la partizione dell'unità e il fatto che (10.1.7) ha natura locale, possiamo ricondurre la dimostrazione al caso di coppie di campi di vettori che siano f -correlati a campi di vettori su S . \square

Definiamo

$$\text{eq: 1513} \quad (10.1.8) \quad \mathbb{I}(X, Y) = \text{pr}_N(\nabla_X^f Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposizione 10.1.11. \mathbb{I} è un tensore simmetrico a valori nel fibrato normale NM .

DIMOSTRAZIONE. La tesi è conseguenza del Lemma ^{lem: 1583} 10.1.10:

$$\mathbb{I}(X, Y) = \text{pr}_v(\nabla_X^f Y) = \text{pr}_v(\nabla_Y^f X + [X, Y]) = \text{pr}_v(\nabla_Y^f X) = \mathbb{I}(Y, X),$$

perché $\text{pr}_v([X, Y]) = 0$, per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. \square

Definizione 10.1.12. Il tensore $\mathbb{I} \in \mathfrak{S}^2(M, NM)$ si dice la *seconda forma fondamentale* dell'immersione pseudo-Riemanniana f .

Poiché f è un'isometria pseudo-Riemanniana, abbiamo

$$\text{eq: 1513a} \quad (10.1.9) \quad \nabla_X Y = \text{pr}_\tau(\nabla_X^f Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

e vale quindi la

Proposizione 10.1.13 (formula di Gauss). *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora*

$$\text{eq: 1515} \quad (10.1.10) \quad \nabla_X^f Y = \nabla_X Y + \mathbb{I}(X, Y). \quad \square$$

Utilizzando i tensori g ed h , possiamo ricavare da \mathbb{I} un nuovo tensore:

Definizione 10.1.14. Sia $B \in \mathfrak{T}^{1,1}(M, N^*M)$ il tensore definito da

$$\text{eq: 1514} \quad (10.1.11) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, NM) \ni (X, V) \rightarrow B_X V \in \mathfrak{X}(M), \\ g(B_X V, Y) = -h(\mathbb{I}(X, Y), V), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall V \in \Gamma(M, NM). \end{cases}$$

Esso serve ad esprimere la componente tangenziale della derivata covariante di un campo di vettori normali.

Proposizione 10.1.15 (equazione di Weingarten). *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $V \in \Gamma(M, NM)$, allora*

$$\text{eq: 1516} \quad (10.1.12) \quad \nabla_X^f V = B_X V + \text{pr}_v(\nabla_X^f V).$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $V \in \Gamma(M, NM)$. Abbiamo

$$g(\nabla_X^f V, Y) = h(\nabla_X^f V, Y) = X(h(V, Y)) - h(V, \nabla_X^f Y) = -h(V, \mathbb{I}(X, Y)).$$

Quindi $B_X V$ è la componente in TM di $\nabla_X^f V$ ed otteniamo la ^{eq: 1516} (10.1.12). \square

Siano $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$. Abbiamo

$$\nabla_{X_1}^f \nabla_{X_2}^f X_3 = \nabla_{X_1}^f (\nabla_{X_2} X_3 + \mathbb{I}(X_2, X_3)) = \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3 + \mathbb{I}(X_1, \nabla_{X_2} X_3) + \nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3)).$$

Calcoliamo la componente in TM di $\nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3))$. Per ogni $X_4 \in \mathfrak{X}(M)$ otteniamo

$$\begin{aligned} h(\nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3)), X_4) &= X_1 h(\mathbb{I}(X_2, X_3), X_4) - h(\mathbb{I}(X_2, X_3), \nabla_{X_1}^f X_4) \\ &= -h(\mathbb{I}(X_2, X_3), \mathbb{I}(X_1, X_4)). \end{aligned}$$

Risulta perciò

$$\text{eq: 1519} \quad (10.1.13) \quad \left\{ \begin{aligned} R^f(X_1, X_2)X_3 &= \nabla_{X_1}^f \nabla_{X_2}^f X_3 - \nabla_{X_2}^f \nabla_{X_1}^f X_3 - \nabla_{[X_1, X_2]}^f X_3 \\ &= \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3 - \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_3 - \nabla_{[X_1, X_2]} X_3 \\ &\quad + \mathbb{I}(X_1, \nabla_{X_2} X_3) - \mathbb{I}(X_2, \nabla_{X_1} X_3) - \mathbb{I}([X_1, X_2], X_3) \\ &\quad + \nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3)) - \nabla_{X_2}^f (\mathbb{I}(X_1, X_3)). \end{aligned} \right.$$

Se $X_4 \in \mathfrak{X}(M)$ abbiamo allora

$$h(R^f(X_1, X_2)X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4) - h(\mathbb{I}(X_2, X_3), \mathbb{I}(X_1, X_4)) \\ + h(\mathbb{I}(X_1, X_3), \mathbb{I}(X_2, X_4)).$$

Ricordiamo la notazione

$$R^f(X_1, X_2, X_3, X_4) = h(R^f(X_1, X_2)X_3, X_4), \quad R(X_3, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4).$$

Abbiamo ottenuto

$$\text{eq: 1517} \quad (10.1.14) \quad \left\{ \begin{aligned} R^f(X_1, X_2, X_3, X_4) &= R(X_1, X_2, X_3, X_4) \\ &\quad + h(\mathbb{I}(X_1, X_3), \mathbb{I}(X_2, X_4)) - h(\mathbb{I}(X_1, X_4), \mathbb{I}(X_2, X_3)). \end{aligned} \right.$$

Per le formule per la derivazione covariante sui fibrati vettoriali sugli spazi affini del §4.13 del Capitolo 4, abbiamo:

$$\nabla_{X_1}^f (\mathbb{I}(X_2, X_3)) = (\nabla_{X_1}^f \mathbb{I})(X_2, X_3) - \mathbb{I}(\nabla_{X_1} X_2, X_3) - \mathbb{I}(X_2, \nabla_{X_1} X_3).$$

Possiamo quindi riscrivere (10.1.13) nella forma

$$\text{eq: 15110} \quad (10.1.15) \quad \left\{ \begin{aligned} R^f(X_1, X_2)X_3 &= R(X_1, X_2)X_3 + (\nabla_{X_1}^f \mathbb{I})(X_2, X_3) + \mathbb{I}(\nabla_{X_1} X_2, X_3) \\ &\quad - (\nabla_{X_2}^f \mathbb{I})(X_1, X_3) - \mathbb{I}(\nabla_{X_2} X_1, X_3) - \mathbb{I}([X_1, X_2], X_3) \\ &= R(X_1, X_2)X_3 + (\nabla_{X_1}^f \mathbb{I})(X_2, X_3) - (\nabla_{X_2}^f \mathbb{I})(X_1, X_3). \end{aligned} \right.$$

Da questa otteniamo

Proposizione 10.1.17 (Equazione di Codazzi-Mainardi). *Se $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$ ed $Y \in \Gamma(M, NM)$, allora*

$$\text{eq: 151111} \quad (10.1.16) \quad R^f(X_1, X_2, X_2, Y) = h((\nabla_{X_1}^f \mathbb{I})(X_2, X_3), Y) - h((\nabla_{X_2}^f \mathbb{I})(X_1, X_3), Y).$$

Siano ora $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ ed $Y_1, Y_2 \in \Gamma(M, NM)$. Abbiamo

$$h(\nabla_{X_1}^v \nabla_{X_2}^v Y_1, Y_2) = h(\nabla_{X_1}^f (\nabla_{X_2}^f Y_1 - B_{X_2} Y_1), Y_2) \\ = h(\nabla_{X_1}^f \nabla_{X_2}^f Y_1, Y_2) - h(\mathbb{I}(X_1, B_{X_2} Y_1), Y_2) \\ = h(\nabla_{X_1}^f \nabla_{X_2}^f Y_1, Y_2) + h(B_{X_1} Y_2, B_{X_2} Y_1).$$

Da questa uguaglianza ricaviamo

Proposizione 10.1.18 (Equazione di Ricci). *Se $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $Y_1, Y_2 \in \Gamma(M, NM)$, allora*

$$\text{eq: 15113} \quad (10.1.17) \quad \begin{cases} h(R^v(X_1, X_2)Y_1, Y_2) = h(R^f(X_1, X_2)Y_1, Y_2) \\ \quad \quad \quad - h(B_{X_1}Y_1, B_{X_2}Y_2) + h(B_{X_1}Y_2, B_{X_2}Y_1). \end{cases}$$

10.2. Isometrie

Teorema 10.2.1. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana. Un'applicazione $\phi : M \rightarrow M$ che sia un'isometria per la distanza definita dalla metrica g è anche un isomorfismo Riemanniano.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché gli archi di geodetica di M si caratterizzano come le curve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ tali che, per un'opportuna costante $c \geq 0$ ed ogni partizione sufficientemente fine $t_0 = a < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ di $[a, b]$ risulta:

$$\ell(\gamma) = \sum_{i=1}^k d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) = c \sum_{i=1}^k |t_i - t_{i-1}|,$$

un'isometria $\phi : M \rightarrow M$ trasforma geodetiche in geodetiche. Sia p_0 un qualsiasi punto di M e sia $q_0 = \phi(p_0)$. Sia $r > 0$ tale che $B(p_0, r)$ e $B(q_0, r)$ siano intorni normali. La ϕ definisce allora un'applicazione $T_{p_0}M \xrightarrow{\lambda} T_{q_0}M$ tale che $\phi(\gamma_v) = \phi(\gamma_{\lambda(v)})$ per ogni $v \in T_{p_0}M$. L'applicazione λ è un'isometria dello spazio Euclideo $T_{p_0}M$, con il prodotto scalare g_{p_0} , su $T_{q_0}M$, con il prodotto scalare g_{q_0} . In particolare λ è un'applicazione lineare. Abbiamo $\phi(\exp_{p_0}(v)) = \exp_{q_0}(\lambda(v))$ se $g_{p_0}(v, v) < r^2$. Quindi ϕ è di classe \mathcal{C}^∞ e $\lambda = d\phi(p_0)$, onde $\phi^*(g_{q_0}) = g_{p_0}$. \square

Indichiamo con $\mathbf{O}(M, g)$ il gruppo delle isometrie della varietà Riemanniana (M, g) . Osserviamo che, se $\phi \in \mathbf{O}(M, g)$ abbiamo:

$$\text{eq: f7.9.1} \quad (10.2.1) \quad \begin{cases} \forall p \in M \exists r_p > 0 \text{ tale che} \\ \phi(\exp_p(v)) = \exp_{\phi(p)}(d\phi(p)(v)) \\ \forall v \in T_pM \text{ con } g_p(v, v) < r_p^2. \end{cases}$$

Proposizione 10.2.2. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa e siano $\phi, \psi \in \mathbf{O}(M, g)$ e sia $p_0 \in M$. Se $\phi(p_0) = \psi(p_0)$ e $d\phi(p_0) = d\psi(p_0)$, allora $\phi = \psi$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $N = \{p \in M \mid \phi(p) = \psi(p), d\phi(p) = d\psi(p)\}$. Poiché ϕ e ψ sono di classe \mathcal{C}^∞ , N è chiuso. Per la ((10.2.1)), l'insieme N è anche aperto e quindi coincide con M . \square

10.3. Campi di Killing

Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana.

Definizione 10.3.1. Un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ è di Killing¹ se è generatore infinitesimale di un gruppo locale a un parametro di isometrie locali di (M, g) .

¹ Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923) fu un matematico tedesco, professore a Münster dal 1892. Fu un pioniere della teoria dei gruppi e delle algebre di Lie e, tra l'altro, scoprì nel 1887 l'algebra eccezionale G_2 .

Vale il seguente

Teorema 10.3.2. *Sono equivalenti, per $X \in \mathfrak{X}(M)$:*

- (1) X è di Killing;
- (2) la derivata di Lie $L_X g$ del tensore della metrica è nulla;
- (3) la derivata covariante ∇X è g -anti-simmetrica, cioè

$$\text{eq:z1531} \quad (10.3.1) \quad g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0, \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M);$$

Se X è un campo di Killing, allora

- (4) per ogni $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ risulta

$$\text{eq:z1532} \quad (10.3.2) \quad [X, \nabla_Y Z] = \nabla_Y [X, Z] + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

- (5) la restrizione di X lungo ogni geodetica è un campo di Jacobi;

- (6) $\nabla_{YZ}^2 X + R(X, Y)Z = 0$ per ogni $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

DIMOSTRAZIONE. L'equivalenza (1) \Leftrightarrow (2) è conseguenza immediata della definizione. Verifichiamo la (2) \Leftrightarrow (3). Se $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ abbiamo

$$\begin{aligned} (L_X g)(Y, Z) &= X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) \\ &= g(\nabla_X Y - [X, Y], Z) + g(\nabla_X Z - [X, Z], Y) \\ &= g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) \end{aligned}$$

perché la connessione di Levi-Civita è simmetrica. Quindi la ^{eq:z1531}(10.3.1) è condizione necessaria e sufficiente affinché $L_X g = 0$.

Supponiamo ora che X sia un campo di Killing ed $Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} g([X, \nabla_Y Z], U) &= -g(\nabla_Y Z, [X, U]) = g(\nabla_Y Z, \nabla_U X) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X U) \\ &= -g(\nabla_{\nabla_Y Z} X, U) + g(\nabla_X \nabla_Y Z, U). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{YZ}^2 X &= \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{\nabla_Y Z} X \\ &= \nabla_Y (\nabla_X Z - [X, Z]) - \nabla_X \nabla_Y Z + [X, \nabla_Y Z] \\ &= -R(X, Y)Z - \nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_Y [X, Z] + [X, \nabla_Y Z]. \end{aligned}$$

□

10.4. Proprietà algebriche del tensore di curvatura

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n .

def:18815 **Definizione 10.4.1.** Un *tensore algebrico di curvatura* è una forma bilineare simmetrica

$$\text{eq:1581} \quad (10.4.1) \quad R : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \rightarrow \mathbb{R}$$

per cui valga l'identità algebrica di Bianchi:

$$\text{eq:1582} \quad (10.4.2) \quad R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) = 0$$

$$\forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V.$$

Abbiamo posto qui

$$(10.4.3) \quad R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1 \wedge v_2, v_3 \wedge v_4) \quad \text{per } v_1, v_2, v_3, v_4 \in V.$$

In modo equivalente, possiamo dire che R è una forma quadri-lineare che soddisfa le proprietà :

$$\boxed{\text{eq: 18i}} \quad (i) \quad R(v_2, v_1, v_3, v_4) = -R(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

$$\boxed{\text{eq: 18ii}} \quad (ii) \quad R(v_1, v_2, v_4, v_3) = -R(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

$$\boxed{\text{eq: 18iii}} \quad (iii) \quad R(v_3, v_4, v_1, v_2) = R(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

$$\boxed{\text{eq: 18iv}} \quad (iv) \quad R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) = 0 \\ \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V.$$

Notiamo che (i) e (iii) implicano (ii) e che (iii) è una conseguenza di (i), (ii), (iv).

Definizione 10.4.2. L'insieme $\mathfrak{R}(V)$ dei tensori di curvatura su V è un sottospazio vettoriale dello spazio $T^{[0,4]}V$ dei tensori 0-covarianti e 4-contovarianti su V .

Vale il

lem: 16.6.1

Lemma 10.4.3. Siano $R, R' \in \mathfrak{R}(V)$. Allora

$$(10.4.4) \quad R(v_1, v_2, v_1, v_2) = R'(v_1, v_2, v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \implies R = R'.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare il lemma nel caso sia $R' = 0$. Utilizziamo le formule di polarizzazione per forme bilineari simmetriche: fissato $v_0 \in V$, la forma bilineare simmetrica $V \times V \ni (u, v) \rightarrow R(u, v_0, v, v_0) \in \mathbb{R}$ è nulla in quanto è nulla la forma quadratica associata.

Quindi, per ogni coppia $v_1, v_3 \in V$ anche la forma bilineare simmetrica $V \times V \ni (u, v) \rightarrow R(v_1, u, v_3, v) + R(v_3, u, v_1, v) \in \mathbb{R}$ è nulla in quanto è nulla la forma quadratica ad essa associata.

Applicando le proprietà (iii) e (ii) otteniamo:

$$0 = R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_4, v_3, v_2) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) - R(v_1, v_4, v_2, v_3).$$

Quindi, per ogni $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ abbiamo :

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1, v_4, v_2, v_3) = R(v_1, v_3, v_4, v_2)$$

da cui:

$$3R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) = 0.$$

La dimostrazione è completa. \square

Fissiamo su V un prodotto scalare $(\cdot | \cdot)$. Esso determina univocamente un prodotto scalare su $\Lambda^2 V$ tale che, per ogni base ortonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V , la $\{e_i \wedge e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ sia una base ortonormale in $\Lambda^2 V$. Per la norma associata risulta

$$\boxed{\text{eq: 1585}} \quad (10.4.5) \quad |v_1 \wedge v_2|^2 = |v_1|^2 |v_2|^2 - (v_1 | v_2)^2, \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

Osservazione 10.4.4. Il secondo membro della ^{eq:1585}(10.4.5) è il quadrato dell'area del parallelogrammo di lati v_1, v_2 . Infatti, l'altezza relativa alla base v_1 è $\left|v_2 - \frac{(v_1|v_2)}{|v_1|^2}v_1\right|$ e quindi il quadrato dell'area è

$$|v_1|^2 \cdot \left|v_2 - \frac{(v_1|v_2)}{|v_1|^2}v_1\right|^2 = |v_1|^2|v_2|^2 - (v_1|v_2)^2.$$

Per il prodotto scalare vale la formula

$$\text{eq:1586} \quad (10.4.6) \quad (v_1 \wedge v_2|v_3 \wedge v_4) = (v_1|v_3)(v_2|v_4) - (v_1|v_4)(v_2|v_3), \quad \forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V.$$

Lemma 10.4.5. Il prodotto scalare ^{eq:1586}(10.4.6) è un tensore algebrico di curvatura.

DIMOSTRAZIONE. Occorre verificare che il prodotto scalare ^{eq:1586}(10.4.6) su $\Lambda^2 V$ verifichi l'identità di Bianchi. Abbiamo

$$\begin{aligned} (v_1 \wedge v_2|v_3 \wedge v_4) &= (v_1|v_3)(v_2|v_4) - (v_1|v_4)(v_2|v_3), \\ (v_1 \wedge v_3|v_4 \wedge v_2) &= (v_1|v_4)(v_3|v_2) - (v_1|v_2)(v_3|v_4), \\ (v_1 \wedge v_4|v_2 \wedge v_3) &= (v_1|v_2)(v_4|v_3) - (v_1|v_3)(v_4|v_2) \end{aligned}$$

e sommando membro a membro otteniamo la ^{eq:1582}(10.4.2). \square

Fissato un prodotto scalare su V , possiamo associare ad ogni tensore algebrico di curvatura R una funzione reale definita sui 2-piani α di V , ponendo

$$\text{eq:16.6.6} \quad (10.4.7) \quad K^R(\alpha) = \frac{R(v_1, v_2, v_2, v_1)}{(v_1|v_1)(v_2|v_2) - (v_1|v_2)^2} \quad \text{se } \langle v_1, v_2 \rangle = \alpha.$$

La ^{eq:16.6.6}(10.4.7) si semplifica nella

$$(10.4.8) \quad K^R(\alpha) = R(v_1, v_2, v_2, v_1) \quad \text{se } v_1, v_2 \text{ è una base ortonormale di } \alpha.$$

Definizione 10.4.6. La ^{eq:16.6.6} $K^R(\alpha)$, definita dalla ^{eq:16.6.6}(10.4.7), si dice la *curvatura sezionale*.

Per il Lemma ^{lem:16.6.1}10.4.3 la curvatura sezionale determina completamente il relativo tensore di curvatura.

La curvatura sezionale è costante ed uguale a -1 per il prodotto scalare di $\Lambda^2 V$. Per il Lemma ^{lem:16.6.1}10.4.3 abbiamo

Proposizione 10.4.7. Una forma algebrica di curvatura che abbia curvatura sezionale costante è un multiplo del prodotto scalare su $\Lambda^2 V$. \square

Definizione 10.4.8. La *contrazione di Ricci* è l'applicazione $\mathbf{O}(V)$ -equivariante

$$\text{eq:15810} \quad (10.4.9) \quad \mathcal{R}ic : \mathfrak{R}(V) \ni R \longrightarrow S_R \in S^2(V), \quad \text{con } S_R(v, w) = \text{tr } R(v, \cdot, w, \cdot),$$

ove la traccia si calcola, a partire da una qualsiasi base ortonormale e_1, \dots, e_n di V mediante

$$\text{tr } R(v, \cdot, w, \cdot) = \sum_{i=1}^n R(v, e_i, w, e_i).$$

La forma S_R si dice il *tensore di Ricci* associato al tensore di curvatura R .

Osservazione 10.4.9. Fissato un vettore $v \in V$, con $(v|v) = 1$, possiamo determinare vettori v_2, \dots, v_n che formino con $v_1 = v$ una base ortonormale. Detto α_i , per $i = 2, \dots, n$ il piano generato da v e v_i , abbiamo allora:

$$(10.4.10) \quad S_R(v, v) = \sum_{i=2}^n K(\alpha_i).$$

Definizione 10.4.10. Chiamiamo *curvatura scalare* di $R \in \mathfrak{R}(V)$ la traccia del suo tensore di Ricci

$$\text{eq: 1581a} \quad (10.4.11) \quad s_R = \text{tr}(\text{Ric}(R)) = \sum_{i,j=1}^n R(e_i, e_j, e_i, e_j),$$

ove e_1, \dots, e_n è una qualsiasi base ortonormale di V .

Osservazione 10.4.11. La curvatura scalare è il doppio della traccia di R considerato come una forma bilineare simmetrica su $\Lambda^2 V$.

Definizione 10.4.12 (Prodotto di Kulkarni-Nomizu). Il *prodotto di Kulkarni-Nomizu* $s_1 \otimes s_2$ di due forme bilineari simmetriche s_1, s_2 su V è il tensore 4-controvariante definito da

$$\text{eq: 15811} \quad (10.4.12) \quad \begin{aligned} s_1 \otimes s_2(v_1, v_2, w_1, w_2) &= \sum_{h,k \in S_2} \varepsilon(h)\varepsilon(k) s_1(v_{h_1}, w_{k_1}) s_2(v_{h_2}, w_{k_2}) \\ &= s_1(v_1, w_1) s_2(v_2, w_2) + s_1(v_2, w_2) s_1(v_1, w_1) \\ &\quad - s_1(v_1, w_2) s_2(v_2, w_1) - s_1(v_2, w_1) s_2(v_1, w_2). \end{aligned}$$

Lemma 10.4.13. Il prodotto $s_1 \otimes s_2$ di due forme $s_1, s_2 \in S^2(V)$ è un tensore algebrico di curvatura.

DIMOSTRAZIONE. Si verifica con calcolo diretto che $s_1 \otimes s_2$ soddisfa le $(i), (ii), (iii), (iv)$ della Definizione 10.4.1. eq: 181i
□

Osservazione 10.4.14. Se indichiamo con g il prodotto scalare di V , e con G il suo corrispondente su $\Lambda^2 V$, abbiamo

$$G = \frac{1}{2} g \otimes g.$$

Lemma 10.4.15. Sia s una forma bilineare simmetrica su V . Allora

$$(10.4.13) \quad \text{Ric}(s \otimes g) = (n-2)s + \text{tr}(s) \cdot g.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia e_1, \dots, e_n una base ortonormale di V . Allora:

$$\begin{aligned} S_{s \otimes g}(v_1, v_2) &= \sum_{i=1}^n (s \otimes g)(v_1, e_i, v_2, e_i) = \sum_{i=1}^n (s(v_1, v_2)g(e_i, e_i) + s(e_i, e_i)g(v_1, v_2) \\ &\quad - s(v_1, e_i)g(v_2, e_i) - s(v_2, e_i)g(v_1, e_i)) \\ &= n s(v_1, v_2) + \text{tr}(s)g(v_1, v_2) - s(v_1, v_2) - s(v_2, v_1) \\ &= (n-2)s(v_1, v_2) + \text{tr}(s)g(v_1, v_2). \end{aligned}$$

□

Osservazione 10.4.16. In particolare,

$$\text{eq: 15813} \quad (10.4.14) \quad \mathcal{R}ic(g \otimes g) = 2(n-1)g.$$

Se $R \in \mathfrak{R}(V)$ ed S_R il suo tensore di Ricci, abbiamo

$$\mathcal{R}ic(R - aS_R \otimes g + b g \otimes g) = (1 - a(n-2))S_R + (2b(n-1) - aS_R)g.$$

Se $n \geq 3$, possiamo porre $a = (n-2)^{-1}$ e $b = S_R \frac{1}{2(n-1)(n-2)}$. Otteniamo così un tensore di curvatura

$$\text{eq: 15816} \quad (10.4.15) \quad W_R = R - \frac{1}{n-2}S_R \otimes g + \frac{1}{2(n-1)(n-2)}S_R \cdot g \otimes g \in \ker \mathcal{R}ic.$$

Definizione 10.4.17. Si chiamano *tensori di Weyl* i tensori di curvatura W che hanno contrazione di Ricci nulla. Il tensore W_R di (10.4.15) si dice la *parte di Weyl* di R .

La differenza $z_R = S_R - \frac{1}{n}S_R \cdot g$ si dice il *tensore di Ricci a traccia nulla* di R .

Abbiamo

$$\text{eq: 15817a} \quad (10.4.16) \quad R = \frac{-1}{2(n-1)(n-2)}S_R \cdot g \otimes g + \frac{1}{n-2}S_R \otimes g + W_R$$

$$\text{eq: 15817} \quad (10.4.17) \quad R = \frac{1}{2n(n-1)}S_R \cdot g \otimes g + \frac{1}{n-2}z_R \otimes g + W_R$$

La (10.4.17) è la *decomposizione irriducibile del tensore algebrico di curvatura*.

Teorema 10.4.18 (decomposizione algebrica del tensore di curvatura). *Sia R un tensore algebrico di curvatura sullo spazio vettoriale reale V , di dimensione $n > 2$. Sono allora univocamente determinati: un numero reale s (curvatura scalare), una forma bilineare simmetrica S_R (curvatura di Ricci), una forma bilineare simmetrica con traccia nulla z_R , e una forma di curvatura W (la curvatura di Weyl) con $S_W = 0$ tali che valgano le decomposizioni (10.4.16), (10.4.17).*

Se $n = 2$, abbiamo $R = \frac{1}{2} \cdot s \cdot g \otimes g$. Se $n = 3$, allora $W = 0$.

10.5. La curvatura sezionale

Sia (M, g) una varietà Riemanniana di dimensione $n \geq 2$. Definiamo il *tensore di curvatura* su M mediante :

$$(10.5.1) \quad R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_3, X_4)X_1, X_2), \\ \forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposizione 10.5.1. *Il tensore di curvatura definisce in ogni punto di M un tensore algebrico di curvatura.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo facilmente

$$R(X_1, X_2, X_4, X_4) = -R(X_1, X_2, X_3, X_4).$$

Osserviamo poi che, essendo nulla la torsione della connessione di Levi-Civita :

$$\begin{aligned} & R(X_1, X_2)X_3 + R(X_2, X_3)X_1 + R(X_3, X_1)X_2 \\ &= \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3 - \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_3 - \nabla_{[X_1, X_2]} X_3 \\ &+ \nabla_{X_2} \nabla_{X_3} X_1 - \nabla_{X_3} \nabla_{X_2} X_1 - \nabla_{[X_2, X_3]} X_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \nabla_{X_3} \nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{X_1} \nabla_{X_3} X_2 - \nabla_{[X_3, X_1]} X_2 \\
& = \nabla_{X_1} [X_2, X_3] + \nabla_{X_2} [X_3, X_1] + \nabla_{X_3} [X_1, X_2] \\
& - \nabla_{[X_1, X_2]} X_3 - \nabla_{[X_2, X_3]} X_1 - \nabla_{[X_3, X_1]} X_2 \\
& = [X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0
\end{aligned}$$

Da questa ricaviamo l'identità di Bianchi :

$$\begin{aligned}
R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_1, X_4, X_2, X_3) + R(X_1, X_3, X_4, X_2) &= 0 \\
\forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M).
\end{aligned}$$

Dimostriamo ora che $R(X_2, X_1, X_3, X_4) = -R(X_1, X_2, X_3, X_4)$. A questo scopo è sufficiente verificare che $R(X_1, X_1, X_3, X_4) = 0$ per ogni $X_1, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M)$. Abbiamo :

$$\begin{aligned}
R(X_1, X_1, X_3, X_4) &= g(R(X_3, X_4)X_1, X_1) \\
&= g((\nabla_{X_3} \nabla_{X_4} - \nabla_{X_4} \nabla_{X_3} - \nabla_{[X_3, X_4]}) X_1, X_1) \\
&= X_3 g(\nabla_{X_4} X_1, X_1) - g(\nabla_{X_4} X_1, \nabla_{X_3} X_1) \\
&- X_4 g(\nabla_{X_3} X_1, X_1) + g(\nabla_{X_3} X_1, \nabla_{X_4} X_1) \\
&- \frac{1}{2} [X_3, X_4] g(X_1, X_1) \\
&= \frac{1}{2} X_3 X_4 g(X_1, X_1) - \frac{1}{2} X_4 X_3 g(X_1, X_1) \\
&- \frac{1}{2} [X_3, X_4] g(X_1, X_1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

In questo modo abbiamo verificato le proprietà (i), (ii) e (iv) di un tensore algebrico di curvatura e segue quindi che vale anche la proprietà (iii), cioè che

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = R(X_3, X_4, X_1, X_2) \quad \text{per ogni } X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M).$$

In particolare è anche $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4)$. \square

Sia $p \in M$. Per ogni piano $\alpha \subset T_p M$, definiamo la *curvatura sezionale* di M rispetto al piano α come la quantità $K(\alpha)$ relativa al tensore algebrico di curvatura R_p :

$$(10.5.2) \quad K(\alpha) = \frac{-R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{\|v_1 \wedge v_2\|^2} = \frac{-R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{g(v_1, v_1)g(v_2, v_2) - |g(v_1, v_2)|^2} \quad \text{se } \alpha = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Fissato il punto p , l'esponenziale \exp_p definisce un diffeomorfismo di un intorno convesso $N_0(p)$ di 0 in p su un intorno normale U_p di p in M . Inoltre, per un $r_0 > 0$, l'esponenziale trasforma, per ogni $0 < r \leq r_0$, la palla $B_p(0, r)$ di centro 0 e raggio r di $T_p M$ rispetto alla metrica definita dal prodotto scalare g_p nella palla $B_p(r)$ della distanza definita dalla metrica Riemanniana su M . Consideriamo un 2-piano

$\alpha \subset T_p M$. L'immagine $\exp_p(\alpha \cap N_0(p))$ è una sottovarietà V_α di U_p di dimensione reale 2, su cui la restrizione di g definisce una metrica Riemanniana. Utilizzando tale metrica possiamo calcolare l'area $A(r)$ di $V_\alpha \cap B_p(r)$ per $0 < r \leq r_0$. Avremo $A(r) = \pi r^2 + o(r^2)$ per $r \searrow 0$. La curvatura sezionale misura il modo in cui $A(r)$ approssima l'area del disco piano dello stesso raggio :

$$(10.5.3) \quad K(\alpha) = 12 \cdot \lim_{r \searrow 0} \frac{\pi r^2 - A(r)}{\pi r^4}.$$

10.6. Varietà totalmente geodetiche

Sia M una varietà differenziabile, S una sua sottovarietà. Un'applicazione continua $\phi : N \rightarrow S$, per cui $N \ni p \rightarrow \phi(p) \in M$ sia differenziabile, è anche differenziabile come applicazione a valori in S .

Se (M, g) è una varietà Riemanniana, possiamo considerare su S la struttura Riemanniana definita dalla restrizione h della metrica g . Le geodetiche di M contenute in S sono anche geodetiche di S . In generale non è vero il viceversa.

Definizione 10.6.1. Diciamo che una sottovarietà S di M è *geodetica* in p se contiene tutte le geodetiche di M tangenti ad S in p . Diciamo che S è *totalmente geodetica* se è geodetica in ogni suo punto.

Le sottovarietà geodetiche 1-dimensionali sono le geodetiche massimali di M .

Proposizione 10.6.2. *Sia S una sottovarietà di M , geodetica in un punto $p \in M$. Se M è completa, allora anche S è completa.*

Proposizione 10.6.3. *Se la sottovarietà S di M è totalmente geodetica, allora l'inclusione $S \hookrightarrow M$ è un'isometria locale.*

Teorema 10.6.4. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana ed S una sua sottovarietà, completa per la restrizione della metrica g . Se il trasporto parallelo in M lungo le curve di S trasforma vettori tangenti ad S in vettori tangenti ad S , allora S è totalmente geodetica. Viceversa, se S è totalmente geodetica, il trasporto parallelo in M lungo le curve di S trasforma vettori tangenti ad S in vettori tangenti ad S .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché abbiamo supposto S completa, la dimostrazione si riduce a considerare la situazione locale. Basterà allora verificare che, se si scelgono coordinate locali x^1, \dots, x^n tali che x^1, \dots, x^m siano coordinate locali su S , allora i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita su S si ottengono da quelli della connessione di Levi-Civita su M per restrizione del dominio di definizione degli indici. \square

Teorema 10.6.5. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa, semplicemente connessa, completa, con curvatura sezionale negativa. Sia S una sua sottovarietà totalmente geodetica. Per ogni $p \in S$, le geodetiche uscenti da p e perpendicolari ad S formano una sottovarietà S_p^\perp ed M è unione disgiunta delle sottovarietà S_p^\perp al variare di p in S .*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo, per ogni $p \in S$,

$$S = \exp_p(T_p S), \quad S_p^\perp = \exp_p(T_p^\perp S).$$

Poiché $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ è un diffeomorfismo, S_p^\perp è una sottovarietà.

Se $q \in M$, poiché S è chiusa, vi è un punto $p \in S$ che realizza la minima distanza di q da S e $q \in S_p^\perp$. Tale punto p è unico, perché se ci fosse un altro punto p' che realizza la minima distanza, le geodetiche da q a p e a p' formerebbero angoli di $\pi/2$ con il segmento di geodetica di S che congiunge p a p' e ci sarebbe quindi un triangolo geodetico con somma degli angoli interni $> \pi$. \square

Metriche invarianti

ch:17

11.1. Metriche pseudo-Riemanniane su spazi omogenei

Siano \mathbf{K} un gruppo di Lie connesso, \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso, $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$. Indichiamo con \mathfrak{o} il punto base $\pi(\mathbf{H})$ ed identifichiamo $T_{\mathfrak{o}}M$ al quoziente κ/\mathfrak{h} delle algebre di Lie κ di \mathbf{K} ed \mathfrak{h} di \mathbf{H} . Ricordiamo che, per $X \in \kappa$, $X^M \in \mathfrak{X}(M)$ è il generatore infinitesimale del gruppo a un parametro $(t, p) \rightarrow \exp(tX) \cdot p$.

Indichiamo con $\overline{\text{Ad}}(h)$ la rappresentazione aggiunta di \mathbf{H} sul quoziente κ/\mathfrak{h} , e con \bar{X} l'elemento di κ/\mathfrak{h} corrispondente ad $X \in \kappa$.

Supponiamo che \mathbf{K} operi effettivamente su M .

Proposizione 11.1.1. *Vi è una corrispondenza biunivoca tra le metriche pseudo-Riemanniane g , \mathbf{K} -invarianti su M , e le forme bilineari simmetriche non degeneri b su κ/\mathfrak{h} , invarianti rispetto ad $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{H})$, data da*

$$(11.1.1) \quad g_{\mathfrak{o}}(X^M, Y^M) = b(\bar{X}, \bar{Y}), \quad \forall X, Y \in \kappa.$$

La g è definita positiva se e soltanto se lo è la b .

DIMOSTRAZIONE. La condizione necessaria e sufficiente affinché g sia una metrica pseudo-Riemanniana \mathbf{K} -invariante è che, per ogni $a \in \mathbf{K}$, risulti

$$g_{\pi(a)}(a_*X^M, a_*Y^M) = g_{\mathfrak{o}}(X^M, Y^M), \quad \forall X, Y \in \kappa.$$

Se $b \in \mathbf{K}$ e $\pi(b) = \pi(a)$, allora $a^{-1}b = h \in \mathbf{H}$ ed abbiamo allora

$$\begin{aligned} g_{\mathfrak{o}}(X^M, Y^M) &= g_{\pi(b)}(b_*X^M, b_*Y^M) = g_{\pi(a)}(b_*X^M, b_*Y^M) \\ &= g_{\mathfrak{o}}(a_*^{-1}b_*X^M, a_*^{-1}b_*Y^M) = g_{\mathfrak{o}}(h_*X^M, h_*Y^M). \end{aligned}$$

Questo dimostra che possiamo definire una forma bilineare $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{H})$ -invariante ponendo:

$$b(\bar{X}, \bar{Y}) = g_{\mathfrak{o}}(X^M, Y^M).$$

Vice versa, poiché $h_*X^M = (\text{Ad}(h)(X))^M$ per ogni $X \in \kappa$, la [\(11.1.1\)](#) ^{eq:17.1.1} definisce una metrica \mathbf{K} -invariante, purché la b sia $\overline{\text{Ad}}(\mathbf{H})$ -invariante. \square

Corollario 11.1.2. *Supponiamo che M sia riduttiva, con decomposizione*

$$\kappa = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}.$$

Allora la

$$(11.1.2) \quad g_{\mathfrak{o}}(X^M, Y^M) = b(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}$$

definisce una corrispondenza biunivoca tra le metriche pseudo-Riemanniane g , \mathbf{K} -invarianti su M , e le forme bilineari simmetriche non degeneri $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invarianti su \mathfrak{m} . Abbiamo

$$\text{eq: 17.1.3} \quad (11.1.3) \quad b([Z, X], Y) + b(X, [Z, Y]) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}, \forall Z \in \mathfrak{h},$$

e la condizione (11.1.3) è equivalente all'invarianza di b rispetto ad $\text{Ad}(\mathbf{H})$ se \mathbf{H} è connesso.

11.2. La connessione di Levi-Civita sugli spazi omogenei

Data una connessione affine Γ su M , associamo ad ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ il tensore 1-covariante ed 1-controvariante A_X , definito da

$$\text{eq: 17.2.0} \quad (11.2.1) \quad A_X Y = [X, Y] - \nabla_X Y = -\nabla_Y X - T(X, Y), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Lemma 11.2.1. *Se g è una metrica pseudo-Riemanniana \mathbf{K} -invariante su $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$, allora per ogni $X \in \mathfrak{k}$, il tensore A_{X^M} è g -antisimmetrico.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $X \in \mathfrak{k}$, il gruppo a un parametro $\exp(tX)$ definisce un gruppo a un parametro di isometrie di (M, g) . Quindi la derivata di Lie $L_{X^M} g$ della metrica è nulla. Otteniamo quindi, per ogni $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned} X^M g(Y, Z) &= (L_{X^M} g)(Y, Z) + g([X^M, Y], Z) + g(Y, [X^M, Z]) \\ &= g([X^M, Y], Z) + g(Y, [X^M, Z]). \end{aligned}$$

D'altra parte, vale anche la

$$\begin{aligned} X^M g(Y, Z) &= (\nabla_{X^M} g)(Y, Z) + g(\nabla_{X^M} Y, Z) + g(Y, \nabla_{X^M} Z) \\ &= g(\nabla_{X^M} Y, Z) + g(Y, \nabla_{X^M} Z). \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro otteniamo

$$\text{eq: 17.2.00} \quad (11.2.2) \quad g(A_{X^M} Y, Z) + g(Y, A_{X^M} Z) = 0, \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

ed il Lemma è dimostrato. \square

thm: 17.2.2 **Teorema 11.2.2.** *Supponiamo che M sia riduttiva, con decomposizione*

$$\text{eq: 17.2.0a} \quad (11.2.3) \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}.$$

Se g è la metrica pseudo-Riemanniana \mathbf{K} -invariante su M , associata alla forma bilineare simmetrica $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante b , allora la sua connessione di Levi-Civita è definita da

$$\text{eq: 17.2.1} \quad (11.2.4) \quad \Lambda_{\mathfrak{m}}(X)(Y) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + \beta(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

ove β è la forma bilineare simmetrica definita da

$$\text{eq: 17.2.2} \quad (11.2.5) \quad 2b(\beta(X, Y), Z) = b(X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}) + b([Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

In particolare, la connessione di Levi-Civita coincide con la connessione naturale priva di torsione se e soltanto se il secondo membro della (11.2.5) è uguale a 0 per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$.

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che $\Lambda_m(X) = -A_m^X$, per ogni $X \in \mathfrak{m}$, e quindi $\Lambda_m(X)$ è antisimmetrica per ogni $X \in \mathfrak{m}$. Per la (5.4.5) del Teorema 5.4.3, abbiamo

$$\Lambda_m(X)Y - \Lambda_m(Y)X = [X, Y]_m, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

Quindi

$$\beta(X, Y) - \beta(Y, X) = [X, Y]_m - (\Lambda_m(X)Y - \Lambda_m(Y)X) = 0$$

e dunque β è simmetrica e soddisfa

$$b(\beta(X, Y), Z) + b(Y, \beta(X, Z)) = \frac{1}{2}(b([Y, X]_m, Z) + b(Y, [Z, X]_m)).$$

Da questa, dalle uguaglianze che da questa si ottengono mediante le permutazioni cicliche di X, Y, Z e dalla simmetria di β ricaviamo finalmente la (11.2.5). \square

Definizione 11.2.3. Uno spazio omogeneo riduttivo $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$, con una metrica pseudo-Riemanniana associata ad una forma bilineare simmetrica non degenera b su \mathfrak{m} si dice *naturalmente riduttivo* se

$$(11.2.6) \quad b(X, [Z, Y]_m) + b([Z, X]_m, Y) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

Proposizione 11.2.4. Supponiamo che M sia naturalmente riduttivo, con una metrica pseudo-Riemanniana invariante associata alla forma bilineare b . Allora la sua curvatura soddisfa

$$(11.2.7) \quad g_0(R(X^M, Y^M)Y^M, X^M) = \frac{1}{4}b([X, Y]_m, [X, Y]_m) - b([X, Y]_b, Y, X),$$

$$\forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo infatti

$$R_0(X, Y)Z = \frac{1}{4}[X, [Y, Z]_m]_m - \frac{1}{4}[Y, [X, Z]_m]_m$$

$$- \frac{1}{2}[[X, Y]_m, Z]_m - [[X, Y]_b, Z],$$

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}.$$

La tesi segue allora dal Teorema 11.2.2. \square

Un caso importante in cui si applicano i risultati precedenti è il seguente:

Teorema 11.2.5. Sia $M = \mathbf{K}/\mathbf{H}$ e supponiamo che vi sia una forma bilineare simmetrica non degenera $\text{Ad}(\mathbf{K})$ -invariante \mathbf{f} su \mathfrak{k} la cui restrizione ad \mathfrak{h} sia non degenera.

Poniamo

$$(11.2.8) \quad \mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{k} \mid \mathbf{f}(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}.$$

Allora vale la decomposizione (11.2.3) ed inoltre la

$$(11.2.9) \quad b(X, Y) = \mathbf{f}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

è una forma bilineare simmetrica non degenera ed $\text{Ad}(\mathbf{H})$ -invariante su \mathfrak{m} .

Rispetto a questa decomposizione ed alla metrica pseudo-Riemanniana \mathbf{K} -invariante associata a questa scelta di b lo spazio omogeneo M è naturalmente riduttivo.

Il tensore di curvatura rispetto a questa metrica soddisfa

$$(11.2.10) \quad g_0(R(X^M, Y^M)Y^M, X^M) = \frac{1}{4}\mathbf{f}([X, Y]_m, [X, Y]_m) + \mathbf{f}([X, Y]_b, [X, Y]_b),$$

$$\forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

Osservazione 11.2.6. Se possiamo scegliere la \mathbf{f} definita positiva, allora la metrica g definita nel teorema precedente è Riemanniana, con curvatura sezionale non negativa.

es: 17.2.1

Esempio 11.2.7. Supponiamo che \mathbf{K} ammetta una forma bilineare simmetrica $\text{Ad}(\mathbf{K})$ -invariante e definita positiva e poniamo $\mathbf{H} = \{e\}$. Allora la connessione di Levi-Civita associata alla metrica descritta nel teorema precedente coincide con la 0-connessione ed ha curvatura $R_e(X^*, Y^*) = -\frac{1}{4}\text{ad}([X, Y])$.

Metriche di Einstein

12.1. Proprietà del tensore di curvatura

Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana di dimensione reale m . Sia D la differenziazione covariante su M associata alla sua connessione di Levi-Civita ed indichiamo con R la sua curvatura. Ricordiamo che

$$T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y] = 0, \quad R(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z.$$

La curvatura R è un tensore di tipo $(3, 1)$ che, per ogni $X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M)$, soddisfa le condizioni di simmetria

$$\text{eq: 15.1.1} \quad (12.1.1) \quad \begin{cases} R(X, Y) = -R(Y, X), & \text{(antisimmetrico in } X, Y), \\ R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 & \text{(I identità di Bianchi),} \\ g(R(X, Y)Z, U) + g(Z, R(X, Y)U) = 0, & \text{(} g\text{-antisimmetrico in } Z), \\ g(R(X, Y)Z, U) = g(R(Z, U)X, Y) & \text{(} g\text{-simmetria).} \end{cases}$$

La g -simmetria è conseguenza delle proprietà di antisimmetria e della prima identità di Bianchi. Abbiamo infatti, utilizzando le prime tre delle (12.1.1), eq: 15.1.1

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, U) &= -g(R(Y, Z)X, U) - g(R(Z, X)Y, U) \\ &= g(R(Y, Z)U, X) + g(R(Z, X)U, Y) \\ &= -g(R(Z, U)Y, X) - g(R(U, Y)Z, X) \\ &\quad - g(R(X, U)Z, Y) - g(R(U, Z)X, Y) \\ &= 2g(R(Z, U)X, Y) + g(R(U, Y)X, Z) + g(R(X, U)Y, Z) \\ &= 2g(R(Z, U)X, Y) - g(R(X, Y)Z, U), \end{aligned}$$

da cui segue la quarta.

Il tensore di curvatura soddisfa inoltre l'identità differenziale

$$\text{eq: 15.1.2} \quad (12.1.2) \quad (DR)(X, Y, Z) + (DR)(Y, Z, X) + (DR)(Z, X, Y) = 0, \quad (\text{II identità di Bianchi}).$$

Utilizzando il tensore della metrica g possiamo considerare la curvatura anche come un tensore di tipo $(4, 0)$, ponendo

$$R(X, Y, Z, U) = g(R(X, Y)U, Z).$$

Le simmetrie fondamentali del tensore di curvatura di tipo $(4, 0)$ sono allora

eq: 15.1.3

(12.1.3)

$$\begin{cases} R(X, Y, Z, U) = -R(Y, X, Z, U), \\ R(X, Y, Z, U) = -R(X, Y, U, Z), \\ R(X, Y, Z, U) + R(Y, Z, X, U) + R(Z, X, Y, U) = 0, \\ R(X, Y, Z, U) = R(Z, U, X, Y), \\ \forall X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M). \end{cases}$$

12.2. Curvatura sezionale

Per le simmetrie $\frac{\text{eq: 15.1.1}}{(\text{12.1.1})}$, $\frac{\text{eq: 15.1.3}}{(\text{12.1.3})}$, del tensore di curvatura, esso definisce un'applicazione

$$\mathcal{R} : \Lambda^2 M \longrightarrow \Lambda^2 M,$$

che sui tensori alternati di rango due si può descrivere mediante

$$g(\mathcal{R}(X \wedge Y), Z \wedge U) = R(X, Y, Z, U) = g(R(X, Y)U, Z).$$

Definizione 12.2.1. Se σ è un due-piano anisotropo di $T_p M$, la *curvatura sezionale* in σ è data da

$$K(\sigma) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - [g(X, Y)]^2}, \quad \text{se } X, Y \in \sigma, X \wedge Y \neq 0.$$

Osservazione 12.2.2. Poiché la forma quadratica associata ad una forma bilineare simmetrica la determina completamente, la curvatura sezionale determina completamente la curvatura Riemanniana.

In particolare, se in un punto $p \in M$ la curvatura sezionale è costante, non dipende cioè dal due piano σ che si considera, dalla

$$R(X, Y, X, Y) = k\{g(X, X)g(Y, Y) - g^2(X, Y)\} \quad \text{in } p$$

ricaviamo che

$$R(X, Y, Z, U) = k\{g(X, Z)g(Y, U) - g(X, U)g(Y, Z)\}, \quad \text{in } p$$

cioè

$$g(R(X, Y)U, Z) = k\{g(X, Z)g(Y, U) - g(X, U)g(Y, Z)\} \quad \text{in } p$$

e quindi

$$R(X, Y)U = k\{g(Y, U)X - g(X, U)Y\} \quad \text{in } p.$$

Teorema 12.2.3 (F.Schur). *Supponiamo che M sia connessa. Se $m \geq 3$ e, per ogni $p \in M$ la curvatura sezionale dei due piani in $T_p M$ è costante, allora (M, g) ha curvatura costante, esiste cioè una costante reale k tale che*

eq: 15a11

(12.2.1)

$$R(X, Y)Z = k(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi, la $\frac{\text{eq: 15a11}}{(\text{12.2.1})}$ vale per una funzione $k \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Consideriamo il tensore $\alpha(X, Y, Z) = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$ e consideriamone la derivata covariante rispetto a un campo di vettori $U \in \mathfrak{X}(M)$. Otteniamo

$$\begin{aligned} (\nabla_U \alpha)(X, Y, Z) &= \nabla_U(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) - g(\nabla_U Y, Z)X - g(Y, \nabla_U Z)X \\ &\quad - g(Y, Z)\nabla_U X + g(\nabla_U X, Z)Y + g(X, \nabla_U Z)Y + g(X, Z)\nabla_U Y = 0, \end{aligned}$$

perché $\nabla_U g = 0$. Utilizzando quindi la seconda identità di Bianchi otteniamo che, per ogni scelta di $X_0, X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$, è (l'apice sul simbolo di sommatoria significa che essa è estesa alle terne (i, j, k) che formano una permutazione con segnatura positiva di $\{0, 1, 2\}$):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum'_{i,j,k=0,1,2} \nabla_{X_i} R(X_j, X_k) X_3 \\ &= \sum'_{i,j,k=0,1,2} (X_i k) \{g(X_j, X_3) X_k - g(X_k, X_3) X_j\} \\ &= \{(X_1 k) g(X_2, X_3) - (X_2 k) g(X_1, X_3)\} X_0 \\ &\quad + \{(X_2 k) g(X_0, X_3) - (X_1 k) g(X_2, X_3)\} X_1 \\ &\quad + \{(X_0 k) g(X_1, X_3) - (X_1 k) g(X_0, X_3)\} X_2. \end{aligned}$$

Poiché la dimensione m di M è maggiore o uguale a tre, fissato un qualsiasi punto p di M , possiamo scegliere i campi X_0, X_1, X_2 in modo che siano ortonormali in un intorno di p e prendere poi $X_3 = X_2$. I tre addendi all'ultimo membro dell'uguaglianza scritta sopra sono allora linearmente indipendenti in un intorno di p ed abbiamo quindi, in particolare, poiché il coefficiente di X_0 è nullo in un intorno di p , che $X_1 k = 0$ in p . Poiché sia il punto p che il valore di X_1 in p , possono essere scelti arbitrariamente, con l'unico vincolo che $g(X_1, X_1) = 1$ in p , ne ricaviamo che $dk = 0$ e quindi k è costante su M . \square

Esempio 12.2.4. Sia g_p una forma quadratica in \mathbb{R}^{m+1} con segnatura $(p, m+1-p)$ e definiamo le sottovarietà

$$\begin{aligned} S_p^m &= \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid g(x, x) = 1\}, \\ H_p^m &= \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid g(x, x) = -1\}. \end{aligned}$$

Se $1 \leq p \leq m+1$, la restrizione ad S_p^m di g_p definisce una metrica pseudo-Riemanniana di segnatura $(p, m-p)$ e curvatura sezionale costante 1. Se $0 \leq p \leq m$, la restrizione di g_{p+1} definisce su H_p^m una metrica pseudo-Riemanniana di segnatura $(p, m-p)$ e curvatura sezionale costante -1 .

Per ogni $0 \leq p \leq m+1$, la g_p definisce su \mathbb{R}^{m+1} una metrica pseudo-Riemanniana di segnatura $(p, m+1-p)$ e curvatura sezionale costante nulla.

12.3. Il tensore di Ricci

Si possono ottenere nuovi tensori a partire dal tensore di curvatura utilizzando le contrazioni. Per le simmetrie del tensore di curvatura, vi è essenzialmente un solo tensore interessante che si possa ottenere in questo modo.

Definizione 12.3.1. La *curvatura di Ricci* di (M, g) è il tensore di tipo $(2, 0)$

$$r(X, Y) = \text{tr}(Z \rightarrow R(X, Z)Y).$$

Se Z_1, \dots, Z_m è una base ortonormale per g in un punto $p \in M$, se cioè

$$g(Z_i, Z_j) = \epsilon_i \delta_{i,j}, \quad \text{con } \epsilon_i^2 = 1,$$

allora

$$r(X, Y)(p) = \sum_{i=1}^m \epsilon_i R(X, Z_i, Y, Z_i).$$

Il tensore di Ricci può essere anche considerato come un tensore di tipo $(1, 1)$, $\mathcal{R}ic : TM \rightarrow TM$, mediante:

$$r(X, Y) = g(\mathcal{R}ic(X), Y).$$

Osservazione 12.3.2. Il tensore di Ricci è simmetrico: abbiamo cioè $r(X, Y) = r(Y, X)$, ovvero $g(\mathcal{R}ic(X), Y) = g(X, \mathcal{R}ic(Y))$. Ciò è conseguenza del fatto che la connessione di Levi-Civita è simmetrica (cioè priva di torsione). In particolare, quando g sia una metrica Riemanniana, $\mathcal{R}ic$ ha in ogni punto autovalori reali ed è diagonalizzabile.

12.4. Un Teorema di Myers

Supponiamo che la metrica g sia Riemanniana.

Fissiamo un punto $p \in M$ e un sistema di riferimento ortonormale $\sigma_p = (v_1, \dots, v_m)$ in T_pM . Ad esso associamo coordinate normali $x = (x^1, \dots, x^m)$ definite in un intorno U di p da

$$p(x) = \exp_p(x^1 v_1 + \dots + x^m v_m).$$

Il tensore della metrica ha in queste coordinate componenti

$$g_{i,j} = g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j), \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

lem:15a.12.4

Lemma 12.4.1. *La funzione*

eq:15a.4.1

$$(12.4.1) \quad F_p(q) = \sqrt{|\det(g_{i,j}(x))|}, \quad p(x) = q,$$

non dipende dalla scelta della base ortonormale σ_p .

DIMOSTRAZIONE. Se $\sigma'_p = (w_1, \dots, w_m)$ è un'altra base ortonormale di T_pM , ed $y = (y^1, \dots, y^m)$ le corrispondenti coordinate normali, abbiamo che $x = ay$, con $a = \sigma_p^{-1} \sigma'_p \in \mathbf{O}_b(m)$. Le componenti $g'_{i,j}$ della metrica nelle coordinate y sono allora

$$g'_{i,j} = \sum_{h,k=1}^m a_i^h a_j^k g_{h,k}.$$

Quindi,

$$\sqrt{|\det(g'_{i,j})|} = \sqrt{|\det a|^2 |\det(g_{i,j})|} = F_p,$$

perché $|\det a| = 1$. □

Sia N_p un intorno normale di 0 in T_pM . Ricordiamo che N_p è stellato rispetto all'origine ed $\text{Exp}_p : N_p \rightarrow U_p = \text{Exp}_p(N_p)$ un diffeomorfismo di N_p su un intorno aperto U_p di p in M .

Fissato un vettore non nullo $w \in N_p$, indichiamo con $\gamma_w \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], M)$ la geodetica uscente da p con velocità w . Fissiamo un riferimento ortonormale $\sigma_p = (v_1, \dots, v_m)$ in T_pM con $v_m = w/|w|$ ed indichiamo con J_1^w, \dots, J_m^w i campi di Jacobi che soddisfano il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{D^2 J_h^w}{dt^2} + R(J_h^w(t), \dot{\gamma}_w(t)) \dot{\gamma}_w(t) = 0, \\ J_h^w(0) = 0, \quad \frac{D J_h^w(0)}{dt} = v_h, \end{cases} \quad 1 \leq h \leq m.$$

Nota che $J_m^w(t) = t|w|^{-1}\dot{\gamma}_w(t)$ per $0 \leq t \leq 1$.

Ricordiamo che i valori $J_h^w(1) \in T_{\text{Exp}(w)}M$ sono le immagini dei vettori v_h mediante il differenziale dell'applicazione esponenziale nel punto w . Con queste notazioni, abbiamo

Lemma 12.4.2. *Con le notazioni introdotte sopra, abbiamo*

$$(12.4.2) \quad F_p(\text{Exp}_p(w)) = \sqrt{|\det(J_1, \dots, J_{m-1})(1)|}.$$

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione segue dal fatto che i campi J_h^w sono ortogonali alla velocità $\dot{\gamma}_w$ lungo la geodetica e $g_{i,j}(\text{Exp}_p(w)) = g_{i,j}(J_i^w(1), J_j^w(1))$ per $1 \leq i, j \leq m$. \square

La funzione introdotta nel Lemma ^{lem: 15a.12.4} 12.4.1 soddisfa una disuguaglianza relativa alla curvatura di Ricci. Vale infatti la

Proposizione 12.4.3. *Sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, t_0], M)$ una geodetica uscente dal punto $p \in M$, con supporto contenuto in un suo intorno normale, ed F_p la funzione definita nel Lemma ^{lem: 15a.12.4} 12.4.1. Posto*

$$\phi(q) = \frac{1}{t} \sqrt{m-1} \sqrt{\gamma(t)},$$

vale la disuguaglianza

$$(12.4.3) \quad \frac{D^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{m-1} r(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\phi \leq 0.$$

Spazi simmetrici

13.1. Spazi affini localmente simmetrici

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m , con una connessione affine definita dalla derivazione covariante ∇ . Fissiamo un punto p di M ed intorno $V_0(p)$ di 0 in T_pM , ed U_p di p in M tali che l'esponenziale in p sia definito su $V_0(p)$ e sia un diffeomorfismo di $V_0(p)$ su U_p . Ricordiamo che l'esponenziale $\exp_p : V_0(p) \rightarrow U_p$ è definito da $\exp_p(X) = \phi_{p,X}(1)$, se $\phi_{p,X}(t)$ è la geodetica di punto iniziale p e velocità iniziale $X \in T_pM$. Possiamo supporre che $V_0(p)$ sia simmetrico rispetto all'origine e definire quindi la *simmetria geodetica rispetto al punto p* mediante la corrispondenza:

$$(13.1.1) \quad U_p \ni q = \exp_p(X) \xrightarrow{s_p} q' = \exp_p(-X) \in U_p.$$

Osserviamo che s_p è un diffeomorfismo di U_p , con $ds_p(p) = -I$ (I è qui l'identità su T_pM) ed $s_p^2 = s_p \circ s_p = \text{id}_{U_p}$.

Definizione 13.1.1. Diciamo che (M, ∇) è una *varietà affine localmente simmetrica* se per ogni punto p di M esiste un intorno aperto U_p di p in M su cui la simmetria affine sia definita e sia una trasformazione affine.

Ricordiamo brevemente la definizione di trasformazione affine. Consideriamo in primo luogo il concetto di trasporto parallelo. Se (M, ∇) è uno spazio affine ed $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$, con $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p_1$, una curva differenziabile, per ogni vettore $X_0 \in T_{p_0}M$ indichiamo con $[\alpha]_*(X_0)$ il vettore $X_1 \in T_{p_1}M$, definito dal valore $X_1 = X(1)$ del campo di vettori $[0, 1] \ni t \rightarrow X(t) \in TM$ lungo α , con valore iniziale $X(0) = X_0$, definito dal problema di Cauchy per il sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \frac{DX(t)}{dt} = \nabla_{\dot{\alpha}(t)}X(t) = 0, \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Se ora (N, ∇') è un'altra varietà affine, un'applicazione differenziabile $f : M \rightarrow N$ si dice *affine* se preserva il trasporto parallelo, se cioè, per ogni coppia di punti p_0, p_1 di M che siano estremi di un cammino differenziabile $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$, per ogni $X_0 \in T_{p_0}M$ risulta:

$$df(p_1)([\alpha]_*(X_0)) = [f \circ \alpha]_*(df(p_0)(X_0)).$$

Se $f : M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo, esso definisce un'applicazione bigettiva $\mathfrak{X}(M) \ni X \rightarrow f_*(X) \in \mathfrak{X}(N)$. In questo caso, la f è una trasformazione affine se e soltanto se preserva la derivazione covariante, cioè se e soltanto se $f_*(\nabla_X Y) = \nabla'_{f_*(X)} f_*(Y)$ per ogni coppia X, Y di campi di vettori di M .

Teorema 13.1.2. *Uno spazio affine (M, ∇) è localmente simmetrico se e soltanto se il suo tensore di torsione T e il suo tensore di curvatura R soddisfano le equazioni:*

$$(13.1.2) \quad T = 0, \quad \nabla_X R = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che (M, ∇) sia localmente simmetrica. In particolare, per ogni punto $p \in M$, il differenziale in p della simmetria rispetto al punto p è il differenziale di un'affinità. Preserva quindi torsione e curvatura. Ricordiamo che la torsione T è definita da: $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. In un qualsiasi punto p avremo, applicando il differenziale $ds_p = -I$:

$$T(X_p, Y_p) = -(T(-X_p, -Y_p)) = -T(X_p, Y_p)$$

e quindi $T(X_p, Y_p) = 0$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ed ogni $p \in M$. Ciò dimostra che la torsione è nulla. Analogamente, se $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$, otteniamo:

$$[(\nabla_X R)(Y, Z)T]_p = -[(\nabla_{-X} R)(-Y, -Z)(-T)]_p = -[(\nabla_X R)(Y, Z)T]_p$$

e quindi anche $\nabla_X R = 0$. □

Per concludere la dimostrazione, proveremo più in generale il:

Lemma 13.1.3. *Siano (M, ∇) ed (M', ∇') due spazi affini. Supponiamo che, dette T ed R torsione e curvatura di (M, ∇) e T' ed R' quelle di (M', ∇') , risulti:*

$$\nabla_X T = 0, \quad \nabla_{X'} T' = 0, \quad \nabla_X R = 0, \quad \nabla_{X'} R' = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \quad \forall X' \in \mathfrak{X}(N).$$

Siano $p \in M, q \in N$ due punti per cui esista un isomorfismo lineare $L: T_p M \rightarrow T_q N$ tale che:

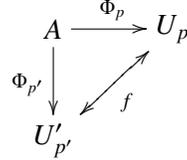
$$\begin{cases} L(T(v_1, v_2)) = T'(L(v_1), L(v_2)), \\ L(R(v_1, v_2)v_3) = R'(L(v_1), L(v_2))L(v_3) \\ \forall v_1, v_2, v_3 \in T_p M. \end{cases}$$

Allora esistono intorno aperti U_p di p in M, W_q di q in N ed un diffeomorfismo affine $f: U_p \rightarrow U_q$ con $df(p) = L$. Tale f è essenzialmente unica, è cioè univocamente determinata da L nella componente connessa di p dell'intorno aperto di p in M su cui è definita.

DIMOSTRAZIONE. Sia $U_p = \exp_p(V_0(p))$ un intorno normale di p in M . Siano X_1, \dots, X_m campi di vettori in U_p ottenuti mediante il trasporto parallelo, lungo le geodetiche uscenti da p , di una base $X_1(p), \dots, X_m(p)$ di $T_p M$. L'ipotesi che curvatura e torsione abbiano differenziale covariante nullo ci dice che le componenti della torsione T e della curvatura R , calcolate rispetto ai campi X_1, \dots, X_m , sono costanti in U_p .

Siano ora X'_1, \dots, X'_m i campi di vettori, definiti in un intorno normale $U'_{p'} = \exp_{p'}(V'_0(p'))$, paralleli lungo le geodetiche uscenti da p' , con $X'_j(p') = L(X_j(p))$. Per l'ipotesi che torsione e curvatura abbiano differenziale covariante nullo, le componenti della torsione T' e della curvatura R' , calcolate rispetto ai campi X'_1, \dots, X'_m , sono costanti. Poiché tali componenti coincidono con quelle di T e di R in p' , esse coincidono, essendo costanti, su tutto $U'_{p'}$. Siano Φ_p e $\Phi_{p'}$ le applicazioni $\Phi_p(t_1, \dots, t_m) = \exp_p(t_1 X_1(p) + \dots + t_m X_m(p))$ e $\Phi_{p'}(t_1, \dots, t_m) = \exp_{p'}(t_1 X'_1(p') + \dots + t_m X'_m(p'))$. A meno di restringere gli intorni normali U_p e $U'_{p'}$, posto $A = \{\sum_{i=1}^m t_i^2 < r^2\} \subset \mathbb{R}^m$, l'affinità locale cercata si può definire mediante il diagramma

commutativo :



Il fatto che la f così costruita sia un'affinità, segue dall'unicità della soluzione delle equazioni di struttura¹. □

Definizione 13.1.4. Diciamo che una varietà Riemanniana (M, g) è localmente simmetrica se ogni punto p di M ammette un intorno normale in cui la simmetria geodetica (rispetto alla connessione di Levi-Civita) sia un'isometria locale.

Teorema 13.1.5. Una varietà Riemanniana (M, g) è localmente simmetrica se e soltanto se la sua curvatura sezionale è invariante rispetto al trasporto parallelo.

DIMOSTRAZIONE. Se (M, g) è localmente simmetrica, allora il suo tensore di curvatura, e quindi a maggior ragione la sua curvatura sezionale, è invariante per trasporto parallelo. Il viceversa segue dalle proprietà algebriche del tensore di curvatura: se s_p è la simmetria geodetica rispetto al punto p , consideriamo il tensore $B(X, Y, Z, T) = R(X, Y, Z, T) - R(s_p(X), s_p(Y), s_p(Z), s_p(T))$, definito quando $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(U_p)$ per un intorno normale simmetrico U_p di $p \in M$. Esso è antisimmetrico rispetto alla prima e alla seconda coppia di indici e simmetrico per lo scambio della prima con la seconda coppia di indici. Quindi esso si annulla identicamente perché, per l'ipotesi dell'invarianza rispetto alla simmetria geodetica della curvatura sezionale, abbiamo $B(X, Y, X, Y) = 0$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(U_p)$. Da questo si deduce l'invarianza di R rispetto al trasporto parallelo. Resta da verificare che le simmetrie geodetiche di una varietà Riemanniana, quando siano trasformazioni affini, sono anche isometrie. Questo è il contenuto del lemma seguente. □

LMMPAD

Lemma 13.1.6. *lem*Sia (M, g) una varietà Riemanniana connessa e sia $\phi : M \rightarrow M$ un'affinità per la connessione di Levi-Civita. Se, per un punto p_0 di M , il differenziale $d\phi(p_0) : T_{p_0}M \rightarrow T_{\phi(p_0)}M$ è un'isometria di spazi Euclidei, allora $\phi : M \rightarrow M$ è un'isometria.

DIMOSTRAZIONE. Sia q un qualsiasi punto di M e sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una curva differenziabile con $\gamma(0) = q, \gamma(1) = p_0$. Sia $\tau : T_qM \rightarrow T_{p_0}M$ il trasporto parallelo lungo la curva γ . Se $X, Y \in T_{p_0}M$, abbiamo :

$$g_q(X, Y) = g_{p_0}(\tau(X), \tau(Y))$$

¹Ricordiamo che le equazioni di struttura sono le :

$$\begin{cases}
 d\omega^i = -\omega_h^i \wedge \omega^h + \frac{1}{2}T_{j,h}^i \omega^j \wedge \omega^h \\
 d\omega_j^i = -\omega_h^i \wedge \omega_j^h + \frac{1}{2}R_{j,h,k}^i \omega^h \wedge \omega^k
 \end{cases}$$

con $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{i,j}^h X_h, T(X_i, X_j) = T_{i,j}^h X_h, R(X_h, X_k)X_j = R_{j,h,k}^i X_i, \omega^i(X_j) = \delta_j^i, \omega_j^i = \Gamma_{h,j}^i \omega^h$. Le forme ω^j ci consentono di calcolare le coordinate normali nell'intorno del punto p , quando i campi di vettori X_i siano scelti come nella dimostrazione del lemma.

perché il trasporto parallelo preserva il prodotto scalare,

$$= g_{\phi(p_0)}(d\phi(p_0)(\tau(X)), d\phi(p_0)(\tau(Y)))$$

per l'ipotesi che $d\phi(p_0)$ sia un'isometria,

$$= g_{\phi(q)}(d\phi(q)(X), d\phi(q)(Y))$$

perché, essendo una trasformazione affine, la $d\phi$ commuta con l'operazione di trasporto parallelo, trasporta cioè vettori paralleli lungo la curva γ in vettori paralleli lungo la curva $\phi \circ \gamma$. \square

13.2. Alcuni risultati sui gruppi di trasformazioni

prgfb

Premettiamo allo studio del gruppo $\mathbf{O}(M, g)$ delle isometrie di una varietà Riemanniana (M, g) alcuni risultati generali sui gruppi di trasformazioni di una varietà differenziabile. Vale il:

TRMMGBA

Teorema 13.2.1. *Sia M una varietà differenziabile numerabile all'infinito e sia \mathbf{G} un sottogruppo del gruppo dei diffeomorfismi di M in sé. Sia $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{X}(M)$ l'insieme di tutti i campi di vettori X di M che generano gruppi a un parametro di trasformazioni di \mathbf{G} . Se la sottoalgebra di Lie reale di $\mathfrak{X}(M)$ generata da \mathfrak{G} ha dimensione finita, allora \mathfrak{G} è un'algebra di Lie e possiamo definire su \mathbf{G} una struttura di gruppo di Lie di trasformazioni di M , con algebra di Lie (isomorfa a) \mathfrak{G} .*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tX) \in \mathbf{G}$ il gruppo a un parametro di diffeomorfismi generato da $X \in \mathfrak{G}$. Sia $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ l'algebra di Lie generata da \mathfrak{G} ed indichiamo con $\tilde{\mathbf{G}}$ il gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$. Per ogni $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ possiamo considerare il gruppo locale a un parametro da esso generato: vi è un intorno aperto V_X di $(\{0\} \times M)$ in $(\mathbb{R} \times M)$, in cui è definita un'applicazione differenziabile, che indicheremo con:

$$V_X \ni (t, p) \rightarrow e^{tX}(p) \in M,$$

tale che:

$$(d/dt) [e^{tX}(p)] = X_{e^{tX}(p)} \quad \text{per ogni } (t, p) \in U_X.$$

Osserviamo che possiamo scegliere $V_X = (\mathbb{R} \times M)$, e risulta $e^{tX} = \exp(tX)$, se $X \in \mathfrak{G} \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$.

Poiché abbiamo supposto che $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ sia un'algebra di Lie di dimensione finita, possiamo trovare un intorno aperto \mathcal{U} di $(\{e\} \times M)$ in $(\tilde{\mathbf{G}} \times M)$ tale che, se $(g, p) \in \mathcal{U}$, allora vi sono $X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ e $t \in \mathbb{R}$ tali che $(t, p) \in V_X$ e $g = \exp(tX)$. (Indichiamo qui con $\exp : \mathfrak{L}(\mathfrak{G}) \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}$ l'esponenziale, definito sull'algebra di Lie $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$, a valori nel gruppo di Lie $\tilde{\mathbf{G}}$.)

Per dimostrare quest'affermazione, consideriamo un ricoprimento aperto localmente finito $\{U_i\}$ di M mediante aperti relativamente compatti e un suo raffinamento $\{U'_i\}$. Introduciamo poi una norma sullo spazio vettoriale di dimensione finita $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$. Per i teoremi di esistenza, unicità e dipendenza continua dai parametri,

potremo allora determinare numeri reali positivi ϵ_i tali che il problema di Cauchy per il sistema di equazioni differenziali ordinarie :

$$(*) \quad \begin{cases} X \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G}), p \in U'_i, \phi(t, p, X) \in U_i \\ \frac{d\phi(t, p, X)}{dt} = X_{\phi(t, p, X)} \\ \phi(0, p, X) = p \end{cases}$$

abbia una ed una sola soluzione, definita per $|t| < \epsilon_i$, se $\|X\| \leq 1$. Potremo allora considerare $\mathcal{U} = \bigcup_i (\{\exp(X) \mid \|X\| < \epsilon_i\} \times U'_i)$.

Risulta allora definita un'azione locale di $\tilde{\mathbf{G}}$ su M , dalla :

$$\mathcal{U} \ni (\exp(tX), p) \rightarrow e^{tX}(p) \in M.$$

Osserviamo che quest'applicazione è ben definita per l'unicità della soluzione di (*).

Per completare la dimostrazione, proviamo ora alcuni lemmi. \square

Lemma 13.2.2. *Siano $X, Y \in \mathfrak{G}$. Allora $Z = \text{Ad}(\exp(X))(Y) \in \mathfrak{G}$.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo

$$e^{tZ}(p) = e^{tX} \circ e^{tY} \circ e^{-tX}(p) = \exp(tX) \circ \exp(tY) \circ \exp(-tX)(p)$$

e quindi $t \rightarrow e^{tZ}$ è un gruppo a un parametro di trasformazioni di \mathbf{G} e $Z \in \mathfrak{G}$. \square

Lemma 13.2.3. *\mathfrak{G} genera $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ come spazio vettoriale su \mathbb{R} .*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con V il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ generato da \mathfrak{G} . Per il lemma precedente, abbiamo $\text{Ad}(\exp(\mathfrak{G}))(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G}$ e quindi, per linearità, abbiamo anche $\text{Ad}(\exp(\mathfrak{G}))(V) \subset V$. Poiché \mathfrak{G} genera $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$, anche $\exp(\mathfrak{G})$ genera $\tilde{\mathbf{G}}$. Poiché l'insieme degli elementi $g \in \tilde{\mathbf{G}}$ per cui $\text{Ad}(g)(V) \subset V$ è un sottogruppo di $\tilde{\mathbf{G}}$, ne segue che $\text{Ad}(\tilde{\mathbf{G}})(V) \subset V$. Otteniamo in particolare che $\text{Ad}(\exp(V))(V) \subset V$, che ci dà, differenziando, $[V, V] \subset V$. Quindi V è un'algebra di Lie e perciò coincide con $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$. \square

Lemma 13.2.4. $\mathfrak{L}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{G}$ una base di $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ come spazio vettoriale. Allora l'applicazione :

$$t_1 X_1 + \dots + t_n X_n \rightarrow \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_n X_n)$$

è un diffeomorfismo di un intorno V_0 di 0 in $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ su un intorno W_e dell'identità e di $\tilde{\mathbf{G}}$. Quindi, se $Y \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$, possiamo trovare un $\epsilon > 0$ e funzioni $a_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^n a_i(t) X_i \in V_0$ e

$$\exp(tY) = \exp(a_1(t) X_1) \cdots \exp(a_n(t) X_n) \quad \text{se } |t| < \epsilon.$$

Questa uguaglianza ci dà la :

$$e^{tY} = \exp(a_1(t) X_1) \circ \cdots \circ \exp(a_n(t) X_n) \quad \text{se } |t| < \epsilon.$$

Definendo $e^{tY} = \left(e^{(t/N)Y} \right)^N$ se $|t| < N\epsilon$, otteniamo che $Y \in \mathfrak{G}$. Questo completa la dimostrazione del lemma. \square

Sia ora \mathbf{G}^* il gruppo di diffeomorfismi di M generato da $\exp(\mathfrak{G})$. Poiché \mathbf{G}^* è generato dai sottogruppi a un parametro contenuti in \mathbf{G} , abbiamo $\mathbf{G}^* \subset \mathbf{G}$. Poiché per ogni $g \in \mathbf{G}$ ed ogni sottogruppo a un parametro $\mathbb{R} \ni t \rightarrow a_t \in \mathbf{G}$ anche $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \text{ad}(g)(a_t) \in \mathbf{G}$ è ancora un sottogruppo a un parametro di \mathbf{G} , il sottogruppo \mathbf{G}^* è normale in \mathbf{G} . Inoltre, l'applicazione $\text{ad}(g) : \mathbf{G}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$ è continua² per la topologia di gruppo di Lie di \mathbf{G}^* , perché trasforma sottogruppi a un parametro in sottogruppi a un parametro.

Dimostriamo ora il :

LMMBE

Lemma 13.2.5. *Sia \mathbf{G}^* un sottogruppo normale di un gruppo \mathbf{G} . Se \mathbf{G}^* è un gruppo topologico e le applicazioni $\text{ad}(g) : \mathbf{G}^* \rightarrow \mathbf{G}^*$ sono continue per ogni $g \in \mathbf{G}$, allora vi è un'unica topologia di gruppo topologico su \mathbf{G} per cui \mathbf{G}^* sia aperto in \mathbf{G} .*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo su \mathbf{G} la topologia meno fine per cui sono aperti tutti gli insiemi $L_g(A)$ con A aperto di \mathbf{G}^* . Si verifica facilmente che questa topologia è l'unica con le proprietà richieste nell'enunciato del lemma. \square

Osservazione 13.2.6. In generale la topologia su \mathbf{G} è più fine della topologia compatta-aperta. Inoltre, non è detto che le componenti connesse di \mathbf{G} , con la topologia che abbiamo definito, formino un insieme di cardinalità al più numerabile. Possiamo ad esempio considerare l'azione sul gruppo additivo \mathbb{R} , che identifichiamo alla varietà M , di un qualsiasi suo sottogruppo \mathbf{G} totalmente sconnesso: in questo caso $\mathfrak{G} = \{0\}$ e la costruzione che abbiamo fatto di dà su \mathbf{G} la topologia discreta.

Ricordiamo che un *parallelismo assoluto* su una varietà differenziabile M è una sezione $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{F}(M))$ del fibrato dei suoi sistemi di riferimento. In modo equivalente, è il dato di m campi di vettori X_1, \dots, X_m che definiscono in ogni punto $p \in M$ una base $(X_1(p), \dots, X_m(p))$ di $T_p M$. Un diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ definisce un diffeomorfismo di fibrati principali $\hat{f} : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$.

Definizione 13.2.7. Se (M, σ) è la coppia formata da una varietà differenziabile M e da un parallelismo assoluto σ assegnato su M , chiameremo *automorfismi* di (M, σ) i diffeomorfismi $f : M \rightarrow M$ tali che $\hat{f} \circ \sigma = \sigma \circ f$.

Gli automorfismi di (M, σ) formano un gruppo, che denoteremo $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$.

trmPBF

Teorema 13.2.8. *Sia (M, σ) la coppia formata da una varietà differenziabile connessa M numerabile all'infinito e da un parallelismo assoluto σ su M . Allora $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ è un gruppo di Lie di trasformazioni con $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{Aut}(M, \sigma) \leq \dim_{\mathbb{R}} M$. Più precisamente, per ogni $p \in M$, l'applicazione*

$$(*) \quad \mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni g \rightarrow g(p) \in M$$

è iniettiva e la sua immagine è una sottovarietà chiusa di M . Vi è un'unica struttura di gruppo di Lie su $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ per cui la () sia un diffeomorfismo.*

² Un teorema di Chevalley ([Theory of Lie groups. Princeton Univ. Press, 1946], p.128) ci dice che, se \mathbf{G} e \mathbf{G}' sono due gruppi di Lie, un omomorfismo algebrico $\phi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}'$ è un omomorfismo di gruppi di Lie se e soltanto se trasforma sottogruppi a un parametro di \mathbf{G} in sottogruppi a un parametro di \mathbf{G}' .

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma(p) = (X_1(p), \dots, X_m(p))$ e sia \mathfrak{B} il sottospazio vettoriale reale di $\mathfrak{X}(M)$ generato da X_1, \dots, X_m . Per definizione, le trasformazioni di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ lasciano \mathfrak{B} invariante. In particolare gli elementi di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ commutano con gli elementi dei sottogruppi a un parametro $\phi_v(t)$ di diffeomorfismi di M generati dagli elementi v di \mathfrak{B} . Poniamo $\tau_v = \phi_v(1)$. Osserviamo che, per ogni punto $p \in M$, $\tau_v(q)$ è definita per v in un intorno di 0 in \mathfrak{B} e q in un intorno di p in M .

Lemma 13.2.9. *Per ogni $p \in M$ l'applicazione $\mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni g \rightarrow g(p) \in M$ è iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $g \in \mathbf{Aut}(M, \sigma)$ l'insieme $F_g = \{q \in M \mid g(q) = p\}$ dei punti fissi di g è un sottoinsieme chiuso di M . Fissato un punto $q \in M$, al variare di v in un intorno di 0 in \mathfrak{B} , gli elementi $\tau_v(q)$ sono definiti e formano un intorno di q in M . Poiché, come abbiamo osservato, $g \circ \tau_v = \tau_v \circ g$, otteniamo che F_g contiene un intorno di q . Dunque F_g risulta aperto e chiuso in M e quindi o è vuoto, o coincide con M per l'ipotesi che M sia connesso. \square

Sia $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ ($T > 0$) una curva differenziabile. Risultano allora determinate m funzioni scalari $a_\gamma^i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^m a_\gamma^i(t) X_i(\gamma(t))$ per ogni $t \in [0, T]$. Due curve differenziabili $\gamma_1, \gamma_2 : [0, T] \rightarrow M$ si diranno *parallele nel parallelismo completo* σ se $a_{\gamma_1}^i(t) = a_{\gamma_2}^i(t)$ per ogni $t \in [0, T]$. Osserviamo che, data una curva differenziabile $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ ed un punto q_0 , vi è al più una curva differenziabile γ' parallela a γ ed uscente dal punto q_0 ; esisterà poi comunque, per qualche $0 < \epsilon \leq T$ sufficientemente piccolo, una $\gamma' : [0, \epsilon] \rightarrow M$ uscente da p_0 e parallela alla restrizione di γ a $[0, \epsilon]$.

Lemma 13.2.10. *Per ogni $p_0 \in M$, l'insieme $\mathbf{Aut}(M, \sigma)(p_0)$ è chiuso in M .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{a_k\}$ una successione di elementi di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ tali che $\{a_k(p_0)\}$ converga a un elemento $q_0 \in M$.

Dimostriamo che ogni curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uscente dal punto p_0 ammette una parallela $\gamma' : [0, 1] \rightarrow M$ uscente da q_0 .

A questo scopo, indichiamo con T l'estremo superiore dei numeri reali $a > 0$ per cui la restrizione di γ a $[0, a]$ ammette una parallela γ'_a con punto iniziale q_0 . Vogliamo dimostrare che esiste la parallela γ'_T . A questo scopo, osserviamo che esistono le parallele $\gamma'_{T'}$ per ogni $0 < T' < T$ e che per ogni t con $0 \leq t < T$, abbiamo $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\gamma(t)) = \gamma'_{T'}(t)$ per $0 \leq t \leq T' < T$.

Fissiamo poi un intorno \mathfrak{B}_0 di 0 in \mathfrak{B} e un intorno U di $\gamma(T)$ in M tali che $\tau_v(p)$ sia definita per $v \in \mathfrak{B}_0$ e $p \in U$. Allora τ_v è anche definita, per $v \in \mathfrak{B}_0$, su tutti gli insiemi $a_k(U)$. Sia $t_0 < T$ tale che $a_k(\gamma(t_0)) \in U$ per ogni $k \gg 1$ e $\gamma(T) = \tau_{v_0}(\gamma(t_0))$ per qualche $v_0 \in \mathfrak{B}_0$.

Possiamo allora definire γ'_T ponendo $\gamma'_T(t) = \gamma'_{T'}(t)$ se $0 \leq t \leq T' < T$ e $\gamma'_T(T) = \tau_{v_0}(\gamma'_{T'}(t_0))$ se $t_0 \leq T' < T$.

Se fosse $T < 1$, potremmo prolungare γ'_T con una parallela a $\gamma(t - T)$ uscente dal punto $\gamma'_T(T)$, contraddicendo la definizione di T . Quindi $T = 1$ e questo dimostra l'esistenza della parallela. Poiché $\gamma'(1) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\gamma(1))$, l'estremo $\gamma'(1)$ non dipende dalla scelta del cammino γ , ma soltanto dal suo punto finale $\gamma(1)$.

Dimostriamo in questo modo che $\{a_k(q)\}$ converge per ogni $q \in M$ e otteniamo quindi un'applicazione $a : M \rightarrow M$ mediante $a(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(q)$ per ogni $q \in M$. Poiché $\tau_v(a(q)) = a(\tau_v(q))$ per ogni $q \in M$, la a è chiaramente differenziabile. Si può dimostrare che è invertibile, ripetendo i raginamenti appena svolti per la successione delle applicazioni inverse $\{a_k^{-1}\}$. \square

Abbiamo facilmente:

Lemma 13.2.11. *Sia \mathfrak{l} l'algebra di Lie dei campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ tali che $[X, \mathfrak{B}] = \{0\}$. Per ogni $p \in M$, l'applicazione $\mathfrak{l} \ni X \rightarrow X(p) \in T_p M$ è iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE. I generatori di sottogruppi a un parametro di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ sono gli elementi di \mathfrak{l} che generano sottogruppi a un parametro di diffeomorfismi di M . Quindi, per il Teorema 13.2.1, il gruppo $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ è un gruppo di Lie, e l'applicazione $\mathbf{Aut}(M, \sigma) \ni a \rightarrow a(p) \in M$ definisce per ogni $p \in M$ un diffeomorfismo di $\mathbf{Aut}(M, \sigma)$ con una sottovarietà differenziabile chiusa di M . \square

Completiamo ora la dimostrazione del Teorema 13.2.8. L'insieme \mathfrak{G} dei campi di vettori $X \in \mathfrak{l}$ che generano sottogruppi a un parametro di trasformazioni di M è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{l} , e quindi ha dimensione finita. Possiamo perciò applicare il Teorema 13.2.1 al gruppo $\mathbf{G} = \mathbf{Aut}(M, \sigma)$ e a \mathfrak{G} , e concludere che \mathbf{G} ha una struttura di gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{G} . Poiché l'azione $\mathbf{G} \times M \rightarrow M$ è differenziabile, fissato un qualsiasi punto $p_0 \in M$, l'immersione differenziabile $\mathbf{G} \ni g \rightarrow g(p_0) \in M$ è un diffeomorfismo di \mathbf{G} con una sottovarietà differenziabile chiusa di M . \square

Ricordiamo che vale il teorema³:

Teorema 13.2.12 (Bochner-Montgomery). *Sia \mathbf{G} un gruppo topologico localmente compatto e numerabile all'infinito di trasformazioni differenziabili di una varietà differenziabile paracompatta M . Allora \mathbf{G} è un gruppo di Lie.*

Ricordiamo ancora⁴ il:

Teorema 13.2.13 (Dantzig-van der Waerden). *Sia (E, d) uno spazio metrico localmente compatto. Sia $\mathbf{Isom}(E, d)$ il gruppo delle isometrie di (M, E) e, per $x \in E$, indichiamo con $\mathbf{Isom}_x(E, d)$ lo stabilizzatore di x in $\mathbf{Isom}(E, d)$. Consideriamo su $\mathbf{Isom}(E, d)$ la topologia compatta-aperta. Allora $\mathbf{Isom}(E, d)$ è localmente compatto e $\mathbf{Isom}_x(E, d)$ è compatto per ogni $x \in M$. Se M è compatto, anche $\mathbf{Isom}(E, d)$ è compatto.*

Osservazione 13.2.14. Ricordiamo ancora che, se (M, g) è una varietà Riemanniana e d è la distanza nella metrica corrispondente, allora le isometrie $f : M \rightarrow M$ per

³S.Bochner, D.Montgomery *Locally compact groups of differentiable transformations*, Ann. of Math. **47** (1946), pp.639-657.

⁴D.Dantzig, B.L.van der Waerden *Über metrisch homogene Räume*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6** (1928) pp.374-376. Una dimostrazione completa si può trovare anche in: Kobayashi-Nomizu *Foundations of Differential Geometry*, New York: John Wiley & Sons, vol.1, 1963, alle pagine 46-50.

la metrica d sono applicazioni differenziabili che preservano il tensore g della metrica. Indicheremo nel seguito con $\mathbf{O}(M, g)$ il gruppo delle isometrie della varietà Riemanniana (M, g) , cioè :

$$\mathbf{O}(M, g) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M, M) \mid f^*g = g\}.$$

Se d è la distanza su M definita dalla metrica g , allora $\mathbf{Isom}(M, d) = \mathbf{O}(M, g)$.

13.3. Automorfismi affini e isometrie

Per utilizzare i risultati del §13.2 nella discussione del gruppo delle affinità di una varietà affine (M, ∇) e delle isometrie di una varietà Riemanniana (M, g) , è conveniente riformulare le nozioni di varietà affini e riemanniane nel contesto della teoria delle \mathbf{G} -strutture.

Sia M una varietà differenziabile di dimensione m . Indichiamo con :

$$\mathfrak{F}(M) \xrightarrow[\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})]{\pi} M$$

il fibrato principale dei sistemi di riferimento su M .

Gli elementi della fibra $\mathfrak{F}_p(M) = \pi^{-1}(p)$ sono le basi (v_1, \dots, v_m) di T_pM . Il gruppo $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ opera a destra su $\mathfrak{F}(M)$ mediante :

$$(v_1, \dots, v_m) \cdot a = \left(\sum_{i=1}^m a_1^i v_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_m^i v_i \right) \quad \text{se} \quad a = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Se $\sigma = (X_1, \dots, X_m)$ è una m -upla di campi di vettori che definiscono una base di T_pM in ogni punto p di un aperto U di M , allora l'applicazione :

$$U \times \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \ni (p, a) \rightarrow \sigma(p) \cdot a \in \pi^{-1}(U)$$

è un diffeomorfismo per la struttura differenziabile di $\mathfrak{F}(M)$.

In modo equivalente, possiamo definire la fibra $\mathfrak{F}_p(M)$ sopra il punto $p \in M$ come l'insieme di tutte le applicazioni lineari invertibili $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow T_pM$, identificando una base (v_1, \dots, v_m) di T_pM all'isomorfismo lineare $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow T_pM$ che associa al vettore $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{\rightarrow} 1, 0, \dots, 0)$ della base canonica di \mathbb{R}^m il vettore v_i di T_pM .

Definiamo allora in modo affatto naturale la forma canonica $\theta \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m)$ mediante :

$$\theta(v) = \xi^{-1}(d\pi(v)) \quad \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \quad \forall v \in T_\xi \mathfrak{F}(M).$$

Osserviamo che :

$$(R_a)^* \theta = a^{-1} \circ \theta \quad \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Infatti, se $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$, allora $dR_a(v) \in T_{\xi \cdot a} \mathfrak{F}(M)$ e $d\pi(dR_a(v)) = d\pi(v)$. Quindi :

$$(R_a)^* \theta(v) = \theta(dR_a(v)) = (\xi \cdot a)^{-1} (d\pi(dR_a(v))) = a^{-1} \circ \xi^{-1} (d\pi(v)) = a^{-1} \circ \theta(v).$$

Proposizione 13.3.1. *Ogni diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ si solleva in modo unico ad un diffeomorfismo $\hat{f} : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ che lascia θ invariante. Viceversa, ogni automorfismo di $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ -fibrato principale $F : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ che lasci θ invariante è il sollevamento di un diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : M \rightarrow M$ un diffeomorfismo. Definiamo allora il suo sollevamento \hat{f} mediante :

$$\hat{f} : \mathfrak{F}(M) \ni \xi \rightarrow df(\pi(\xi)) \circ \xi \in \mathfrak{F}(M).$$

Abbiamo allora, se $\xi \in \mathfrak{F}(M)$ e $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$:

$$\begin{aligned} \theta(d\hat{f}(v)) &= (df(\pi(\xi)) \circ \xi)^{-1} (d\pi(d\hat{f}(\xi)(v))) \\ &= (\xi^{-1} \circ (df(\pi(\xi)))^{-1}) (df(\pi(\xi)) \circ d\pi(v)) = \theta(v). \end{aligned}$$

Infatti, poiché \hat{f} preserva le fibre, abbiamo $f \circ \pi = \pi \circ \hat{f}$ e quindi $df \circ d\pi = d\pi \circ d\hat{f}$.

Viceversa, se $F : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ preserva le fibre e lascia θ invariante, detto $f : M \rightarrow M$ il diffeomorfismo definito da $\pi \circ F = f \circ \pi$, osserviamo che $\Phi = \hat{f}^{-1} \circ F$ è un automorfismo differenziabile di $\mathfrak{F}(M)$ che preserva la fibra, lascia θ invariante e induce l'identità su M . Perciò abbiamo :

$$\begin{aligned} \xi^{-1}(d\pi(v)) &= \theta(v) = \Phi^*(\theta(v)) = \theta(d\Phi(v)) \\ &= (\Phi(\xi))^{-1} (d\pi(d\Phi(v))) = (\Phi(\xi))^{-1} (d\pi(v)) \\ &\quad \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \quad \forall v \in T_\xi \mathfrak{F}(M). \end{aligned}$$

Otteniamo dunque $(\Phi(\xi))^{-1}(w) = \xi^{-1}(w)$ per ogni $w \in T_{\pi(\xi)}M$, e questo dimostra che Φ è l'identità su $\mathfrak{F}(M)$. \square

Definizione 13.3.2. Per ogni $A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$, definiamo il *campo di vettori fondamentale* $A^* \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M))$ associato ad A come il generatore infinitesimale del gruppo a un parametro di diffeomorfismi $\mathfrak{F}(M) \times \mathbb{R} \ni (\xi, t) \rightarrow \xi \cdot \exp(tA) \in \mathfrak{F}(M)$.

Una *connessione affine* su M si può definire, oltre che per mezzo della derivazione covariante, mediante l'assegnazione di una *forma di connessione*, cioè di una forma differenziale $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ che goda delle proprietà :

- (1) $\omega(A^*) = A \quad \forall A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$
- (2) $R_a^* \omega = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega \quad \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$.

Un vettore $v \in T_\xi \mathfrak{F}(M)$ con $\omega(v) = 0$ si dice *orizzontale*. Poiché $\omega(\xi) : T_\xi \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ ha rango m^2 e $\ker d\pi(\xi) \cap \ker \omega(\xi) = \{0\}$ per la proprietà (1), la forma di connessione ω ci permette di decomporre lo spazio tangente a $\mathfrak{F}(M)$ in un punto ξ nella somma diretta dei due sottospazi $\mathfrak{V}_\xi(M) = \ker d\pi(\xi)$ dei *vettori verticali in ξ* e $\mathfrak{H}_\xi(M)$ dei⁵ *vettori orizzontali in ξ* .

Poiché $d\pi(\xi) : \mathfrak{H}_\xi(M) \rightarrow T_{\pi(\xi)}M$ è per ogni $\xi \in \mathfrak{F}(M)$ un isomorfismo lineare, possiamo associare ad ogni campo di vettori X definito su un aperto U di M un campo di vettori orizzontale \tilde{X} su $\pi^{-1}(U)$, caratterizzato dalle :

$$\begin{cases} \omega(\tilde{X}) = 0 \\ d\pi(\tilde{X}) = X. \end{cases}$$

⁵ Un modo equivalente di definire una connessione affine è quello di assegnare una distribuzione vettoriale \mathfrak{H} su $\mathfrak{F}(M)$, complementare della distribuzione verticale.

La derivazione covariante associata alla connessione affine è definita dalla formula :

$$(\dagger) \quad \nabla_X Y(\pi(\xi)) = \xi \circ \tilde{X}_\xi(\xi^{-1}(Y)) = \xi \circ \tilde{X}(\theta(\tilde{Y})) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall \xi \in \mathfrak{F}(M),$$

dove osserviamo che, fissato $Y \in \mathfrak{X}(M)$, la $\xi \rightarrow \Psi_Y(\xi) = \xi^{-1}(Y(\pi(\xi)))$ è una funzione differenziabile su $\mathfrak{F}(M)$ a valori in \mathbb{R}^m . Chiaramente :

$$\begin{cases} R_a^* \Psi_Y(\xi) = \Psi_Y(\xi \cdot a) = (\xi \cdot a)^{-1} Y(\pi(\xi \cdot a)) = a^{-1} \xi^{-1} Y(\pi(\xi)) = a^{-1} \Psi_Y(\xi) \\ \forall Y \in \mathfrak{X}(M), \forall \xi \in \mathfrak{F}(M), \forall a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}), \end{cases}$$

e quindi :

$$\begin{aligned} R_a^*(\xi \circ \tilde{X}(\Psi_Y)) &= (\xi \circ a) \circ (R_{a*} \tilde{X})(\Psi_Y) = (\xi \circ a) \circ \tilde{X}(R_a^* \Psi_Y) \\ &= \xi \circ a \circ \tilde{X}(a^{-1} \Psi_Y) = \xi \circ a \circ a^{-1} \circ \tilde{X}(\Psi_Y) = \xi \circ \tilde{X}(\Psi_Y) \end{aligned}$$

mostra che la derivata covariante $\nabla_X Y$ è ben definita dalla (\dagger) , perché il valore del secondo membro è costante quando ξ varia sulla fibra $\mathfrak{F}_p(M)$ del punto $p \in M$.

Viceversa, si può dimostrare che, data di una derivazione covariante ∇ , vi è un'unica forma di connessione ω per cui vale la (\dagger) .

Abbiamo infatti :

$$\xi \circ (X - [\omega(X)]^*)(\theta(\tilde{Y})) = \nabla_{d\pi(X)} Y \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M)), \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Quindi:

$$(\ddagger) \quad [\omega(X)]^*(\theta(\tilde{Y})) = X(\theta(\tilde{Y})) - \xi^{-1} \nabla_{d\pi(X)} Y \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathfrak{F}(M)), \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$$

ci permette di calcolare ω utilizzando la forma canonica θ e la derivazione covariante.

Teorema 13.3.3. *Sia M una varietà differenziabile, dotata di una connessione affine definita dalla forma di connessione $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$. Un diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ è un'affinità se e soltanto se il suo sollevamento \hat{f} lascia invariante la forma di connessione ω .*

Viceversa, un diffeomorfismo di fibrati principali $F : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ è il sollevamento di un'affinità se e soltanto se lascia invarianti la forma canonica θ e la forma di connessione ω .

DIMOSTRAZIONE. Le (\dagger) e (\ddagger) ci dicono che le trasformazioni affini di M sono tutte e sole quelle il cui sollevamento lascia ω invariante. L'ultima affermazione segue dal fatto che un diffeomorfismo di $\mathfrak{F}(M)$ in sé è un sollevamento di un diffeomorfismo di M in sé se e soltanto se preserva le fibre e lascia invariante la forma canonica θ . \square

Teorema 13.3.4. *Il gruppo delle affinità di una varietà differenziabile M , dotata di una connessione affine, è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale a $m(m+1)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ la forma della connessione. Allora la forma

$$\theta \oplus \omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$$

definisce un parallelismo completo su $\mathfrak{F}(M)$. La tesi è allora conseguenza del Teorema 13.2.8. \square

Sia \mathbf{G} un sottogruppo chiuso del gruppo lineare $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. Una \mathbf{G} -struttura su M è il dato di un fibrato principale $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ e di un'immersione differenziabile $\iota : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathfrak{F}(M)$, in modo che sia commutativo il diagramma :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} \times \mathbf{G} & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \times \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P} & \longrightarrow & \mathfrak{F}(M) \\ \varpi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xlongequal{\quad} & M \end{array}$$

in cui la prime due frecce orizzontali sono definite dalle inclusioni $\iota : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathfrak{F}(M)$ e $\mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$.

Osserviamo che \mathbf{P} è una sottovarietà chiusa di $\mathfrak{F}(M)$. Infatti, fissata una sezione differenziabile σ di \mathbf{P} , definita in un aperto U di M , abbiamo $\mathbf{P} \cap \pi^{-1}(U) = \{\xi \in \pi^{-1}(U) \mid \xi^{-1} \circ \sigma(\pi(\xi)) \in \mathbf{G}\}$ e l'applicazione $\pi^{-1}(U) \ni \xi \rightarrow \xi^{-1} \circ \sigma(\pi(\xi)) \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$ è continua. Quindi $\mathbf{P} \cap \pi^{-1}(U)$ è chiuso in $\pi^{-1}(U)$ per l'ipotesi che \mathbf{G} fosse chiuso in $\mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. Poiché gli insiemi $\pi^{-1}(U)$, al variare di U tra gli aperti di trivializzazione di \mathbf{P} , formano un ricoprimento aperto di $\mathfrak{F}(M)$, otteniamo che \mathbf{P} è chiuso in $\mathfrak{F}(M)$.

Gli elementi X dell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} definiscono campi di vettori su \mathbf{P} che sono la restrizione dei corrispondenti campi di vettori verticali X^* definiti su $\mathfrak{F}(M)$, e che indicheremo ancora con X^* .

Una \mathbf{G} -connessione affine su M è il dato di una \mathbf{G} -struttura $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ su M , e di una forma differenziale $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ con le proprietà :

$$(1) \quad \omega'(A^*) = A \quad \forall A \in \mathfrak{g}$$

$$(2) \quad R_a^* \omega' = \text{Ad}(a^{-1}) \circ \omega' \quad \forall a \in \mathbf{G}.$$

Indichiamo con $\mathfrak{H}' = \ker \omega' \subset \mathfrak{X}(\mathbf{P})$ la distribuzione orizzontale associata alla \mathbf{G} -connessione affine. Abbiamo :

$$dR_a(\mathfrak{H}'_\xi) = \mathfrak{H}'_{\xi \cdot a} \quad \forall \xi \in \mathbf{P}, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Possiamo quindi estendere la distribuzione orizzontale \mathfrak{H}' su \mathbf{P} a una distribuzione orizzontale \mathfrak{H} su $\mathfrak{F}(M)$ ponendo

$$\mathfrak{H}_{\xi \cdot a} = dR_a(\mathfrak{H}'_\xi) \quad \text{se } \xi \in \mathbf{P}, a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R}).$$

Estendiamo così la $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ a una forma di connessione affine di Cartan $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$, ponendo :

$$\omega(X) = A \quad \text{se } X \in T_\xi \mathfrak{F}(M) \text{ e } X = A^*_\xi + Y \text{ con } A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \text{ e } Y \in \mathfrak{H}_\xi.$$

Possiamo quindi definire in modo equivalente una \mathbf{G} -connessione affine mediante il dato di una forma di connessione affine ω su $\mathfrak{F}(M)$ tale che, per una \mathbf{G} -struttura

$\mathbf{P} @ > \varpi > \mathbf{G} > M$, detta $\iota : \mathbf{P} \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ l'inclusione, risulti $\iota^* \omega \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$, tale cioè che la sua restrizione a \mathbf{P} sia una forma a valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g} di \mathbf{G} .

lem: sps. 3.4

Lemma 13.3.5. Siano $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ una \mathbf{G} -struttura, $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ una \mathbf{G} -connessione affine e $\omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$ la sua estensione a $\mathfrak{F}(M)$. Sia $f : M \rightarrow M$ un diffeomorfismo. Supponiamo che M sia connessa. Sono equivalenti:

- (a) $\hat{f}^* \omega = \omega$ ed esiste $\xi_0 \in \mathbf{P}$ tale che $\hat{f}(\xi_0) \in \mathbf{P}$.
 (b) $\hat{f}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$ e, detta $\hat{f}^{\mathbf{G}} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ la restrizione di \hat{f} a \mathbf{P} , abbiamo

$$(\hat{f}^{\mathbf{G}})^* \omega' = \omega'.$$

DIMOSTRAZIONE. (a) \implies (b). Sia $\text{pr} : \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \rightarrow V = \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})/\mathfrak{g}$ la proiezione nel quoziente. Consideriamo la forma differenziale $\text{pr} \circ \omega \in \Omega^1(\mathfrak{F}(M), V)$ e la corrispondente distribuzione vettoriale $\mathfrak{D} = \ker(\text{pr} \circ \omega)$ in $\mathfrak{F}(M)$. Ricordiamo che una *varietà integrale* di \mathfrak{D} è una sottovarietà differenziabile N di $\mathfrak{F}(M)$ con $T_\xi N \subset \mathfrak{D}_\xi$ per ogni $\xi \in N$. Poiché \hat{f} lascia fissa la forma ω , essa lascia fissa a maggior ragione la forma $\text{pr} \circ \omega$ e trasforma quindi varietà integrali di \mathfrak{D} in varietà integrali di \mathfrak{D} . La tesi segue allora dal fatto che \mathbf{P} è una sottovarietà integrale massimale di \mathfrak{D} .

(b) \implies (a). Segue dal fatto che $\hat{f}(\xi \cdot a) = \hat{f}^{\mathbf{G}}(\xi) \cdot a$ e $\omega(\xi \cdot a) = R_a^* \omega'(\xi)$ se $\xi \in \mathbf{P}$ e $a \in \mathbf{GL}(m, \mathbb{R})$. \square

Definizione 13.3.6. Un diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ che soddisfi le condizioni equivalenti (a) e (b) del Lemma 13.3.5 si dice una trasformazione \mathbf{G} -affine, o una \mathbf{G} -affinità, di M .

Sia $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ una \mathbf{G} struttura su M . Indichiamo ancora con θ la restrizione a \mathbf{P} della forma canonica di $\mathfrak{F}(M)$. La forma di connessione ω' di una \mathbf{G} -connessione affine definisce un parallelismo completo, mediante la forma $\theta \oplus \omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$.

Per il Teorema 13.2.8 abbiamo:

CRLPCE

Corollario 13.3.7. Il gruppo delle trasformazioni \mathbf{G} -affini di M , per un'assegnata connessione affine $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ reattiva a una \mathbf{G} -struttura $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$ è un gruppo di Lie di dimensione $\leq \dim_{\mathbb{R}} M + \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{G}$. \square

CRLCG

Corollario 13.3.8. Due trasformazioni \mathbf{G} -affini f, g di M , per un'assegnata connessione affine $\omega' \in \Omega^1(\mathbf{P}, \mathfrak{g})$ reattiva a una \mathbf{G} -struttura $\mathbf{P} \xrightarrow[\mathbf{G}]{\varpi} M$, coincidono se sono uguali con i loro differenziali in un punto $p_0 \in M$.

Una metrica Riemanniana g su M definisce una $\mathbf{O}(m)$ -struttura $\mathfrak{D}(M)$ su M , in cui gli elementi della fibra $\mathfrak{D}_p(M)$ sono le basi ortonormali di $T_p M$ rispetto al prodotto scalare g_p . Viceversa, una $\mathbf{O}(m)$ -struttura su M definisce univocamente una metrica Riemanniana g su M .

Il Lemma 13.1.6 ci dice che le isometrie di (M, g) sono tutte e sole le trasformazioni affini f rispetto alla connessione di Levi-Civita per cui $df(p_0) : T_{p_0} M \rightarrow T_{f(p_0)} M$ è un'isometria in qualche punto $p_0 \in M$.

La restrizione ω' della forma ω della connessione di Levi-Civita è una $\mathbf{O}(m)$ -connessione affine.

Otteniamo perciò:

TRMMCG

Teorema 13.3.9. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana. Un'isometria di M è un automorfismo differenziabile $f : M \rightarrow M$ il cui sollevamento è un'affinità per la connessione di Levi-Civita e per cui $\hat{f}(\mathfrak{D}(M)) = \mathfrak{D}(M)$.*

Il gruppo delle isometrie $\mathbf{O}(M, g)$ è un gruppo di Lie di dimensione minore o uguale di $m(m+1)/2$.

Lo stabilizzatore $\mathbf{O}_p(M, g)$ di un punto $p \in M$ nel gruppo $\mathbf{O}(M, g)$ delle isometrie di (M, g) è un gruppo compatto.

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è una conseguenza delle osservazioni precedenti e del Corollario 13.3.7. Infatti $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{o}(m) = m(m-1)/2$ e quindi $\mathfrak{D}(M)$ è una varietà differenziabile di dimensione $[m(m-1)/2] + m = m(m+1)/2$. \square

Citiamo a questo punto, senza dimostrazione⁶, il seguente :

Teorema 13.3.10. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana di dimensione m . Se il suo gruppo delle isometrie $\mathbf{O}(M, g)$ ha dimensione massima $m(m+1)/2$, allora (M, g) è isometrico a uno dei seguenti spazi a curvatura costante :*

- (a) *Lo spazio Euclideo \mathbb{R}^m ;*
- (b) *La sfera m -dimensionale S^m ;*
- (c) *Lo spazio proiettivo m -dimensionale $\mathbb{R}P^m$;*
- (d) *Lo spazio iperbolico semplicemente connesso m -dimensionale H^m .*

Descriviamo brevemente un modello dello spazio iperbolico m -dimensionale H^m . Consideriamo l'ipersuperficie regolare di \mathbb{R}^{m+1} :

$$H^m = \left\{ x = (x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0^2 = 1 + \sum_{i=1}^m x_i^2 \right\}$$

Abbiamo :

$$T_x H^m = \left\{ v = (v_0, v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0 v_0 = \sum_{i=1}^m x_i v_i \right\}$$

e definiamo la metrica iperbolica g su H^m ponendo :

$$g_x(v, v) = c \cdot \left(-v_0^2 + \sum_{i=1}^m v_i^2 \right) \quad \forall x \in H^m, \forall v \in T_x H^m$$

per una costante $c > 0$. Osserviamo che H^m è l'orbita del punto $(1, 0, \dots, 0)$ rispetto al gruppo $\mathbf{O}(1, m)$ delle trasformazioni lineari di \mathbb{R}^{m+1} che preservano la forma bilineare simmetrica definita dalla matrice $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Il gruppo

⁶Vedi ad esempio: [S.Kobayashi *Transformation groups in Differential Geometry*, New York, Springer 1972] a pag.46.

$\mathbf{O}(1, m)$ è il gruppo delle isometrie di H^m , che si identifica allo spazio omogeneo $\mathbf{O}(1, m)/(\mathbf{O}(1) \times \mathbf{O}(m))$, dove :

$$\mathbf{O}(1) \times \mathbf{O}(m) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{O}(m) \right\}$$

è lo stabilizzatore in $\mathbf{O}(1, m)$ del punto $(1, 0, \dots, 0)$.

13.4. Spazi Riemanniani globalmente simmetrici

Sia (M, g) uno spazio Riemanniano. Diciamo che (M, g) è *uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico* se, per ogni punto $p \in M$ esiste un'isometria involutiva $s_p \in \mathbf{O}(M, g)$ che abbia p come punto fisso isolato.

Osserviamo che vale il seguente :

Lemma 13.4.1. *Sia (M, g) uno spazio Riemanniano e $p \in M$. Allora esiste al più un'isometria involutiva s_p che abbia p come punto fisso isolato. Se una tale s_p esiste, allora $ds_p(p) = -\text{Id}$ su T_pM ed s_p coincide, in un intorno di p , con la simmetria geodetica rispetto alla connessione di Levi-Civita.*

DIMOSTRAZIONE. Sia s_p un'isometria involutiva di (M, g) con p come punto fisso isolato. Abbiamo $(ds_p(p))^2 = \text{Id}$ su T_pM e quindi T_pM si decompone nella somma diretta dei sottospazi corrispondenti agli autovalori 1 e -1 di $(ds_p(p))$. Se ci fosse un $v \in T_pM \setminus \{0\}$ con $ds_p(p)(v) = v$, allora s_p lascerebbe fissi tutti i punti della geodetica uscente da p con vettore tangente v e quindi p non sarebbe punto fisso isolato. Perciò $ds_p(p) = -\text{Id}$. Poiché, essendo un'isometria, s_p trasforma geodetiche in geodetiche, essa è allora, in un intorno di p , la simmetria geodetica rispetto a p . \square

Lemma 13.4.2. *Ogni spazio Riemanniano globalmente simmetrico è completo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (M, g) uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico. Sia $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ una geodetica massimale. Se fosse ad esempio $b < +\infty$, fissato ϵ con $0 < 2\epsilon < b - a$, posto $p = \gamma(b - \epsilon)$, la simmetria s_p ci permette di prolungare la geodetica γ a una geodetica $\tilde{\gamma}$ definita su $(a, 2b - a - 2\epsilon)$:

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a < t < b \\ s_p(\gamma(2b - 2\epsilon - t)) & \text{se } b \leq t < 2b - a - 2\epsilon, \end{cases}$$

contraddicendone la massimalità. Deve quindi essere $b = +\infty$, e con ragionamento analogo si dimostra che $a = -\infty$. \square

Osserviamo che, se $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ è una geodetica massimale con $\gamma(0) = p$, allora $s_p \circ \gamma(t) = \gamma(-t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Da questo fatto ricaviamo subito che :

Teorema 13.4.3. *Il gruppo delle isometrie di uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico connesso è un gruppo transitivo di trasformazioni.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (M, g) uno spazio Riemanniano connesso globalmente simmetrico. Indichiamo con d_g la distanza definita dalla metrica g . Siano p_0, p_1 due qualsiasi punti di M . Poiché (M, g) è completo, esiste una geodetica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$,

di lunghezza $\ell(\gamma) = d_g(p_0, p_1)$. Abbiamo allora $p_1 = s_{\gamma(\frac{1}{2})}(p_0)$. Infatti $s_{\gamma(\frac{1}{2})}$ è la simmetria geodetica rispetto al punto $\gamma(\frac{1}{2})$ e quindi trasforma la geodetica $\gamma(t)$ nella geodetica $\gamma(1-t)$. \square

Teorema 13.4.4. *Sia (M, g) uno spazio Riemanniano globalmente simmetrico, connesso. Indichiamo con \mathbf{G} la componente connessa dell'identità nel gruppo di Lie $\mathbf{O}(M, g)$ delle isometrie di (M, g) . Fissiamo un punto $p_0 \in M$ e sia \mathbf{K} lo stabilizzatore di p_0 in \mathbf{G} .*

(i) *Lo stabilizzatore \mathbf{K} di p_0 in \mathbf{G} è un sottogruppo di Lie compatto di \mathbf{G} e il diagramma commutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \longrightarrow & M \\ \downarrow & \nearrow f & \\ \mathbf{G}/\mathbf{K} & & \end{array}$$

in cui la freccia orizzontale è l'applicazione $\pi: \mathbf{G} \ni a \rightarrow a(p_0) \in M$ e la freccia verticale la proiezione nel quoziente, definisce un diffeomorfismo f dello spazio omogeneo \mathbf{G}/\mathbf{K} su M .

(ii) *L'applicazione $\sigma = \text{ad}(s_{p_0}): \mathbf{G} \ni a \rightarrow s_{p_0} \circ a \circ s_{p_0} \in \mathbf{G}$ è un automorfismo involutivo di \mathbf{G} tale che, detto \mathbf{K}_σ l'insieme dei punti fissi di σ e \mathbf{K}_σ^0 la componente connessa dell'identità in \mathbf{K}_σ , risulta:*

$$\mathbf{K}_\sigma^0 \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_\sigma.$$

Il gruppo \mathbf{K} non contiene sottogruppi normali non banali di \mathbf{G} .

(iii) *Siano \mathfrak{g} e \mathfrak{k} le algebre di Lie di \mathbf{G} e \mathbf{K} , rispettivamente. Allora*

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(p_0)(X) = X\}$$

e, posto

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(p_0)(X) = -X\}$$

abbiamo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}.$$

Abbiamo poi $d\pi(e)(\mathfrak{k}) = \{0\}$ e $d\pi(e): \mathfrak{p} \rightarrow T_{p_0}M$ è un isomorfismo. Se $X \in \mathfrak{p}$, allora:

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow \exp(tX)(p_0) \in M$$

è la geodetica uscente da p_0 con velocità $d\pi(e)(X)$. Per ogni $v \in T_{p_0}M$, il vettore $[d\exp(tX)](p_0)(v)$ è il traslato di v parallelamente lungo la geodetica.

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione (i) è conseguenza del Teorema ^{TRMMCG} 13.3.9.

(ii) Per ogni $k \in \mathbf{K}$, le due isometrie k e $\sigma(k) = \text{ad}(s_{p_0})(k) = (s_{p_0} \circ k \circ s_{p_0})$ di (M, g) coincidono con il loro differenziale in p_0 . È quindi, per il Corollario ^{CRCCG} 13.3.8, $\sigma(k) = \text{ad}(s_{p_0})(k) = k$ per ogni $k \in \mathbf{K}$. In particolare, $d\sigma(e)(\mathfrak{k}) = \text{Ad}(s_{p_0})(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$, e $d\sigma(e)$ è l'identità su \mathfrak{k} . D'altra parte, se $X \in \mathfrak{g}$ è un punto fisso di $d\sigma(e)$, avremo anche:

$$s_{p_0} \circ \exp_{\mathbf{G}}(tX) \circ s_{p_0} = \text{ad}(s_{p_0})(\exp_{\mathbf{G}}(tX)) = \exp_{\mathbf{G}}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(s_{p_0})(X)) = \exp_{\mathbf{G}}(tX),$$

onde $s_{p_0}(\exp_{\mathbf{G}}(tX)(p_0)) = \exp_{\mathbf{G}}(tX)(p_0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi $\exp_{\mathbf{G}}(tX)(p_0) = p_0$, perché p_0 è un punto fisso isolato di s_{p_0} . Quindi \mathfrak{f} è proprio l'insieme dei punti fissi di $d\sigma(e)$. Poiché il gruppo delle isometrie $\mathbf{O}(M, g)$ e \mathbf{G} operano su \mathbf{G}/\mathbf{K} in modo effettivo, \mathbf{K} non contiene sottogruppi normali non banali di \mathbf{G} .

(iii) Poiché $d\sigma(e)$ è un'involuzione e \mathfrak{f} è il sottospazio dei suoi punti fissi, abbiamo la decomposizione $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{p}$.

Poiché $d\pi(e)$ ha nucleo uguale a \mathfrak{f} , ne segue che la sua restrizione a \mathfrak{p} è un isomorfismo su $T_{p_0}M$.

Sia ora $X \in \mathfrak{p}$ e sia $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ la geodetica uscente da p_0 con velocità $d\pi(e)(X)$. Consideriamo, per ogni numero reale t , l'isometria $u_t = s_{\gamma(t/2)} \circ s_{p_0}$. Dico che $\mathbb{R} \ni t \rightarrow u_t \in \mathbf{O}(M, g)$ è un sottogruppo a un parametro di $\mathbf{O}(M, g)$. Infatti, se $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} u_{t_1} \circ u_{t_2}(p_0) &= u_{t_1} \circ s_{\gamma(t_2/2)}(p_0) = s_{\gamma(t_1/2)} \circ s_{p_0}(\gamma(t_2)) \\ &= s_{\gamma(t_1/2)}(\gamma(-t_2)) = \gamma(t_1 + t_2) \\ &= s_{\gamma([t_1+t_2]/2)}(p_0) = u_{t_1+t_2}(p_0). \end{aligned}$$

Inoltre, $du_t : T_{\gamma(s)} \rightarrow T_{\gamma(t+s)}$ definisce, per ogni coppia di numeri reali t, s , il trasporto parallelo lungo la geodetica γ .

Per verificare questo fatto, osserviamo in primo luogo che, per ogni numero reale s , la $-ds_{p_0}(\gamma(s))$ definisce il trasporto parallelo da $T_{\gamma(s)}$ a $T_{\gamma(-s)}$ lungo la geodetica γ . A questo scopo, indichiamo con $\tau_{s_1, s_2}^\gamma : T_{\gamma(s_1)}M \rightarrow T_{\gamma(s_2)}M$ il trasporto parallelo da $\gamma(s_1)$ a $\gamma(s_2)$ lungo γ . Abbiamo allora un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_{p_0}M & \xrightarrow{\tau_{0,s}^\gamma} & T_{\gamma(s)}M \\ ds_{p_0}(p_0) \downarrow & & \downarrow ds_{p_0}(\gamma(s)) \\ T_{p_0}M & \xrightarrow{\tau_{0,-s}^\gamma} & T_{\gamma(-s)}M \end{array}$$

Da questa ricaviamo che

$$\begin{aligned} \tau_{0,-s} \circ ds_{p_0}(p_0) &= ds_{p_0}(\gamma(s)) \circ \tau_{s,0}^\gamma \quad \text{e, poiché } -ds_{p_0}(p_0) = I, \\ \tau_{0,-s}^\gamma &= -ds_{p_0}(\gamma(s)) \circ \tau_{s,0}^\gamma, \quad \text{da cui otteniamo:} \\ -ds_{p_0}(\gamma(s)) &= \tau_{0,-s}^\gamma \circ [\tau_{0,s}^\gamma]^{-1} = \tau_{0,-s}^\gamma \circ \tau_{s,0}^\gamma = \tau_{s,-s}^\gamma. \end{aligned}$$

Analogamente, $-ds_{\gamma(s)}$ definisce, per ogni coppia di numeri reali s, t , il trasporto parallelo da $T_{\gamma(t)}M$ a $T_{\gamma(2s-t)}M$ lungo la geodetica γ . Quindi, per composizione, $du_t = (-ds_{\gamma(t/2)} \circ (-ds_{p_0}))$ definisce il trasporto parallelo lungo γ da $\gamma(s)$ a $\gamma(t+s)$. È perciò $du_{t_1} \circ du_{t_2} = du_{t_1+t_2}$, perché il trasporto parallelo da $\gamma(s)$ a $\gamma(s+t_1+t_2)$ si può ottenere componendo il trasporto parallelo da $\gamma(s)$ a $\gamma(s+t_2)$ con quello da $\gamma(s+t_2)$ a $\gamma(s+t_1+t_2)$.

In particolare $(u_{t_1} \circ u_{t_2})$ ed $u_{t_1+t_2}$ coincidono con i loro differenziali in p_0 ed, essendo isometrie, coincidono dappertutto: $u_{t_1} \circ u_{t_2} = u_{t_1+t_2}$ e $\mathbb{R} \ni t \rightarrow u_t \in \mathbf{O}(M, g)$ è un gruppo a un parametro di isometrie. Possiamo quindi trovare $Y \in \mathfrak{g}$ tale che

$u_t = \exp_{\mathbf{G}}(tY)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Risulta poi

$$\sigma \circ u_t = s_{p_0} \circ s_{\gamma(t/2)} = s_{\gamma(-t/2)} \circ s_{p_0} = u_{-t}.$$

Da questa ricaviamo che $d\sigma(e)(Y) = -Y$, quindi $Y \in \mathfrak{p}$ e perciò $Y = X$. \square

13.5. Coppie simmetriche e simmetriche Riemanniane

Sia \mathbf{G} un gruppo di Lie connesso ed \mathbf{H} un suo sottogruppo chiuso. La coppia (\mathbf{G}, \mathbf{H}) si dice una *coppia simmetrica* se esiste un automorfismo analitico involutivo $\sigma : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ con

$$\mathbf{G}_{\sigma}^0 \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{G}_{\sigma},$$

ove $\mathbf{G}_{\sigma} = \{a \in \mathbf{G} \mid \sigma(a) = a\}$ e \mathbf{G}_{σ}^0 è la componente connessa dell'identità di \mathbf{G}_{σ} .

Se $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{H})$ è compatto⁷ in $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{G})$, la coppia (\mathbf{G}, \mathbf{H}) si dice *simmetrica Riemanniana*.

Teorema 13.5.1. *Sia (\mathbf{G}, \mathbf{K}) una coppia simmetrica Riemanniana e sia M lo spazio omogeneo $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$. Siano $\pi : \mathbf{G} \rightarrow M$ la proiezione naturale nel quoziente e $\tau : \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(M)$ la rappresentazione di \mathbf{G} come gruppo di diffeomorfismi di M , indotta dalla traslazione a sinistra su M :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} \times \mathbf{G} & \xrightarrow{(a,b) \rightarrow (a,\pi(b))} & \mathbf{G} \times M \\ (a,b) \rightarrow ab \downarrow & & \downarrow (a,p) \rightarrow \tau(a)(p) \\ \mathbf{G} & \xrightarrow{a \rightarrow \pi(a)} & M. \end{array}$$

Sia σ un automorfismo analitico involutivo di \mathbf{G} tale che $\mathbf{K}_{\sigma}^0 \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_{\sigma}$ (ove \mathbf{K}_{σ} è il sottogruppo dei punti fissi di σ e \mathbf{K}_{σ}^0 la sua componente dell'identità). Allora esistono metriche Riemanniane \mathbf{G} -invarianti g su M . Rispetto a una qualsiasi metrica \mathbf{G} -invariante g , lo spazio (M, g) è globalmente simmetrico Riemanniano. Sia $\mathbf{o} = \pi(e)$ e sia $s_{\mathbf{o}}$ la corrispondente simmetrica geodetica. Essa soddisfa:

$$\begin{aligned} s_{\mathbf{o}} \circ \pi &= \pi \circ \sigma \\ \tau(\sigma(a)) &= s_{\mathbf{o}} \circ \tau(a) \circ s_{\mathbf{o}} \quad \forall a \in \mathbf{G}. \end{aligned}$$

Osservazione 13.5.2. Osserviamo che, in particolare, la simmetria geodetica $s_{\mathbf{o}}$ è indipendente dalla scelta della metrica Riemanniana \mathbf{G} -invariante. In effetti, la connessione di Levi-Civita su M risulta indipendente dalla particolare scelta della metrica \mathbf{G} -invariante su M .

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con \mathfrak{g} e \mathfrak{k} le algebre di Lie di \mathbf{G} e \mathbf{K} , rispettivamente e poniamo $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(e)(X) = -X\}$. Allora $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Se $X \in \mathfrak{p}$ e $k \in \mathbf{K}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \sigma(\exp_{\mathbf{G}}(t\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X))) &= \sigma(\text{ad}(k)(\exp_{\mathbf{G}}(tX))) = \text{ad}(k)(\exp_{\mathbf{G}}(-tX)) \\ &= \exp_{\mathbf{G}}(-t\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(k)(X)), \end{aligned}$$

⁷ Questo è vero in particolare se \mathbf{H} è un sottogruppo compatto di \mathbf{G} .

da cui otteniamo subito che $d\sigma(e)(\text{Ad}_g(k)(X)) = -\text{Ad}_g(k)(X)$. Quindi \mathfrak{p} è invariante rispetto ad $\text{Ad}_g(\mathbf{K})$. L'applicazione $d\pi(e)$ manda \mathfrak{g} su $T_{\mathbf{o}}M$ ed ha come nucleo \mathfrak{f} . Se $X \in \mathfrak{p}$, abbiamo :

$$\pi(\exp_{\mathbf{G}}(\text{Ad}_g(k)(tX)) = \pi(\text{ad}(k)(\exp(tX))) = \tau(k)(\exp(tX)).$$

Differenziando quest'espressione per $t = 0$, otteniamo :

$$d\pi(e) \circ \text{Ad}_g(X) = d\tau(k) \circ d\pi(e)(X) \quad \forall k \in \mathbf{K} \quad \forall X \in \mathfrak{p}.$$

Poiché $\text{Ad}_g(K)$ è compatto il $\mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$, esiste un prodotto scalare \mathbf{b} su \mathfrak{p} , invariante rispetto alla restrizione a \mathfrak{p} di $\text{Ad}_g(\mathbf{K})$. Allora $g_{\mathbf{o}} = \mathbf{b} \circ (d\pi(e)|_{\mathfrak{p}})^{-1}$ è un prodotto scalare su $T_{\mathbf{o}}M$, invariante rispetto a $\tau(k)$ per ogni $k \in \mathbf{K}$. Definiamo allora una metrica Riemanniana su M ponendo :

$$g_{\tau(g)(\mathbf{o})}(d\tau(g)(v), d\tau(g)(w)) = g_{\mathbf{o}}(v, w) \quad \forall g \in \mathbf{G}, \quad \forall v, w \in T_{\mathbf{o}}M.$$

Questa definizione è consistente perché \mathbf{b} è invariante rispetto ad $\text{ad}_g(\mathbf{K})$.

Viceversa, ogni metrica Riemanniana \mathbf{G} -invariante su $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ è di questa forma per qualche prodotto scalare invariante \mathbf{b} su \mathfrak{p} .

Definiamo ora la simmetria $s_{\mathbf{o}}$ di M mediante la condizione :

$$s_{\mathbf{o}} \circ \pi = \pi \circ \sigma.$$

Chiaramente $s_{\mathbf{o}}$ è un diffeomorfismo involutivo di M in sé, con $ds_{\mathbf{o}}(\mathbf{o}) = -\text{Id}$ su $T_{\mathbf{o}}M$.

Dimostriamo che $s_{\mathbf{o}}$ è un'isometria. Sia $p = \pi(a) = \tau(a)(\mathbf{o}) \in M$. Se $X, Y \in T_pM$, allora $X_0 = d\tau(a^{-1})(p)(X), Y_0 = d\tau(a^{-1})(p)(Y) \in T_{\mathbf{o}}M$. Per ogni $x \in \mathbf{G}$ abbiamo :

$$s_{\mathbf{o}} \circ \tau(a)(\pi(x)) = s_{\mathbf{o}}(\pi(ax)) = \pi(\sigma(ax)) = \pi(\sigma(a)\sigma(x)) = (\tau(\sigma(a)) \circ s_{\mathbf{o}})(\pi(x)).$$

Quindi $s_{\mathbf{o}} \circ \tau(a) = \tau(\sigma(a)) \circ s_{\mathbf{o}}$. Ricaviamo :

$$\begin{aligned} g(ds_{\mathbf{o}}(X), ds_{\mathbf{o}}(Y)) &= g(ds_{\mathbf{o}} \circ d\tau(a)(X_0), ds_{\mathbf{o}} \circ d\tau(a)(Y_0)) \\ &= g(d\tau(\sigma(a)) \circ ds_{\mathbf{o}}(X_0), d\tau(\sigma(a)) \circ ds_{\mathbf{o}}(Y_0)) \\ &= g(ds_{\mathbf{o}}(X_0), ds_{\mathbf{o}}(Y_0)) = g(X_0, Y_0) = g(X, Y). \end{aligned}$$

Quindi $s_{\mathbf{o}}$ è un'isometria e, poiché $s_{\mathbf{o}}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ e $ds_{\mathbf{o}}(\mathbf{o}) = -\text{Id}$ su $T_{\mathbf{o}}M$, coincide con la simmetria geodetica rispetto a \mathbf{o} . Per un qualsiasi punto $p = \pi(a)$, la simmetria geodetica rispetto a p è l'isometria $s_p = \tau(a) \circ s_{\mathbf{o}} \circ \tau(a^{-1})$. Questo dimostra che $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ è globalmente simmetrico. \square

La $\mathbf{G} \ni a \rightarrow \tau(a) \in \mathbf{O}(M, g)$ è un omomorfismo di gruppi di Lie. Il suo nucleo \mathbf{N} è un sottogruppo chiuso normale di \mathbf{G} , contenuto in \mathbf{K} . Se \mathbf{Z} è il centro di \mathbf{G} , i gruppi $\text{Ad}_g(\mathbf{K})$ e $\mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{Z})$ sono isomorfi. Poiché $\mathbf{K} \cap \mathbf{Z} \subset \mathbf{N}$, ne segue che $\mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{N})$ è compatto. Chiaramente la $(\mathbf{G}/\mathbf{N}, \mathbf{K}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{N}))$ è un'altra coppia simmetrica Riemanniana, che definisce lo stesso spazio simmetrico della coppia (\mathbf{G}, \mathbf{K}) .

Teorema 13.5.3. *Sia (\mathbf{G}, \mathbf{K}) una coppia simmetrica Riemanniana. Sia \mathfrak{k} l'algebra di Lie di \mathbf{K} e \mathfrak{z} quella del centro \mathbf{Z} di \mathbf{G} . Se $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$, allora esiste un unico automorfismo involutivo $\sigma : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ tale che $\mathbf{K}_\sigma^0 \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{K}_\sigma$ (dove \mathbf{K}_σ è il sottogruppo dei punti fissi di σ e \mathbf{K}_σ^0 la sua componente connessa dell'identità).*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che il differenziale in e dell'involuzione σ cercata è l'identità su \mathfrak{k} , e l'opposto dell'identità su un sottospazio di \mathfrak{g} complementare di \mathfrak{k} in \mathfrak{g} , e trasforma in sé l'ortogonale \mathfrak{k}^\perp di \mathfrak{k} rispetto alla forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ di \mathfrak{g} .

Poiché $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$, la forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ è definita negativa su \mathfrak{k} . Infatti, poiché $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ è un sottogruppo compatto, gli elementi $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$, per $X \in \mathfrak{k}$, si esprimono come matrici antisimmetriche $(a_{i,j}(X))$, in una opportuna base⁸ di \mathfrak{g} . Quindi, se $X \in \mathfrak{k}$:

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X, X) = - \sum_{i,j} [a_{i,j}]^2 \leq 0$$

e vale l'uguaglianza se e soltanto se $a_{i,j}(X) = 0$ per ogni i, j , cioè se $X \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{z}$. Quindi $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}^\perp$, dove \mathfrak{k}^\perp è l'ortogonale di \mathfrak{k} rispetto alla forma di Killing e $d\sigma(e)$ è completamente determinato perché è l'identità su \mathfrak{k} e $-\text{Id}$ su \mathfrak{k}^\perp . A sua volta $d\sigma(e)$ determina completamente σ . \square

Un'algebra di Lie ortogonale simmetrica è una coppia (\mathfrak{g}, ζ) , formata da :

- (i) un'algebra di Lie reale di dimensione finita \mathfrak{g} ,
- (ii) un automorfismo involutivo $\zeta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, tale che :
l'insieme $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \zeta(X) = X\}$ dei punti fissi
- (iii) di ζ sia una sottoalgebra immersa in \mathfrak{g} in modo compatto.

Diciamo che la coppia (\mathfrak{g}, ζ) è *effettiva* se, detto \mathfrak{z} il centro di \mathfrak{g} , è :

- (iv) $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$.

Ricordiamo che il fatto che \mathfrak{k} sia immersa in modo compatto in \mathfrak{g} significa che la sottoalgebra $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ di $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ genera un sottogruppo compatto del gruppo $\text{Int}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ degli automorfismi interni di \mathfrak{g} . Nel caso in cui la coppia (\mathfrak{g}, ζ) sia effettiva, la condizione è equivalente al fatto che la forma di Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}$ di \mathfrak{g} sia definita negativa su \mathfrak{k} .

Abbiamo osservato che, ad una coppia simmetrica Riemanniana (\mathbf{G}, \mathbf{K}) , a cui sia associato un automorfismo involutivo σ di \mathbf{G} , è associata l'algebra di Lie ortogonale simmetrica (\mathfrak{g}, ζ) , ove \mathfrak{g} è l'algebra di Lie di \mathbf{G} e $\zeta = d\sigma(e)$.

Sia (\mathfrak{g}, ζ) un'algebra di Lie simmetrica ortogonale e sia \mathfrak{k} il luogo dei punti fissi di ζ .

Una coppia (\mathbf{G}, \mathbf{K}) di gruppi di Lie associata a (\mathfrak{g}, ζ) è una coppia formata da un gruppo di Lie connesso \mathbf{G} ed un suo sottogruppo chiuso \mathbf{K} con algebre di Lie uguali a \mathfrak{g} e a \mathfrak{k} , rispettivamente.

Abbiamo:

⁸È sufficiente considerare una base ortonormale di \mathfrak{g} rispetto a un prodotto scalare invariante per $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$.

Teorema 13.5.4. *Sia $(\mathfrak{g}, \varsigma)$ un'algebra di Lie ortogonale simmetrica e sia \mathfrak{k} la sottoalgebra di Lie dei punti fissi di ς .*

(a) *Sia $\tilde{\mathbf{G}}$ un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie \mathfrak{g} e sia $\tilde{\mathbf{K}}$ il suo sottogruppo analitico con algebra di Lie \mathfrak{k} . Allora $\tilde{\mathbf{K}}$ è un sottogruppo chiuso di $\tilde{\mathbf{G}}$ e $(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}})$ è una coppia simmetrica Riemanniana. Lo spazio simmetrico $\tilde{M} = \tilde{\mathbf{G}}/\tilde{\mathbf{K}}$ è semplicemente connesso.*

(b) *Se (\mathbf{G}, \mathbf{K}) è una qualsiasi coppia di gruppi di Lie associata a $(\mathfrak{g}, \varsigma)$, allora $M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$ è uno spazio Riemanniano localmente simmetrico rispetto a qualsiasi metrica \mathbf{G} -invariante.*

(c) *\tilde{M} è il rivestimento universale di M .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\tilde{\mathbf{G}}$ è semplicemente connesso, l'involuzione ς di \mathfrak{g} definisce univocamente un automorfismo $\tilde{\sigma}$ di $\tilde{\mathbf{G}}$ con $d\tilde{\sigma}(e) = \varsigma$. Il luogo $\tilde{\mathbf{K}}_{\tilde{\sigma}}$ dei punti fissi di $\tilde{\sigma}$ è chiuso in $\tilde{\mathbf{G}}$ e quindi è tale anche la sua componente connessa dell'identità $\tilde{\mathbf{K}}$. Poiché $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\tilde{\mathbf{K}})$ è il sottogruppo analitico di $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ generato da $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$, è compatto e quindi $(\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}})$ è una coppia Riemanniana simmetrica e $\tilde{M} = \tilde{\mathbf{G}}/\tilde{\mathbf{K}}$ è uno spazio globalmente simmetrico Riemanniano rispetto a qualsiasi metrica $\tilde{\mathbf{G}}$ -invariante su \tilde{M} , definita a partire da un prodotto scalare $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{K})$ -invariante su $T_0\tilde{M}$.

Se \mathbf{G} è un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} e \mathbf{K} un suo sottogruppo chiuso con algebra di Lie \mathfrak{k} , il rivestimento $\tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$ definisce per passaggio al quoziente il rivestimento universale $\tilde{M} \rightarrow M = \mathbf{G}/\mathbf{K}$. La simmetrie geodetiche globali di \tilde{M} definiscono, per diffeomorfismi locali, simmetrie Riemanniane locale di M , rispetto a qualsiasi metrica \mathbf{G} -invariante di M . \square