Esercizi e complementi di geometria analitica

Mauro Nacinovich

Indice

CAPITOLO 1

I numeri complessi

1. Equazioni di secondo grado e radici quadrate in $\mathbb{C}$

Ogni numero complesso w diverso da zero ammette un'unica radice quadrata che appartenga all'insieme

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Indichiamo con $\sqrt{w}$ l'unica radice quadrata appartenente a tale insieme. Ad esempio, le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$az^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0,$$

si potranno quindi scrivere nella forma

$$z_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

È sempre possibile esprimere la radice quadrata di un numero complesso in termini di radicali reali. Sia infatti $w = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$. L'equazione complessa $z^2 = w$ è equivalente al sistema di equazioni reali

$$\begin{cases} z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \\ x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Se $b = 0$, allora

$$\begin{cases} z = \pm\sqrt{a} \in \mathbb{R}, & \text{se } a \geq 0, \\ z = \pm i\sqrt{-a} \in i\mathbb{R}, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Se $b \neq 0$, allora x ed y sono entrambi diversi da zero e possiamo quindi sostituire $y = b/(2x)$ nella prima equazione, ottenendo l'equazione biquadratica

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0.$$

Poiché $x^2 > 0$, dobbiamo scegliere le soluzioni con

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Avremo perciò $z = \pm\sqrt{w}$ con

$$\sqrt{w} = \sqrt{a + ib} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Esempio 1.1. Calcoliamo le radici quadrate di i. Esse sono della forma $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1. \end{cases}$$

I numeri reali x e y hanno allora lo stesso valore assoluto e lo stesso segno. Sono dunque uguali e, da $2x^2 = 1$, otteniamo $x = y = \pm 1/\sqrt{2}$ e quindi

$$z = \pm\sqrt{i}, \quad \text{con} \quad \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Esempio 1.2. Si calcoli $\sqrt{1+i}$.

Poniamo $z = x + iy$, con x, y reali. L'equazione $z^2 = 1 + i$ è allora equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ 2xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^4 - 4x^2 - 1 = 0, \\ 2xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{2+\sqrt{5}}{4}, \\ 2xy = 1. \end{cases}$$

Abbiamo perciò

$$\sqrt{1+i} = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}}{2} + i\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}$$

Osserviamo che $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$. Quindi $\sqrt{1+i} = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$. Otteniamo perciò le formule per il coseno e il seno dell'angolo $\frac{\pi}{8}$ (corrispondente a $22,5^0$):

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}}{2\sqrt[4]{2}}, \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2\sqrt[4]{2}}.$$

Esempio 1.3. Si calcolino le radici quadrate di $3 - 4i$. Da

$$x^2 - y^2 = 3, 2xy = -4,$$

otteniamo che

$$4x^4 - 12x^2 - 16 = 4(x^4 - 3x^2 - 4) = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{3+\sqrt{9+16}}{2} = 4$$

Quindi le radici quadrate di $3 - 4i$ sono

$$z = \pm\sqrt{3-4i}, \quad \text{con} \quad \sqrt{3-4i} = 2 - i$$

Esempio 1.4. Consideriamo l'equazione di secondo grado

$$iz^2 + 2z - 1 = 0.$$

Le soluzioni sono

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4i}}{2i}.$$

Per calcolare la radice quadrata, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ 2xy = 4. \end{cases}$$

Sostituendo $y = 2/x$ nella prima equazione otteniamo

$$x^4 - x^2 - 4 = 0, \quad \text{che dà} \quad x^2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

È quindi

$$\sqrt{1+4i} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}},$$
$$z_{i,2} = \frac{i \pm \left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} - i\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}\right)}{2}.$$

Esempio 1.5. Si calcolino le radici complesse dell'equazione di secondo grado

$$z^2 - 2iz + 3i = 0.$$

Abbiamo

$$z_{1,2} = -i \pm \sqrt{-1-3i}.$$

Per calcolare $\sqrt{-1-3i}$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1, \\ 2xy = -3. \end{cases}$$

Sostituendo $y = -3/(2x)$ nella prima, otteniamo

$$4x^4 + 4x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{-2+\sqrt{40}}{4} = \frac{-1+\sqrt{10}}{2}.$$

Quindi

$$\sqrt{-1-3i} = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{10}}{2}} - i\sqrt{\frac{1+\sqrt{10}}{2}},$$
$$z_{1,2} = i \pm \left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{10}}{2}} - i\sqrt{\frac{1+\sqrt{10}}{2}}\right).$$

Esempio 1.6. Si calcolino tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0.$$

Osserviamo che questa *non* è un'equazione algebrica nella variabile complessa z, perché vi compare il termine $\bar{z}$. Possiamo riscriverla come un sistema di due equazioni reali in due incognite reali, sostituendo a z la sua espressione cartesiana $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{Z}$, ed uguagliando a zero parte reale ed immaginaria. Otteniamo

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0, \\ 2xy - 2y = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda delle due equazioni, ricaviamo che o$y = 0$, oppure $x = 1$. Otteniamo quindi

$$\begin{cases} y = 0, \\ (x+1)^2 = 0, \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x = 1, \\ y^2 = 4. \end{cases}$$

L'equazione assegnata ammette quindi le tre soluzioni distinte $z = -1$, $z = 1 + 2i$, $z = 1 - 2i$.

Esempio 1.7. Si trovino tutte le soluzioni complesse z dell'equazione

$$z^2 + \bar{z}^2 + 2iz + \bar{z} + i = 0.$$

Sostituendo $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$ ed uguagliando a zero parte reale e parte immaginaria troviamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 - 2y^2 - 2y + x = 0, \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo $y = 2x + 1$ troviamo

$$0 = 2x^2 - 2(2x+1)^2 - 2(2x+1) + x = x(2x+1) - 2(2x+1)^2 - 2(2x+1) = -(2x+1)(3x+4).$$

L'equazione assegnata ammette quindi le due soluzioni

$$z = -\tfrac{1}{2} \quad \text{e} \quad z = -\tfrac{4-5\,i}{3}.$$

Esempio 1.8. Si trovino tutte le radici complesse z dell'equazione

$$z^2 + 2i\bar{z}^2 + 1 = 0.$$

Sostituendo $z = x + iy$, con x, y reali, ed uguagliando a zero parte reale e parte immaginaria, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4xy + 1 = 0, \\ xy + x^2 - y^2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 3xy + 1 = 0, \\ xy + x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo $y = -1/(3x)$ nella seconda equazione ed eliminando i denominatori, otteniamo l'equazione biquadratica

$$9x^4 - 3x^2 - 1 = 0, \quad \text{che dà} \quad x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{6}.$$

L'equazione assegnata ha quindi le due radici complesse

$$\pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{6}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{6}}\right).$$

2. Potenze, radici n-esime, uso della forma polare

Ricordiamo la formula della potenza di un binomio:

$$(a+b)^n = \sum\nolimits_{h=0}^{n} \binom{n}{h} a^{n-h} b^h, \quad \text{con } \binom{n}{h} = \frac{n!}{h!(n-h)!}. \tag{2.1}$$

Poiché vale la regola fondamentale

$$\binom{n}{h} + \binom{n}{h-1} = \binom{n+1}{h}, \tag{2.2}$$

il coefficiente binomiale $\binom{n}{h}$ è l'$(h+1)$-esimo termine dell'n-esima riga del triangolo

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

in cui ogni coefficiente diverso da 1 è la somma dei due che gli stanno sopra a destra e a sinistra nella riga precedente.

Possiamo anche scrivere

$$\binom{n}{h} = \frac{n(n-1)\cdots(n-h+1)}{h!} \tag{2.3}$$

e questa espressione ha senso anche quando n sia un qualsiasi numero reale ed h un qualsiasi intero positivo. Poniamo

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ed osserviamo che

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}, \ldots, \quad \forall n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Se n è un intero positivo, la (2.3) dà $\binom{n}{h} = 0$ per $h > n$. In generale, potremmo considerare la formula del binomio nella forma di una somma infinita:

$$(1+x)^a = \sum\nolimits_{h=0}^{\infty} \binom{a}{h} x^h, \quad \text{valida per } |x| < 1. \tag{2.4}$$

Questa formula ci permette il calcolo approssimato delle radici reali. Osserviamo le somme finite corrispondenti ad (2.4) danno un'approssimazione che è tanto migliore quanto più $|x|$ è piccolo e che l'approssimazione è migliore per gli x piccoli e positivi perché in questo caso i termini della serie (2.4) hanno, da un certo punto in poi, segni alternati.

Esempio 2.1. Per calcolare i valori approssimati di $\sqrt{2}$ utilizzando le somme parziali della serie (2.4) dobbiamo innanzi tutto scrivere $\sqrt{2}$ come il prodotto di un numero reale per la radice quadrata di un numero positivo minore di due. Abbiamo ad esempio

$$\sqrt{2} = \tfrac{7}{5}\sqrt{\tfrac{50}{49}} = \tfrac{7}{5}(1+\tfrac{1}{49})^{\frac{1}{2}} = \tfrac{7}{5}\sum\nolimits_{h=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{h}\tfrac{1}{49^h} = \tfrac{7}{5}(1+\tfrac{1}{98}-\tfrac{1}{19208}+\cdots) = 1,4142128....$$

che approssima fino alla quinta cifra significativa il valore $1,414213562...$ di $\sqrt{2}$.

Esempio 2.2. Cerchiamo, con lo stesso metodo, di trovare valori approssimati di $\sqrt[3]{2}$. Osserviamo che $(\frac{5}{4})^3 = \frac{125}{64} < 2 < \frac{27}{8}$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2} &= \tfrac{5}{4}\sqrt[3]{\tfrac{128}{125}} = \tfrac{5}{4}(1+\tfrac{3}{125})^{\frac{1}{3}} = \tfrac{5}{4}\sum\nolimits_{h=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{h}\tfrac{3^h}{125^h}\\ &= \tfrac{5}{4}(1+\tfrac{1}{3}\tfrac{3}{125}) - \tfrac{1}{9}\tfrac{3^2}{125^2}+\cdots) = 1.25992+\cdots,\end{aligned}$$

che approssima fino alla quinta cifra decimale il valore di $\sqrt[3]{2} = 1.25992104989487....$

Abbiamo visto nel §1 che si può sempre calcolare la radice quadrata di un numero complesso utilizzando radici quadrati reali. Ciò naturalmente vale, iterando l'operazione, per il calcolo delle radici 2^n-esime di numeri complessi.

Esempio 2.3. Calcoliamo $\sqrt[4]{1+2i}$. Posto $w = 1+2i$, calcoliamo innanzi tutto $z = \sqrt{1+2i}$. Ricordiamo che $z = x+iy$, con i numeri reali x e y che soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} x^2-y^2 = 1,\\ 2xy = 2,\end{cases} \iff \begin{cases} x^4-x^2-1 = 0,\\ xy = 1\end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\\ xy = 1.\end{cases}$$

Otteniamo quindi

$$z = \sqrt{\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

A questo punto calcoliamo $\zeta = \sqrt{z}$ ponendo $\zeta = u+iv$, con u, v reali e

$$\begin{cases} u^2-v^2 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},\\ 2uv = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\end{cases} \iff \begin{cases} u^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}),\\ 2uv = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}},\end{cases}$$

onde

$$\zeta = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}})} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{\tfrac{\sqrt{5}+1}{2}})}.$$

Si ottengono le quattro radici cubiche di $1+2i$ moltiplicando ζ per le quattro radici quarte dell'unità, che sono $\pm 1, \pm i$. Quindi le radici quarte di $1+2i$ sono $\zeta, -\zeta, i\zeta, -i\zeta$.

Le radici n-esime di un numero complesso, con $n \notin \{2^m \mid m \in \mathbb{N}\}$, non si possono in generale esprimere per mezzo di radicali reali. In generale, ricordiamo che, se w è un numero complesso diverso da 0, per rappresentare le sue n radici

n-esime distinte $z_1, \dots, z_n$ è conveniente rappresentare innanzi tutto w in forma polare, ed utilizzare quindi la

$$w = r\,e^{i\theta},\ r > 0,\ \theta \in \mathbb{R} \quad z_h = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta+2h\pi}{n}},\ h = 0, 1, \dots, n-1.$$

Esempio 2.4. Calcoliamo $\sqrt[3]{i}$. Scriviamo i nella forma polare $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$. Otteniamo allora

$$z_h = e^{i\pi\frac{1+4h}{6}},\ h = 0, 1, 2, \ \text{cioè} \quad \begin{cases} z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \\ z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \\ z_2 = -i \end{cases}$$

Esempio 2.5. Calcoliamo $\sqrt[5]{1+i}$. Abbiamo la forma polare $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$. Le radici sono perciò

$$\sqrt[10]{2}e^{\frac{(8h+1)\pi i}{20}}, \quad h = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Per $h = 3$, otteniamo la radice

$$\sqrt[10]{2}(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4}) = -\sqrt[10]{2}\frac{1+i}{\sqrt{2}} = -2^{[\frac{1}{10}-\frac{1}{2}]}(1+i) = \frac{-1}{\sqrt[5]{16}}(1+i).$$

Esempio 2.6. Le radici n-esime dell'unità sono

$$e^{\frac{2h\pi i}{n}} = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^h, \quad \text{per } h = 0, 1, \dots, n-1.$$

Osserviamo che, se n è dispari, vi è la radice 1 ed abbiamo poi $\frac{n-1}{2}$ coppie di radici complesse coniugate distinte; se n è pari, ± 1 sono radici ed abbiamo poi $\frac{n-2}{2}$ coppie di radici complesse coniugate distinte.

Nel piano di Gauss, $\sqrt[n]{1}$ sono gli n vertici di un poligono regolare di n lati iscritto nella circonferenza unitaria e con un vertice in 1.

Abbiamo

$$\begin{aligned} \sqrt{1} &= \{-1, 1\}, \\ \sqrt[3]{1} &= \{1, -\tfrac{1}{2} \pm i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\}, \\ \sqrt[4]{1} &= \{\pm 1, \pm i\}. \end{aligned}$$

Per calcolare l'espressione mediante radicali della radice quinta dell'unità, ricordiamo che

$$\cos\tfrac{\pi}{5} = \tfrac{\sqrt{5}+1}{4}, \quad \sin\tfrac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$
$$\cos\tfrac{2\pi}{5} = \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}, \quad \sin\tfrac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Quindi,

$$\sqrt[5]{1} = \left\{1, \quad \tfrac{1-\sqrt{5}}{4} \pm i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad -\tfrac{\sqrt{5}+1}{4} \pm i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right\},$$

perché $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$ e $\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$ e $\frac{8\pi}{5} = 2\pi - \frac{2\pi}{5}$.

Abbiamo poi

$$\sqrt[6]{1} = \left\{\pm 1, \frac{\pm\sqrt{3}\pm i}{2}\right\}.$$

In generale, radici n-esime dell'unità con $n > 6$ possono non essere esprimibili per mezzo di radicali reali.

Osserviamo infine che le radici n-esime di un qualsiasi numero complesso w, diverso da 0, si possono ottenere moltiplicando una qualsiasi radice n-esima z_0 di w per le n radici n-esime dell'unità. In particolare, esse formano i vertici di un n-agono regolare inscritto nella circonferenza del piano di Gauss che ha centro nell'origine e raggio $\sqrt[n]{|w|}$.

Esempio 2.7. Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^5 = \bar{z}^3.$$

Uguagliando i moduli otteniamo

$$|z|^5 = |\bar{z}|^3 = |z|^3 \implies |z| \in \{0, 1\}.$$

Se $|z| = 0$, otteniamo la soluzione $z = 0$. Per $|z| = 1$, moltiplicando ambo i membri per z^3 otteniamo l'equazione equivalente

$$z^8 = 1 \Longrightarrow z \in \left\{\pm 1, \pm i, \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}\right\}.$$

L'equazione assegnata ha quindi le 9 soluzioni distinte $\left\{0, \pm 1, \pm i, \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}\right\}$.

Esempio 2.8. Si determinino tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^3 = 1 + i|z|.$$

Rappresentiamo z in forma polare. Posto $z = re^{i\theta}$, sostituendo nell'equazione ed uguagliando parte reale e parte immaginaria abbiamo

$$\begin{cases} r^3 \cos 3\theta = 1, \\ r^3 \sin 3\theta = r. \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo che $r \neq 0$ e dunque il sistema è eqivalente a

$$\begin{cases} r^3 \cos 3\theta = 1, \\ r^2 \sin 3\theta = 1. \end{cases}$$

Dividendo membro a membro troviamo che $r = \tan 3\theta$, e quindi ci riduciamo al sistema

$$\begin{cases} r = \tan 3\theta, \\ \tan^2 3\theta \sin 3\theta = 1. \end{cases}$$

La seconda equazione del sistema ci dà

$$\sin^3 3\theta = 1 - \sin^2 3\theta.$$

Siamo quindi interessati a trovare le soluzioni dell'equazione algebrica

$$f(t) = t^3 + t^2 - 1 = 0 \quad \text{con } -1 \leq t \leq 1.$$

Cerchiamo il numero di radici comprese tra -1 ed 1 utilizzando il metodo dello studio di funzione. Abbiamo $f'(t) = 3t^2 + 2t = 3t(t + \frac{2}{3})$. La f è quindi crescente negli intervalli $(-\infty, -\frac{2}{3})$ e $(0, +\infty)$ e decrescente nell'intervallo $(-\frac{2}{3}, 0)$. Abbiamo

$$f(-1) = -1 < 0, \quad f(-\tfrac{2}{3}) = -\tfrac{23}{27} < 0, \quad f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 1 > 0.$$

Quindi f ammette un'unica radice reale t_0 con $0 < t_0 < 1$ e vi sarà quindi un unico angolo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ tale che $\sin\alpha = t_0$. Le soluzioni dell'equazione assegnata corrispondono allora a valori θ per cui

$$\sin 3\theta = \sin\alpha, \quad \cos\theta > 0.$$

Da

$$\theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{3} \quad \text{oppure} \quad \theta = \frac{\pi - \alpha + 2k\pi}{3}, \qquad \cos\theta > 0,$$

poiché $\cos\theta > 0$ quando θ appartiene agli intervalli $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$ per $k \in \mathbb{Z}$, dobbiamo considerare le disequazioni

$$-\frac{\pi}{2}+2h\pi < \frac{\alpha + 2k\pi}{3} < \frac{\pi}{2}+2h\pi, \quad -\frac{\pi}{2}+2h\pi < \frac{\pi - \alpha + 2k\pi}{3} < \frac{\pi}{2}+2h\pi, \qquad h, k \in \mathbb{Z}.$$

Possiamo scegliere l'argomento di z nell'intervallo $(-\pi, \pi]$, e quindi ci riduciamo al problema di determinare i valori di $k \in \mathbb{Z}$ per cui le diseguaglianze scritte sopra siano verificate con $h = 0$. Otteniamo quindi i valori:

$$\frac{\alpha}{3}, \ \frac{\pi - \alpha}{3}.$$

L'equazione assegnata ammette allora le due soluzioni

$$z = \tan\alpha \cdot e^{i\frac{\alpha}{3}} \quad \text{e} \quad z = \tan\alpha \cdot e^{i\frac{\pi-\alpha}{3}}.$$

Esempio 2.9. Si trovino tutte le soluzioni complesse z dell'equazione

$$z^3 + i\bar{z}^2 = 0.$$

L'equazione si può riscrivere nella forma $z^3 = -i\bar{z}^2$. Uguagliando i moduli otteniamo allora

$$|z|^3 = |z|^2.$$

Osserviamo quindi che $z = 0$ è soluzione e che tutte le altre soluzioni hanno modulo 1. Moltiplicando quindi l'equazione assegnata per z^2, troviamo che le soluzioni diverse da 0 soddisfano

$$z^5 + i = 0.$$

Le soluzioni sono quindi $z = 0$ e le cinque radici quinte di $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$:

$$z = 0, \quad \text{e} \quad z = e^{i\frac{(4k-1)\pi}{10}} = \cos\tfrac{(4k-1)\pi}{10} + i\sin\tfrac{(4k-1)\pi}{10}, \quad \text{per} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Osserviamo che i valori delle radici quinte di $-i$ si possono esprimere per mezzo di radicali reali. Abbiamo ad esempio, per $k = 0$,

$$\cos\tfrac{-\pi}{10} = \cos\tfrac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}},$$

$$\sin\tfrac{-\pi}{10} = -\sin\tfrac{\pi}{10} = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{2}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}.$$

Esempio 2.10. Si trovino tutte le soluzioni complesse z dell'equazione

$$(*) \qquad z^6 = i(\operatorname{Re} z)\,|z|^2\bar{z}^2.$$

Osserviamo che $z = 0$ è soluzione di $(*)$. Le soluzioni diverse da 0 sono soluzioni dell'equazione

$$z^8 = i(\operatorname{Re} z)\,|z|^6.$$

Introduciamo la forma polare $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ con $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Uguagliando a zero parte reale ed immaginaria otteniamo allora il sistema

$$\begin{cases} r > 0, \\ r^8\cos 8\theta = 0, \\ r^8\sin 8\theta = r^6\cos\theta. \end{cases}$$

Abbiamo perciò

$$\cos 8\theta = 0 \Longrightarrow 8\theta = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le soluzioni diverse da 0 di $(*)$ si ottengono quindi considerando il sistema

$$\begin{cases} k = 0, \dots, 7, \\ \theta_k = \frac{(1+4k)\pi}{16}, \\ r^2 = \frac{\cos\theta_k}{\sin 8\theta_k} > 0, \end{cases} \qquad \bigcup \begin{cases} k = 0, \dots, 7, \\ \theta'_k = \frac{(4k-1)\pi}{16}, \\ r^2 = \frac{\cos\theta'_k}{\sin 8\theta'_k} > 0, \end{cases}$$

Osserviamo che $\sin 8\theta_k = \sin\frac{(1+4k)\pi}{2} = 1$ e $\sin 8\theta'_k = \sin\frac{(4k-1)\pi}{2} = -1$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Consideriamo i segni:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\cos\theta_k$	+	+	−	−	−	−	+	+
$\cos\theta'_k$	+	+	+	−	−	−	−	+

Le soluzioni di $(*)$ sono i nove numeri complessi:

$$0,\ \sqrt{\cos\theta_0}e^{i\theta_0},\ \sqrt{\cos\theta_1}e^{i\theta_1},\ \sqrt{\cos\theta_6}e^{i\theta_6},\ \sqrt{\cos\theta_7}e^{i\theta_7},$$

$$\sqrt{|\cos\theta'_3|}e^{i\theta'_3},\ \sqrt{|\cos\theta'_4|}e^{i\theta'_4},\ \sqrt{|\cos\theta'_5|}e^{i\theta'_5},\ \sqrt{|\cos\theta'_6|}e^{i\theta'_6}.$$

Osserviamo che i valori dei seni e dei coseni di θ_i e θ'_i si possono esprimere mediante radicali reali, perché gli archi sono frazioni binarie di π. Ad esempio,

$$\sin\tfrac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}}{2}},$$

$$\cos\tfrac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}}{2}},$$

e queste formule ci permettono di scrivere tutte le soluzioni di $(*)$ come somme di radicali reali.

3. Circuiti elettrici

I numeri complessi sono utili nel calcolo dei circuiti elettrici. Ci limitiamo qui a considereare circuiti con impedenza costante e tensioni e correnti sinusoidali.

3.1. Tensione, corrente, impedenza. In un circuito elettrico percorso da corrente alternata, è utile descrivere la tensione V, la corrente I e l'impedenza Z come numeri complessi. In questo modo si tiene conto sia della loro *grandezza*, definita dal loro modulo $|\mathrm{V}|$, $|\mathrm{I}|$ e $|\mathrm{Z}|$, che della loro fase, ϕ_{V}, ϕ_{I} e ϕ_{Z}, che è il loro argomento. In particolare, la parte reale R di Z si dice *resistenza* e la parte immaginaria X di Z *reattanza*.

La *Legge di Ohm* è valida per la tensione, la corrente e l'impedenza nella forma

$$\mathrm{V} = \mathrm{Z} \cdot \mathrm{I}, \tag{3.1}$$

dove la moltiplicazione è quella tra numeri complessi ed, in particolare, l'argomento ϕ_V dell'impedenza misura la differenza di fase tra la tensione applicata e la corrente nel circuito.

L'impedenza di un *resistore ideale* è un numero reale puro.

L'impedenza di *induttori* o *capacità ideali* è puramente immaginaria:

$$\mathrm{Z_L} = i\omega \mathrm{L}, \qquad \mathrm{Z_C} = 1/(i\omega \mathrm{C}),$$

ove ω è la frequenza.

Deriviamo ora le impedenze relative ai diversi circuiti fondamentali, supponendo che la tensione applicata abbia frequenza costante ω.

Resistore. Abbiamo

$$v_{\mathrm{R}}(t) = \mathrm{R} \cdot \imath_{\mathrm{R}}(t) \tag{3.2}$$

e quindi $\mathrm{Z_R} = \mathrm{R}$.

Condensatore. Supponiamo sia $\mathrm{V} = v \cdot e^{i(\omega t + \phi_V)}$. Allora, con

$$v_C(t) = \mathrm{Re}\,\mathrm{V}(t) = v \cos(\omega t + \phi_{\mathrm{V}}), \tag{3.3}$$

abbiamo la formula

$$\imath_{\mathrm{C}}(t) = \mathrm{C}\,\frac{dv_{\mathrm{C}}(t)}{dt} = -\mathrm{C} \cdot v \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{V}}) = \mathrm{Re}\,(i\,\mathrm{C} \cdot v \cdot \omega \cdot e^{i(\omega t + \phi_V)}). \tag{3.4}$$

Poiché $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, otteniamo

$$\mathrm{I}(t) = i\,\mathrm{C} \cdot v \cdot \omega \cdot e^{i(\omega t + \phi_V)} = \mathrm{C} \cdot v \cdot \omega \cdot e^{i(\omega t + \phi_V + \frac{\pi}{2})}$$

e quindi

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{V}(t)}{\mathrm{I}(t)} = \frac{v \cdot e^{i(\omega t + \phi_V)}}{\mathrm{C} \cdot v \cdot \omega \cdot e^{i(\omega t + \phi_V + \frac{\pi}{2})}} = \frac{1}{i\,\omega\,\mathrm{C}} = \frac{-i}{\omega\,\mathrm{C}}.$$

INDUTTORE. Per un circuito induttore in cui passa una corrente $\mathrm{I}(t) = \imath \cdot e^{i(\omega t + \phi_{\mathrm{I}})}$, posto $\imath(t) = \operatorname{Re} \mathrm{I}(t) = \imath \cdot \cos(\omega t + \phi_{\mathrm{I}})$, la tensione reale $v(t) = \operatorname{Re} \mathrm{V}(t)$ soddisfa l'equazione

$$v(t) = \mathrm{L}\frac{d\imath(t)}{dt} = -\mathrm{L}\,\imath\,\omega \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{I}}) = \operatorname{Re}\left(i\mathrm{L}\,\imath\,\omega e^{i(\omega t+\phi_{\mathrm{I}})}\right) \tag{3.5}$$

e quindi

$$\mathrm{V}(t) = i\mathrm{L}\,\omega e^{i(\omega t+\phi_{\mathrm{I}})} = \mathrm{L}\,\omega e^{i(\omega t+\phi_{\mathrm{I}}+\frac{\pi}{2})}, \tag{3.6}$$

da cui otteniamo

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{V}(t)}{\mathrm{I}(t)} = \frac{\mathrm{L}\,\imath\,\omega e^{i(\omega t+\phi_{\mathrm{I}}+\frac{\pi}{2})}}{\imath \cdot e^{i(\omega t+\phi_{\mathrm{I}})}} = i\,\omega\,\mathrm{L}. \tag{3.7}$$

3.2. Circuiti in serie e in parallelo. L'impedenza Z di un circuito formato da più circuiti *in serie*, con impedenze $\mathrm{Z}_1 \ldots, \mathrm{Z}_n$, è la somma delle impedenze:

$$\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_1 + \cdots + \mathrm{Z}_n. \tag{3.8}$$

L'impedenza Z di un circuito formato da più circuiti *in parallelo*, con impedenze $\mathrm{Z}_1 \ldots, \mathrm{Z}_n$, si ricava dalla formula

$$\frac{1}{\mathrm{Z}} = \frac{1}{\mathrm{Z}_1} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{Z}_n}. \tag{3.9}$$

Esempio 3.1. L'induttanza di un circuito che abbia in serie una resistenza R ed un induttore d'induttanza L, con una tensione di frequenza costante ω, ha impedenza $R + i\omega L$.

Esempio 3.2. Consideriamo un circuito che metta in parallelo una resistenza R ed un induttore d'induttanza L. La sua impedenza Z alla frequenza ω è data da

$$\frac{1}{\mathrm{Z}} = \frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{i}{\omega\mathrm{L}} = \frac{\omega\mathrm{L} - i\mathrm{R}}{\omega\mathrm{RL}} \Longrightarrow \mathrm{Z} = \frac{\omega\mathrm{RL}(\omega\mathrm{L} + i\mathrm{R})}{\omega^2\mathrm{L}^2 + \mathrm{R}^2}.$$

Esempio 3.3. Consideriamo un circuito che consiste di una resistenza R e di un induttore di induttanza L è messo in parallelo un condensatore di capacità C. Applichiamo ad esso una corrente sinusoidale di frequenza ω. Per calcolare la sua induttanza Z, utilizziamo la formula

$$\frac{1}{\mathrm{Z}} = \frac{1}{\mathrm{Z}_1} + \frac{1}{\mathrm{Z}_2}, \quad \text{con} \quad \mathrm{Z}_1 = \mathrm{R} + i\omega\mathrm{L}, \;\; \mathrm{Z}_2 = 1/(i\omega\mathrm{C}).$$

Abbiamo allora

$$\frac{1}{\mathrm{Z}} = \frac{1}{\mathrm{R} + i\omega\mathrm{L}} + i\omega\mathrm{C} = \frac{1 - \omega^2\mathrm{CL} + i\omega\mathrm{RC}}{\mathrm{R} + i\omega\mathrm{L}}$$

e quindi

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{R} + i\omega\mathrm{L}}{1 - \omega^2\mathrm{CL} + i\omega\mathrm{RC}} = \frac{(R + i\omega\mathrm{L})(1 - \omega^2\mathrm{CL} - i\omega\mathrm{RC})}{(1 - \omega^2\mathrm{CL})^2 + \omega^2\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2}.$$

Esempio 3.4. Un circuito consista di due circuiti in parallelo, uno formato da una resistenza R in serie con un'induttanza L, l'altro da una capacità C. Alla frequenza ω, il primo ha induttanza $Z_1 = \mathrm{R} + i\omega\mathrm{L}$, il secondo $Z_2 = -i/(\omega\mathrm{C})$. L'induttanza risultante Z si ricava dalla formula

$$\frac{1}{\mathrm{Z}} = \frac{1}{\mathrm{Z}_1} + \frac{1}{\mathrm{Z}_2} = \frac{1}{\mathrm{R} + i\omega\mathrm{L}} + i\omega\mathrm{C} = \frac{1 + i\omega\mathrm{C}(\mathrm{R} - i\omega\mathrm{L})}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{(1 + \omega^2\mathrm{CL}) + i\omega\mathrm{RC}}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

4. Applicazioni alla geometria piana

Possiamo applicare i numeri complessi alla geometria analitica piana. In questo paragrafo identificheremo per semplicità i punti del piano con i numeri complessi ad essi corrispondenti nel piano di Gauss.

Ricordiamo che il prodotto di due numeri complessi diversi da zero è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti. In particolare, se associamo ai due numeri complessi diversi da zero z, w i vettori piani $\vec{z}, \vec{w}$ applicati nell'origine ad essi corrispondenti, l'argomento del quoziente z/w è l'arco di cui occorre ruotare $\vec{w}$ per sovrapporlo alla direzione di $\vec{z}$.

Se consideriamo i numeri complessi come punti del piano di Gauss, allora

$$[z_1, z_2] = \{z_1 + t(z_2 - z_1) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

è il *segmento* di estremi z_1, z_2,

$$\overrightarrow{z_1 z_2} = z_2 - z_1$$

il vettore della traslazione da z_1 a z_2. Osserviamo che il modulo $|z_2 - z_1|$ è la lunghezza del segmento $[z_1, z_2]$ e del vettore $\overrightarrow{z_1 z_2}$.

Se z_1, z_2, z_3 sono tre punti distinti, $z_1\widehat{z_2}z_3$ è l'angolo di cui occorre ruotare il vettore $\overrightarrow{z_2 z_1}$ per sovrapporlo al vettore $\overrightarrow{z_2 z_3}$ ed è quindi dato da

$$z_1\widehat{z_2}z_3 = \mathrm{Arg}(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}).$$

Definizione 4.1. Dati tre numeri complessi distinti z_1, z_2, z_3 il quoziente

$$(z_1 : z_2 : z_3) = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

si dice il loro *rapporto semplice*.

Il suo modulo è il rapporto tra le lunghezze dei segmenti $[z_1, z_3]$ e $[z_1, z_2]$ ed il suo argomento l'angolo tra i vettori $\overrightarrow{z_1 z_3}$ e $\overrightarrow{z_1 z_2}$.

Per il primo criterio di similitudine dei triangoli piani abbiamo

Proposizione 4.1. *Due triangoli piani* $\triangle(z_1 z_2 z_3)$ *e* $\triangle(w_1 w_2 w_3)$ *sono ordinatamente simili se e soltanto se* $(z_1 : z_2 : z_3) = (w_1 : w_2 : w_3)$.

Esempio 4.1. Si calcoli il valore del rapporto semplice $(z_1 : z_2 : z_3)$ nel caso in cui i tre punti siano i vertici di un triangolo equilatero.

I tre angoli interni di un triangolo equilatero sono tutti uguali a $\pi/3$ e quindi dobbiamo avere

$$(z_1 : z_2 : z_3) = e^{\frac{i\pi}{3}} = \cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Se $\vec{z}, \vec{w}$ sono i vettori con punto di applicazione nell'origine, corrispondenti ai numeri complessi z, w, allora il prodotto $z\bar{w}$ ha parte reale uguale al prodotto scalare dei due vettori e parte immaginaria uguale alla componente, rispetto ad un asse ortogonale al piano di Gauss, del prodotto vettore dei due vettori.

In particolare otteniamo

Proposizione 4.2. *L'area del triangolo di vertici z_1, z_2, z_3 è data da*

$$\mathrm{area}(\triangle(z_1z_2z_3)) = \tfrac{1}{2}\Big|\mathrm{Im}\,[(z_2 - z_1)(\overline{z_3 - z_1})]\Big|.$$

Esempio 4.2. Si calcoli l'area del triangolo del piano i cui vertici hanno coordinate cartesiane $(1, 2)$, $(3, -1)$, $(2, 5)$.

Posto $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - i$, $z_3 = 2 + 5i$, l'area cercata è data da

$$\tfrac{1}{2}\Big|\mathrm{Im}\,[(2 - 3i)(\overline{1 - 3i})]\Big| = \tfrac{1}{2}\Big|\mathrm{Im}\,[(2 - 3i)(1 + 3i)]\Big| = \tfrac{1}{2}|6 - 3| = \tfrac{3}{2}.$$

4.1. Retta reale per due punti. Siano $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tre punti distinti. Essi possono essere allineati, cioè appartenere ad una stessa retta reale, oppure ad una circonferenza. I tre punti sono allineati se i vettori $z_2 - z_1$ e $z_3 - z_1$ sono paralleli, cioè se, e soltanto se,

$$(z_1 : z_2 : z_3) = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}.$$

Questa equazione si può scrivere convenientemente come

$$\mathrm{Im}\,[(z_3 - z_1)(\overline{z_2 - z_1})] = 0.$$

In particolare, l'equazione della retta passante per due punti distinti z_1, z_2 si può scrivere nella forma

$$\mathrm{Im}\,[(z - z_1)(\overline{z_2 - z_1})] = 0.$$

Esempio 4.3. Consideriamo i due numeri complessi $1+3i$ e $-2+i$. L'equazione della retta reale ℓ che li contiene è data da

$$\mathrm{Im}\,[(z - 1 - 3i)(-3 + 2i)] = 0.$$

L'equazione cercata è dunque [1] scrivendo $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$,

$$0 = \mathrm{Im}\,[(3 - 2i)((x - 1) + i(y - 3))] = 3(y - 3) - 2(x - 1).$$

[1] L'equazione della retta per i punti (x_1, y_1), (x_2, y_2) si scrive nella forma

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1).$$

I due punti assegnati corrispondono a $(1, 3)$ e $(-2, 1)$ e dunque la formula scritta sopra ci dà

$$-2(x - 1) = -3(y - 3).n$$

4.2. Asse di un segmento. L'asse del segmento $[z_1, z_2]$ è il luogo di punti $z \in \mathbb{C}$ che sono equidistanti dagli estremi z_1, z_2, cioè degli $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano l'equazione

$$|z - z_1| = |z - z_2| \iff 2\mathrm{Re}\, z\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_1 = 2\mathrm{Re}\, z\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_2 \iff 2\mathrm{Re}\, z(\overline{z_2 - z_1}) = |z_2|^2 - |z_1|^2.$$

Esempio 4.4. Calcoliamo l'asse del segmento di estremi $1+2i$, $-3-4i$. Se z_1, z_2 sono i punti corrispondenti ai due numeri complessi assegnati, abbiamo $z_2 - z_1 = -(4+6i)$ e $|z_2|^2 - |z_1|^2 = 25 - 5 = 20$. La retta cercata è dunque

$$2\mathrm{Re}\,(z(-4 - 6i)) = 20 \iff 2x + 3y + 5 = 0, \quad \text{con } z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

4.3. Circonferenza per tre punti. Siano z_1, z_2, z_3 tre punti non allineati. Se un punto z appartiene alla circonferenza κ per z_1, z_2, z_3, allora gli angoli $\widehat{z_1 z_2 z_3}$ e $\widehat{z_1 z_2 z}$ sono o uguali, o supplementari, a seconda che z_3 e z appartengano allo stesso arco o ad archi opposti con estremi z_1, z_2 e, viceversa, la condizione che i due angoli siano uguali o supplementari è anche sufficiente affinché i quattro punti z_1, z_2, z_3, z appartengano ad una stessa circonferenza.

Quindi, l'equazione della circonferenza κ passante per i tre punti non allineati z_1, z_2, z_3 si può scrivere nella forma:

$$(z_1 : z_2 : z_3 : z) = \frac{(z_2 : z_3 : z)}{(z_1 : z_3 : z)} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \in \mathbb{R},$$

cioè

$$(*) \qquad \mathrm{Im}\,((z - z_1)(\overline{z - z_2})(z_3 - z_2)(\overline{z_3 - z_1})) = 0.$$

Esempio 4.5. Determiniamo la circonferenza per i punti $z_1 = -3$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 2 - i$. Risulta $z_3 - z_2 = 1 - 2i$, $\overline{z_3 - z_1} = 5 + i$, quindi $(z_3 - z_2)(\overline{z_3 - z_1}) = 7 - 9i$, Abbiamo quindi per κ, con $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, l'equazione

$$\begin{aligned} & \mathrm{Im}\,((7 - 9i)([x + 3] + iy)([x - 1] - i[y + 1])) = 0 \\ \iff\ & \mathrm{Im}\,((7 - 9i)([x^2 + y^2 + 2x + y - 3] - i[x + 4y + 3])) = 0 \\ \iff\ & 9[x^2 + y^2 + 2x + y - 3] + 7[x + 4y + 3] = 0 \\ \iff\ & 9(x^2 + y^2) + 25x + 37y - 6 = 0. \end{aligned}$$

Osservazione 4.3. Se z_1, z_2, z_3 sono allineati, allora la $(*)$ è l'equazione della retta che li contiene. Infatti, in questo caso il prodotto $(z_3 - z_2)(\overline{z_3 - z_1})$ è reale e la $(*)$ si riduce allora all'equazione $\mathrm{Im}\,((z - z_1)(\overline{z - z_2})) = 0$, che è l'equazione della retta passante per z_1 e z_2.

4.4. Centro della circonferenza. Sia κ una circonferenza del piano $\mathbb{C}$, di centro z_0 e raggio $r > 0$.

L'*inversione* rispetto a κ è l'applicazione

$$f_\kappa : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \ni z \longleftrightarrow z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}.$$

La f_κ lascia fissi tutti i punti della circonferenza, trasforma punti esterni in punti interni, e viceversa, e manda in sé ogni semiretta uscente dal centro z_0.

Se κ è la circonferenza passante per i punti z_1, z_2, z_3, possiamo caratterizzare $w = f_\kappa(z)$ mediante l'equazione:

$$(z_1 : z_2 : z_3 : w) = \overline{(z_1 : z_2 : z_3 : z)}.$$

Questa uguaglianza ci permette di calcolare il centro della circonferenza come l'immagine mediante f_κ del *punto all'infinito*, risolvendo l'equazione

$$(z_1 : z_2 : z_3 : z_0) = \overline{(z_1 : z_2 : z_3 : \infty)} = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3}.$$

Abbiamo cioè

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_1} = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3} \iff \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} = \frac{(z_1 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3)}{(z_2 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)}$$

$$\iff (z_0 - z_1)(z_2 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) = (z_0 - z_2)(z_1 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3).$$

Osserviamo che questa è un'equazione di primo grado rispetto a z_0, con il coefficiente $(z_2 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) - (z_1 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3)$ diverso da 0 quando i tre punti non sono allineati.

CAPITOLO 2

Equazioni algebriche

1. Equazioni a coefficienti razionali

Un polinomio di grado n a coefficienti razionali $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ si può sempre scrivere nella forma $f(x) = q \cdot g(x)$, ove $q \in \mathbb{Q}$ e $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ è un polinomio a coefficienti interi

$$g(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \tag{1.1}$$

con $MCD(a_0, \ldots, a_n) = 1$, i cui coefficienti cioè non siano tutti divisibili per uno stesso numero intero diverso da ± 1. Per la ricerca delle eventuali radici razionali di f, ovvero di g, utilizziamo la seguente

Proposizione 1.1. *Siano p, q interi primi tra loro. Se $\frac{p}{q}$ è una radice razionale di $g(x)$, allora p divide a_n e q divide a_0.*

Dimostrazione. Infatti, se $\frac{p}{q}$ è una radice razionale di $g(x)$, allora

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \cdots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0.$$

Poiché abbiamo supposto che p e q fossero primi tra loro, da

$$\begin{aligned} a_0p^n &= q(-a_1p^{n-1} - \cdots - a_{n-1}pq^{n-2} - a_nq^{n-1}), \\ a_nq^n &= p(-a_0p^{n-1} - a_1p^{n-2}q - \cdots - a_{n-1}q^{n-1}), \end{aligned}$$

segue che q divide a_0 e p divide a_n. $\square$

2. Equazioni di terzo grado

2.1. Polinomi di terzo grado a coefficienti reali. Un polinomio di terzo grado a coefficienti reali ha la forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ed } a \neq 0.$$

Esso ha sempre una radice reale. Per determinare il numero di radici reali di f, se ne calcola la derivata

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Se f' non ha radici reali, ovvero se ammette una sola radice reale, il segno della derivata prima è costante e la f è strettamente crescente o decrescente, ed ammette quindi una ed una sola radice reale.

Se f' ammette due radici reali $x_1 < x_2$, si devono considerare i numeri

$$-a, \quad f(x_1), \quad f(x_2), \quad a.$$

Abbiamo allora

$$
\begin{aligned}
a \cdot f(x_1) > 0 &\Longleftrightarrow f \text{ ha una radice nella semiretta }]-\infty, x_1],\\
f(x_1) \cdot f(x_2) < 0 &\Longleftrightarrow f \text{ ha una radice nell'intervallo }]x_1, x_2[,\\
a \cdot f(x_1) < 0 &\Longleftrightarrow f \text{ ha una radice nella semiretta }]x_2, \infty[\\
f(x_1) = 0 &\Longleftrightarrow f \text{ è divisibile per } (x - x_1)^2,\\
f(x_1) = 0 &\Longleftrightarrow f \text{ è divisibile per } (x - x_2)^2.
\end{aligned}
$$

Negli ultimi due casi f ed f' hanno una radice comune.

La ricerca di eventuali radici comuni di f ed f' si fa utilizzando l'algoritmo di divisione di Euclide:

$$f(x) = (\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{9}(b/a))f'(x) + \underbrace{\frac{2(3ac - b^2)}{9}x + \frac{9ad - b}{9}}_{r(x)}.$$

L'eventuale radice comune sarebbe una radice di $r(x)$.

Definizione 2.1. Si dice *discriminante* del polinomio di terzo grado $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ il numero

$$\Delta = 18\,abcd - 4\,b^3d + b^2c^2 - 4\,ac^3 - 27\,a^2d^2.$$

Utilizzando il discriminante abbiamo

Proposizione 2.1. *L'equazione* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ *ammette*

tre radici reali distinte se $\Delta > 0$,

due radici reali, di cui una con molteplicità almeno due, se $\Delta = 0$,

una sola radice reale e due complesse coniugate se $\Delta < 0$.

3. Formule di Cardano

Se poniamo $x = t - \frac{b}{3a}$, l'equazione cubica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ assume la forma

$$t^3 + pt + q = 0, \tag{3.1}$$

con

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}, \qquad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}. \tag{3.2}$$

Una cubica del tipo $g(t) = t^3 + pt + q$ si dice *ridotta*. Osserviamo che la somma delle radici di una cubica ridotta è uguale a zero e, viceversa, un polinomio di terzo grado monico è una cubica ridotta se la somma delle sue radici è nulla.

Osserviamo che il discriminante di g assume la forma semplificata

$$\Delta_g = -4p^3 - 27q^2.$$

Considerando due nuove variabili u, v e ponendo $t = u + v$ nella (3.1), abbiamo

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Se imponiamo la condizione aggiuntiva che sia $3uv + p = 0$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}. \end{cases}$$

Ricordiamo che le soluzioni (ξ, η) del sistema

$$\begin{cases} \xi + \eta = \alpha, \\ \xi\eta = \beta, \end{cases}$$

sono le coppie di radici dell'equazione di secondo grado nell'incognita ζ:

$$\zeta^2 - \alpha\zeta + \beta = 0.$$

Le soluzioni di $g(t) = 0$ si possono quindi ottenere da

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Osserviamo che, quando $p = 0$, le radici di g sono le tre radici cubiche, in campo complesso, di $-q$. Se si esclude questo caso, è $u \neq 0$ e la v si calcola da u mediante $v = -\frac{p}{3u}$. Se $p \neq 0$, dalle

$$u_{1,2,3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

otteniamo le tre radici di g nella forma

$$t_i = u_i - \frac{p}{3u_i}, \quad \text{per } i = 1, 2, 3.$$

Esempio 3.1. Le formule di Cardano richiedono il calcolo di radici di numeri complessi anche quando le radici del polinomio di terzo grado sono tutte reali. Consideriamo ad esempio

$$g(t) = t^3 - 7t + 6,$$

che ha le tre radici $-3, 1, 2$. Le formule di Cardano danno

$$u_{1,2,3} = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 - \frac{343}{27}}} = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{-100}{27}}} = \sqrt[3]{-3 + i\frac{10}{\sqrt{27}}}$$

e non è immediato ricavare le radici per mezzo delle formule. Per questo si preferisce, in generale, cercare prima con il metodo generale se vi siano soluzioni intere o razionali o, nel caso di polinomi reali, soluzioni reali approssimate con diversi metodi ricorsivi.

4. Risultante e discriminante

Siano $f, g \in \mathbb{C}[x]$ due polinomi a coefficienti complessi, di gradi positvi m, n:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m, \\ g(x) &= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n, \end{aligned} \qquad a_0 b_0 \neq 0. \tag{4.1}$$

Poiché il campo $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, i due polinomi si fattorizzano in prodotti di polinomi di primo grado:

$$f(x) = a_0(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_m), \qquad g(x) = b_0(x-\mu_1)\cdots(x-\mu_n). \tag{4.2}$$

Definizione 4.1 (risultante)**.** Si dice *risultante* dei due polinomi f e g il numero complesso

$$\operatorname{res}(f,g) = a_0^n b_0^m \prod_{\substack{i\ =\ 1,\dots,m,\\ j\ =\ 1,\dots,n}} (\lambda_i - \mu_j). \tag{4.3}$$

Possiamo calcolare il risultante di due polinomi senza conoscerne esplicitamente le radici. Vale infatti la

Proposizione 4.1. *Se f, g sono due polinomi descritti dalla* (4.1)*, allora il loro risultante è il determinante della matrice* $(m+n)\times(m+n)$

$$\begin{array}{c} \\ n \\ \\ \\ \\ m \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m-1} & a_m & & \\
 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{m-1} & a_m & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\
b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{n-1} & b_n & & \\
 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{n-1} & b_n & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n
\end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Dimostrazione. Per verificare questa formula, occorre osservare che, per le (4.2), abbiamo

$$\begin{cases}
a_1/a_0 = -\sum_{i=1}^m \lambda_i,\\
a_2/a_0 = \sum_{1\le i<j\le m} \lambda_i\lambda_j,\\
\qquad \cdots\\
a_h/a_0 = (-1)^h \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_h\le m} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_h},\\
\qquad \cdots\\
a_m/a_0 = (-1)^m \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m,
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
b_1/b_0 = -\sum_{i=1}^n \mu_i,\\
b_2/b_0 = \sum_{1\le i<j\le n} \mu_i\mu_j,\\
\qquad \cdots\\
b_h/b_0 = (-1)^h \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_h\le n} \mu_{i_1}\mu_{i_2}\cdots\mu_{i_h},\\
\qquad \cdots\\
b_n/b_0 = (-1)^n \mu_1\mu_2\cdots\mu_n.
\end{cases}$$

Si sostituiscono quindi le espressioni dei coefficienti in funzione delle radici dei due polinomi nella (4.4) e si calcola il determinante. □

Abbiamo ancora

Proposizione 4.2. *Siano* $f, g \in \mathbb{C}[x]$ *due polimomi, descritti dalle* (4.1)*,* (4.2)

$$\text{res}(f, g) = a_0^n \prod\nolimits_{i=1}^m g(\lambda_i) = (-1)^{mn} b_0^m \prod\nolimits_{j=1}^n f(\mu_j). \tag{4.5}$$

Il significato del risultante è il seguente:

Teorema 4.3. *Siano* $f, g \in \mathbb{C}[x]$ *due polinomi di grado positivo. Condizione necessaria e sufficiente affinché* f *e* g *abbiano una radice comune è che* $\text{res}(f, g) = 0$.

Se $f \in \mathbb{C}[x]$ è dato dalla (4.1), la sua *derivata prima* è il polinomio

$$f'(x) = ma_0 x^{m-1} + (m-1)a_1 x^{m-2} + \cdots + 2a_{m-2}x + a_{m-1}. \tag{4.6}$$

Definizione 4.2. Si dice *discriminante* di $f \in \mathbb{C}[x]$ il risultante di f e della sua derivata prima:

$$\Delta_f = \text{res}(f, f'). \tag{4.7}$$

Teorema 4.4. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio* f *abbia una radice multipla è che il suo discriminante si annulli.*

Osservazione 4.5. Consideriamo un polinomio di secondo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$. È $f'(x) = 2ax + b$ e quindi, per la (4.5),

$$\Delta_f = 4a \cdot f(-b/2a) = 4a(a\frac{b^2}{4a^2} - b\frac{b}{2a} + c) = -b^2 + 4ac.$$

Osserviamo quindi che il discriminante che abbiamo definito per polinomi di grado arbitrario è l'*opposto* del determinante del polinomio di secondo grado che si definisce nell'algebra elementare.

Consideriamo ora un polinomio di terzo grado ridotto $f(x) = x^3 + px + q$. È $f'(x) = 3x^2 + p$. Indichiamo con λ una delle due radici quadrate di $-p/3$. Utilizzando ancora la (4.5) otteniamo

$$\begin{aligned}\Delta_f &= -27(\lambda^3 + p\lambda + q)(-\lambda^3 - p\lambda + q) = 27[(\lambda^3 + p\lambda)^2 - q^2] = 27[\lambda^2(\lambda^2 + p)^2 - q^2] \\ &= 27\left(\frac{-4p^3}{27} - q^2\right) = -4p^3 - 27q^2\end{aligned}$$

5. Il teorema di Sturm

Sia $f \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio reale di grado $m > 0$. Supponiamo che, in campo complesso, f abbia solo radici semplici, che cioè le radici $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ in (4.2) siano tutte distinte. Associamo ad f la sua *catena di Sturm*. Essa è una successione di polinomi $f_0, f_1, \dots, f_m$ definita da

$$(5.1)\qquad \begin{cases} f_0(x) = f(x), \\ f_1(x) = f'(x), \\ f_2(x) = f_1(x)q_1(x) - f_0(x), \quad \deg f_2 < \deg f_1, \\ f_3(x) = f_2(x)q_2(x) - f_1(x), \quad \deg f_3 < \deg f_2, \\ \quad \cdots \\ f_{h+1}(x) = f_h(x)q_h(x) - f_{h-1}(x), \quad \deg f_{h+1} < \deg f_h, \\ \quad \cdots \\ f_m(x) = f_{m-1}(x)q_{m-1}(x) - f_{m-2}(x), \quad \deg f_m < \deg f_{m-1}, \\ f_i, q_i \in \mathbb{R}[x] \end{cases}$$

Fissato un numero reale λ, indichiamo con $\sigma(\lambda)$ il numero di cambiamenti di segno della sequenza

$$(5.2)\qquad f_0(\lambda),\ f_1(\lambda),\ \dots,\ f_m(\lambda)$$

(non si contino gli eventuali zeri). Vale il seguente

Teorema 5.1. *Siano $a < b$ due numeri reali. Allora $\sigma(a) - \sigma(b)$ è il numero di radici reali distinte di f nell'intervallo $]a, b]$.*

Dimostrazione. Supponiamo che che un valore $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ed un intero h con $0 \leq h < m$ risulti $f_h(\lambda_0) = f_{h+1}(\lambda_0) = 0$. Avremo allora, per (5.1), anche $f_{h-1}(\lambda_0) = 0$ e dunque per ricorrenza $f_j(\lambda_0) = 0$ per ogni $j = 0, \dots, h + 1$. [Allo stesso modo troviamo che $f_{h+2}(\lambda_0) = f_{h+1}(\lambda_0)q_{h+1}(\lambda_0) - f_h(\lambda_0) = 0$ e dunque, per ricorrenza, $f_j(\lambda_0) = 0$ per ogni $j = 0, \dots, m$.] Ma questo non è possibile perché allora λ_0, essendo radice sia di f che di f' sarebbe una sua radice doppia. Quindi,

$$f_h(\lambda_0) = 0 \Longrightarrow f_{h-1}(\lambda_0) \cdot f_{h+1}(\lambda_0) \neq 0.$$

In particolare, se $f(\lambda_0) \neq 0$, possiamo trovare un $\epsilon > 0$ tale che, se $|\lambda - \lambda_0|, \epsilon$, il numero dei cambiamenti di segno nella (5.2) rimane costante. Se invece $f(\lambda_0) = 0$, allora esiste un $\epsilon > 0$ tale che, se $|\lambda - \lambda_0|, \epsilon$, abbiamo $f(\lambda') \cdot f(\lambda'') < 0$ se $\lambda_0 - \epsilon \leq \lambda' < \lambda_0 < \lambda'' < \lambda_0 + \epsilon$, mentre il il numero dei cambiamenti di segno nella

$$f_1(\lambda),\ \dots,\ f_m(\lambda)$$

rimane costante. Osserviamo ancora che, se $f'(\lambda_0) > 0$, allora il segno di $f(\lambda')$ è negativo e quello di $f(\lambda'')$ positivo, mentre se $f'(\lambda_0) < 0$, allora il segno di $f(\lambda')$ è positivo e quello di $f(\lambda'')$ negativo per $\lambda_0 - \epsilon \leq \lambda' < \lambda_0 < \lambda'' < \lambda_0 + \epsilon$. Quindi $\sigma(\lambda_0 - \epsilon) - \sigma(\lambda_0 + \epsilon) = 1$. Si ottiene quindi la tesi suddividendo l'intervallo $]a, b]$ in piccoli intervalli, contenenti ciascuno al più una radice di f. □

Corollario 5.2. *Sia $f_0, f_1, \dots, f_m$ la catena di Sturm di un polinomio $f \in \mathbb{R}[x]$ di grado m e privo di radici multiple. Per ogni j sia $m_j = \deg f_j$ ed $f_j = c_j x^{m_j} + h_j(x)$ con $h_j \in \mathbb{R}[x]$ e $\deg h_j < m_j$. Allora il numero di radici reali di f è il numero di cambiamenti di segno della sequenza*

$$(5.3)\qquad c_0,\ c_1,\ \dots,\ c_{m-1},\ c_m.$$

Dimostrazione. Se $]a, b]$ è un intervallo che contiene tutte le radici reali di f, allora $\sigma(\lambda)$ è costante sulla semiretta $]-\infty, a]$ e nulla sulla semiretta $[b, +\infty]$. Otteniamo la tesi osservando che $\sigma(\lambda)$ è uguale al numero di cambiamenti di segno in (5.3) se $\lambda \in]-\infty, a]$. □

Osservazione 5.3. Possiamo sempre ridurci al caso di un polinomio f senza radici multiple dividendo f per il massimo comun divisore di f ed f'.

Osservazione 5.4. Se $f_0, f_1, \ldots, f_m$ è la catena di Sturm di un qualsiasi polinomio di grado m, e supponiamo che né a né b siano radici multiple di f, allora $\sigma(a) - \sigma(b)$ misura il numero di radici distinte di f contenute nell'intervallo $]a, b]$.

Consideriamo ad esempio $f(x) = x^2$. La sua catena di Sturm è

$$\begin{cases} f_0(x) = x^2, \\ f_1(x) = 2x, \\ f_0(x) = 0. \end{cases}$$

Otteniamo $\sigma(a) = 1$, $\sigma(b) = 0$ se $a < 0$, $b > 0$, e quindi $\sigma(a) - \sigma(b) = 1$.