PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 12/09/2017
SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le quadriche affini

$$\mathcal{Q}'_k \;:\; 2kxy + 3x^2 - y^2 - 4z^2 + 4y + 2kz = 1.$$

(1) Se ne determini il tipo.
(2) Si dica sono o no a centro, e in caso affermativo, per ogni valore del parametro se ne trovi il centro.

Soluzione. Associamo alla quadrica $\mathcal{Q}_k$ proposta le matrici completa ed incompleta

$$B_k = \begin{pmatrix} 3 & k & 0 & 0 \\ k & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & k \\ 0 & 2 & k & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad A_k = \begin{pmatrix} 3 & k & 0 \\ k & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det(A_k) = 4\cdot(3 + k^2) > 0$, ed A_k è indefinita, per ogni k reale la $\mathcal{Q}'_k$ è non vuota e a centro. Abbiamo

$$\det(B_k) = \begin{vmatrix} 3 & k & 0 & 0 \\ k & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & k \\ 0 & 2 & k & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & k \\ 2 & k & -1 \end{vmatrix} - k\cdot \begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -4 & k \\ 2 & k & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot(-4+k^2+8) - k^2\cdot(4 - k^2) = k^4 - k^2 + 12 > 0 \;\; \forall k\in\mathbb{R}.$$

(1) Poiché A_k è indefinita e $\det(B_k) > 0$ per ogni k, allora per ogni valore del parametro reale k la quadrica è un iperboloide iperbolico, cioè a una falda.
(2) Poiché $\det(A_k) = 4\cdot(3 + k^2) > 0$, la quadrica $\mathcal{Q}'_k$ è a centro per ogni valore di k. Le coordinate del centro sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + ky = 0, \\ kx - y + 2 = 0, \\ -4z + k = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{-2k}{3+k^2}, \\ y = \frac{6}{3+k^2}, \\ z = \frac{k}{4}. \end{cases}$$

Il centro è quindi il punto $\left(\dfrac{-2k}{3 + k^2}, \dfrac{6}{3 + k^2}, \dfrac{k}{4}\right)$. □

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 5×5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

(2) Si dica se A è diagonalizzabile.
(3) Se ne scriva la forma di Jordan.
(4) Si calcoli il polinomio minimo di A.
(5) Si verifichi che A è invertibile e se ne calcoli l'inversa. [Si consiglia di utilizzare il polinomio minimo.]

Soluzione. (1) Calcoliamo il polinomio caratteristico.

$$-p_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = (1-x)\cdot \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 1-x^2 & x^2 & x^2 & -x \end{vmatrix} = (1-x)\cdot(1-x^2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(x-1)^3(x+1)^2.$$

Il polinomio caratteristico è completamente riducibile su $\mathbb{R}$, con autovalori 1 di molteplicità algebrica 3 e -1 di molteplicità algebrica 2.

Calcoliamo le loro molteplicità geometriche. Indichiamo con "$\sim$" il fatto che due matrici abbiano lo stesso rango. Abbiamo

$$A + \mathrm{I}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango tre perché il minore delle ultime tre righe è $-2 \neq 0$. Quindi l'autovalore -1 di A ha molteplicità geometrica 2. Abbiamo poi

$$A - \mathrm{I}_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango tre perché il determinante minore delle prime tre colonne è $-1 \neq 0$. Anche l'autovalore 1 ha quindi molteplicità geometrica 2.
(2) Poiché le molteplicità algebriche e geometriche dell'autovalore 1 sono diverse, la matrice A non è diagonalizzabile.
(3) Poiché il polinomio caratteristico è completamente decomponibile su $\mathbb{R}$, la A ammette una forma di Jordan reale. Essendo le molteplicità geometriche uguali a due, per ciascun autovalore abbiamo due blocchi di Jordan. Quelli di -1 hanno entrambi ordine 1, quelli di 1 hanno uno ordine uno,

l'altro ordine due. La forma di Jordan di A è perciò

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) Dalla forma di Jordan segue che il polinomio minimo di A è $(x-1)^2(x+1)$, perché la potenza con cui il fattore $(x-\lambda)$ compare nel polinomio minimo è l'ordine del più grande blocco di Jordan corrispondente all'autovalore A.
(4) Poiché il polinomio minimo è $\mu_A(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, abbiamo

$$A^3 - A^2 - A + \mathrm{I}_5 = 0, \text{ cioè } A\cdot(\mathrm{I}_5 + A - A^2) = \mathrm{I}_5.$$

Questa formula ci dice che A è invertibile ed ha come inversa $A^{-1} = \mathrm{I}_5 + A - A^2$. Abbiamo

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_5 + N$$

ove

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice nilpotente di rango 1.}$$

È quindi

$$A^{-1} = \mathrm{I}_5 + A - A^2 = \mathrm{I}_5 + A - \mathrm{I}_5 - N = A - N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 3. Siano dati, nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, i punti $A = (3,0,1)$, $B = (2,0,1)$, $C = (1,1,3)$.

(1) Si verifichi che i tre punti non sono collineari e si determini il piano α che li continene.
(2) Si determinino equazioni parametriche delle rette r, s del piano α che sono:
    r perpendicolare alla retta AB e passante per B;
    s perpendicolare alla retta AC e passante per C.
(3) Si determini il punto D d'intersezione delle rette r ed s.
(4) Si calcoli l'area del quadrilatero convesso di vertici A, B, D, C.

Soluzione. (1) Abbiamo $\overrightarrow{AB} = (-1,0,0)^\intercal$ ed $\overrightarrow{AC} = (-2,1,2)^\intercal$. I due vettori sono lineramente indipendenti e quindi i punti A, B, C non sono allineati.

Le coordinate x, y, z di un punto P del piano α per i tre punti sono soluzioni dell'equazione

$$0 = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & x-3 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & z-1 \end{vmatrix} = z - 2y - 1$$

Abbiamo perciò

$$\alpha \ : \ 2y - z + 1 = 0.$$

(2) Possiamo scegliere come velocità lungo la retta r il prodotto vettore della normale $\vec{n} = (0, 2, -1)^\intercal$ al piano α per la velocità $\overrightarrow{AB}$ lungo la retta AB:

$$\vec{v} = \vec{n} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché r passa per B, possiamo scrivere la sua equazione parametrica nella forma

$$r \ : \begin{cases} x = 2, \\ y = t, \\ z = 2t + 1. \end{cases}$$

Analogamente, per la velocità $\vec{w}$ lungo s possiamo prendere

$$\vec{w} = \vec{n} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Quindi sono equazioni parametriche per s le

$$s \ : \begin{cases} x = 1 + 5t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 3 + 4t. \end{cases}$$

(3) Indicando con t_1 il parametro lungo r e con t_2 il parametro lungo s, il punto d'intersezione si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2 = 1 + 5t_2, \\ t_1 = 1 + 2t_2, \\ 2t_1 + 1 = 3 + 4t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} t_2 = \frac{1}{5}, \\ t_1 = \frac{7}{5}. \end{cases}$$

Il punto d'intersezione D è allora $D = \left(2, \dfrac{7}{5}, \dfrac{19}{5}\right)$.

(4) L'area del quadrilatero è la somma delle aree dei triangoli $\triangle(A, B, C)$ e $\triangle(B, C, D)$ e quindi è la metà della somma delle lunghezze di $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB}$ e di $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$. Abbiamo

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{5} \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{14}{5} \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

Otteniamo allora

$$\text{area del quadrilatero} = \tfrac{1}{2}\sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{0^2 + \left(\frac{14}{5}\right)^2 + \left(-\frac{7}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{7\sqrt{5}}{10} = \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$\square$