

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 12/09/2017
SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

Esercizio 1. Si considerino, al variare del parametro reale k , le quadriche affini

$$\mathcal{Q}'_k : 2xy + 3x^2 - 4z^2 + 2x + 2kz = 0.$$

- (1) Se ne determini il tipo.
- (2) Si dica sono o no a centro, e in caso affermativo, per ogni valore del parametro se ne trovi il centro.

Soluzione. Associamo alla quadrica \mathcal{Q}_k proposta le matrici completa ed incompleta

$$B_k = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & k \\ 1 & 0 & k & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad A_k = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det(A_k) = 4 > 0$, ed A_k è indefinita, per ogni k reale la \mathcal{Q}'_k è non vuota e a centro. Abbiamo

$$\det(B_k) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & k \\ 1 & 0 & k & 0 \end{vmatrix} = -k \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix} = -k^2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = k^2.$$

(1) Se $k \neq 0$, allora la \mathcal{Q}_k è non degenera ed avendo $\det(B_k) > 0$ ed A_k non degenera ed indefinita è un iperboloide iperbolico, cioè ad una falda.

Per $k = 0$, la \mathcal{Q}_0 , essendo degenera e con A_k non degenera ed indefinita, è un cono.

(2) Poiché $\det(A_k) = 4 \neq 0$ la quadrica \mathcal{Q}'_k è a centro. Il centro è la soluzione $(0, -1, k/4)$ del sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + y + 1 = 0, \\ x = 0, \\ -4z + k = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -1, \\ z = \frac{k}{4}. \end{cases}$$

□

Esercizio 2. Sia A la matrice reale 4×4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Si dica se A è invertibile. Nel caso non lo sia, se ne calcoli il rango; nel caso lo sia, se ne calcoli l'inversa.
- (2) Si calcolino i suoi autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

- (3) Si dica se A è diagonalizzabile.
 (4) Se ne scriva la forma di Jordan.

Soluzione. (1) Possiamo scrivere A come una matrice antidiagonale a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ B & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e

$$\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ B & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.$$

Questo dimostra che A è invertibile e che

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A .

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_4 - A) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda^2) + \lambda^2(\lambda^2 - 1) = (\lambda^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

Quindi $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$ e gli autovalori di A sono ± 1 , ciascuno con molteplicità algebrica 2.

Indichiamo con “ \sim ” la relazione tra matrici di avere lo stesso rango. Abbiamo

$$\begin{aligned} A - I_4 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{che determinante } 1 \neq 0 \text{ e quindi rango } 3. \end{aligned}$$

È poi

$$\begin{aligned} A + I_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{che determinante } -1 \neq 0 \text{ e quindi rango } 3. \end{aligned}$$

Quindi ciascuno degli autovalori ± 1 ha molteplicità algebrica due e molteplicità geometrica 1.

(3) Poiché le molteplicità algebriche e geometriche sono diverse, la matrice A non è diagonalizzabile.

(4) Poiché il polinomio caratteristico è completamente decomponibile su \mathbb{R} , la A ammette una forma di Jordan reale. Essendo le molteplicità geometriche uguali ad uno, abbiamo un solo blocco di Jordan per ciascun autovalore ed il suo ordine sarà allora uguale alla relativa molteplicità algebrica, cioè due. La forma di Jordan di A è perciò

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 3. Siano dati, nello spazio affine \mathbb{R}^3 , i punti $A = (3, 0, 0)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (1, 1, 1)$, $D = (2, 0, 1)$.

- (1) Si verifichi che i quattro punti appartengono ad uno stesso piano α .
- (2) Si verifichi che A, B, C, D sono i vertici di un quadrilatero convesso Q del piano α .
- (3) Si calcoli l'area di Q .
- (4) Si verifichi che il punto $V = (0, 0, 6)$ non appartiene al piano α .
- (5) Si calcoli il volume della piramide di base Q e vertice V .

Soluzione. (1) La normale al piano α per i tre punti A, B, C è il prodotto vettore di $B - A$ per $C - A$.

$$(B - A) \times (C - A) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'equazione cartesiana del piano α è allora della forma $x + y + z = c$, e, sostituendo le coordinate di A , troviamo che

$$\alpha : x + y + z = 3.$$

Sostituendo le coordinate di D troviamo che $2 + 0 + 1 = 3$ e quindi $D \in \alpha$ ed i quattro punti sono complanari.

(2) Basta verificare che i punti B e D appartengono a semipiani opposti rispetto alla retta AC . Questa retta è l'intersezione di α con il piano $\{y = z\}$ e quindi i due semipiani sono caratterizzati da $H_+ = \alpha \cap \{y - z > 0\}$ ed $H_- = \alpha \cap \{y - z < 0\}$. Abbiamo $B \in H_+$ e $D \in H_-$.

(3) Possiamo allora calcolare l'area di Q come la somma delle aree dei triangoli ABC ed ABD . È

$$\begin{aligned} \text{area}(\triangle(ABC)) &= \frac{1}{2} \|(B - A) \times (C - A)\| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \text{area}(\triangle(ABD)) &= \frac{1}{2} \|(B - A) \times (D - A)\| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \text{area}(Q) &= \text{area}(\triangle(ABC)) + \text{area}(\triangle(ABD)) = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

(4) Poiché la somma delle coordinate del punto V è $6 \neq 3$, il punto non appartiene al piano α .

(5) La distanza di V dal piano α è il valore assoluto del prodotto scalare di $V - A$ per il versore $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ della normale al piano α . Abbiamo quindi

$$h = \text{dist}(V, \alpha) = |(V - A) \cdot \vec{n}| = |(-3, 0, 6) \cdot \vec{n}| = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Il numero h è anche l'altezza della piramide P di base Q e vertice V . Il suo volume è quindi

$$\text{vol}(P) = \frac{1}{3} \cdot \text{area}(Q) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 1.$$

□