

COGNOME E NOME: _____

CORSO DI LAUREA: _____

GEOMETRIA
PROVA SCRITTA DEL 08/02/2012

Esercizio 1. Si trovino i valori del parametro reale k per cui il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + ky + kz = 2(k - 1) \\ x + (3k - 5)y + (3 - k)z = 1 \\ 3x + (4k - 5)y + 3z = k + 1 \end{cases}$$

ammette soluzione e si specifichi in quali di questi casi la soluzione non è unica.

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è la

$$B_k = \begin{pmatrix} 2 & k & k & 2k - 2 \\ 1 & 3k - 5 & 3 - k & 1 \\ 3 & 4k - 5 & 3 & k + 1 \end{pmatrix}.$$

Il rango delle matrici completa e incompleta non cambiano se sostituiamo alla terza riga la riga che si ottiene sottraendo da essa la seconda. Otteniamo così la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & k & k & 2k - 2 \\ 1 & 3k - 5 & 3 - k & 1 \\ 2 & k & k & k \end{pmatrix}.$$

La prima e la terza riga della matrice incompleta sono uguali e non nulle per ogni valore di k . Quindi, perché il sistema ammetta soluzione, è necessario che

$$2k - 2 = k, \quad \text{cioè} \quad k = 2.$$

Per $k = 2$ il sistema è

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 2, \\ x + y + z = 1, \\ 3x + 3y + 3z = 3. \end{cases}$$

In questo caso il rango della matrice completa ed incompleta sono entrambi uguali ad uno. In conclusione, il sistema ammette ∞^2 soluzioni per $k = 2$ e non è risolubile se $k \neq 2$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se ne trovino gli autovalori e, dopo averne calcolato la molteplicità geometrica ed algebrica, se ne determini la forma di Jordan.

Soluzione. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A .

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -4 \\ -4 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -4 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \lambda & -4 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2(\lambda^2 - 4) - 4(\lambda^2 - 4) = (\lambda^2 - 4)^2 = (\lambda - 2)^2(\lambda + 2)^2. \end{aligned}$$

Quindi A ha autovalori $2, -2$, ciascuno con molteplicità algebrica due. È poi

$$2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La terza riga è un multiplo della prima e la seconda un multiplo della quarta. Poiché la prima e la quarta riga sono linearmente indipendenti, la matrice $2I - A$ ha rango due. Quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è due. Abbiamo ancora

$$-2I - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso la terza riga è un multiplo della prima e la seconda un multiplo della quarta e, poiché la prima e la quarta riga sono linearmente indipendenti, la matrice $-2I - A$ ha rango due. Quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore -2 è due.

Poiché molteplicità algebriche e geometriche coincidono, la matrice A è diagonalizzabile e la sua forma di Jordan coincide con la forma diagonale

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Si determinino i valori del parametro reale k per cui la quadrica affine Q_k , d'equazione

$$kx^2 + ky^2 + kz^2 - (k+2)xy - 4kxz - (k+2)x = 0,$$

non degenera, e se ne determini il tipo.

Soluzione. Scriviamo la matrice completa della quadrica utilizzando coordinate $z, y, x, 1$. La matrice associata è

$$B = \begin{pmatrix} k & 0 & -2k & 0 \\ 0 & k & -\frac{k+2}{2} & 0 \\ -2k & -\frac{k+2}{2} & k & -\frac{k+2}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{k+2}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

I determinanti dei minori principali sono

$$\begin{cases} \Delta_1 = k, \\ \Delta_2 = k^2, \\ \Delta_3 = -k(3 + [\frac{k+2}{2}]^2), \\ \Delta_4 = -k^2[\frac{k+2}{2}]^2. \end{cases}$$

La quadrica Q_k è non degenera se $k \neq -2, 0$. Abbiamo allora

$$\begin{cases} \Delta_1/1 = k, \\ \Delta_2/\Delta_1 = k, \\ \Delta_3/\Delta_2 = -\frac{1}{k} \cdot (3 + [\frac{k+2}{2}]^2), \\ \Delta_4/\Delta_3 = k \cdot \frac{(k+2)^2}{12+(k+2)^2}, \end{cases}$$

I valori propri della matrice B hanno quindi segnatura

$$\begin{cases} - - + - & \text{se } k < -2 \Rightarrow \text{iperboloide a due falde;} \\ - - + - & \text{se } -2 < k < 0 \Rightarrow \text{iperboloide a due falde;} \\ + + - + & \text{se } k > 0 \Rightarrow \text{iperboloide a due falde;} \end{cases}$$

Quindi, in tutti i casi in cui è non degenera la Q_k è un iperboloide a due falde. Consideriamo ora i casi in cui la Q_k degenera.

È¹

$$Q_0 = \{-2xy - 2x = 0\} = \{x = 0\} \cup \{y = -1\}$$

unione di due piani incidenti;

$$Q_{-2} = \{x^2 + y^2 + z^2 + 4xz = 0\}$$

è un cono con vertice nell'origine. Osserviamo che la matrice della forma quadratica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¹La discussione dei casi degeneri non è richiesta nel testo dell'esercizio.

che definisce il cono ha autovalori $-1, 1, 3$. Una base ortonormale di autovettori corrispondenti è formata da

$$v_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il cono Q_{-2} ha vertice nell'origine ed asse parallelo a v_{-1} . Nelle nuove coordinate

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + z) \\ Y = y \\ Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - z) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Z) \\ y = Y \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Z) \end{cases}.$$

Sostituendo nell'equazione di Q_{-2} otteniamo

$$\frac{1}{2}(X + Z)^2 + Y^2 + \frac{1}{2}(X - Z)^2 + 2(X + Z)(X - Z) = 0,$$

cioè $Z^2 = 3X^2 + Y^2$.