Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 7/5/18

1. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach con identità e $\mathscr{I} \subset \mathscr{A}$ un ideale proprio chiuso. Si verifichi:
   (a) $\|\mathbb{1} + \mathscr{I}\| \geq 1$;
   (b) se inoltre $\|\mathbb{1}\| = 1$, allora $\|\mathbb{1} + \mathscr{I}\| = 1$.
2. Sia $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach commutativa con unità $\mathbb{1}$. Si dimostri che per ogni $\omega \in \Omega(\mathscr{A})$ si ha $\|\omega\| \leq 1$, e che se $\|\mathbb{1}\| = 1$ allora $\|\omega\| = 1 = \omega(\mathbb{1})$ (sugg.: se $\mathscr{I} = \ker\omega$, $|\omega(a)| \leq \|\omega(a)\mathbb{1} + \mathscr{I}\| = \|a + \mathscr{I}\|$).
3. Siano $\mathscr{A}$ un'algebra di Banach, e $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ una *-sottoalgebra. Posto $\mathscr{B}_{\text{aa}} := \{b \in \mathscr{B} : b = b^*\}$, si verifichi che $\overline{\mathscr{B}} = \overline{\mathscr{B}_{\text{aa}}} + i\overline{\mathscr{B}_{\text{aa}}}$.
4. Mostrare che:
   (a) i polinomi trigonometrici
   $$\Big\{\theta \in [0, 2\pi] \mapsto \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ik\theta} \,:\, c_k \in \mathbb{C},\, n \in \mathbb{N}\Big\}$$
   sono densi in $C_p([0, 2\pi]) := \{f \in C([0, 2\pi]) : f(0) = f(2\pi)\}$ (sugg.: $C_p([0, 2\pi]) \simeq C(\mathbb{T})$);
   (b) posto $e_n(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ è una base ortonormale di $L^2([0, 2\pi])$;
   (c) la serie di Fourier di una $f \in L^2([0, 2\pi])$ converge a f in $L^2([0, 2\pi])$.
5. Mostrare che:
   (a) i polinomi sono densi in $C([a, b])$ (teorema di Weierstrass);
   (b) i polinomi di Legendre $(P_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$, ottenuti tramite il procedimento di Gram-Schmidt in $L^2([-1, 1])$ a partire dalle funzioni $x \mapsto x^\ell$, sono una base ortonormale in $L^2([-1, 1])$;
   (c) si ha
   $$P_\ell(x) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{2}}\, \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2 - 1)^\ell, \qquad x \in [-1, 1],\, \ell \in \mathbb{N}.$$