

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 18/4/18

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Mostrare che, se $x \in H$ e $(e_\alpha)_{\alpha \in I} \subset H$ è un sistema ortonormale, l'insieme $\{\alpha \in I : \langle e_\alpha, x \rangle \neq 0\}$ è al più numerabile. (Sugg.: si ha $\#\{\alpha \in I : |\langle e_\alpha, x \rangle| \geq 1/n\} \leq n^2 \sum_{\alpha \in I} |\langle e_\alpha, x \rangle|^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.)
- *2. Dimostrare che una base ortonormale di uno spazio di Hilbert H infinito-dimensionale non è una base di Hamel, e che una base di Hamel di H ha cardinalità più che numerabile.
3. Siano H uno spazio di Hilbert, e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ una successione di vettori linearmente indipendenti. Definita una successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tramite il *procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt*:

$$f_1 := x_1, \quad f_2 := x_2 - \frac{\langle x_2, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1, \quad f_3 := x_3 - \frac{\langle x_3, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 - \frac{\langle x_3, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} f_2, \quad \dots$$

dimostrare che i vettori $e_n := f_n / \|f_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, sono un sistema ortonormale in H tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

4. Verificare che se $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una base ortonormale di uno spazio di Hilbert H , allora l'insieme

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k : \alpha_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, k = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

è numerabile e denso in H .

- *5. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $e^{\delta|x|} f \in L^1(\mathbb{R})$ per qualche $\delta > 0$. Mostrare allora che per la trasformata di Fourier

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ipx} dx, \quad p \in \mathbb{R}$$

si estende a una funzione analitica nella striscia $\{p + iq \in \mathbb{C} : |q| < \delta\}$ e che si ha lo sviluppo di MacLaurin (convergente)

$$\hat{f}(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-ip)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(x) x^n dx, \quad |p| < \delta$$

(sugg.: si può definire $\hat{f}(p+iq) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i(p+iq)x} dx$ per $|q| < \delta$, si possono dimostrare le identità di Cauchy-Riemann per \hat{f} tramite l'esercizio 6 del 9/4/18 e si può scambiare l'integrale con lo sviluppo in serie di e^{-ipx} per l'esercizio 5 del 9/4/18).

6. Le *funzioni di Hermite* $\psi_n \in L^2(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, sono definite applicando il procedimento di Gram-Schmidt alle funzioni $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n e^{-x^2/2}$ e pertanto hanno la forma $\psi_n(x) = H_n(x) e^{-x^2/2}$, con gli H_n polinomi di grado n , detti *polinomi di Hermite*. Dimostrare:

- (a) $\{x^n e^{-x^2/2} : n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$ (sugg.: se $\psi \in \{x^n e^{-x^2/2} : n \in \mathbb{N}\}^\perp$, applicare l'esercizio 5 a $f = \psi e^{-x^2/2}$);
- (b) $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una base ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$;

(c) vale la *formula di Rodrigues*:

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!} \pi^{1/4}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

(sugg.: basta verificare, integrando per parti, che se H_n è dato dalla formula di sopra, allora $\langle x^k e^{-x^2/2}, H_n e^{-x^2/2} \rangle = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, e $\|H_n e^{-x^2/2}\|_2 = 1$);

(d) si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right) \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right) \psi_n = \begin{cases} \sqrt{n} \psi_{n-1}, & n \geq 1, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$
$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right) \psi_n = (2n+1) \psi_n.$$

7. Dimostrare che applicando il procedimento di Gram-Schmidt in $L^2([0, +\infty))$ alle funzioni $x \mapsto x^n e^{-x}$ si ottengono funzioni $x \mapsto L_n(x) e^{-x}$, con gli L_n polinomi di grado n detti *polinomi di Laguerre*, che formano una base ortonormale in $L^2([0, +\infty))$.