

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 4/4/18

Nei seguenti esercizi (X, \mathfrak{M}, μ) denota un generico spazio di misura.

1. Siano $f, g : X \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ misurabili tali che $f \leq g$ q.o. Verificare che $\int_X f \leq \int_X g$.
2. Sia $f : X \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ tale che $\int_X |f| < +\infty$. Verificare che f è finita quasi ovunque.
3. Siano $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervallo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Mostrare che esiste una successione $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di decomposizioni di I tale che $\delta_{k+1} \geq \delta_k$, $\|\delta_k\| := \max_{Q \in \delta_k} \{\text{diam } Q\} \rightarrow 0$, e

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma_f(\delta_k) = \sup_{\delta} \sigma_f(\delta), \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \Sigma_f(\delta_k) = \inf_{\delta} \Sigma_f(\delta).$$

(Sugg.: se $\delta' \geq \delta$, si ha $\sigma_f(\delta') \geq \sigma_f(\delta)$, $\Sigma_f(\delta') \leq \Sigma_f(\delta)$.)

4. Verificare che se $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Peano-Jordan (cioè $\sup\{m(P) : P \text{ plurintervallo, } P \subset E\} = \inf\{m(P) : P \text{ plurintervallo, } P \supset E\}$) allora è misurabile secondo Lebesgue.
5. Mostrare che la misura di Lebesgue m su \mathbb{R}^n è completa, cioè che se $N \in \mathfrak{M}(m)$ ha misura nulla e $E \subset N$, allora $E \in \mathfrak{M}(m)$.
6. Siano μ una misura completa, g una funzione misurabile su X (a valori in uno spazio topologico Y) e $f : X \rightarrow Y$ una funzione uguale a g quasi ovunque. Mostrare che allora f è misurabile.