Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 13/3/18

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Sia $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, con $\mathbb{C}^n$ dotato della norma euclidea, e si indichi con $\sigma(T)$ lo spettro di T. Dimostrare:
   (a) se $T = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ è diagonale, allora $\|T\| = \max_j |\lambda_j|$;
   (b) se T è hermitiana ($T^* = T$), allora $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ (sugg.: se T è hermitiana, $T = UDU^*$ con D diagonale e $U^*U = UU^* = 1$);
   (c) per T generica, $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma(T^*T)} |\lambda|^{1/2}$.
2. Sia (X, d) metrico. Verificare che $|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$ per ogni $x, y, z \in X$.

*3. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare:
   (a) se $(\bar{X}, \bar{d})$ e $j : X \to \bar{X}$ sono il completamento di (X, d) e l'immersione isometrica definiti a lezione, e se $(\tilde{X}, \tilde{d})$ è uno spazio metrico completo e $k : X \to \tilde{X}$ è un'isometria con $k(X)$ denso in $\tilde{X}$, esiste un'isometria suriettiva $\phi : \bar{X} \to \tilde{X}$ tale che $\phi(j(x)) = k(x)$ per ogni $x \in X$ (*unicità del completamento*) (sugg.: si definisca prima $\phi : j(X) \to k(X)$ ponendo $\phi(j(x)) := k(x)$, allora ϕ è isometrica, poi $j(X)$ è denso in $\bar{X}$ e quindi...);
   (b) sia $(X, \|\cdot\|)$ normato, e sul suo completamento $(\bar{X}, \bar{d})$ (considerando X come spazio metrico con la metrica indotta dalla norma), si ponga

$$\begin{aligned} \bar{x} + \bar{y} &:= \lim_{n\to+\infty} j(x_n + y_n), \\ \alpha\bar{x} &:= \lim_{n\to+\infty} j(\alpha x_n), \qquad\qquad \alpha \in \mathbb{C}, \bar{x}, \bar{y} \in \bar{X}; \\ \|\bar{x}\|^- &:= \lim_{n\to+\infty} \|x_n\|, \end{aligned}$$

   dove $(x_n), (y_n) \subset X$ sono tali che $j(x_n) \to \bar{x}$, $j(y_n) \to \bar{y}$; allora le operazioni di spazio vettoriale e la norma su $\bar{X}$ sono ben defnite, $j : X \to \bar{X}$ è lineare, e $(\bar{X}, \|\cdot\|^-)$ è uno spazio di Banach la cui norma $\|\cdot\|^-$ è indotta da $\bar{d}$.

4. Siano (X, d) uno spazio metrico, e $x \in X$. Verificare che le famiglie di insiemi

$$\mathscr{B}_x^1 := \{B_\delta(x) \,:\, \delta > 0\}, \quad \mathscr{B}_x^2 := \{\bar{B}_\delta(x) \,:\, \delta > 0\}, \quad \mathscr{B}_x^3 := \{B_{\delta_n}(x) \,:\, n \in \mathbb{N}\} \ (\delta_n \to 0),$$

   sono basi di intorni di x.

5. Verificare che la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$\tau_\iota := \{(a, +\infty) \,:\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

   definisce una topologia su $\mathbb{R}$ che non è di Hausdorff.