

Corso di Fondamenti di Analisi Matematica

a.a. 2017-18

G. Morsella

Esercizi del 6/3/18

1. Su $X := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, la palla unitaria in \mathbb{R}^2 , si definisca

$$d(x, y) := \begin{cases} |x - y| & \text{se } x \text{ e } y \text{ sono allineati con l'origine,} \\ |x| + |y| & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad x, y \in X$$

($|\cdot|$ norma euclidea in \mathbb{R}^2). Dimostrare che (X, d) è uno spazio metrico.

2. Verificare che ogni successione convergente in uno spazio metrico è di Cauchy.
3. Si definisca $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ tramite $d(x, y) = |e^x - e^y|$, e si verifichi:
- (a) d è una metrica su \mathbb{R} ;
 - (b) la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ definita da $x_n = -n$ è di Cauchy ma non è convergente rispetto alla metrica d .
4. Verificare che $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$, $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$ sono spazi normati.