Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2016-17

G. Morsella

Esercizi del 23/5/17

1. Siano $\mathscr{A}$ una C*-algebra, $\mathscr{S} \subset \mathscr{A}$ un sottoinsieme, e
$$C^*(\mathscr{S}) := \bigcap \{\mathscr{B} \subset \mathscr{A} \text{ C*-sottoalgebra contenente } \mathscr{S}\}.$$
la C*-sottoalgebra di $\mathscr{A}$ generata da $\mathscr{S}$. Si verifichi che, usando la notazione $a^\sharp = a$ o a^*,
$$C^*(\mathscr{S}) = \overline{\langle a_1^\sharp \dots a_n^\sharp \,:\, a_i \in \mathscr{S}, i = 1, \dots, n,\, n \in \mathbb{N}\rangle}.$$

2. Siano $H = \ell^2(\mathbb{Z})$ e $U \in B(H)$ l'operatore definito da $Ue_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, con $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la base ortonormale canonica. Si mostri:
   (a) esiste un operatore unitario $V : L^2([0, 2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ tale che $U = VM_gV^*$, con $M_g \in B(L^2([0, 2\pi])$ l'operatore di moltiplicazione per la funzione $g(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$;
   (b) U è unitario e $\sigma(U) = \mathbb{T}$;
   (c) se $\mathscr{B} := \overline{\langle \mathbb{1}, U, U^2, \dots \rangle}$ è la sottoalgebra di Banach con unità di $B(H)$ generata da U, si ha $0 \in \sigma_{\mathscr{B}}(U)$ (sugg: se $p \in \mathscr{B}$ è un polinomio, $\langle U^*e_n, pe_n\rangle = 0$, da cui $\|U^* - p\| \geq 1$).

3. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ tale che esista $\rho : C(\sigma(A)) \to M_n(\mathbb{C})$ *-omomorfismo iniettivo unitale tale che $\rho(\iota) = A$, $\iota(\lambda) = \lambda$. Mostrare:
   (a) $P_\lambda := \rho(\chi_{\{\lambda\}})$, $\lambda \in \sigma(A)$, è un proiettore, e si ha $P_\lambda P_\mu = 0$ se $\lambda \neq \mu$;
   (b) vale
   $$\rho(f) = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} f(\lambda)P_\lambda, \qquad f \in C(\sigma(A)),$$
   da cui in particolare $\mathbb{1} = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} P_\lambda$, $A = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda P_\lambda$;
   (c) P_λ è il proiettore sull'autospazio di A associato all'autovalore $\lambda \in \sigma(A)$;
   (d) A è diagonalizzabile tramite matrici unitarie.