Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2016-17

G. Morsella

Esercizi del 4/4/17

1. Mostrare che la misura di Lebesgue-Stieltjes associata alla funzione non decrescente e continua a destra $F = \chi_{[x,+\infty)}$ è la misura di Dirac concentrata in $x \in \mathbb{R}$.

2. Verificare che ogni aperto di $\tilde{\mathbb{R}}$ è unione numerabile di intervalli della forma (a, b), $(a, +\infty]$, $[-\infty, b)$, con $a, b \in \mathbb{Q}$.

3. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione, e si definiscano

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} a_n, \qquad \liminf_{n\to+\infty} a_n := \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} a_n.$$

   Si dimostri:

   (a) posto $\alpha_n := \inf_{k\geq n} a_k$, $\beta_n := \sup_{k\geq n} a_k$, le successioni $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono rispettivamente crescente e decrescente;

   (b) $\liminf_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} a_k$, $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} a_k$;

   (c) $\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$;

   (d) $\liminf_{n\to+\infty} a_n = l'$ (risp. $\limsup_{n\to+\infty} a_n = l''$) se e solo se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \begin{cases} \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow & a_n > l' - \varepsilon \text{ (risp. } a_n < l'' + \varepsilon), \\ \forall \bar{n} \in \mathbb{N} \;\; \exists\, n \geq \bar{n} \,: & a_n < l' + \varepsilon \text{ (risp. } a_n > l'' - \varepsilon); \end{cases}$$

   (e) $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l$ se e solo se $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n = l$.

4. Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura, Y un insieme e $f : X \to Y$ una funzione. Verificare che

$$\mathfrak{N} := \{E \subset Y \,:\, f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}\}$$

   è una σ-algebra in Y.