Corso di Fondamenti di Analisi Matematica
a.a. 2016-17

G. Morsella

Esercizi del 15/3/17

Gli esercizi contrassegnati da un asterisco (*) sono piuttosto impegnativi.

1. Sia (X, d) metrico. Verificare che $|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$ per ogni $x, y, z \in X$.

*2 Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare:

   (a) se $(\bar{X}, \bar{d})$ e $j : X \to \bar{X}$ sono il completamento di (X, d) e l'immersione isometrica definiti a lezione, e se $(\tilde{X}, \tilde{d})$ è uno spazio metrico completo e $k : X \to \tilde{X}$ è un'isometria con $k(X)$ denso in $\tilde{X}$, esiste un'isometria suriettiva $\phi : \bar{X} \to \tilde{X}$ tale che $\phi(j(x)) = k(x)$ per ogni $x \in X$ (*unicità del completamento*) (sugg.: si definisca prima $\phi : j(X) \to k(X)$ ponendo $\phi(j(x)) := k(x)$, allora ϕ è isometrica, poi $j(X)$ è denso in $\bar{X}$ e quindi...);

   (b) sia $(X, \|\cdot\|)$ normato, e sul suo completamento $(\bar{X}, \bar{d})$ (considerando X come spazio metrico con la metrica indotta dalla norma), si ponga

$$\begin{aligned} \bar{x} + \bar{y} &:= \lim_{n\to+\infty} j(x_n + y_n), \\ \alpha\bar{x} &:= \lim_{n\to+\infty} j(\alpha x_n), \qquad\qquad \alpha \in \mathbb{C}, \bar{x}, \bar{y} \in \bar{X}; \\ \|\bar{x}\|^- &:= \lim_{n\to+\infty} \|x_n\|, \end{aligned}$$

   dove $(x_n), (y_n) \subset X$ sono tali che $j(x_n) \to \bar{x}$, $j(y_n) \to \bar{y}$; allora le operazioni di spazio vettoriale e la norma su $\bar{X}$ sono ben defnite, $j : X \to \bar{X}$ è lineare, e $(\bar{X}, \|\cdot\|^-)$ è uno spazio di Banach la cui norma $\|\cdot\|^-$ è indotta da $\bar{d}$.

3. Siano $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo, e Δ l'insieme delle decomposizioni di $[a, b]$:

$$\delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   Si definisca su Δ una relazione $\leq$ dicendo che $\delta_1 \leq \delta_2$ se $\delta_1 \subset \delta_2$ (cioè δ_2 è ottenuta da δ_1 aggiungendo dei punti). Data inoltre $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, si ponga

$$\sigma_\delta := \sum_{k=1}^{n} \Big(\inf_{[x_{k-1},x_k]} f\Big)(x_k - x_{k-1}), \qquad \Sigma_\delta := \sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f\Big)(x_k - x_{k-1}).$$

   Dimostrare che:

   (a) $(\Delta, \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato diretto;

   (b) il net $(\sigma_\delta)_{\delta\in\Delta} \subset \mathbb{R}$ (risp. $(\Sigma_\delta)_{\delta\in\Delta}$) è non decrescente (risp. non crescente), cioè se $\delta_1 \leq \delta_2$ allora $\sigma_{\delta_1} \leq \sigma_{\delta_2}$ (risp. $\Sigma_{\delta_1} \geq \Sigma_{\delta_2}$);

   (c) f è integrabile secondo Riemann se e solo se $\lim_\delta \sigma_\delta = \lim_\delta \Sigma_\delta = \int_a^b f$ nel senso dei net in $\mathbb{R}$ (con la metrica usuale). (Sugg.: f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che $\Sigma_\delta - \sigma_\delta < \varepsilon$.)